

## ПРОДУЖИ НИЗ II

Ратко Тошић, Нови Сад

У првом делу овог чланка било је речи о задацима који, по правилу, почињу речима „Продужи низ ...“. Такви задаци се свде на уочавање законитости, односно налажење правила по коме се ређају чланови низа. Како се за дате почетне чланове, низ може продужити на различите начине, овде се најчешће не ради о строгом доказу законитости, него о интуитивном приступу у налажењу довољно једноставног правила. При томе, имамо у виду да вештина да се наслути нека законитост није мање важна од способности математичког закључивања.

У овом чланку дајемо решења задатака за самостални рад, постављених у претходном броју Математичког листа, у чланку „Продужи низ I“. Поред тога, поставићемо и неке нове задатке у вези са интересантним низовима о којима је била реч у поменутом чланку.

### Решења задатака за самостални рад

1. Продужи низ за још три члана:

- |                          |                                |
|--------------------------|--------------------------------|
| а) 15, 20, 25, 30, ...   | ж) 20, 1, 18, 3, 16, 5, ...    |
| б) 99, 88, 77, 66, ...   | з) 91, 82, 73, 64, ...         |
| в) 1, 22, 333, 4444, ... | и) 132, 121, 110, 99, ...      |
| г) 1, 2, 1, 3, 1, 4, ... | ј) 2, 3, 5, 8, 12, 17, ...     |
| д) 1, 2, 4, 8, ...       | к) 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...      |
| ђ) 3, 6, 9, 12, ...      | л) 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, ... |
| е) 19, 17, 15, 13, ...   | љ) 2017, 2007, 1998, 1971, ... |

**Решење.** а) 35, 40, 45. Сваки следећи члан је за 5 већи од претходног.

б) 55, 44, 33. Сваки следећи члан је за 11 мањи од претходног.

в) 55555, 666666, 7777777.

г) 1, 5, 1.

д) 16, 32, 64. Сваки следећи члан добија се множењем претходног са 2. (Низ степена двојке, почев од  $2^4 = 16$ .)

ђ) 15, 18, 21. Сваки следећи члан је за 3 већи од претходног.

е) 11, 9, 7. Сваки следећи члан је за 2 мањи од претходног.

ж) 14, 7, 12.

з) 55, 46, 37. Сваки следећи члан је за 9 мањи од претходног. (Или: опадајући низ природних бројева, почев од 91 са збиром цифара 10.)

и) 88, 77, 66. Сваки следећи члан је за 11 мањи од претходног.

ј) 23, 30, 38. Низ разлика суседних чланова је: 1, 2, 3, 4, 5, ...

к) 21, 34, 55. Сваки члан, почев од трећег, једнак је збиру два претходна.

л) 68, 125, 230. Сваки члан, почев од четвртог, једнак је збиру три претходна.

љ) 1953, 1935, 1917. Сваки следећи члан добија се када се од претходног одузме збир његових цифара.

2. Продужи низ

5, 14, 19, 23, 28, 32, ...

**Решење.** 37, 41, 46, ... Растући низ свих природних бројева код којих је збир цифара дељив са 5.

3. Продужи низ са још три члана:

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| а) 17, 27, 47, 87, 167, ...  | г) 2, 4, 8, 16, 23, 37, ...                     |
| б) 3, 6, 11, 20, 37, ...     | д) 1, 3, 6, 12, 25, 51, 102, 204, 409, 819, ... |
| в) 21, 42, 83, 164, 325, ... |   |

**Решење.** а) Посматрајмо низ

1, 2, 4, 8, 16, ...

чији је први члан 1, а сваки следећи се добија множењем претходног са 2 (низ степена двојке). Из овог низа се дати низ добија тако што се сваком члану допише цифра 7. Дакле, следећа три члана низа су 327, 647, 1287.

б) 70, 135, 264. Степенима двојке додат редни број члана, тј. низ

$2 + 1, 4 + 2, 8 + 3, 16 + 4, \dots$

в) 646, 1287, 2568. Степенима двојке дописани њихови редни бројеви.

г) 74, 139, 269. Степенима двојке додати збирови њихових цифара.

д) 1638, 3276, 6553. Степени двојке без последњих цифара (почев од  $2^4 = 16$ ).

4. Продужи низ

2, 8, 4, 2, 8, 6, ...

**Решење.** 8, 4, 4, ... Чланови низа су претпоследње цифре степена тројке, почев од  $3^3 = 27$ .

5. Напиши следећа два члана низа

49, 58, 67, 76, 85, 94, ...

**Решење.** Наводимо два решења:

а) Растући низ бројева код којих је збир цифара једнак 13, а први члан 49:

49, 58, 67, 76, 85, 94, 139, 148, ...

б) Низ бројева са првим чланом 49, а сваки следећи је за 9 већи од претходног:

49, 58, 67, 76, 85, 94, 103, 112, ...

