# Децималски метод решавања једначина

*др Славиша Б. Прешић*, Београд

Реални бројеви се, што је у пракси веома корисно, могу изражавати добро познатим *децималским записима*, облика $a, a_1a_2a_3\ldots$ где $a$ је неки цео број, док $a_1, a_2, a_3, \ldots$ су *децимале*, односно $0, 1, 2, \ldots, 9$. Дуга је историја о таквом представљању реалних бројева. У вези са тим, значајно је истаћи холандског математичара Симона Стевина (1548-1620).

У овом излагању ћемо на примерима упознати како се за неку задану $x-$једначину

$$f(x) = 0 \qquad (x \text{ је непознат реалан број})$$

уз одређене припреме и претпоставке, корак-по-корак тражи једно њено решење.

**Пример 1.** Одредити на две децимале $\sqrt{2}$.

*Решење.* Са $x$ означимо тај тражени корен. Тако $x = \sqrt{2}$. Квадрирањем обе стране долазимо до ове квадратне једначине

$$(*1) \qquad x^2 = 2.$$

Задатак се своди на тражење њеног позитивног решења, на две децимале.

*Први корак.* Полазећи од $x^2 = 2$ и $x > 0$, трудимо се да то $x$ *укљшимо* између некоја два цела броја. Користимо ознаке $L = x^2, D = 2$. Ако $x$ има вредност 0, онда $L$ има вредност 0, а $D$ је 2. Значи, $L < D$, рећи ћемо и овако *имамо подбачај*.
Сада за $x$ дамо вредност 1. Тада $L = 1, D = 2$, па опет имамо подбачај. Даље, за $x$ дамо вредност 2. Тада $L = 4$, а $D = 2$, односно важи неједнакост $L > D$, рећи ћемо сада имамо *пребачај*. Стизањем на пребачај завршава се први корак. За $x$ имамо ову неједначину $1 < x < 2$. То $x$ можемо и овако записати

$$(*2) \qquad x = 1 + \frac{a_1}{10} \qquad \text{где } a_1 \text{ је непознат број из интервала}(0, 10).$$

Можемо овако рећи: Сада $x$ знамо *до на* тај број* $a_1$. Ради одређивања $a_1$ направићемо му једначину. Тако, у једначину $(*1)$ уместо $x$ ставимо десну страну из $(*2)$. На тај начин добијемо ову $a_1-$једначину $(1 + \frac{a_1}{10})^2 = 2$, коју лако „преметамо" на облик

$$(*3) \qquad 20a_1 + a_1^2 = 100.$$

У складу са „распоном" за $a_1$, њему ћемо давати редом вредности: $0, 1, 2, \ldots$ највише 9, и редом рачунати леву и десну страну у $(*3)$. Застаћемо кад од подбачаја пређемо на пребачај. То се дешава кад $a_1$ од вредности 4 „пређе" на вредност 5. Заиста, ако $a_1 = 4$, онда $L = 20 \cdot 4 + 4^2 = 96$, а $D = 100$, па имамо $L < D$, односно подбачај. Међутим, ако $a_1 = 5$ онда $L = 125$, а $D = 100$ па имамо пребачај. Добијени закључак о $a_1$ записујемо једнакошћу

$$(*4) \qquad a_1 = 4 + \frac{a_2}{10} \qquad \text{где } a_2 \text{ је непознат број из интервала } (0, 10).$$

*Тј. кад сазнамо $a_1$ знаћемо и $x$.

