Игор Димовски
Прилеп

ВРСКА МЕЃУ БИНОМНИТЕ КОЕФИЦИЕНТИ И ПЕРМУТАЦИИТЕ СО ПОВТОРУВАЊЕ

1. Пермутации

Дефиниција. Нека $M=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ е произволно множество со n елементи, каде $n\in\mathbb{N}$. Секоја подредена n-торка од елементи на множеството M во која сите елементи се меѓусебно различни се вика **пермутација без повторување од n елементи**.

Ознака. Наместо како подредена n-торка

$$(a_1,a_2,\dots,a_n)\in M\times M\times\ldots\times M=M^n$$

пермутацијата без повторување од n елементи се означува како $a_1a_2\ \dots a_n$

P_n- **број** на пермутации без повторување од n елементи.

Прашањето на бројот на пермутации без повторување од n елементи се сведува на прашањето: на колку начини може да се распоредат n различни елементи на n места?

Теорема 1. Нека n е произволен природен број. Бројот на пермутации без повторување од n елементи е еднаков со факториелот на бројот n, т.е. $P_n=n!$

Да допуштиме сега, меѓу елементите $a_1,a_2,\dots,a_n$ да постојат k групи од по $n_1,n_2,\dots,n_k$ елементи соодветно ($n_1,n_2,\dots,n_k\leq n$ и $n_1+n_2+\dots+n_k\leq n$) кои меѓусебно се еднакви. Секоја низа од n елементи која се добива со разместување на елементите $a_1,a_2,\dots,a_n$ се вика **пермутација со повторување** $(n_1,n_2,\dots,n_k)$ **од** n ***елементи***. Бројот на вакните пермутации се означува со $P_n(n_1,n_2,\dots,\ n_k)$.

Ако елементите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ се сите различни меѓу себе, тие може да се разместат на n места на $P_n = n!$ начини. Но, ако фиксираме било која пермутација од n различни елементи и во неа допуштиме да постојат k групи од по $n_1, n_2, \ldots, n_k$ елементи соодветно $(n_1, n_2, \ldots, n_k \leq n$ и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n)$ кои меѓусебно се еднакви, тогаш со произволно меѓусебно разместување на елементите од секоја група, секогаш ќе се добива истата пермутација со повторување. Бидејќи n_1 елементи на n_1 места може да се разместуваат на $P_{n_1} = n_1!$ начини, n_2 елементи на n_2 места може да се разместуваат на $P_{n_2} = n_2!$ начини и така натаму, n_k елементи на n_k места може да се разместуваат на $P_{nk} = n_k!$ начини, следува дека бројот P_n на пермутации без повторување е $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ пати поголем од пермутациите со повторување $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ од n елементи. Значи:

$$P_n = n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! \cdot P_n \;\; n_1, n_2, \ldots, n_k \;\Leftrightarrow$$

$$P_n \;\; n_1, n_2, \ldots, n_k \; = \frac{P_n}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! \cdot},$$

од што следува дека :

$$P_n \;\; n_1, n_2, \ldots, n_k \; = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! \cdot}$$

2. Комбинации без повторување

Дефиниција. Нека $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ е произволно множество со n елементи, каде $n \in \mathbb{N}$ и нека $k \in \mathbb{N}$ и $k \leq n$. Секое подмножество од k елементи на множеството M се вика **комбинација без повторување од n елементи од класа k.**

Ознака. Наместо како множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq M$, комбинацијата без повторување од n елементи од класа k најчесто се означува како $a_1 a_2 \ldots a_k$.

C_n^k - број на комбинации без повторување од n елементи од класа k

Прашањето на бројот на комбинации без повторување од n елементи од класа k, се сведува на прашањето: на колку начини може да се распоредат n елементи на k места, така што ниту еден елемент не се појавува повеќе од еднаш и при тоа НЕ е важен редоследот на елементите?