6. Уочи законитост по којој је формиран низ:

а) 3, 6, 12, 14, 18, 26, 32, ...

б) 20, 22, 24, 28, 36, 42, 46, ...

в) 49, 53, 58, 63, 69, 75, ...

и напиши неколико следећих чланова тог низа.

**Решење.** а) 34, 38, 46, ... Сваки члан, почев од другог, добија се тако што се претходни сабере са својом последњом цифром.

б) 52, 57, 64, ... Сваки члан, почев од другог, добија се тако што се претходни сабере са својом највећом цифром.

в) 82, 90, 99, 108, 108, ... Сваки члан, почев од другог, добија се тако што се претходни сабере са својом цифром десетица.

7. Продужи низ

2017, 20, 4, 8, ...

**Решење.** 16, 14, 10, ... Сваки следећи члан једнак је двоструком збиру цифара претходног.

У следећем задатку, чланови низа су цифре, па их нећемо раздвајати запетом.

8. Продужи низ цифара:

а) 236884286884...

б) 2361868484832...

**Решење.** а) Прва цифра је 2, друга је 3, а свака следећа је последња цифра производа две претходне. Тако добијамо низ

236884286884286884...

б) Низ цифара добија се на следећи начин: Прва цифра је 2, друга 3, затим се иза њих испишује број који је производ прве и друге цифре, тј. 6, четврта и пета цифра су редом

1 и 8, јер је 18 производ друге и треће цифре ( $3 \cdot 6 = 18$ ), шеста цифра је 6 (производ треће и четврте), седма – 8 (производ четврте и пете), осма и девета су редом 4 и 8 (јер је производ пете и шесте цифре  $8 \cdot 6 = 48$ ), итд. На овај начин добија се низ  
2361868484832323224...

9. Уочи законитост по којој је формиран низ

1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, ...

и напиши следећих пет чланова низа.

**Решење.** Сваки број описује колико у претходном има јединица, двојки, тројки, ... На пример, пети члан је 3112, а шести показује да у петом имамо две јединице (што записујемо са 21), једна двојка (12) и једна тројка (13); дакле, шести члан је 211213.

10. Низови:

1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

2, 4, 7, 13, 16, 13, ...

3, 9, 9, 9, 9, 9, ...

4, 7, 13, 16, 13, 16, ...

5, 7, 13, 16, 13, 16, ...

6, 9, 9, 9, 9, 9, ...

7, 13, 16, 13, 16, 13, ...

8, 10, 1, 1, 1, 1, ...

9, 9, 9, 9, 9, 9, ...

формирани су по истом закону, полазећи од различитих првих чланова. Откриј законитост по којој су низови формирани и за сваки напиши следећа три члана.

**Решење.** Сваки следећи члан једнак је збиру цифара квадрата претходног.

11. Продужи низ слова:

а) *P, D, T, Ć, ...*

б) *N, J, D, T, ...*

в) *N, A, I, I, T, T, M, ...*

**Решење.** а) *P, Š, ...* Прва слова редних бројева (први, други, трећи, ...)

б) *Ć, P, ...* Почетна слова ненегативних целих бројева, почев од 0 (нула, један, два, три, ...).

в) *M, T, ...* Последња слова у називима природних бројева.

12. У низу

*R, R, T, ?, ?, ?, ?, R, R, R, R*

замени упитнике одговарајућим словима.

**Решење.** *L, J, N, L, T.* Последња слова назива месеци.

13. Продужи низ

*5, 3, 3, 6, 3, 4, 5, 4, ...*

**Решење.** *5, 5, 9, ...* Број слова у речима један, два, три, ...

14. Напиши следећа три члана низа

*I, V, X, L, ...*

**Решење.** *C, D, M.* Римске цифре поређане по величини.

15. Напиши следећих десет чланова низа

*II, IV, VI, IX, XI, XX, ...*



**Решење.** XL, LI, LV, LX, XC, CI, CV, CX, CL, CC. Двоцифрени римски бројеви поређани по величини.

16. Продужи низ

10, 10, 10, 12, 4, 7, 24, ...

за још два члана.

**Решење.** 60, 60. Миленијум има 10 векова, век 10 деценија, деценија 10 година, година 12 месеци, ..., сат 60 минута, минут 60 секунди.

17. Напиши следећа два члана низа

$M, V, Z, M, \dots$

**Решење.**  $S, U$ . Почетна слова назива планета по удаљености од Сунца (Меркур, Венера, Земља, Марс, Јупитер, Сатурн, Уран, ...)

18. Напиши следећа два слова у низу слова

JEDANVTRICPŠS...

**Решење.** MO. Слова која се редом појављују у називима бројева али само први пут.

19. Напиши следећа два слова низа

$N, S, D, \dots$

**Решење.**  $S, N$ . Прва слова речи у поставци задатка.

### Додатни задаци

20. Одреди:

а) најмању; б) највећу

разлику два узастопна члана низа из задатка 2.

