Билјана Начевска Настовска
Љупчо Настовски

СИСТЕМИ ОД ТОЧКИ ИЛИ ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Решавањето на проблеми е составен дел од животот. Со нивно успешно решавање животот станува подобар. Математичките проблеми (задачи) на некој начин се тренинг и подготовка за соочување и решавање на проблеми од било каков тип.

Следуваат задачи кои можеби е најдобро да ги почуствувате самостално без претходно разгледување и разбирање на изложеното решение. Најдобро е да го почуствувате нивниот отпор, да го почуствувате вашето настојување, убавината на моментот кога се појавува излезот од ситуацијата, кога се извикува еурека. Сепак, како се учи да се плива? Сигурно не така што од брегот ќе се гледаат другите како пливаат. Затоа храбро скокнете во морето на математичките проблеми и учете да пливате во тоа море.

Во рамнината, се разбира и во просторот има бесконечно многу точки. Ако се одвојат конечно многу од нив, без никакво дополнително барање или пак со некои дополнителни услови за нивното разместување, може да кажеме дека имаме систем од точки.

1. На рамнината се дадени 400 точки. Да се докаже дека има не помалку од 15 различни растојанија помеѓу нив.

Решение: Нека бројот на различни растојанија помеѓу точките е еднаков на k . Ако разгледаме една точка од дадените точки, тогаш останатите точки ќе лежат на k кружници со центар во разгледуваната точка. Да фиксираме две точки. Останатите точки се некои од пресечните точки на две семејства од концентрични кружници, кои содржат по k кружници. Според тоа вкупниот број на точки не е поголем од $2k^2+2$. Останува да се забележи дека $2\cdot 14^2+2=394<400$. Според тоа помеѓу дадените точки има барем 15 различни растојанија.

2. Во внатрешноста на рамностран триаголник со должина на страна еднаква на 1 се поставени пет точки. Да се докаже дека постојат барем две точки помеѓу кои растојанието е помало од 0,5.

Решение: Средните линии на рамностраниот триаголник со страна 1 го разбиваат триаголникот на четири рамнострани триаголници со страни 0,5. Според тоа во еден од нив лежат барем две точки од дадените пет, при што тие точки не може да се темиња на некои од триаголниците. Растојанието помеѓу тие точки е помало од 0,5.

3. На рамнината се дадени n црвени и n сини точки, така што нема три точки кои лежат на една права. Да се докаже, дека може да се повлечат n отсечки со разнобојни крајеви, кои немаат заеднички точки.

Решение: Да ги разгледаме сите разбивања на дадените точки на парови од разнобојни точки. Такви разбивања има конечно многу. Според тоа ќе се најде разбивање, за кое збирот од должините на отсечките зададени со паровите точки од разбивањето е најмало. Ќе покажеме дека во овој случај тие отсечки нема да се сечат. Навистина, доколку две отсечки би се сечеле, тогаш може да избереме разбивање со помал збир од должините на отсечките. Во овој случај отсечките кои се сечат би биле дијагонали на конвексен четириаголник и со нивна замена со некој пар спротивни страни од четириаголникот ќе добиеме разбивање на отсечки со разнобојни крајеви и притоа збирот на должините на отсечките од новото разбивање ќе биде помал од претходно разгледуваното разбивање.

4. Во внатрешноста на квадрат со страна 1 дадени се n точки. Да се докаже дека плоштината на еден од триаголниците со темиња во дадените точки или во темињата на квадратот не е поголема од $\frac{1}{2(n+1)}$.

Решение: Нека $P_1, P_2, ..., P_n$ се дадените точки. Да ја поврзиме точката P_1 со темињата на квадратот. При тоа се добиваат четири триаголници. Потоа, за $k = 2, ..., n$ ја изведуваме следнава операција. Ако точката P_k лежи строго внатре во еден од порано добиените триаголници, тогаш ја поврзуваме со темињата на тој триаголник. Ако точката P_k лежи на заедничка страна од два триаголници тогаш ја поврзуваме со темињата на тие триаголници, кои се спротивни на заедничката страна. По секоја од овие операции и во двата случаи бројот на триаголниците се зголемува за два. На крај се добиваат $2(n+1)$ триаголници. Збирот од плоштините на тие триаголници е еднаков на 1, според тоа плоштината на барем еден од нив не е поголема од $1/2(n+1)$.