Тако сад $a_1$ знамо *до на* тај број $a_2$. Ради одређивања $a_2$ направићемо му једначину. Тако, у једначину (∗3) уместо $a_1$ *ставимо десну страну из* (∗4). *На тај начин* добијемо ову $a_2$−једначину $20 \cdot (4 + a_2/10) + (4 + a_2/10)^2 = 100$, коју лако „премотамо" на облик

$$(*5) \qquad 280a_2 + a_2^2 = 400.$$

У складу са распоном за $a_2$ њему ћемо давати редом вредности: $0, 1, 2, \ldots$ највише 9, и редом рачунати леву и десну страну у (∗5). Лако се види да подбачај-пребачај се добије на „прелазу" од 1 на 2, односно за $a_2$ добијемо неједнакост $1 < a_2 < 2$, коју замењујемо овом једнакошћу

$$(*6) \qquad a_2 = 1 + \frac{a_3}{10} \qquad \text{где } a_3 \text{ је непознат број из интервала } (0, 10).$$

На основу једнакости (∗2), (∗4), (∗6) за $x$ редом добијемо

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{a_1}{10} = 1 + \frac{1}{10} \cdot a_1 \\ &= 1 + \frac{1}{10} \cdot \left(4 + \frac{a_2}{10}\right) = 1 + \frac{4}{10} + \frac{a_2}{100} \\ &= 1 + \frac{4}{10} + + \frac{1}{100} \cdot a_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} \cdot \left(1 + \frac{a_3}{10}\right) \\ &= 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{a_3}{1000} \qquad \text{где } 0 < a_3 < 10. \end{aligned}$$

Задатак је решен. На основу последње једнакости за $\sqrt{2}$ имамо -мало слободније записану-ову једнакост $\sqrt{2} = 1,41a_3$.

Децималски поступак можемо слично наставити даље и редом тражити наредне децимале. Тако, у идућем кораку $a_2$ из (∗6) заменимо у (∗5) и тако дођемо до једначине за $a_3$. На основу ње ураклимо $a_3$, итд.

**Пример 2.** Израчунати на једну децималу $\sqrt[3]{5}$.

*Решење.* Са $x$ означимо тај тражени корен. Тако $x = \sqrt[3]{5}$. „Кубирањем" обе стране долазимо до ове кубне једначине

$$(*1) \qquad x^3 = 5.$$

Задатак се своди на тражење њеног позитивног решења, на једну децималу. У првом кораку за $x$ добијемо ову „раклу" $1 < x < 2$, одакле настаје једнакост $x = 1 + \frac{a_1}{10}$. Заменом тог $x$ у (∗1) добијемо ову једначину по $a_1$:

$$300 \cdot a_1 + 30 \cdot a_1^2 + a_1^3 = 4000.$$

За тај непознат $a_1$ се лако добије ова ракља $7 < a_1 < 8$. Да скратим причу, тражена приближна вредност је $1,7$.

**Пример 3.** Одредити на једну децималу оно решење једначине $x^3 + x = 35$, које је између 0 и 4, ако га има.

*Решење.* Леву страну означимо са $L(x)$. Почев од 0 преко $1, 2, \ldots$ редом рачунамо $L(x)$, да бисмо, ако је могуће ухватили корак подбачај-пребачај. Тако имамо једнакости:

$L(0) = 0, L(1) = 2, L(2) = 10, L(3) = 30, L(4) = 68$. Видимо да жељени корак наступа на прелазу од 3 на 4. Значи, једначина има неко решење $x$ између 3 и 4 (вид. Напомену, на крају овог примера). Тако имамо неједнакост $3 < x < 4$, односно једнакост облика $x = 3 + \frac{a_1}{10}$, са неким непознатим бројем $a_1$, који је у распону од 0 до 10. На основу те једнакости и полазне $x-$једначине лако добијемо ову по $a_1$-једначину

$$2800 \cdot a_1 + 30 \cdot a_1^2 + a + 1^3 = 5000$$

Лако се види: за $a_1 = 1$ имамо подбачај, а за $a_1 = 2$ пребачај. Стога за $a_1$ имамо неједнакост $1 < a_1 < 2$. Кратко речено, тражено решење на једну децималу је 2, 1.

