Geometrijski dokazi nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine

Anđelko Marić, Sinj

Podsjetimo se definicije:

Za pozitivne realne brojeve $x_1,\ x_2,\dots,x_n$, *broj* $A=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{2}$ *zove se aritmetička, a broj* $G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ *geometrijska sredina brojeva* $x_1,\ x_2,\dots,x_n$.

Vrijedi poučak:

Aritmetička sredina nije manja od geometrijske sredine, to jest $A\geqslant G$, *pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je* $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Za $n=2$ i pozitivne brojeve x, y, ta se nejednakost piše:

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}. \tag{1}$$

Često se ta nejednakost piše u ekvivalentnom obliku:

$$x^2+y^2\geqslant 2xy, \tag{1'}$$

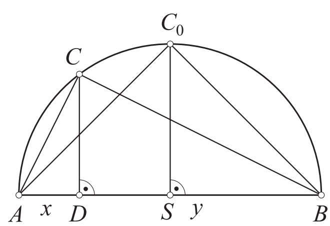
(svaki je broj zamijenjen svojim kvadratom). Dokaz te nejednakosti vrlo je jednostavan. Pokažimo ga. Vrijedi očita nejednakost:

$$(x-y)^2\geqslant 0. \tag{2}$$

Odavde se dobije ekvivalentna nejednakost: $x^2-2xy+y^2\geqslant 0$, odnosno $x^2+y^2\geqslant 2xy$, što je (1'). Jednakost u (1') vrijedi ako i samo ako vrijedi u (2), to jest ako i samo ako je $x=y$.

Sada ćemo navesti tri dokaza u kojima ćemo koristiti geometrijsku, odnosno analitičko-geometrijsku metodu.

1. Pozitivne brojeve x i y možemo predočiti dužinama duljina x, odnosno y. Neka su A, D i B kolinearne točke (u tom uređaju), uzete tako da je $|AD|=x$, $|BD|=y$, $|AB|=x+y$. Ako je S polovište dužine $\overline{AB}$, tada je $|AS|=|BS|=\dfrac{x+y}{2}$. Nacrtajmo polukružnicu k kojoj je dužina $\overline{AB}$ promjer, tj. polukružnicu sa središtem u S i polumjerom $r=\dfrac{x+y}{2}$.



Slika 1.

Neka su C i C_0 točke polukružnice k takve da su njihove ortogonalne projekcije na promjer $\overline{AB}$ točke D, odnosno S (sl. 1). Očito vrijedi

$$|C_0S|\geqslant|CD|. \tag{3}$$

Jednakost u (3) vrijedi ako i samo ako je $C\equiv C_0$, tj. ako je $x=y$.

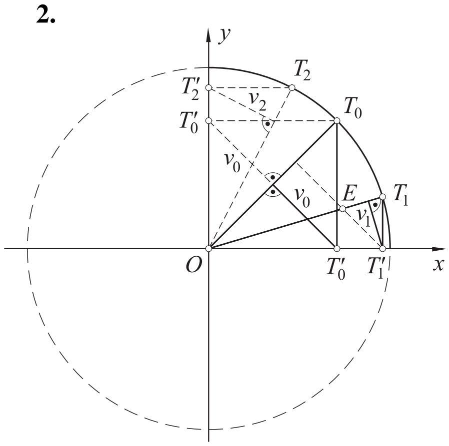
Po Talesovu poučku, trokuti ABC i ABC_0 su pravokutni, a dužine $\overline{CD}$ i $\overline{C_0S}$ su njihove visine na zajedničku hipotenuzu $\overline{AB}$.

Po Euklidovu poučku vrijedi

$$|CD|=\sqrt{|AD|\cdot|BD|}=\sqrt{xy}. \tag{4}$$

Kako je $|C_0S|=r=\dfrac{x+y}{2}$, to, zbog (3) i (4), neposredno slijedi $\dfrac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$. Time je poučak o nejednakosti aritmetičke i geometrijske sredine dokazan. Iz svega, također proizlazi da jednakost u dokazanoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $x=y$.

2.



Slika 2.

Označimo, za pozitivne brojeve x i y: $x^2+y^2=r^2$, $r\in\mathbf{R}^+$. Skup svih uređenih parova (x,y) za koje to vrijedi predstavlja luk (u prvom kvadrantu) kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i polumjera r. Neka je $T_0(x_0,y_0)$ točka na luku kružnice, tako da je $x_0=y_0$, a $T_1(x_1,y_1)$ bilo koja točka toga luka pri čemu je $x_1\geqslant x_0$, zbog čega je $y_1\leqslant y_0$.

Neka su T_0' i T_1' ortogonalne projekcije točaka T_0 i T_1 na os apscisa (sl. 2).

Promatrajmo pravokutne trokute $OT_1'T_1$ i $OT_0'T_0$, njihove visine na pripadne hipotenuze označimo s v_1, v_0, a ploštine tih trokuta s P_1, P_0.

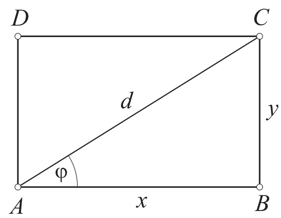
Očito vrijedi nejednakost: $v_0\geqslant|T_1'E|\geqslant v_1 \implies v_0\geqslant v_1$. Sada vrijedi slijed nejednakosti: $v_0\geqslant v_1 \implies rv_0\geqslant rv_1 \implies 2P_0\geqslant 2P_1 \implies x_0y_0\geqslant x_1y_1$.

Kako je $x_0=y_0$, to je $x_0y_0=x_0^2=\dfrac{x_0^2+y_0^2}{2}=\dfrac{r^2}{2}=\dfrac{x^2+y^2}{2}$, odakle zaključujemo da je $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant x_1y_1$, za svaki $x\leqslant x_1$, $y\geqslant y_1$, a jednakost vrijedi samo za $x=y=x_1=y_1$.

Na potpuno isti način postupamo ako je $x_2\leqslant x_0$, $y_2\geqslant y_0$, tj. za točku $T_2(x_2,y_2)$. U ovom slučaju točke T_0 i T_2 projiciramo na os ordinata i dobijemo $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant x_2y_2$.

Time smo dokazali da, za svaka dva pozitivna broja x, y vrijedi $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$, pri čemu vrijedi jednakost ako i samo ako je $x=y$, tj. dokazali smo poučak o jednakosti aritmetičke i geometrijske sredine.

3. Za svaka dva pozitivna realna broja x, y postoji $d\in\mathbf{R}^+$ i $\varphi\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, tako da je $x=d\cos\varphi$, $y=d\sin\varphi$. To se lako vidi, nacrta li se pravokutnik $ABCD$, kojemu je $|AB|=x$, $|BC|=y$, tada je $d=|AC|$, $\varphi=\sphericalangle CAB$, sl. 3.



Slika 3.

Za površinu P pravokutnika vrijedi:

$$P=xy=d\cos\varphi\cdot d\sin\varphi=\frac{1}{2}d^2\sin 2\varphi\leqslant\frac{1}{2}d^2,$$

$$\text{tj.}\quad xy\leqslant\frac{1}{2}d^2. \tag{5}$$

Jednakost u (5) vrijedi ako i samo ako je $\sin 2\varphi=1 \iff \varphi=\dfrac{\pi}{4} \iff x=y$.

Po Pitagorinom poučku je

$$d^2=x^2+y^2. \tag{6}$$

Iz (5) i (6) neposredno slijedi $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$, čime je nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine dokazana.