Регионален натпревар 2007

I година

1. Докажи дека ако $ac-a-c=b^2-2b$, $bd-b-d=c^2-2c$ и $b\neq 1$, $c\neq 1$, тогаш $ad+b+c=bc+a+d$.

Решение. Ако додадеме 1 на двете страни од првото равенство, добиваме $ac-a-c+1=b^2-2b+1$, од каде со разложување се добива $(a-1)(c-1)=(b-1)^2$. Слично, со додавање 1 на двете страни и од второто равенство, а потоа и со разложување се добива $(b-1)(d-1)=(c-1)^2$. Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)=(b-1)^2(c-1)^2,$$

од каде

$$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1),$$

па со множење се добива

$$ad-a-d+1=bc-b-c+1,$$

од каде со средување се добива

$$ad+b+c=bc+a+d,$$

што I требаше да се докаже.

2A. Равенката $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, каде $p>1$ е даден прост број, да се реши во множеството природни броеви.

Решение. Равенката може последователно да ја запишеме во облик

$$px+py=xy$$

$$xy-px-py+p^2=p^2$$

$$x(y-p)-p(y-p)=p^2$$

$$(x-p)(y-p)=p^2.$$

Бидејќи p е прост број, од последната равенка можни се следните случаи:

1) $x-p=1, y-p=p^2$,

2) $x-p=p, y-p=p$ и

3) $x-p=p^2, y-p=1$.

Од 1) $x=p+1, y=p^2+p$, од 2) $x=2p, y=2p$, и од 3) $x=p^2+p, y=p+1$. Не е тешко да се провери дека добиените решенија се решенија и на почетната равенка.

2Б. Четирицифрен број е полн квадрат, при што ако од неговите цифри се одземе иста цифра се добива број кој е пак полн квадрат. Определи ги сите такви природни броеви.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{abcd}=A^2$, па од условот имаме

$$\overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)}=B^2.$$

Ако ги одземеме последните две равенства, добиваме

$$1000a+100b+10c+d-1000a+1000k-100b+100k-10c+10k-d+k=A^2-B^2,$$

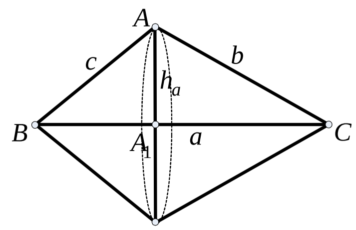
односно $1111k=A^2-B^2$, ако разложиме, имаме

$$11\cdot 101\cdot k=(A-B)(A+B).$$

Бидејќи, A^2 и B^2 се четирицифрени броеви, заклучуваме дека $32\le A\le 99$ и $32\le B\le 99$, од каде $64\le A+B\le 198$ и $0\le A-B\le 67$. Како $A+B$ и $A-B$ се со иста парност, заклучуваме дека $A+B=101$ и $A-B=11k$, при што $k=1,3,5$. За $k=1$, $\overline{abcd}=3136=56^2$, за $k=3$, $\overline{abcd}=4489=67^2$ и за $k=5$ се добива бројот $\overline{abcd}=6084$, кој не го исполнува условот на задачата.

3. Најди го односот на волумените на телата што се добиваат со ротација на триаголникот околу неговите страни a, b и c.

Решение. Ако триаголникот ABC ротира околу страната $\overline{BC}=a$, се добива тело со волумен



$$V_a=\tfrac{1}{3}h_a^2\pi\cdot\overline{BA_1}+\tfrac{1}{3}h_a^2\pi\cdot\overline{A_1C}=\tfrac{1}{3}h_a^2\pi\cdot a.$$

Слично, $V_b=\frac{1}{3}h_b^2\pi\cdot b$ и $V_c=\frac{1}{3}h_c^2\pi\cdot c$ се волумените на телата добиени со ротирање на триаголникот околу страните $\overline{AC}=b$ и $\overline{AB}=c$ соодветно. Тогаш, за бараниот однос имаме,

$$V_a:V_b:V_c=\tfrac{1}{3}h_a^2\pi a:\tfrac{1}{3}h_b^2\pi b:\tfrac{1}{3}h_c^2\pi c=h_a^2a:h_b^2b:h_c^2c.$$

