Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија во бројот XXVI 6

Војислав Андрић (Ваљево)

МАГИЧНИ КВАДРАТИ

Вероватно сте запазили да сваки број „Математичког листа" у овој школској години на насловној страни садржи по један магичан квадрат. Подсетимо се дефиниције магичног квадрата.

Квадратна таблица попуњена природним бројевима тако да је збир бројева у свакој врсти, свакој колони и на свакој дијагонали константан назива се *магичан квадрат*. Број поља у једној врсти квадрата назива се *ред* магичног квадрата, а поменути константан збир назива се *карактеристичан збир* магичног квадрата.

Најчешће се у поља магичног квадрата n-тог реда уписују природни бројеви $1, 2, 3, \ldots, n^2$. Како је збир свих природних бројева од 1 до n^2 једнак $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$, то је карактеристичан збир за такав магичан квадрат једнак $\dfrac{n^2(n^2+1)}{2} : n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$. Поменимо још да врсте магичног квадрата бројимо одозго наниже, а колоне слева на десно.

Конструкција магичних квадрата је стари проблем и датира још из Кине, где је династија Ју (око 2200 година пре наше ере) као свој симбол користила магичан квадрат реда 3. Магичним квадратима бавили су се многи математичари и касније. Посебан допринос теорији конструкције магичних квадрата дали су француски математичари XVII века.

У овом чланку показаћемо како се може конструисати магичан квадрат произвољног реда.

Магични квадрати непарног реда. Магичне квадрате непарног реда конструишемо користећи следећа правила:

(1) Бројеви се размештају у свом природном поретку $1, 2, 3, \ldots, n^2$, идући у правцу дијагонале и то увек слева удесно и одоздо на горе.

(2) Број 1 се налази у средишњем пољу прве врсте.

(3) Када се достигне прва врста следећи број се уписује у поље последње врсте и наредне колоне.

(4) Ако се при томе дође до последње (крајње десне) колоне следећи број се уписује у прво поље претходне врсте.

(5) Када је наредно поље већ заузето или је достигнуто поље које се налази у горњем десном углу, следећи број се уписује у исту колону, али у следећу врсту.

На сликама 1 и 2 приказани су магични квадрати реда 3 и 5 који су добијени коришћењем наведених правила.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Сл. 1

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Сл. 2

Напоменимо овде још да се сваки магичан квадрат реда 3 може добити из квадрата приказаног на сл. 1 симетричним пресликавањем у односу на средњу врсту, средњу колону или дијагоналу квадрата. Наведени поступак за конструкцију магичног квадрата непарног реда дао је Љалубер – посланик францускoг краља Луја XIV за време свог боравка у Сијаму (данас Тајланд) у периоду од 1687–1688 године.

Магични квадрати парног реда. Код конструкције магичних квадрата парног реда n разликоваћемо случајеве када је ред облика $n = 4k + 2$ и $n = 4k$, где је k природан број.

A	C
D	B

Сл. 3

Случај $n = 4k + 2 = 2(2k + 1)$. Конструкција магичног квадрата у овом случају врши се у два корака. У првом кораку се помоћу претходног алгоритма конструишу четири магична квадрата A, B, C, D реда $2k + 1$ као на сл. 3.

У магичан квадрат A уписују се бројеви од 1 до $(2k+1)^2$, у B бројеви од $(2k+1)^2+1$ до $2(2k+1)^2$, у C бројеви од $2(2k+1)^2+1$ до $3(2k+1)^2$ и у D бројеви од $3(2k+1)^2+1$ до $4(2k+1)^2$.

Конкретно, ако је $4k+2=6$, тј. $k=1$, у A ће бити уписани бројеви од 1 до 9, у B од 10 до 18, у C од 19 до 27 и у D од 28 до 36. На тај начин добија се квадрат на сл. 4:

$\boxed{8}$	1	6	26	19	$\boxed{24}$
3	$\boxed{5}$	7	21	23	$\boxed{25}$
$\boxed{4}$	9	2	22	27	$\boxed{20}$
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

Сл. 4

35	1	6	26	19	15
3	32	7	21	23	16
31	9	2	22	27	11
8	28	33	17	10	24
30	5	34	12	14	25
4	36	29	13	18	20

Сл. 5

Међутим, квадрат на сл. 4 магичан је само по колонама. У другом кораку добићемо магичан квадрат реда 6 помоћу следећих трансформација:

(1) Бројеве из означених поља квадрата A на сл. 4 заменимо бројевима који се налазе у одговарајућим пољима квадрата D и обрнуто.

(2) Бројеве из последње колоне квадрата C заменимо бројевима који се налазе у одговарајућим пољима квадрата B и обрнуто.

Лако се проверава да се применом ових операција добија квадрат на сл. 5 који је магичан.

Напоменимо да се у случају $k>1$ магичан квадрат добија на описани начин са једином разликом што се у другом кораку трансформација (1) врши на следећи начин: У свакој врсти квадрата A замењује се k бројева одговарајућим бројевима квадрата D, при чему се у средишњој врсти квадрата A почиње од другог поља, а у осталим врстама од првог поља.

Случај $n = 4k$. У овом случају магичан квадрат конструишемо по следећим правилима:

(1) Природни бројеви $1, 2, 3, \ldots, 16k^2$ запишу се прво у поља квадрата у природном редоследу: у првој врсти слева на десно од 1 до $4k$, у другој врсти слева на десно од $4k+1$ до $2 \cdot 4k$, у трећој врсти слева на десно од $2 \cdot 4k + 1$ до $3 \cdot 4k$ итд.

(2) Затим се квадрат $4k \times 4k$ подели на квадрате 4×4. (Приметимо да таквих квадрата има k^2.)

(3) Затим се у сваком квадрату 4×4 сваки број који се налази на дијагоналама тог квадрата премести у поље симетрично у односу на центар полазног квадрата $4k \times 4k$.

Ако је $n = 4$ онда постоји само један квадрат 4×4. На сл. 6 прво су у квадрат 4×4 уписани редом по врстама бројеви 1, 2, 3, …, 16, а затим су означени бројеви које треба преместити централно симетрично. На сл. 7 приказан је магичан квадрат реда 4 који је добијен после тог премештања означених бројева.

$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$
5	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	8
9	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12
$\boxed{13}$	14	15	$\boxed{16}$

Сл. 6

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Сл. 7

Ако је $n = 8 = 4 \cdot 2$, онда се квадрат 8×8 дели на четири квадрата 4×4. На сл. 8 приказан је квадрат 8×8 у коме су уписани бројеви 1, 2, 3, …, 64 и означени они које треба преместити симетрично у односу на центар квадрата. После тог премештања бројева добија се магичан квадрат реда 8 који је приказан на сл. 9.

Осим у случају $n = 3$ постоје и други магични квадрати датог реда. Тако на пример, различитих магичних квадрата реда 4 има укупно 7040. Ако не разликујемо магичне квадрате реда 4 који се добијају један из другог ротацијом квадрата или премештањем бројева симетрично у односу на неку осу симетрије, онда је број магичних квадрата реда 4 једнак 880.

$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7	$\boxed{8}$
9	$\boxed{10}$	$\boxed{11}$	12	13	$\boxed{14}$	$\boxed{15}$	16
17	$\boxed{18}$	$\boxed{19}$	20	21	$\boxed{22}$	$\boxed{23}$	24
$\boxed{25}$	26	27	$\boxed{28}$	$\boxed{29}$	30	31	$\boxed{32}$
$\boxed{33}$	34	35	$\boxed{36}$	$\boxed{37}$	38	39	$\boxed{40}$
41	$\boxed{42}$	$\boxed{43}$	44	45	$\boxed{46}$	$\boxed{47}$	48
49	$\boxed{50}$	$\boxed{51}$	52	53	$\boxed{54}$	$\boxed{55}$	56
$\boxed{57}$	58	59	$\boxed{60}$	$\boxed{61}$	62	63	$\boxed{64}$

Сл. 8

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Сл. 9

Задаци

1. Конструишите магичан квадрат реда: (а) 7, (б) 10, (в) 12.
2. Конструишите магичан квадрат реда 4