Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Макесонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1970

1.(II,70). Два велосипедиста тргнуваат од местата A и B во пресрет еден на друг. Секој од нив по пристигнувањето во другото место се враќа назад во местото од каде што тргнал. Првата средба меѓу велосипедистите станала на 5км од A, а втората на 3км од B. Колкаво е растојанието од A до B?

Решение. Да го означиме растојанието од A до B со x, брзините со кои се движат велосипедистите од A и B со v_1 и v_2 соодветно, времето од тргнувањето до првата средба со t_1, а времето од првата до втората средба со t_2. Имаме:

$$v_1t_1 = 5,\quad v_2t_1 = x-5,\quad v_1t_2 = (x-5)+3,\quad v_2t_2 = 5+(x-3),$$

од каде што добиваме:

$$\frac{x-5}{x+2} = \frac{1}{t_2} = \frac{5}{x-2},$$

$$x(x-12) = 0,$$

т.е. $x = 12$.

2.(II,70). Дадена е равенката $x^2+ax+1=0$, каде што a е природен број.

а) Ако корените на равенката се x_1 и x_2, да се покаже дека $x_1^5+x_2^5$ е цел број.

б) Да се определи најмалата вредност на а за која $x_1^5+x_2^5$ се дели со 25.

Решение. а) Според Виетовите формули, имаме $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=1$, па за да го избегнеме директното пресметување корените на равенката, а сепак да го најдеме изразот $x_1^5+x_2^5$, потребно е овој израз да се напише во облик, во кој ќе фигурираат само изразите x_1+x_2 и x_1x_2. Имаме:

$$\begin{aligned} x_1^5+x_2^5 &= (x_1+x_2)^5-5x_1^4x_2-5x_1x_2^4-10x_1^3x_2^2-10x_1^2x_2^3 = \\ &= (x_1+x_2)^5-5x_1x_2(x_1^3+x_2^3)-10x_1^2x_2^2(x_1+x_2) = \\ &= (x_1+x_2)^5-5x_1x_2[(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)]-10x_1^2x_2^2(x_1+x_2). \end{aligned}$$

Заменувајќи $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=1$, добиваме:

$$x_1^5+x_2^5=-a(a^4-5a^2+5),$$

од каде што се гледа дека, ако а е природен број, тогаш изразот $x_1^5+x_2^5$ е цел број.

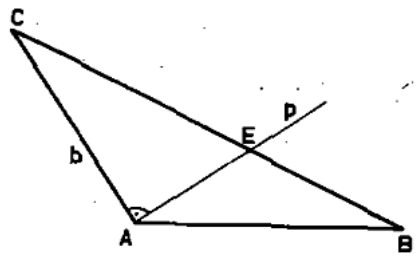
б) Да ставиме $M=x_1^5+x_2^5$. За $a=1$ имаме $M=-1$; за $a=2$ имаме $M=-2$; за $a=3$ имаме $M=-123$; за $a=4$ имаме $M=-684$; за $a=5$ имаме $M=-2525=-25\cdot 101$. Значи, најмалиот природен број а, за кој бројот $M=x_1^5+x_2^5$ се дели со 25, е бројот $a=5$.

3.(II.70). За триаголникот ABC се знае дека $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$ и $\alpha-\beta=90^\circ$.

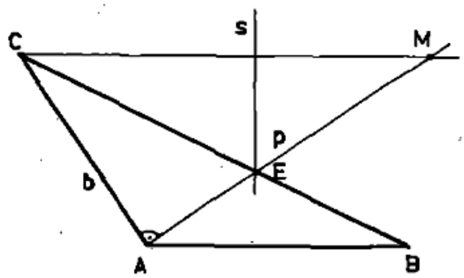
а) Да се конструира овој триаголник.

б) Да се изрази страната $\overline{AB}$ и плоштината на овој триаголник со помош на броевите а и b.

Решение. а) Анализа. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е конструиран. Низ темето A да повлечеме права p нормална на AC и нека $p\cap BC=E$ (црт.1.70). Од $\alpha-\beta=90^\circ$ следува дека триаголникот AEB е рамнокрак, па $\overline{AE}=\overline{EB}$. За правоаголниот триаголник EAC познато е: катетата $\overline{AC}=b$, и збирот $\overline{CE}+\overline{AE}=a$, па тој може да се конструира.



Црт. 1.70



Црт. 2.70

К о н с т р у к ц и ј а. Ја нанесуваме страната $\overline{AC}=b$; низ A повлекуваме права p, нормална на AC; на p ја нанесуваме отсечката $\overline{AM}=a$; повлекуваме симетрала s на отсечката CM и ставаме $s\cap p=E$; низ E ја продолжуваме CE и нанесуваме $\overline{EB}=\overline{EA}$, со што триаголникот ABC е конструиран.

Д о к а з о т е јасен од конструкцијата.

Д и с к у с и ј а. Од $\alpha-\beta=90^\circ$ следува дека $a>b$, па, значи, задачата ќе има решение, единствено до складност, при $a>b$, а ќе нема решение при $a\leqslant b$.

б) Бидејќи триаголниците AEB и CEM (црт.2.70) се рамнокраки со еднакви агли при врвот E, тие се слични, од каде што имаме:

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{CM}:\overline{CE}. \qquad (1)$$

Од правоаголниот триаголник CAM имаме $\overline{CM}^2=a^2+b^2$, а од правоаголниот триаголник EAC имаме $\overline{AE}^2=(a-\overline{AE})^2-b^2$, т.е.

$$\overline{AE}=\frac{a^2-b^2}{2a},$$

а потоа:

$$\overline{CE} = a - \overline{AE} = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Заменувајќи ги овие равенства во (1), добиваме:

$$c = \overline{AB} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

За плоштината P на триаголникот ABC, по Хероновата формула $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, добиваме

$$P = \frac{a\,(a^2 - b^2)}{2(a^2 + b^2)}.$$

4.(II,70). Даден е тетраедарот OABC на кој сите рамнински агли кај темето O се прави. Да се докаже дека

$$P_{ABC}^2 = P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2,$$

каде што P_{XYZ} ја означува плоштината на триаголникот XYZ.

Решение. Да ставиме: $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$. Во тој случај имаме:

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2, \quad \overline{BC}^2 = b^2 + c^2, \quad \overline{CA}^2 = c^2 + a^2.$$

За плоштината P_{ABC} на триаголникот ABC, според Хероновата формула, имаме:

$$\begin{aligned}
P_{ABC}^2 &= s(s - \overline{AB})(s - \overline{BC})(s - \overline{CA}) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(-\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}\right)\cdot \\
&\quad \cdot\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{c^2 + a^2}\right) = \\
&= \frac{1}{4}(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) = P_{OAB}^2 + P_{OBC}^2 + P_{OCA}^2.
\end{aligned}$$

1.(III,70). Да се определи неправоаголен триаголник чија плоштина е цел број, а неговите страни се три последователни, најмали возможни, парни броеви.

Решение. Нека страните на триаголникот се $2к-2$, $2к$, $2к+2$. По Хероновата формула добиваме

$$P^2 = 3к^2(к^2-4).$$

За да е P цел број, треба да биде $3(к^2-4) = a^2$ за некој природен број a. Јасно дека a треба да биде од облик 3c, т.е. треба да е

$$к^2 = 3c^2 + 4.$$

Давајќи вредности на c, добиваме:

c	1	2	3	4	5	6	7	8 . . .
$к^2$	7	16	31	52	79	112	151	196

од каде што се гледа дека к е цел број за $c=2$ $(к=4)$ и за $c=8$ $(к=14)$. За $к=4$ добиваме триаголник со страни 6, 8 и 10, кој е правоаголен. За $к=14$ страните на триаголникот се 26, 28 и 30; тој не е правоаголен, страните му се три последователни, најмали возможни, парни броеви и плоштината му е цел број $(=336)$, што и се бараше.