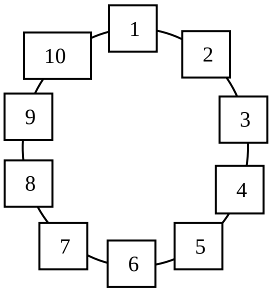
Нека P е плоштината на триаголникот ABC, па имаме $P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, од каде $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$ и со замена во односот добиваме

$$V_a:V_b:V_c=\frac{4P^2}{a^2}a:\frac{4P^2}{b^2}b:\frac{4P^2}{c^2}c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}.$$

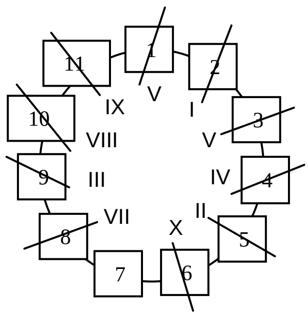
4А. Во една кошница се наоѓаат црвени, бели и жолти цветови. Бројот на жолтите цветови не е помал од бројот на белите цветови и не е поголем од третината на црвените цветови. Вкупниот број на бели и жолти цветови не е помал од 55. Најди го најмалиот број на црвени цветови.

Решение. Нека во кошницата има a-жолти, b-бели и c-црвени цветови. Од условот на задачата следува дека $a \geq b$ (1), $a \leq \frac{1}{3}c$ (2) и $a+b \geq 55$ (3). Од (1) и (3) добиваме дека $2a \geq 55$, од каде $a \geq 28$, затоа што $a \in \mathbb{N}$. Тогаш, од (2) се добива $c \geq 3a \geq 3 \cdot 28 = 84$. Значи, најмалиот број на црвени цветови е 84.

4Б. Во круг се разместени 10 деца. Треба да им се приклучи уште Ивица. Сите ќе ја играат играта на испаѓање на следниот начин: почнуваат да бројат кај бројот 1 во насока на движење на стрелките на часовникот, а кај оној кај кој што ќе падне бројот 13 испаѓа од играта. се продолжува со броење со останатите таму каде што е прекинато и тринаесеттиот пак испаѓа од играта итн. На кое место (меѓу кои два од десетте означени броеви, види слика) треба да застане Ивица, за да остане последен во играта?



Решение. Кога Ивица ќе влезе во кругот, во него ќе има 11 деца. Со прецртување на секој 13-ти број (не ги броиме веќе прецртаните) и ги означиме со



римски броеви според тоа кој по ред испаднал, ќе ја добиеме горната слика.

Значи остана бројот 7. Според тоа за да победи, т.е за да остане последен при броењето Ивица треба да застане помеѓу броевите 6 и 7.

II година

1. Определи ги сите целобројни вредности на параметарот m, така што решенијата на системот

$$\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 3x + my = 4 \end{cases},$$

да ги задоволуваат условите $x>0,\ y<0$.

Решение. Можеме да искористиме било кој од методите за определување на решенија на систем од две равенки со две непознати. На пример, ако ги определиме детерминантите на системот и на променливите, добиваме:

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & -2\\ 3 & m\end{vmatrix}=m^2+6\,,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -2\\ 4 & m\end{vmatrix}=3m+8\,,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} m & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4m-9\,.$$

Бидејќи $m^2+6\neq 0$, решенија на системот се $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{3m+8}{m^2+6}$, $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{4m-9}{m^2+6}$. Од условите $x>0, y<0$, го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases}\frac{3m+8}{m^2+6}>0\\ \frac{4m-9}{m^2+6}<0\end{cases}$$

Бидејќи $m^2+6>0$, последниот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}3m+8>0\\ 4m-9<0.\end{cases}$$

Од првата равенка на системот добиваме $m>-\frac{8}{3}$, а од втората равенка на системот добиваме $m<\frac{9}{4}$. Целобројни вредности на m кои ги задоволуваат неравенките $-\frac{8}{3}<m<\frac{9}{4}$ се $m=0,\pm1,\pm2$.

