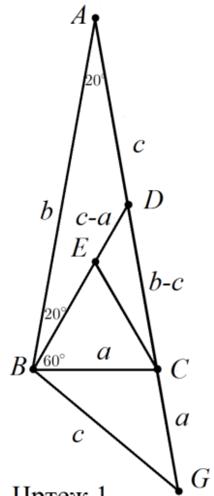
Драгољуб Милошевиќ,
Горњи Милановац, Србија

ЕДНА ЗАДАЧА, ПОВЕЌЕ НАЧИНИ ЗА РЕШАВАЊЕ

Наоѓањето на повеќе различни или слични решенија на една задача е од особена важност, бидејќи тоа те оспособува да размислуваш алтернативно. Во оваа статија ќе разгледаме задача, за која ќе презентираме четири различни начини за нејзино решавање.

Задача. Во рамнокрак триаголник ABC важи $\angle BAC = \angle ABD = 20^\circ$, $AB = AC$ и $D \in AC$. Докажи го равенството

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{BC} - \frac{1}{AB}.$$



Цртеж 1

Решение. Прв начин. Да ги воведеме следниве ознаки:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = b,\ \overline{BC} = a \text{ и } \overline{BD} = c.$$

Тогаш даденото равенство го добива обликот

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Ако двете страни на последното равенство ги помножиме со abc добиваме

$$ab = bc - ac. \qquad (*)$$

Во рамнокракиот триаголник ABC је важи

$$\angle ABC = \angle ACB = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ.$$

Триаголникот ABD исто така е рамнокрак, па е

$$\overline{AD} = \overline{BD} = c \text{ и } \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = b - c.$$

На отсечката BD да определиме точка E таква да важи $\overline{BE} = \overline{BC} = a$ (цртеж 1). Триаголникот BCE е рамностран, бидејќи

$$\overline{BE} = \overline{BC} \text{ и } \angle CBE = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$

Во ΔCDE важи

$$\angle DCE = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ,\ \angle CED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\angle CDE = 180^\circ - (120^\circ + 20^\circ) = 40^\circ \text{ и } DE = BD - BE = c - a.$$

Да ја продолжиме страната AC до тачка G така да $\overline{CG} = \overline{BC} = a$. Триаголникот BCG е рамнокрак, што значи дека

$$\angle CBG = \angle BGC = \tfrac{1}{2}\angle BCA = 40^\circ.$$

Но, $\angle BDC = 40^\circ$ и оттука заклучуваме дека ΔBDG е рамнокрак. Затоа $\overline{BG} = \overline{BD} = c$. Триаголниците ABG и CDE имаат еднакви агли, па затоа се слични. Од сличноста следува

$$\overline{AB} : \overline{BG} = \overline{CE} : \overline{DE}, \text{ т.е. } b : c = a : (c - a).$$

Одовде добиваме

$$b(c-a) = ac$$

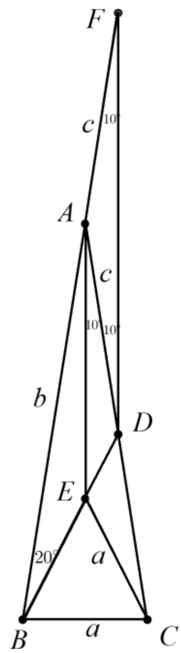
или

$$bc - ab = ac,$$

односно

$$bc - ac = ab,$$

што значи дека важи $(*)$.



Цртеж 2

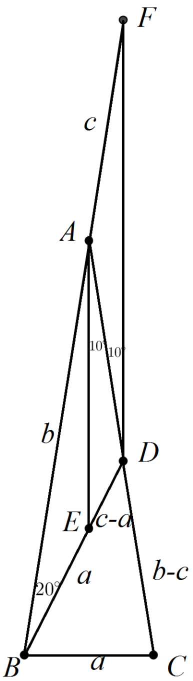
Втор начин. Тачку E одредимо као у претходното решение, а потоа да ја продолжиме страната BA до тачка F така да важи $\overline{AF} = \overline{AD} = c$ (цртеж 2). Триаголникот ADF е рамнокрак, па затоа важи

$$\angle AFD = \angle ADF = \tfrac{1}{2}\angle BAC = 10^\circ.$$

Триаголниците AEC и BDF се слични, бидејќи имаат еднакви агли. Затоа

$$\overline{CE} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BF}, \text{ т.е. } a : c = b : (b + c).$$

Од последното равенство, после скратувањето го добиваме бараното равенство $(*)$.



Цртеж 3

Трет начин. Точките E и F да ги опредеелиме како во второто решение (цртеж 3). Бидејќи

$$\angle ADF = \angle DAE = 10^\circ,$$

добиваме дека $AE \parallel FD$. Со примена на Талесовата теорема наоѓаме

$$\overline{DE} : \overline{FA} = \overline{EB} : \overline{AB}, \text{ т.е. } (c-a) : c = a : b.$$

Конечно, од последното равенство лесно следува равенството $(*)$.

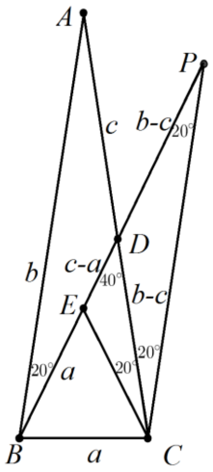
Четврт начин. Прво како во првото решение ја определуваме точката E, а потоа ја продолжуваме отсечката BD до тачка P така да

$$\overline{DP} = \overline{DC} = b - c,$$

цртеж 4. Тогаш важи

$$\angle CPD = \angle DCP = \tfrac{1}{2}\angle BDC = 20^\circ.$$

Триаголниците CDE и CPE се слични, па затоа



Цртеж 4

$$\overline{CE} : \overline{DE} = \overline{EP} : \overline{CE},$$

односно

$$a : (c-a) = (b-a) : a.$$

Оттука

$$a^2 = (b-a)(c-a),$$

или

$$0 = bc - ab - ac,$$

т.е.

$$ab = bc - ac.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