5. Во внатрешноста на круг со радиус 1 дадени се седум точки. Да се докаже дека растојанието помеѓу две од нив е помало од 1.

Решение: Ќе претпоставиме дека нема две точки кои лежат на ист радиус. Во спротивно веќе ги имаме бараните точки. Од направената претпоставка јасно е дека ниедна од дадените точки не се совпаѓа со центарот на кружницата. Нека со O е означен центарот на кружницата. Тогаш најмалиот од аглите A_iOA_j, каде A_i и A_j се некои од дадените точки, не е поголем од $\frac{360^o}{7} < 60^o$. Нека A и B се точките кои му соодветствуваат на најмалиот агол. Бидејќи $\overline{AO} \leq 1$ и

$\overline{BO} \le 1$ и аголот AOB е строго помал од најголемиот агол на триаголникот AOB, тогаш е $\overline{AB} < 1$.

6. Во некоја земја има 100 аеродроми, при што попарните растојанија помеѓу нив се различни. Од секој аеродром полетува авион и лета до најблискиот аеродром различен од аеродромот од кој полетува. Да се докаже дека на ниеден аеродром не можат да слетаат повеќе од пет авиони.

Решение: Нека еден од аеродромите го означиме со точката A. Нека се B и C два други аеродроми од кои долетале авиони на аеродромот A. Не е можно A, B и C да се колинеарни и A да не се наоѓа помеѓу останатите две точки. Тоа е јасно ако се има во предвид дека секој авион лета до најблискиот аеродром.

Авионите од B и C летаат до најблискиот аеродром. Според тоа во триаголникот ABC страната BC е најголема, во спротивно еден од авионите кои полетале од B или C нема да слета на аеродромот A. Сега е јасно дека аголот $\sphericalangle BAC$ е поголем од 60^o. Да претпоставиме дека на аеродромот A слетале n авиони од аеродромите $A_1, A_2, ..., A_n$. Претпоставуваме дека полуправите AA_j лежат во аголот $\sphericalangle A_{j-1}AA_{j+1}$ за $j = 1, 2, ..., n$ каде што $A_{-1} = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$. Тогаш еден од аглите $\sphericalangle A_1AA_2$, $\sphericalangle A_2AA_3, \ldots, \sphericalangle A_nAA_1$ не е поголем од $\frac{360^o}{n}$. Според тоа $\frac{360^o}{n} > 60^o$,т.е. $n < 6$.

7. На рамнината се дадени $n \ge 3$ точки , такви да не лежат на една права. Да се докаже дека постои кружница , која минува низ три од дадените точки и внатре во себе не содржи ниедна од преостанатите точки.

Решение: Нека A и B се оние две точки од дадените, помеѓу кои растојанието е најмало. Тогаш внатре во кружницата со дијаметар AB нема од дадените точки. Нека C е точка од преостанатите, од кои отсечата AB се гледа под најголем агол. Тој агол е остар. Тогаш внатре во кружницата која минува низ A, B и C нема ниедна од дадените точки.

8. На рамнината се дадени $2n$ точки. Повлечени се n отсечки така што од секоја точка излегува една отсечка. Потоа повлечени се уште n отсечки такви што од секоја точка излегува една отсечка. Да се докаже дека може да се изберат n точки од кои никои две не се поврзани со отсечка.