2. Дадени се реалните броеви $a,b,c\geq 0$ за кои важи $b\neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{c}$ и $a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$. Докажи дека

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\ .$$

Решение. Ќе направиме две трансформации на равенството:

$a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2$:

$$a=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-(\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

и

$$b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-a=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})^2-(\sqrt{a})^2=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\ .$$

Ако ги искористиме овие две трансформации, добиваме:

$$\begin{aligned}a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2\\&=(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})\end{aligned}\ .$$

Од последните две равенства, бидејќи $b \neq c$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{c}$, имаме

$$\frac{a+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}{b+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(2\sqrt{a}+2\sqrt{b}-2\sqrt{c})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

3А. Дадени се реалните броеви $a,b,c,d \geq 0$ за кои важи

$$\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}.$$

Докажи дека $ad=bc$.

Решение. Ако $\sqrt{ac}+\sqrt{bd}=\sqrt{(a+b)(c+d)}$ со квадрирање, добиваме

$$2\sqrt{ac}\sqrt{bd}=ad+bc.$$

Со негово квадрирање добиваме

$$4acbd=(ad)^2+2adbc+(bc)^2,$$

$$(ad)^2-2adbc+(bc)^2=0.$$

Тогаш, од $9ad-bc)^2=0$ следува $ad=bc$, што требаше да се докаже.

4А. Нека x_0 и x_1 се реални корени на равенката $x^2+a_1x+b_1=0$, x_0 и x_2 се реални корени на равенката $x^2+a_2x+b_2=0$ и x_0 и x_3 се реални корени на равенката $x^2+a_3x+b_3=0$. Најди ги корените на равенката

$$x^2+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}x+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0.$$

Решение. Од $x_0{}^2+a_1x_0+b_1=0$, $x_0{}^2+a_2x_0+b_2=0$ и $x_0{}^2+a_3x_0+b_3=0$ добиваме

$$3x_0^2+(a_1+a_2+a_3)x_0+b_1+b_2+b_3=0,$$

односно

$$x_0^2+\frac{a_1+a_2+a_3}{3}x_0+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}=0$$

па x_0 е реален корен на дадената равенка. Тогаш, равенката има уште еден реален корен. Од $x_0+x_1=-a_1$, $x_0+x_2=-a_2$ и $x_0+x_3=-a_3$ добиваме

$$3x_0+x_1+x_2+x_3=-(a_1+a_2+a_3),$$

односно

$$x_0+\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}.$$

Бидејќи и

$$x_0\cdot\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{x_0x_1+x_0x_2+x_0x_3}{3}=\frac{b_1+b_2+b_3}{3},$$

следува дека x_0 и $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ се корени на дадената равенка.

4Б. Најди ги сите вредности на реалниот параметар $a \neq 0,1$ за кои равенките $x^2-(2a+1)x+a=0$ и $x^2+(a-4)x+a-1=0$ имаат реални корени x_1, x_2 и x_3, x_4, соодветно, за кои е исполнето равенството

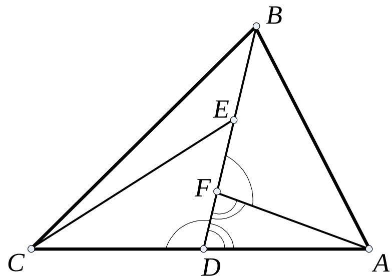
$$\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_4}{x_2}=\frac{x_1x_4(x_1+x_2+x_3+x_4)}{a}.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно со

$$a(x_1x_2+x_3x_4)=x_1x_2x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4).$$

Од Виетовите формули ја добиваме равенката $a(2a-1)=a(a-1)(a+5)$. Бидејќи $a \neq 0$, ја добиваме квадратната равенка $a^2+2a-4=0$, чиишто решенија се $-1-\sqrt{5}$ и $-1+\sqrt{5}$.

3Б. Во триаголникот ABC е повлечена тежишна линија BD. Точките E и F ја делат тежишната линија на три еднакви дела $\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FD}$. Ако $\overline{AB}=1$ и $\overline{AF}=\overline{AD}$, определи ја должината на отсечката CE.



Решение. Бидејќи $\overline{AF}=\overline{AD}$, триаголникот DAF е рамнокрак, па според тоа $\measuredangle ADF=\measuredangle AFD$, а оттука имаме $\measuredangle BFA=\measuredangle CDE$. Отсечката BD е тежишна линија, па затоа $\overline{CD}=\overline{AF}$, а од условот на задачата $\overline{BF}=\overline{DE}$. Заради тоа, од признакот CAC, триаголниците CDE и AFB се складни , па според тоа $\overline{CE}=\overline{AB}=1$.

III година

1. Докажи дека

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=0,$$

каде α,β,γ се агли во триаголник, а a,b и c се соодветните страни.

Решение. Собироците од левата страна на равенството ќе ги помножиме и поделиме редоследно со $\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ и ќе ги искористиме равенствата

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=k,$$

(синусна теорема) при што добиваме

$$\frac{a^2\sin(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{b^2\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\beta}+\frac{c^2\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma}=$$

$$=(\tfrac{a}{\sin\alpha})^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+(\tfrac{b}{\sin\beta})^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+(\tfrac{c}{\sin\gamma})^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$$

$$=k^2\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+k^2\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+k^2\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$$

$$=k^2(\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta))=(*)$$

Ако ја искористиме адиционата формула

$$\sin(\theta-\varphi)=\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\,,$$

добиваме:

$$(*)=k^2[\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+\sin\beta(\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha)+$$
$$+\sin\gamma(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)]$$
$$=k^2[\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-$$
$$-\sin\beta\cos\gamma\sin\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos\beta-\sin\gamma\cos\alpha\sin\beta$$
$$=k^2\cdot 0=0$$

2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} xy=1 \\ x+y+\cos^2 z=2 \end{cases}.$$

Решение. Од првата равенка добиваме дека реалните броеви x и y се со ист знак. Бидејќи $0\le\cos^2 z\le 1$ за било кој реален број z, добиваме дека

$$x+y=2-\cos^2 z\ge 1\ .$$

Бидејќи x и y се со ист знак, добиваме дека тие се позитивни.

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивни реални броеви x и y за кои е исполнето $xy=1$, имаме

$$x+y\ge 2\sqrt{xy}=2\,.$$

Од друга страна $x+y=2-\cos^2 z\le 2$, па според тоа $x+y=2$. Сега го добиваме системот

$$\begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases}.$$

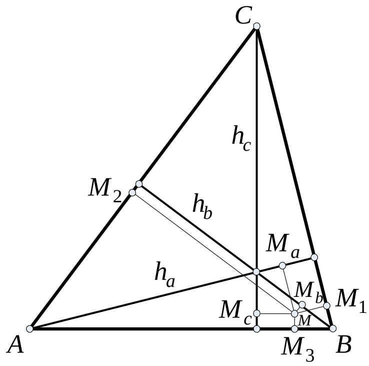
Не е тешко да се провери дека единствено решение на системот кое е позитивно е $x=y=1$.

Тогаш од втората равенка на почетниот систем добиваме $\cos^2 z=0$, чии решенија се $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Конечно решенија на системот се $\{(1,\frac{\pi}{2}+k\pi)\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

3А. Во внатрешноста на триаголникот ABC избрана е произволна точка M. Нека M_1,M_2,M_3 се проекциите на M врз страните a,b,c на триаголникот, соодветно, а M_a, M_b, M_c се проекциите на M врз висините h_a, h_b, h_c на триаголникот, соодветно. Докажи дека

$$\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}}+\frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}}+\frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}}\geq 6\,.$$

Решение. Од $\frac{P_{ABC}}{P_{MBC}}=\frac{h_a}{\overline{MM_1}}$ следува



$$\frac{P_{ABC}-P_{MBC}}{P_{MBC}}=\frac{h_a-\overline{MM_1}}{\overline{MM_1}},$$

односно

$$\frac{P_{ABM}+P_{AMC}}{P_{MBC}}=\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}}.$$

