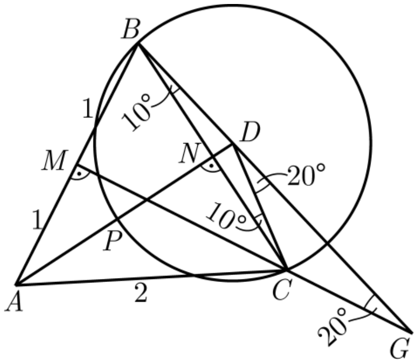
Јенс Карстенсен, Алија Муминагиќ

ГЕОМЕТРИСКИ ДОКАЗИ НА НЕКОИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РАВЕНСТВА

Во овој прилог ќе дадеме неколку навистина интересни (дури и изненадувачки) геометриски докази на некои тригонометриски равенства.

Пример 1. Докажи дека $\operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg}40^\circ + \operatorname{tg}60^\circ = \operatorname{tg}70^\circ$.

Решение. Да конструираме рамностран триаголник ABC со страна со должина 2. Нека M и N се средини на страните AB и AC, соодветно. Над страната BC конструираме рамнокрак триаголник BCD со агли на основата од 10° и да ја продолжиме BD од страната на D до пресекот со MC. Пресечната точка да ја означиме со G (црт. 1). Потоа, да конструираме кружница k со центар D и радиус $\overline{BD}$ и нека $k \cap AD = \{P\}$. Тогаш $\sphericalangle MBG = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$ и $\overline{MB} = 1$, па



црт.1

$$\overline{MG} = \operatorname{tg}70^\circ = \overline{MC} + \overline{CG} = \operatorname{tg}60^\circ + \overline{CG}.$$

Освен тоа $\sphericalangle CDG = 20^\circ$ и $\sphericalangle DCG = 140^\circ$, па $\sphericalangle DGC = 20^\circ$. Тоа значи дека триаголникот DCG е рамнокрак и $\overline{DC} = \overline{CG}$. Натаму, $\overline{DC} = \overline{DP} = \overline{DN} + \overline{NP}$. Заради $\overline{BN} = 1$ и $\sphericalangle DBN = 10^\circ$ следува $\overline{DN} = \operatorname{tg}10^\circ$.

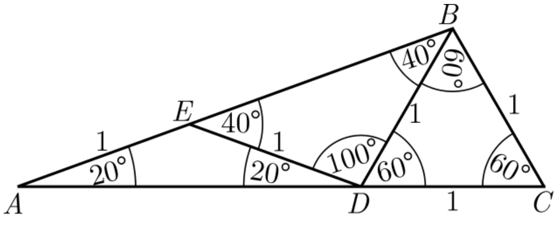
Од $\sphericalangle PDC = 80^\circ$ добиваме $\sphericalangle NBP = \frac{1}{2}\sphericalangle PDC = 40^\circ$. Затоа $\overline{NP} = \operatorname{tg}40^\circ$. Конечно добиваме

$$\operatorname{tg}70^\circ = \overline{MG} = \operatorname{tg}60^\circ + \overline{CG} = \operatorname{tg}60^\circ + \overline{DN} + \overline{NP} = \operatorname{tg}60^\circ + \operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg}40^\circ. \blacksquare$$

Пример 2. Докажи дека

$$\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Решение. Да го разгледаме триаголникот ABC со агли $\sphericalangle A = 20^\circ$, $\sphericalangle B = 100^\circ$ и $\sphericalangle C = 60^\circ$ и $\overline{BC} = 1$ (цртеж 2).



црт.2

Нека точките D и E лежат на страните AC и AB, соодветно, така што $\overline{DC}=\overline{ED}=\overline{BC}=\overline{BD}=1$ и $\overline{AE}=1$. Сега имаме

$$\begin{aligned}\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}=1+2\cos 40^\circ &= 2\left(\frac{1}{2}+\cos 40^\circ\right)=2\left(\cos 60^\circ+\cos 40^\circ\right)\\ &=2\cdot 2\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 10^\circ=4\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ.\end{aligned}\qquad(1)$$

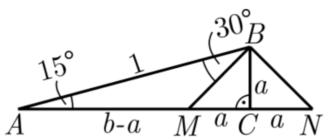
Со примена на синусната теорема на триаголникот ABC добиваме $\frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\sin 20^\circ}$, од што следува

$$\overline{AB}=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ}.\qquad(2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\begin{aligned}4\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ} &\Leftrightarrow 4\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\sin 60^\circ\\ &\Leftrightarrow 4\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}.\blacksquare\end{aligned}$$

Пример 3. Докажи дека $\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=\sqrt{3}$.