Решение: Отсечките кои се добиени при првото повлекување ќе ги обоиме со црвено, а отсечките кои се добиени при второто повлекување ќе ги обоиме со сино. Тогаш од секоја точка ќе излегува една црвена и една сина отсечка. Секоја точка припаѓа на некои “цикл”-затворена искршена линија која се состои од црвени и сини отсечки кои наизменично се менуваат. Значи сите $2n$ точки и сите $2n$ отсечки кои ги спојуваат дадените точки формираат еден или повеќе цикл-и. Бидејќи боите на отсечките во еден цикл се менуваат наизменично и од секоја точка излегува една црвена и една сина отсечка, бројот на точки во секој цикл е парен.Ако во секој цикл избереме половина од точките, преку една, ќе добиеме множество од n точки од кои никој две не се поврзани со отсечка.

9. На рамнината се дадени 25 точки , такви што помеѓу било кои три ќе се најдат две кои се на растојание помало од 1. Да се докаже дека постои круг со радиус 1, кој содржи не помалку од 13 од дадените точки.

Решение: Нека A е една од дадените точки. Ако сите останати точки лежат во кругот S_1 со радиус 1 и со центар во A тогаш нема што да се докажува. Нека е сега B точка од дадените која лежи надвор од кругот S_1, т.е. $\overline{AB} > 1$. Да го разгледаме кругот S_2 со радиус 1 и центар во B. Помеѓу точките A, B и C, каде што C е било која точка од дадените, ќе се најдат две помеѓу кои растојанието е помало од 1, при што не можат да бидат точките A и B. Според тоа круговите S_1 и S_2 ги содржат сите дадени точки, т.е. една од нив содржи не помалку од 13 точки.

10. Во просторот се дадени $2n(n \geq 2)$ точки (така да било кои 4 точки не лежат на една рамнина) и повлечени се $n^2 + 1$ отсечки со краеви во тие точки.Да се докажи дека повлечените отсечки формираат барем еден триаголник.

Решение: Ќе избереме точка од која излегуваат најмногу отсечки. Да ја означиме со A_1 и од неа нека излегуваат k отсечки. Краевите на отсечките кои излегуваат од неа ќе ги означиме со $B_1, B_2, ..., B_k$, а останатите точки со $A_2, A_3, ..., A_{2n-k}$. Ако не постојат триаголници, тогаш помеѓу точките $B_1, B_2, ..., B_k$ нема отсечки, па според тоа од секоја од нив излегуваат не повеќе од $2n-k$ отсечки. А бидејќи од секоја од точките $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n-k}$ излегуваат неповеќе од k отсечки, вкупниот број на отсечки не е поголем од

$$\frac{1}{2}(k(2n-k)+(2n-k)k) = k(2n-k) \leq (\frac{k+(2n-k)}{2})^2 = n^2$$

Но бројот на дадени отсечки е еднаков на $n^2 + 1$, според тоа тие формираат барем еден триаголник.

11. На рамнината се дадени конечно многу точки при што било која права што минува низ две точки содржи уште една од дадените точки. Да се докаже дека сите дадени точки лежат на една права. (Силвестер)

12. На рамнината се дадени n точки, при што плоштината на било кој триаголник со темиња во тие точки не е поголема од 1. Да се докаже дека сите тие точки може да се сместат во триаголник со плоштина 4.

13. На рамнината се дадени неколку точки, такви што попарните растојанија помеѓу нив се различни. Секоја од точките се поврзува со најблиската точка до неа. Дали при тоа може да се добие затворена искршена линија?

14. На рамнината се дадени 22 точки , такви што нема три точки кои лежат на една права. Да се докаже дека може да се разбијат на парови од точки така што отсечките зададени со паровите се сечат барем во пет точки.

15. На рамнината се дадени n точки и се означени средините на сите отсечки со краеви во тие точки. Да се докаже дека различно означени точки нема помалку од $2n-3$.

16. На рамнината се дадени $n \geq 3$ точки. Нека d е најголемото растојание помеѓу парови точки од дадените. Да се докаже дека има не повеќе од n парови на точки меѓу кои растојанието е еднакво на d.

17. На рамнината се дадени n точки такви што било кои три од нив може да се покријат со круг со радиус 1. Да се докаже дека сите n точки може да се покријат со круг со радиус 1.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