Аналогно

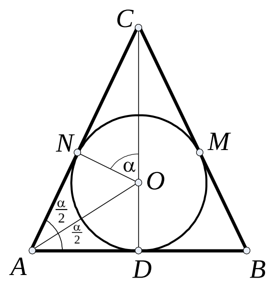
$$\frac{P_{ABM}+P_{BMC}}{P_{AMC}}=\frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}} \text{ и } \frac{P_{BCM}+P_{AMC}}{P_{ABM}}=\frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}}.$$

Тогаш

$$\frac{\overline{AM_a}}{\overline{MM_1}}+\frac{\overline{BM_b}}{\overline{MM_2}}+\frac{\overline{CM_c}}{\overline{MM_3}}=(\frac{P_{ABM}}{P_{MBC}}+\frac{P_{BCM}}{P_{ABM}})+(\frac{P_{AMC}}{P_{MBC}}+\frac{P_{BCM}}{P_{AMC}})+(\frac{P_{ABM}}{P_{AMC}}+\frac{P_{CMA}}{P_{ABM}})$$
$$\geq 2+2+2=6$$

3Б. Во рамнокрак триаголник аголот при основата е еднаков на α. Пресметај ја должината на основата на триаголникот ако висината спуштена врз основата е за m поголема од радиусот на впишаната кружница.

Решение. Нека ABC е триаголник со основа AB во кој $\measuredangle BAC=\alpha$. Од темето C спуштаме нормала CD, $\overline{CD}=h$, која во исто време е и симетрала на $\measuredangle BCA$. Нека симетралата на аголот BAC и симетралата CD се сечат во точката O која е центар на впишаната кружница. Допираните точки на впишаната кружница k со страните AB, BC и CA ќе ги означиме со D, M, N соодветно. Должината на радиусот на кружницата е $\overline{ON}=r=\overline{OD}$ и $\measuredangle OAN=\measuredangle OAB=\frac{\alpha}{2}$. Триаголниците CON и CAD се слични (имаат по еден прав агол и агли со взаемно нормални краци). Во триаголникот ONC имаме, $\measuredangle NOC=\alpha$, $\overline{CO}=h-r=m$ и $\overline{ON}=r$, па според тоа $r=\overline{ON}=\overline{OC}\cos\alpha=m\cos\alpha$.



Триаголникот ADO е правоаголен и еден негов остар агол е $\frac{\alpha}{2}$, а една негова страна е $\overline{OD}=m\cos\alpha$. Бидејќи $\frac{\overline{AD}}{\overline{OD}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, добиваме

$$\frac{a}{2}=\overline{AD}=\overline{OD}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=m\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Конечно, должината на основата е $a = 2m\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

4А. Реши ја равенката

$$2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0 .$$

Решение.Равенката ќе ја запишеме во обликот

$$2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y .$$

За произволни $x, y \in \mathbb{R}$, имаме $|x| \geq 0$ и $1 + x^2 + |y| \geq 1$, од каде добиваме дека неравенствата $2^{|x|} \geq 1$, $\lg(1 + x^2 + |y|) \geq 0$, $\cos y \leq 1$ се точни. Според тоа

$$\cos y \leq 1 \leq 2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) \ . \qquad (1)$$

Равенство е можно ако и само ако почениот и крајниот израз во (1) се еднакви на единица, т.е.

$$\cos y = 1 \text{ и } 2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = 1 .$$

Од равенката $\cos y = 1$, добиваме дека решенија се $y = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Од точното неравенство $2^{|x|} \geq 1$ во множеството реални броеви , за равенката

$$2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = 1$$

добиваме

$$2^{|x|} = 1, \qquad (2)$$

$$\lg(1 + x^2 + |y|) = 0 . \qquad (3)$$

Решение на (2) е $|x| = 0$, односно $x = 0$, а решение на (3) кога $x = 0$ е $1 + |y| = 1$, односно $y = 0$.

Конечно добиваме дека единствено решение на почетната равенка е $x = y = 0$.