црт.3

Решение. Да го разгледаме правоаголниот триаголник ABC со $\measuredangle A=15^\circ$ и $\measuredangle C=90^\circ$ и $\overline{AB}=1$ (цртеж 3). Тогаш $a=\overline{BC}=\sin 15^\circ$ и $b=\overline{AC}=\cos 15^\circ$. На AC и на нејзиното продолжение да земеме две точки M и N така што $\overline{CM}=\overline{CN}=a$. Сега, $\overline{AN}=a+b$ и $\overline{AM}=b-a$. Лесно се добива дека $\measuredangle ABM=30^\circ$. Со примена на синусната теорема на триаголниците ABM и ABN добиваме $\frac{\overline{BM}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ}$ и $\frac{\overline{BN}}{\sin 15^\circ}=\frac{\overline{AN}}{\sin 120^\circ}$, па заради $\overline{BM}=\overline{BN}$ следува

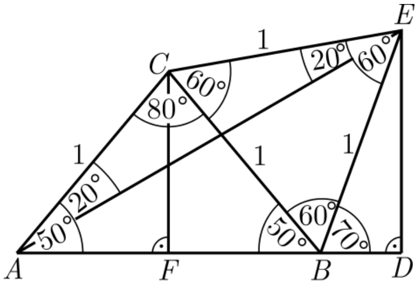
$$\frac{\overline{AM}}{\sin 30^\circ}=\frac{\overline{AN}}{\sin 120^\circ}\Leftrightarrow\frac{b-a}{\sin 30^\circ}=\frac{b+a}{\sin 120^\circ}\Leftrightarrow\frac{b+a}{b-a}=\frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-\sin 15^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=3.\blacksquare$$

Пример 4. Докажи дека $\operatorname{tg}30^\circ = \dfrac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + \cos 70^\circ}$.

Решение. Да го разгледаме рамнокракиот триаголник ABC во кој $\overline{CA} = \overline{CB} = 1$ и $\measuredangle CAB = \measuredangle ABC = 50^\circ$.

Над страната BC да го конструираме рамностраниот триаголник BCE. Тогаш $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{EB} = 1$ и $\measuredangle BCE = \measuredangle CEB = \measuredangle EBC = 60^\circ$. Нека точката D е подножјето на нормалата повлечена од E на AB и нека $\overline{CF}$ е висината на триаголникот ABC (цртеж 4). Лесно се докажува дека



црт.4

$\measuredangle CAE = \measuredangle AEC = 20^\circ$, $\measuredangle EBD = 70^\circ$ и $\measuredangle EAD = 30^\circ$. Натаму имаме

$$\cos 50^\circ = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}, \text{ т.е. } \overline{AF} = \cos 50^\circ = \overline{FB}, \ \sin 70^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}},$$

т.е. $\overline{ED} = \sin 70^\circ$, $\overline{BD} = \cos 70^\circ$ и на крајот

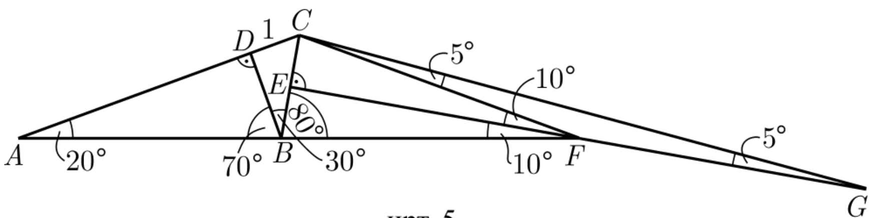
$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AF} + \overline{FB} + \overline{BD}} = \frac{\sin 70^\circ}{2\cos 50^\circ + 70^\circ}. \blacksquare$$

Пример 5. Докажи дека $\operatorname{tg}45^\circ + \operatorname{tg}60^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ + \operatorname{tg}80^\circ = \operatorname{tg}85^\circ$.

Решение. Од цртеж 5 гледаме дека

$$\overline{GE} = \overline{GF} + \overline{FE} = \overline{FC} + \overline{FE} = \overline{CA} + \overline{FE} = \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{FE}.$$

Од правоаголниот триаголник BCD имаме $\overline{BC} = 2\overline{CD} = 2 \cdot 1 = 2$ и $\overline{BD} = \sqrt{3}$, па следува дека $\overline{CE} = 1$. Натаму, од триаголникот ABD имаме $\operatorname{tg}70^\circ = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{AD}}{\sqrt{3}}$, од триаголникот CEF, $\operatorname{tg}80^\circ = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{EF}}{1} = \overline{EF}$, а од триаголникот CEG, $\operatorname{tg}85^\circ = \dfrac{\overline{EG}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{EG}}{1} = \overline{EG}$. Тогаш



црт. 5

$$\operatorname{tg} 85^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ ,$$

што требаше да се докаже. ■

Литература

[1] Opgavehjørnet 1983 – 1993, Jens Carstensten og matematiklærerforeningen 1993.

[2] J. Carstensen, A. Muminagić, TRIANGLE, vol. 1 (1997) No. 2, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 87 – 88.

Статијата прв пат е објавена во списанието Сигма на СММ