Теорема 2. Нека n е произволен природен број и нека k е природен број така што $k \leq n$. Бројот на комбинации без повторување од n елементи од класа k изнесува: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

1° За секои $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$.

2° За секои $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

3° За секои $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4° За секои $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

5° Бројот на комбинации без повторување од n елементи класа k е еднаков со бројот на пермутации со повторување $(n, n-k)$ од n елементи:

$$C_n^k = P_n(k, n-k).$$

3. Паскалов триаголник

Нека $x+y$ е произволен бином. Степенувањето на овој бином на експоненти $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ и $\mathbf{3}$ се извршува според дефиницијата за сепенување или според формулите-кратенки:

$$(x+y)^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Се поставува прашањето, како биномот $x+y$ да се степенува на произволен природен експонент n?

Дали може да се состави некоја формула-кратенка според која ќе може да се пресмета: $(x+y)^n = ?$

Пример 1. Да се пресмета $(x + y)^n$ за: а) $n = 4$ б) $n = 5$

Решение. а) Имаме

$$(x+y)^4=(x+y)^3\cdot(x+y)=(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\cdot(x+y)$$
$$= x^4 + 1x^3y + 3x^3y + 3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3xy^3 + 1xy^3 + y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

б) Имаме

$$(x+y)^5 = (x+y)^4\cdot(x+y) = (x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4)\cdot(x+y)$$
$$= x^5+1x^4y+4x^4y+4x^3y^2+6x^3y^2+6x^2y^3+4x^2y^3+4xy^4+1xy^4+y^5$$
$$= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

Да ги набљудуваме уште еднаш внимателно полиномите што се добиваат со степенување на биномот $x+y$ на експонент n:

За $n = 0 (x + y)^0 =$ 1 $\mathbf{1}$ член

За $n = 1 (x + y)^1 =$ $1x + 1y$ $\mathbf{2}$ члена

За $n = 2 (x + y)^2 =$ $1x^2 + 2xy + 1y^2$ $\mathbf{3}$ члена

За $n = 3 (x + y)^3 =$ $1x^3+3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$ $\mathbf{4}$ члена

За $n = 4 (x + y)^4 =$ $1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2+4xy^3+1y^4$ $\mathbf{5}$ члена

За $n = 5 (x + y)^5 =$ $1x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+1y^5$ $\mathbf{6}$ члена

Може да се заклучи дека за $n\in\{0,1,2,3,4,5\}$:

- Полиномот $(x+y)^n$ има $n+1$ членови;
- Збирот на експонентите на x и y во секој член изнесува n;
- Првиот член е x^n, а во секој нареден член, експонентот на x се намалува за **1**, се до **0**;

- Експонентот на y во првиот член е $\mathbf{0}$, а во секој нареден член, експонентот на y се зголемува за $\mathbf{1}$, се до n. Последниот член е y^n;
- Ако само коефициентите се распоредат во триаголна шема, се добива:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

На врвот на добиената триаголна шема стои единица. Во вториот ред има две единици, така што горната единица стои меѓу двете единици во вториот ред. Секој нареден ред се добива со ставање на единици на левиот и десниот крај, а секој коефициент меѓу првиот и последниот е добиен како **збир на двата коефициенти што се наоѓаат над него во претходниот ред**.

Коефициентите во редот се симетрични: првиот е еднаков со последниот, вториот е еднаков со претпоследниот итн. Првиот и последниот коефициент се еднакви на $\mathbf{1}$. Вториот и претпоследниот коефициент се еднакви на n.

Ако на истиот начин се продолжи со пополнување, ќе се добијат коефициентите на полиномот $(x+y)^n$ за $n = \mathbf{6}$, $n = \mathbf{7}$, итн.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

....

Оваа шема се нарекува ***Паскалов триаголник***. Од Паскаловиот триаголник, користејќи ги горните заклучоци, може да се состават полиномите:

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

Задача 1. Одреди ги коефициентите во следните два реда во Пакаловиот триаголник. Запиши ги полиномите $(x+y)^8$ и $(x+y)^9$ во развиена форма.

4. Биномни коефициенти

Редовите во Паскаловиот триаголник да ги означиме со редни броеви n=**0, 1,2,3,...**. Нека n е произволен природен број. Во n-тиот ред има $n+1$ коефициенти. Коефициентите во n-тиот ред да ги означиме со B_n^0, B_n^1, B_n^2, ..., B_n^n. Значи во n-тиот ред се коефициентите B_n^k, каде k=**0,1,2,...,**n. Коефициентите B_n^k ќе ги нарекуваме **биномни коефициенти**.

Биномните коефициенти, според Паскаловиот триаголник, ги имаат следните својства:

- $B_n^0 = B_n^n = 1$ - првиот и последниот коефициент се еднакви на 1.
- $B_n^1 = B_n^{n-1} = n$ - вториот и претпоследниот коефициент се еднакви на n
- $B_n^k = B_n^{n-k}$ - коефициентите во редот се симетрични
- $B_n^{k-1} + B_n^k = B_{n+1}^k$ - секој коефициент меѓу првиот и последниот е добиен како збир на двата коефициенти што се наоѓаат над него во претходниот ред.

Но, да ја погледнеме листата од својства 1°- 4° што ги имаат коефициентите C_n^k.

Биномните коефициенти B_n^k и броевите C_n^k - број на комбинации без повторување од n елементи од класа k ги имаат истите својства 1° - 4°.

Се поставува прашање дали коефициентите C_n^k се всушност биномните коефициенти?

Нека n е произволен фиксиран природен број. n-тиот степен на биномот $x+y$, може да се запише како производ на следниот начин:

$$x+y^{\ n} = \underbrace{x+y \cdot x+y \cdot .... \cdot x+y}_{n\text{—пати}}$$

Користејќи го правилото „секој со секого“ за множење на полиноми, се добива дека во развојот на овој полином, секој моном е добиен како низа од вкупно n множители: x-ови и y-и распоредени на сите можни начини.

При тоа степенот на секој од овие мономи изнесува n и ако y е дигнат на експонент k, тогаш x е дигнат на експонент $n-k$.

$$x^{n-k}y^k = \underbrace{xx...x}_{n-k \text{ пати}}\ \underbrace{yy...y}_{k \text{ пати}}. \qquad (*)$$

Понатаму, полиномот треба да се доведе во нормален облик, што значи дека треба да се соберат сличните мономи. Ако мономите се подредат така што степените на x да опаѓаат, коефициентот пред мономот $x^{n-k}y^k$ ќе биде биномниот коефициент B_n^k. При тоа B_n^k е бројот на појавувања на мономот$x^{n-k}y^k$.

Ако сега мономот $x^{n-k}y^k$ се претстави како производ во обликот (*), тогаш тој може да се смета како низа од n елементи x и y, при што y се појавува k пати, а x се појавува $n-k$ пати. Бројот B_n^k на појавувања на мономот $x^{n-k}y^k$ е еднаков со бројот на сите можни начини на кои може да се распоредат n елементи од две групи по k и $n-k$ елементи кои се меѓусебно еднакви. Тоа се всушност пермутации со повторување $(k,n-k)$ од n елементи, што значи дека: $B_n^k = P_n(k,n-k)$.

Но, од својството 5° за коефициентите C_n^k е исполнето и:

$$C_n^k = P_n(k,n-k).$$

Тоа всушност значи дека $C_n^k = B_n^k$, односно: **бројот C_n^k на комбинации од n елементи од класа k е еднаков со биномниот коефициент пред мономот $x^{n-k}y^k$.**

Конечно, може да се заклучи дека:

$$(x+y)^n = C_n^0x^ny^0 + C_n^1x^{n-1}y^1 + C_n^2x^{n-2}y^2 + ... + C_n^kx^{n-k}y^k + ...$$
$$... + C_n^{n-1}x^1y^{n-1} + C_n^nx^0y^n$$

Имајќи во предвид дека за биномните коефициенти важи $C_n^k = \binom{n}{k}$, ***биномната формула*** може да се запише како:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n \qquad (**)$$

Задача 2. Користејќи ја формулата (**) пресметај $(x+y)^6$.

5. Доказ на биномната формула

Чекор 1. За $n = 1$, $(x+y)^1 = \binom{1}{0}x^1 y^0 + \binom{1}{1}x^0 y^1 = x+y$. Формулата (**) за $n=1$ е задоволена.

Чекор 2. Нека m е произволен природен број, така што за $n=m$, формулата (**) е задоволена, т.е.

$$(x+y)^m = \binom{m}{0}x^m y^0 + \binom{m}{1}x^{m-1}y^1 + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2 + \ldots + \binom{m}{k}x^{m-k}y^k + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m}{m-1}x^1 y^{m-1} + \binom{m}{m}x^0 y^m.$$

Нека $n = m + 1$. Тогаш

$$(x+y)^n = (x+y)^{m+1} = (x+y)^m \cdot (x+y),$$

па зотоа:

$$(x+y)^{m+1} = \left[\binom{m}{0}x^m y^0 + \binom{m}{1}x^{m-1}y^1 + \binom{m}{2}x^{m-2}y^2 + \ldots + \binom{m}{k}x^{m-k}y^k + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \binom{m}{m-1}x^1 y^{m-1} + \binom{m}{m}x^0 y^m\right] \cdot (x+y) =$$

$$= \binom{m}{0}x^{m+1}y^0 + \binom{m}{1}x^m y^1 + \binom{m}{2}x^{m-1}y^2 + \ldots + \binom{m}{k}x^{m-k+1}y^k + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m}{m-1}x^2 y^{m-1} + \binom{m}{m}x^1 y^m + \binom{m}{0}x^m y^1 + \binom{m}{1}x^{m-1}y^2 + \binom{m}{2}x^{m-2}y^3 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{m}{k}x^{m-k}y^{k+1} + \ldots + \binom{m}{m-1}x^1 y^m + \binom{m}{m}x^0 y^{m+1} =$$

$$=\binom{m}{0}x^{m+1}y^0+x^my^1\cdot\left[\binom{m}{1}+\binom{m}{0}\right]+x^{m-1}y^2\cdot\left[\binom{m}{2}+\binom{m}{1}\right]+\ldots$$
$$\ldots+x^{m-k+1}y^k\cdot\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]+\ldots+x^1y^m\cdot\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{m}{m}+\binom{m}{m-1}\right)+\genfrac{}{}{0pt}{}{m}{m}\;x^0y^{m+1}$$

Користејќи го својството $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, се добива дека:

$$x+y\ ^{m+1}=\binom{m}{0}x^{m+1}y^0+\binom{m+1}{1}x^my^1+\binom{m+1}{2}x^{m-1}y^2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{m+1}{k}x^{m-k+1}y^k+\ldots+\binom{m+1}{m}x^1y^m+\genfrac{}{}{0pt}{}{m}{m}\;x^0y^{m+1}=$$

$$=\binom{m+1}{0}x^{m+1}y^0+\binom{m+1}{1}x^my^1+\binom{m+1}{2}x^{m-1}y^2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}y^k+\ldots+\binom{m+1}{m}x^1y^m+\binom{m+1}{m+1}x^0y^{m+1}$$

Со тоа е докажана импликацијата: ако формулата (**) е исполнета за $n=m$, тогаш таа е исполнета и за $n=m+1$.

Од чекор 1 и чекор 2, според принципот на математичка индукција следува:

Теорема 3. За секој $n\in\mathbb{N}$ и произволен бином $x+y$:

$$x+y\ ^n=\binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{k}x^{n-k}y^k+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{n}\;x^0y^n \qquad .$$

За пократок запис на биномната формула, членовите во развојот на полиномот од десната страна, обично се означуват како: $T_1, T_2, \ldots\ T_{n+1}$.

За $k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$, членот со реден број $k+1$ гласи:

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}x^{n-k}y^k=C_k^n x^{n-k}y^k$$

Според овие ознаки, $(x+y)^n=T_1+T_2+T_3+\ldots+T_{n+1}$.

Пример 2. Да се одреди осмиот член во развојот на $\frac{3a^2}{5b}+\frac{5b^2}{3a}\ ^{12}$.

Решение. Бидејќи $T_{k+1}=\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k}$, за $k+1=8$, односно за $k=7$, се добива дека осмиот член е:

$$T_8=\binom{12}{7}x^5y^7=\frac{12!}{7!\cdot 5!}\,\frac{3a^2}{5b}^{\ 5}\,\frac{5b^2}{3a}^{\ 7}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{3^5a^{10}}{5^5b^5}\cdot\frac{5^7b^{14}}{3^7a^7}=$$
$$=\frac{11\cdot 9\cdot 8\cdot 5^2a^3b^9}{3^2}=2200a^3b^9$$

Пример 3. Да се докаже дека за секој $n\in\mathbb{N}$:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n .$$

Решение. Нека $n\in\mathbb{N}$. Според биномната формула, за било кои x и y, важи:

$$x+y^{\ n}=C_n^0x^ny^0+C_n^1x^{n-1}y^1+C_n^2x^{n-2}y^2+...+C_n^kx^{n-k}y^k+...$$
$$...+C_n^{n-1}x^1y^{n-1}+C_n^nx^0y^n$$

Ако $x=y=1$, се добива:

$$1+1^{\ n}=C_n^01^n1^0+C_n^11^{n-1}1^1+C_n^21^{n-2}1^2+...+C_n^k1^{n-k}1^k+...$$
$$...+C_n^{n-1}1^11^{n-1}+C_n^n1^01^n$$

односно: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$.

Бидејќи C_n^k е бројот на k-елементни подмножества од множество со n елементи, збирот $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^{n-1}+C_n^n$ ги претставува бројот на подмножества од множество со n елементи кои имаат $0,1,2,...,n-1$ и n елементи.

Тоа значи дека вкупниот број на сите можни подмножества од множество со n елементи изнесува 2^n.

Задачи за самостојна работа

Задача 3. Напиши ги полиномите во развиена форма:

а) $(p+1)^5$ б) $(x+2a)^6$

в) $x+\frac{1}{x}^{\ 5}$ г) $\frac{x}{2}+\frac{4}{x}^{\ 6}$

Задача 4. Ако i е имагинарната единица $(i^2=-1)$, пресметај: $(1+i)^8$.

Задача 5. Напиши ги полиномите во развиена форма:

а) $(p-1)^5$ б) $(x-2a)^6$ в) $\sqrt{a}-b\ ^{8}$

Упатство. $(x-y)^n=(x+(-y))^n$

Задача 6. Одреди го коефициентот што стои пред мономот x^3y^9 во развојот на полиномот $(x+y)^n$.

Задача 7. Пресметај го коефициентот пред a^3b^2 во развиената форма на полинимот $(4a-5b)^n$.

Задача 8. Одреди го седмиот член во развиената форма на полиномот: $(a-2b^2)^{10}$.

Задача 9. Одреди го петтиот член во развиената форма на полиномот: $\sqrt{x}+\sqrt{a}\ ^{12}$.

Задача 10. Одреди го средниот член во развиената форма на полиномот: $\frac{2x}{3y}+\frac{y^2}{x}\ ^{10}$.

Задача 11. Одреди ги средните два члена во развиената форма на: $\left(\frac{3\sqrt[3]{a^2}}{4}+\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^9$.

Задача 12. Одреди го членот во развиената форма на полиномот $a+\sqrt{a}\ ^{8}$, кој содржи a^5.

Задача 13. Одреди го членот во развиената форма на полиномот $a^2+\frac{1}{a}\ ^{9}$, кој не зависи од a.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