2.(III,70). Да се реши равенката

$$\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{a^5+1-x} = a+1,$$

каде што a е даден реален број.

Решение. Да ставиме $x = u^5$, $a^5+1-x = v^5$; тогаш имаме $u+v = a+1$, $u^5+v^5 = a^5+1$. Бидејќи:

$$u^5+v^5 = (u+v)^5 - 5uv[(u+v)^3 - 3uv(u+v)] - 10u^2v^2(u+v) =$$
$$= (a+1)^5 - 5uv[(a+1)^3 - 3uv(a+1)] - 10u^2v^2(a+1),$$

добиваме:

$$5(a+1)(uv)^2 - 5(a+1)^3(uv) + (a+1)^5 = a^5 + 1.$$

Кратејќи со $a+1$ $(a \neq -1)$ добиваме:

$$(uv)^2 - (a+1)^2(uv) + a(a^2+a+1) = 0,$$

од каде што

$$(uv)_1 = a, \quad (uv)_2 = a^2 + a + 1.$$

Според тоа, ги добиваме следниве системи:

$$u+v = a+1, \qquad u+v = a+1,$$
$$uv = a \qquad\qquad uv = a^2+a+1.$$

Од првиот систем добиваме $u_1 = a$, $v_1 = 1$ и $u_2 = 1$, $v_2 = a$, а вториот систем нема реално решение.

Според тоа, за $a \neq -1$, решенијата на равенката се $x_1 = a^5$, $x_2 = 1$, а за $a = -1$ секој реален број x е решение на равенката.

3.(III,70). Дадени се две рамнини Π_1 и Π_2 кои се сечат во правата p. Во Π_1 и Π_2 се дадени по една кружница k_1 и k_2 кои се сечат во две точки.

Да се покаже дека постои една и само една сфера на која лежат дадените кружници.

Решение. Кружниците се сечат во две точки што лежат на правата p; да ги означиме со A и B. На k_1 да избереме точка C $(\neq A,B)$, а на k_2 точка D $(\neq A,B)$. Од точките A, B, C и D кои било три не се колинеарни, па нека S е сферата опишана околу тетраедарот $ABCD$. Нека k_1' е кружницата во која Π_1 ја сече S. На k_1' лежат точките A, B и C, а тие лежат и на k_1. Бидејќи кружница е еднозначно определена со три точки, кружниците k_1 и k_1' се совпаѓаат. Значи, k_1 лежи на сферата S. Слично и за k_2.

Значи, сферата S опишана околу тетраедарот $ABCD$ е една, на која лежат кружниците k_1 и k_2. Ако S' е друга сфера на која лежат кружниците k_1 и k_2, тогаш таа мора да минува низ точките A, B, C и D, т.е. ќе се совпаднува со сферата S, со што е докажана и еднозначноста.

4.(III,70). Да се реши равенката

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\dots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=ctg\alpha-ctg2\alpha.$$

Со примена на ова равенство добиваме:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin 2^k x}=(ctgx-ctg2x)+(ctg2x-ctg4x)+\dots+$$
$$+(ctg2^{n-1}x-ctg2^n x)=ctgx-ctg2^n x,$$

па равенката се сведува на

$$ctgx-ctg2^n x=\frac{1}{\sin x},\quad \text{т.е.}\ \frac{\sin(2^n x-x)}{\sin x\sin 2^n x}=\frac{1}{\sin x}.$$

Од дадената равенка имаме $\sin x\neq 0$, па

$$\sin(2^n x-x)=\sin 2^n x,$$

т.е.