**Решење.** а) Најмања могућа разлика је 1; на пример, за бројеве 49999 и 50000.

б) Највећа могућа разлика је 9, која се достиже, на пример, за бројеве 5 и 14. Да та разлика не може бити већа од 9, закључујемо на основу следећег разматрања:

Нека је  $a$  последња цифра броја  $n$ , код кога је збир цифара дељив са 5, и нека је  $A$  збир осталих цифара тога броја. Тада је  $A + a = 5k$ , за неки природан број  $k$ . Ако је  $a < 5$ , онда се следећи број у низу добија повећањем последње цифре за 5 и разлика та два суседна члана у низу је 5. Ако је  $a \geq 5$ , онда је број  $m = n + (10 - a)$  дељив са 10 и  $m - n \leq 5$ . Нека је  $B$  збир цифара броја  $m$ . Ако је тај збир дељив са 5, онда је  $m$  у низу одмах иза  $n$ . Ако је  $B = 5s + r$  за неки ненегативан цео број  $s$ ,  $1 \leq r \leq 4$ , онда се следећи члан у низу добија кад се последња цифра 0 у броју  $m$  замени цифром која представља број  $5 - r$ . Нека је  $m'$  тако добијен број. Заиста, тада је  $m' - m = 5 - r \leq 4$ , па је  $m' - n = (m' - m) + (m - n) \leq 4 + 5 = 9$ .

Препоручујемо читаоцу да покаже да разлика два узастопна члана овог низа може бити било који број од 1 до 9.

21. Низ се формира на следећи начин: Први члан низа је неки једноцифрени број, а сваки следећи се добија тако што се претходни сабере са својом последњом цифром. Да ли број 1000 може да буде члан тог низа?

**Решење.** Не, јер су сви чланови низа, осим можда првог, парни бројеви, а 1000 се може добити додавањем последње цифре само из броја 995.

22. а) Да ли се у низу из задатка б под б) појављује број 100?

б) Низ се формира по истом закону, а почетни члан је неки једноцифрен број. Да ли се у том низу може појавити број 251?

**Решење.** а) Не. Непосредно се проверава даљим израчунавањем чланова низа: 72, 79, 88, 96, 105, ...

б) Не. Број 251 морао би се добити из неког броја  $240 + x$ , где је  $x$  једноцифрен број. Ако је  $x < 5$ , онда је  $240 + 4 + 4 < 251$ , а ако је  $x \geq 5$ , онда је  $240 + x + x$  паран број, дакле, различит од 251.

**23.** Да ли се у задатку в) из задатка б појављује број 1000?

**Решење.** Не. Цифра десетица првог троцифреног члана низа је 0, па су сви даљи чланови једнаки и мањи од 109.

**24.** Који је 2017. члан низа из задатка 7?

**Решење.** После прва два члана (2017 и 20) низ се периодично понавља са периодом 4, 8, 16, 14, 10, 2. Како је  $2017 = 2 + 6 \cdot 335 + 5$ , то је 2017. члан низа једнак петом члану периоде, тј. 10.

**25.** Који је 2017. члан низа из задатка 9?

**Решење.** Уочавамо да је четрнаести члан једнак тринаестом. Даље је низ константан. Закључујемо да је сваки члан низа почев од тринаестог, па и 2017. једнак 21322314.

### Задаци за самостални рад

**1.** Докажи да се у низу б) из задатка 8 не може појавити цифра 5.

**2.** Напиши 2017. члан сваког од низова из задатка 10.

**3.** Први члан низа је 2000000001, а сваки следећи се добија тако што се претходни сабере са неком његовом цифром различитом од 0. Перица исписује чланове низа, настојећи да сви чланови буду непарни. Да ли он може то да постигне?

**4.** У низу природних бројева, сваки број почев од другог, добија се тако што се претходни сабере са његовом највећом цифром. Колико највише чланова тога низа могу бити непарни бројеви?

**5.** У низу су исписани у растућем поретку бројеви дељиви са 9:

9, 18, 27, 36, ...

Испод сваког броја написан је збир његових цифара.

а) На ком месту у другом низу ће се први пут појавити број 81?

б) Шта ће се у том низу појавити пре: четири пута узастопно број 27 или број 36?

в) Шта ће се у том низу појавити пре: десет пута узастопно број 27 или број 36?

**6.** Низ бројева формира се на следећи начин: На првом месту је број 7, а даље, иза сваког броја је збир цифара његовог квадрата увећан за 1. Тако, на другом месту је број 14 јер је  $7^2 = 49$ , а  $4 + 9 + 1 = 14$ . На трећем месту је број 17, итд. Који се број налази на 2017. месту?

**Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија**