Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

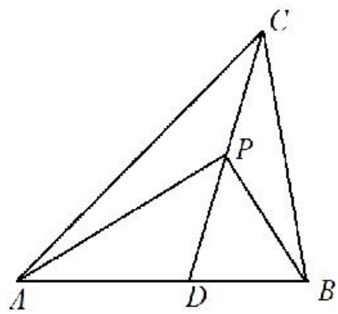
ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ: ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

Геометриските неравенства не се многу застапени на математилките натпревари. Сметаме дека постојат повеќе причини зошто комисиите ги избегнуваат овие неравенства, а според нас тоа се должи на честата примена на неравенството на триаголник, Питагоровата теорема и елементарните алгебарски неравенства, при што многу поретко се применуваат посложените алгебарски неравенства. Во продолжение ќе разгледаме неколку задачи во кои се бара да се докаже некое геометриско неравенство.

1. Во внатрешност на триаголникот ABC е дадена точка P. Докажи дека $\measuredangle ACB < \measuredangle APB$.

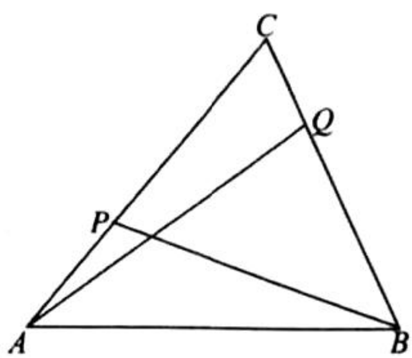
Решение. Нека D е пресекот на правата CP и страната AB. Бидејќи $\measuredangle APD$ е надворешен за триаголникот APC, добиваме $\measuredangle APD = \measuredangle ACP + \measuredangle CAP$ и затоа $\measuredangle ACP < \measuredangle APD$. Слично, од триаголникот BPC добиваме $\measuredangle BCP < \measuredangle BPD$. Според тоа,

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACP + \measuredangle PCB < \measuredangle APD + \measuredangle DPB = \measuredangle APB.$$



2. На страната AC на триаголникот ABC е дадена точка P, а на страната BC точка Q. Докажи дека $\measuredangle CAQ + \measuredangle CBP < \measuredangle APB + \measuredangle BQA$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle BQA$ е надворешен агол за триаголникот AQC важи $\measuredangle BQA = \measuredangle CAQ + \measuredangle ACQ$, па затоа $\measuredangle BQA > \measuredangle CAQ$. Аналогно се докажува дека $\measuredangle APB > \measuredangle CBP$. Конено, ако ги собереме последните неравенства добиваме

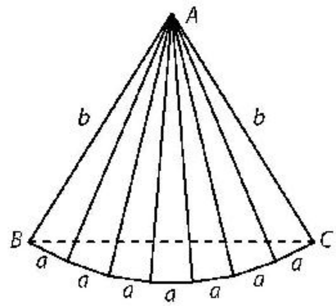


$$\measuredangle CAQ + \measuredangle CBP < \measuredangle APB + \measuredangle BQA,$$

што и требаше да се докаже.

3. Во рамнокрак триаголник со основа a и крак b, аголот при врвот е 9°. Докажи дека $b < 7a$.

Решение. Со дадениот триаголник да формираме деветаголник како што е прикажано на цртежот десно и да го разгледаме рамнокракиот триаголник ABC. Аголот при темето A на триаголникот ABC е еднаков на $7 \cdot 9 = 63^\circ$, па затоа $\overline{BC} > \overline{AB}$. Од друга страна $\overline{BC} < 7a$, па од послединте две неравенства следува $b < 7a$, што и требаше да се докаже.



4. Нека a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник. Докажи дека важи неравенстото

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \tfrac{3}{4}c^4. \qquad (1)$$

Решение. Според Питагоровата теоема имаме $a^2 + b^2 = c^2$. Последното равенство го квадрираме и го добиваме равенството

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4.$$

Според тоа, неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \tfrac{3}{4}(a^4 + 2a^2b^2 + b^4),$$

$$4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3(a^4 + 2a^2b^2 + b^4),$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0,$$

$$(a^2 - b^2)^2 \geq 0.$$

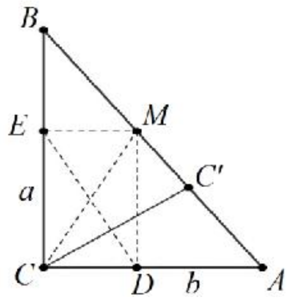
Последното неравенство е точно бидејќи квадрат на секој реален број е ненегативен број, па затоа точно е и неравенството (1).

5. Нека $\triangle ABC$ е правоаголен триаголник со прав агол во темето C и M е произволна точка на хипотенузата AB. Нека точките E и D се ортогонални проекции на точката M врз катетите BC и AC, соодветно. Ако a,b се дожините на катетите на $\triangle ABC$ докажи дека

$$\overline{DE} \geq \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Четириаголникот $CDME$ е правоаголник, па затоа должините на неговите дијагонали $\overline{CM}$ и $\overline{DE}$ се еднакви. Нека C' е подножјето на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето C (види цртеж). Тогаш



$$\overline{DE} = \overline{CM} \geq \overline{CC'}. \qquad (1)$$

Од сличноста на $\triangle ACB$ и $\triangle AC'C$ следува
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{CC'}$, т.е. $\overline{AB} \cdot \overline{CC'} = \overline{AC} \cdot \overline{BC}$.

Но, според Питагоровата теорема имаме $\overline{AB} = \sqrt{a^2+b^2}$, па затоа важи $\sqrt{a^2+b^2} \cdot \overline{CC'} = ab$, односно

$$\overline{CC'} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува неравенството (*). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\overline{CM} = \overline{CC'}$, т.е. ако и само ако точката M е подножната точка на висината повлечена од темето C кон хипотенузата AB.

6. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC. Ако една страна на триаголникот е подолга од $37\ cm$, докажи дека

$$a^2+b^2+c^2 > 2006\ cm^2.$$

Решение. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот ABC и $c > 37\ cm$. Тогаш $a+b>c$, па затоа $a^2+2ab+b^2>c^2$. Понатаму, од $(a-b)^2 \geq 0$ следува $a^2+b^2 \geq 2ab$, па затоа

$$2(a^2+b^2) \geq a^2+2ab+b^2 > c^2, \text{ т.е. } a^2+b^2 > \tfrac{1}{2}c^2.$$

Конечно,

$$a^2+b^2+c^2 > \tfrac{3}{2}c^2 > \tfrac{3}{2}\cdot 37^2 > 2006\ cm^2.$$

7. Нека a,b,c се должини на страни на произволен триаголник. Докажи дека

$$a^2+b^2+c^2 < 2ab+2bc+2ca. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на триаголник $a > |b-c|$ следува $a^2 > (b-c)^2$, односно $a^2 > b^2 + c^2 - 2bc$. Слично, $b^2 > c^2 + a^2 - 2ca$ и $c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$. Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 > 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca,$$

кое е еквивалентно на неравенството (1).

8. Нека a,b,c се должините на страните на произволен триаголник. Докажи дека

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3. \qquad (1)$$

Решение. Од неравенството на триаголник следува $a > |b-c|$, па затоа $a^2 > (b-c)^2$, односно $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$. Значи, $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} > 1$. Слично се докажува дека $\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2} > 1$ и $\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 1$. Ако ги собереме последните три неравенства, го добиваме неравенството (1).

9. Од сите правоаголни триаголници со хипотенуза со должина c определи го оној кој има најголем збир на должините на катетите.

Решение. Нека a и b се должините на катетите на правоаголен триаголник со хипотенуза со должина c. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } a+b \le c\sqrt{2},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Според тоа, најголем збир на должините на катетите има рамнокракиот правоаголен триаголник и тогаш $a+b = c\sqrt{2}$

10. Дали постои триаголник со висини 1, 2, 3?

Решение. Нека претпоставиме дека таков триаголник постои. Нека P е плоштината на триаголникот, a,b,c се должините на неговите страни и $h_a = 1, h_b = 2, h_c = 3$. Тогаш $P = \frac{a}{2} = \frac{2b}{2} = \frac{3c}{2}$, па затоа $a = 2P$, $b = P$ и $c = \frac{2P}{3}$. Сега, добиваме $a = 2P > P + \frac{2P}{3} = b + c$, што противречи на неравенството на триаголник. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои триаголник чии висини се 1, 2 и 3.

11. Во триаголник две висини се еднакви на 6 и 10. Докажи дека третата висина е помала од 15.

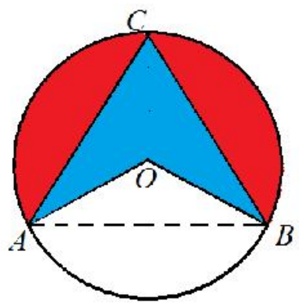
Решение. Нека $h_a = 6, h_b = 10$ и h_c се висините кои редоследно соодветствуваат на страните a, b и c. Тогаш за плоштината на триаголникот добиваме $2P = 6a = 10b = c \cdot h_c$, од каде наоѓаме

$$a = \frac{P}{3}, b = \frac{P}{5}, c = \frac{2P}{h_c}.$$

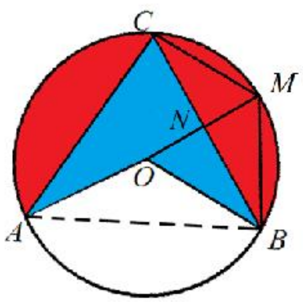
Бидејќи $c > a - b$ имаме $\frac{2P}{h_c} > \frac{P}{3} - \frac{P}{5}$, односно $\frac{2}{h_c} > \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

Конечно, $h_c < 15$.

12. Нека ABC е рамностран триаголник околу кој е опишана кружница со цен-тар O (цртеж десно). Спореди ги плоштините на деловите на кругот обоени со црвена, сина и бела боја.



Решение. Плоштината на црвениот дел на кругот се состои од плоштината на два кружни отсечоци,што значи дека $P_c = 2P_o$. Плоштината на синиот дел од кругот се состои од плоштината на два триаголника (триаголниците AOC и BOC се складни) што значи дека $P_s = 2P_t$. Плоштината на белиот дел од кругот се состои од плоштината на еден кружен исечок и еден триаголник, т.е. $P_b = P_o + P_t$. Триаголникот BCO е рамнокрак со агол при врвот $360^\circ : 3 = 120^\circ$, па затоа агол при основата е еднаков на $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$.



Нека $OM \perp BC$ и $OM \cap BC = N$. Тогаш триаголникот OBM е рамностран ($\overline{OB} = \overline{OM}$ и $\measuredangle BOM = 60^\circ$) и како $\measuredangle OBN = 30^\circ$ заклучуваме дека BN е висина во триаголникот OBM па затоа триаголниците OBN и MBN се складни, што значи дека триаголниците OBC и MBC се складни. Според тоа, $P_o > P_t$. Оттука следува дека

$$2P_o > P_o + P_t > 2P_t \text{, т.е. } P_c > P_b > P_s .$$

13. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека a и b се две соседни страни на правоаголникот, а c е страната на квадратот. Докажи дека

$$a + b - c > R\sqrt{2},$$

каде R е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

Решение. Да забележиме дека

$$c = \sqrt{ab} \text{ и } R\sqrt{2} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} .$$

Задачата се сведува на докажување на следново тврдење: За произволни и различни $a, b > 0$ важи неравенството

$$a + b > \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} .$$

Ставајќи $c = \sqrt{ab}$ и $d = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, имаме $ab = c^2$ и $a^2 + b^2 = 2d^2$.

Според тоа,

$$(a+b)^2 = 2(c^2 + d^2) = (c+d)^2 + (c-d)^2 \geq (c+d)^2 ,$$

и знак за равенство важи ако и само ако $c = d$. Според тоа,

$$a + b \geq c + d$$

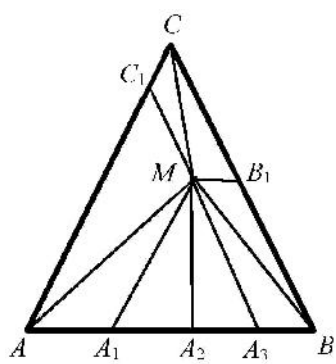
и знак за равенство важи ако и само ако $c = d$. Останува да забележиме дека равенството $c = d$ е еквивалентно со равенството $a = b$. Навистина,

$$c = d \iff 2ab = a^2 + b^2 \iff 0 = (a-b)^2 .$$

14. Нека M е точка од внатрешноста на рамностраниот $\triangle ABC$. Докажи дека

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 < 2\overline{AB}^2 .$$

Решение. Нека A_1, B_1, C_1 се точки на страните AB, BC, CA, соодветно такви што $MA_1 \parallel CA$, $MB_1 \parallel AB$ и $MC_1 \parallel BC$. Да означиме $\overline{MA_1} = x$, $\overline{MB_1} = y$ и $\overline{MC_1} = z$. Четириаголникот C_1AA_1M е рамнокрак трапез, бидејќи $MA_1 \parallel CA$, а од $MC_1 \parallel BC$ следува



$$\measuredangle MC_1A = \measuredangle BCA = 60^\circ = \measuredangle A_1AC_1 .$$

Затоа важи $\overline{AA_1} = \overline{MC_1} = z$. Нека A_2 и A_3 се точки на страната AB такви што $MA_2 \perp AB$ и $MA_3 \parallel BC$. Тогаш триаголникот MA_2A_3 е рамностран и важи $\overline{A_1A_3} = \overline{MA_1} = x$ и $\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overline{MA_1} = \frac{x}{2}$. Понатаму, четириаголникот A_3BB_1M е паралелограм, па затоа $\overline{A_3B} = \overline{MB_1} = y$. Според тоа,

$$\overline{AB} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_3} + \overline{A_3B} = x + y + z .$$

Понатаму, од Питагоровата теорема следува

$$\begin{aligned}\overline{MA}^2 &= \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_2}^2 = \overline{AA_2}^2 + \overline{MA_1}^2 - \overline{A_1A_2}^2 \\ &= (z + \tfrac{x}{2})^2 + x^2 - (\tfrac{x}{2})^2 = z^2 + zx + x^2.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека $\overline{MB}^2 = x^2 + xy + y^2$ и $\overline{MC}^2 = z^2 + zy + y^2$. Конечно,

$$\begin{aligned}\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 &= z^2 + zx + x^2 + x^2 + xy + y^2 + y^2 + yz + z^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) - 3(xy + yz + zx) \\ &< 2(x + y + z)^2 = 2\overline{AB}^2,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

15. Нека P, Q, R, S се средините на страните AB, BC, CD, DA на конвексниот четириголник $ABCD$ и нека L е неговиот периметар. Докажи дека $2(\overline{PR} + \overline{QS}) \le L$.

Решение. Нека E е средината на дијагоналата AC. Тогаш

$$\overline{PR} \le \overline{PE} + \overline{ER}, \quad \overline{QS} \le \overline{SE} + \overline{QE} ,$$

па затоа

$$\overline{PR} + \overline{QS} \le \overline{PE} + \overline{ER} + \overline{SE} + \overline{EQ} .$$

Бидејќи PE, ER, SE, EQ се средни линии на триаголниците ABC и ACD, добиваме

$$\overline{PE} = \frac{\overline{BC}}{2}, \overline{ER} = \frac{\overline{AD}}{2}, \overline{SE} = \frac{\overline{CD}}{2}, \overline{EQ} = \frac{\overline{AB}}{2} .$$

Според тоа,

$$\overline{PR} + \overline{QS} \le \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{CD}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2}, \text{ т.е. } 2(\overline{PR} + \overline{QS}) \le L .$$

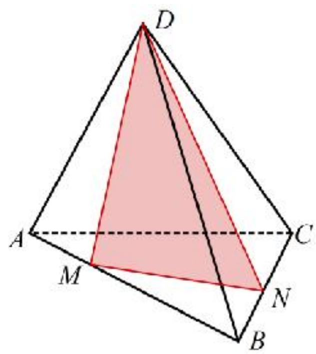
На крајот од ова наше дружење ќе разгледаме две стереометриски задачи во кои се бара да се докаже определено неравенство.

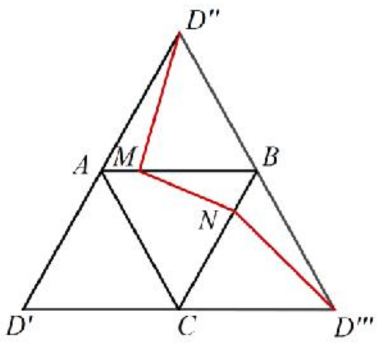
16. Дадена е тристрана пирамида $ABCD$ и S е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека $\overline{SD} < \frac{\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}}{3}$.

Решение. Нека AA_1 е тежишна линија на триаголникот ABC. Во триаголникот BCD важи $\overline{BA_1} = \overline{A_1C}$, па од претходната задача следува $\overline{A_1D} < \frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{CD}$. Слично на ова, во триаголникот AA_1D важи $\overline{AS} : \overline{SA_1} = 2:1$, па затоа важи $\overline{SD} < \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{A_1D}$. Користејќи ги двете неравенства добиваме дека

$$\overline{SD} < \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overline{BD} + \frac{1}{2}\overline{CD}) = \frac{\overline{AD}+\overline{BD}+\overline{CD}}{3}.$$

17. Даден е правилен тетраедар $ABCD$ чиј раб има должина a. Рамнината ¢ ја содржи точката D и ги сече рабовите AB и BC редоследно во точките M и N така што пресекот на тетраедарот и рамнината ¢ е триаголникот DMN (цртеж десно). Докажи дека периметарот на пресечниот триаголник DMN е поголем од $2a$.





Решение. Да ја нацртаме мрежата на тетраедарот $ABCD$ (цртеж долу лево), при што добиваме рамностран триаголник $D'D''D'''$ со должина на страна $2a$.

Тогаш, бидејќи должината на секоја искршена линија која поврзува две темиња на даден триаголник е поголема од страната на триаголникот определена со тие две темиња, за периметарот на пресечниот триаголник DMN добиваме

$$L = \overline{DM} + \overline{MN} + \overline{ND} = \overline{D''M} + \overline{MN} + \overline{ND'''} > \overline{D''D'''} = 2a,$$

што и требаше да се докаже.