$$2^n x-x=k\pi+(-1)^k 2^n x.$$

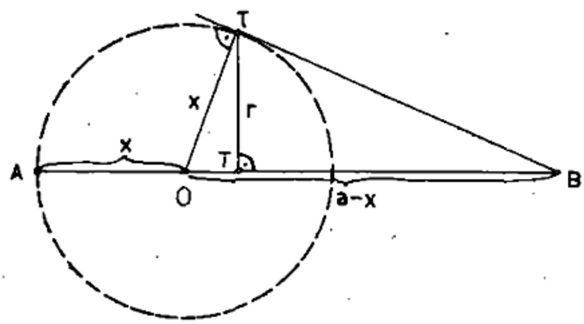
Поради $\sin x\neq 0$, k мора да биде непарен број, па решение на дадената равенка е:

$$x=\frac{k\pi}{2^{n+1}-1},\quad k=\pm1,\pm3,\pm5,\dots$$

1.(IV.70). Дадена е отсечката $\overline{AB}=a$. Низ точката A минува променлива кружница k со центар O на AB. Нека BT е тангента на k повлечена од B. При ротација на BT околу AB се добива дел од конуска површина. Да се изучи промената на плоштината на таа површина во зависност од положбата на центарот O.

Решение. Да го означиме со x радиусот на променливата кружница k, а со r радиусот на основата на формираниот конус (црт. 3.70). За плоштината y на бочната површина на конусот имаме:

$$y=\pi r\overline{BT}. \qquad (1)$$



Црт.3.70

Триаголникот BTO е правоаголен, па

$$\overline{BT}^2=(a-x)^2-x^2, \quad \text{т.е.} \quad \overline{BT}=\sqrt{a^2-2ax},$$

при што е јасно дека ќе биде $0<x<\frac{a}{2}$. Од сличноста на триаголниците BTO и BT´T имаме

$$x:(a-x)=r:\overline{BT},$$

од каде што, по заменувањето на $\overline{BT}$, добиваме:

$$r=\frac{x\sqrt{a^2-2ax}}{a-x}.$$

Заменувајќи ги r и $\overline{BT}$ во (1) добиваме:

$$y = \frac{a\pi(ax - 2x^2)}{a-x}, \qquad (2)$$

со што плоштината y на разгледуваната површина е претставена како функција од радиусот x на променливата кружница.

Од (2) имаме:

$$y' = \frac{a\pi(a^2 - 4ax + 2x^2)}{(a-x)^2}.$$

Во разгледуваниот интервал, y' се анулира само за $x = a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$. Знакот на y' е ист со знакот на триномот $a^2 - 4ax + 2x^2$. Знакот, пак, на овој трином е позитивен за $0 < x < a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$, а е негативен за $a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) < x < \frac{a}{2}$.

Значи, за $0 < x < a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ функцијата расте, т.е. плоштината се *наголемува*, а за $a(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) < x < \frac{a}{2}$ *функцијата опаѓа*, т.е. плоштината се намалува. Плоштината е најголема за $x = (1-\frac{\sqrt{2}}{2})a$.

2.(IV,70). Задача 3.(III,70).

3.(IV,70). Некои членови на аритметичките прогресии

$$17,\ 21,\ 25,\ 29,\ \ldots$$
$$16,\ 21,\ 26,\ 31,\ \ldots$$

се еднакви. Да се пресмета збирот на првите 100 еднакви членови на овие прогресии.

Решение. Да ги означиме со a_i и b_i, $i = 1,2,\ldots$, членовите на првата односно на втората прогресија. За прва прогресија имаме:

$$a_1 = 17, \quad d = 4, \quad a_n = 13 + 4n,$$

а за втората

$$b_1 = 16, \quad d_1 = 5, \quad b_m = 11 + 5m.$$

По услов на задачата имаме $4n + 13 = 5m + 11$, *од каде* $n = m + \frac{m-2}{4}$.

За да биде n природен број треба $\frac{m-2}{4}=к$ да е ненегативен цел број, т.е. m да биде од облик $4к+2$.

Ако со $c_к$ ги означиме еднаквите членови, добиваме:

$$c_к = 5(4к+2)+11 = 20к+21, \quad к=0,1,\dots,$$

од каде што се гледа дека и тие образуваат аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Збирот на првите 100 еднакви членови е 101100.

4.(IV,70). Задача 2.(IV,69).