4Б.Реши ја равенката

$$\log_6(3 \cdot 4^{-\frac{1}{x}} + 2 \cdot 9^{-\frac{1}{x}}) + \frac{1}{x} = \log_6 5 .$$

Решение. Јасно е дека за $x = 0$ равенката не е дефинирана. За $x \neq 0$ воведуваме смена $-\frac{1}{x} = y$, при што равенката го добива обликот

$$\log_6(3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y) = y + \log_6 5 ,$$

$$\log_6(3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y) = \log_6 6^y + \log_6 5 ,$$

$$\log_6(3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y) = \log_6 5 \cdot 6^y .$$

Ако антилогартимираме, добиваме

$$3 \cdot 4^y + 2 \cdot 9^y = 5 \cdot 6^y , \qquad / : 9^y ,$$

$$3 \cdot (\tfrac{2}{3})^{2y} + 2 - 5 \cdot (\tfrac{2}{3})^y = 0 .$$

Воведуваме смена $(\frac{2}{3})^y = t$, при што добиваме $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Решенијата на последната квадратна равенка се $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{2}{3}$.

- За $t_1 = 1$, ја добиваме равенката $(\frac{2}{3})^y = 1$,од каде имаме $y = 0$. Равенката $-\dfrac{1}{x} = 0$ нема решенија.

- За $t_2 = \frac{2}{3}$ ја добиваме равенката $(\frac{2}{3})^y = \frac{2}{3}$ која има единствено решение $y = 1$. Решение на равенката $-\frac{1}{x} = 1$ е $x = -1$.

Значи, единствено решение на равенката е $x = -1$.

IV година

1. Определи ја кривата на која се наоѓаат темињата на параболите
$$y = -x^2 + bx + c,$$
кои ја допираат параболата $y = x^2$.

Решение. Нека параболите $y = -x^2 + bx + c$ и $y = x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2 + bx + c = x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2 - bx - c = 0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2 + 8c = 0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c = -\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y = -x^2 + bx + c$ го има обликот $y = -x^2 + bx - \frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{8})$. Бидејќи $\frac{b^2}{8} = \frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2} \to \frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, т.е. $y = \frac{1}{2}x^2$.

2. Пресметај го збирот
$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2.$$

Решение. Нека $n = 2k + 1$.Тогаш
$$\begin{aligned} 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... - (2k)^2 + (2k+1)^2 &= \\ &= 1^2 + (3^2 - 2^2) + (5^2 - 4^2) + ... + ((2k+1)^2 - (2k)^2) \\ &= 1 + 5 + 9 + ... + (4k+1) \\ &= \tfrac{(4k+2)(k+1)}{2} \\ &= (2k+1)(k+1) = \tfrac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$
Нека, сега, $n = 2k$. Тогаш

$$1^2-2^2+3^2-4^2+...+(2k-1)^2-(2k)^2=$$
$$=-((2^2-1^2)+(4^2-3^2)+...+((2k)^2-(2k-1)^2))$$
$$=-(3+7+11+...+(4k-1))$$
$$=-\frac{(4k+2)k}{2}=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

Значи бараниот збир е $(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

3А. Нека a и b се позитивни реални броеви и n е цел број. Докажи дека важи неравенството

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n\geq 2^{n+1}.$$

Решение. За $n=0$ важи равенство. Да претпоставиме дека $n>0$. Тогаш

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n\geq 2\sqrt{(1+\tfrac{a}{b})^n(1+\tfrac{b}{a})^n}=2\sqrt{(2+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})^n}\geq 2\sqrt{4^n}=2^{n+1}.$$

Нека $n<0$. Ставаме $m=-n>0$. Тогаш

$$(1+\tfrac{a}{b})^n+(1+\tfrac{b}{a})^n=(\tfrac{b}{a+b})^m+(\tfrac{a}{a+b})^m=\tfrac{1}{2^m}((\tfrac{2b}{a+b})^m+(\tfrac{2a}{a+b})^m)$$
$$=\tfrac{1}{2^m}((1+\tfrac{b-a}{a+b})^m+(1+\tfrac{a-b}{a+b})^m)\geq\tfrac{1}{2^m}\cdot 2=2^{1-m}=2^{n+1},$$

бидејќи $(1+\tfrac{b-a}{a+b})^m+(1+\tfrac{a-b}{a+b})^m\geq 2$. Последново неравенство следува од биномната формула.

3Б. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_1a_2...a_n=1$. Докажи дека

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме:

$$4+a_1=1+1+1+1+a_1\geq 5\sqrt[5]{a_1},$$
$$4+a_2=1+1+1+1+a_2\geq 5\sqrt[5]{a_2},$$
$$...,$$
$$4+a_n=1+1+1+1+a_n\geq 5\sqrt[5]{a_n}.$$

Ако ги помножиме овие неравенства добиваме

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n\sqrt[5]{a_1a_2...a_n}=5^n.$$

4А. Дадени се три позитивни броеви a,b,c такви што за секој $k\in\mathbb{N}$ од должините a^k,b^k,c^k може да се формира триаголник. Докажи дека меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

Решение. Нека $a \neq b \neq c \neq a$ и нека $a < b < c$ (не се губи од општоста ако се претпостави тоа). Од условот a^k, b^k, c^k се должини на страните на триаголник следува

$$c^k < a^k + b^k\,,\ k = 1,2,3. \tag{1}$$

Но

$$c^k = \left(b + (c-b)\right)^k = b^k + kb^{k-1}(c-b) + \underbrace{\tbinom{k}{2}b^{k-2}(c-b)^2 + \ldots + (c-b)^k}_{\geq 0}.$$

$$\geq b^k + kb^{k-1}(c-b)$$

Последново неравенство важи за секој $k \in \mathbb{N}$.

Постои $k_0 \in \mathbb{N}$ така што $k_0(c-b) > b$. За k_0 важи

$$c^{k_0} \geq b^{k_0} + k_0 b^{k_0-1}(c-b) > b^{k_0} + b^{k_0-1}\left(k_0(c-b)\right) > b^{k_0} + b^{k_0} > b^{k_0} + a^{k_0}\,,$$

што е во контрадикција со (1). Значи меѓу броевите a, b, c има барем два еднакви.

4Б. Должините на помалата дијагонала, страната и поголемата дијагонала во ромбот формираат геометриска прогресија. Определи ги аглите на ромбот!

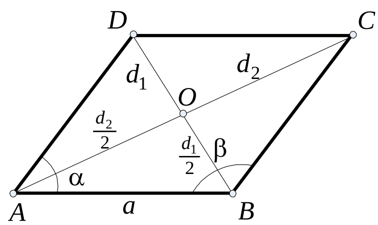
Решение. Нека $ABCD$ е ромб во кој дијагоналата $d_1 = \overline{BD}$, страната $a = \overline{AB}$ и дијагоналата $d_2 = \overline{AC}$ се последователни членови на геометриска прогресија.

Значи, постојат броеви b и q такви што $d_1 = b$, $a = bq$, $d_2 = bq^2$.

Од правоаголниот триаголник AOB, според теоремата на Питагора имаме

$$(\tfrac{d_1}{2})^2 + (\tfrac{d_2}{2})^2 = a^2\,,\quad \tfrac{b^2}{4} + \tfrac{b^2}{4}q^4 = b^2q^2\,,\quad q^4 - 4q^2 + 1 = 0\,.$$

Ако воведеме смена $q^2 = t$, ја добиваме квадратната равенка $t^2 - 4t + 1 = 0$ чии решенија се $t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$.



За решението $t = 2 + \sqrt{3}$, добиваме

$$q = \sqrt{2+\sqrt{3}}\,,\ d_1 = b\,,$$

$$a = b\sqrt{2+\sqrt{3}}\,, d_2 = b(2+\sqrt{3})\,.$$

Од правоаголниот триаголник AOB, добиваме

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\frac{d_1}{2}}{\frac{d_2}{2}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{b}{b(2+\sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}\,.$$

Конечно, аглите на ромбот $ABCD$ се

$$\alpha = 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3}) \text{ и } \beta = \pi - 2\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})\,.$$

Аналогно се постапува и за решението $t = 2 - \sqrt{3}$.