*Напомена.* Као што се из наведених примера види, у децималском поступку основно је да се пронађе случај подбачај-пребачај, и тада се одређује извесна децимала, слично се наставља и надаље. Међутим, одакле нама увереност да такво дешавање подбачај-пребачај обезбеђује да постоји решење које тражимо. Разлог је у овој веома општој и значајној чињеници, која се односи на непрекидне функције[†]:

**Став.** *Ако је $f(x)$ реална функција која је непрекидна за $x \in [a, b]$ и ако на крајевима тог интервала има различите знаке, онда у некој тачки тог интервала се анулира.*

**Пример 4.** Одредити на једну децималу $\log_{10}(2)$.

*Решење.* Са $x$ означимо тај тражени логаритам. Тако $x = \log_{10}(2)$. На основу дефиниције логаритма долазимо до ове експоненцијалне једначине

$$(*1) \qquad 10^x = 2.$$

Видимо да за $x = 0$ имамо подбачај, а за $x = 1$ пребачај. Стога имамо неједнакост $0 < x < 1$, односно једнакост $x = 0 + \frac{a_1}{10}$, где $a_1$ је неки број из интервала $(0, 1)$. Та једнакост заједно са једнакошћу $(*1)$ доводи до ове по $a_1$ једначине $10^{\frac{a_1}{10}} = 2$, односно једначине $10^{a_1} = 2^{10}$, тј. $10^{a_1} = 1024$.

За $a_1 = 3$ имамо подбачај, а за $a_1 = 4$ пребачај. Значи, прва децимала је 3, тј. приближна вредност траженог логаритма је 0, 3.

**Пример 5.** Наћи на једну децималу решење једначине $e^x = 2 - x$ уколико та једначина има икоје решење.

*Решење.* Доста лако се види да при прелазу 0 ка 1 имамо пребачај-подбачај. Стога за $x$ имамо неједнакост $0 < x < 1$, односно једнакост облика $x = \frac{a_1}{10}$, где $a_1$ је неки број из интервала $(0, 1)$. Једначина по $a_1$ гласи

$$(*1) \qquad e^{\frac{a_1}{10}} = 2 - \frac{a_1}{10}.$$

И сада је питање како да уракљимо то $a_1$. Замисао је да се експоненцијална функција апроксимира полиномом. Покушаћемо са овом апроксимацијом првог реда[‡] (а ако не успе узећемо апроксимацију вишег реда):

$$(*2) \qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \cdot e^{\theta \cdot x} \qquad (\theta \text{ је неки број из интервала } (0, 1))$$

[†] Прилично слободно речено, то су оне функције којима „се график нигде не кида". У такве функције рецимо, долазе полиномске функције. Строгу дефиницију читалац може пронаћи у некој књизи и Математичке анализе I.

[‡] То је пример Тајлорове формуле.

Користећи (∗2) једначина (∗1) постаје $1 + \frac{a_1}{10} + \frac{\left(\frac{a_1}{10}\right)^2}{2} \cdot e^{\theta \cdot \frac{a_1}{10}} = 2 - \frac{a_1}{10}$, односно након сређивања:

$$40 \cdot a_1 + a_1^2 \cdot e^{\theta \cdot \frac{a_1}{10}} = 200.$$

Непосредно се види да за $a_1 = 5$ имамо пребачај. Доказаћемо да за $a_1 = 4$ имамо подбачај. Да бисмо то закључили направићемо разлику $L - D$, леве и десне претходне једнакости и еквиваленцијски ћемо је премотати на облик из кога можемо лакше видети да $L < D$. То еквиваленцијско премотавање гласи:

$$\begin{aligned} L < D \quad &\text{акко} \quad L - D < 0 \qquad &&\text{акко} \quad 40 \cdot 4 + 16 \cdot e^{\theta \cdot \frac{4}{10}} - 200 < 0 \\ &\text{акко} \quad 16 \cdot e^{\theta \cdot \frac{4}{10}} - 40 < 0 \qquad &&\text{акко} \quad e^{\theta \cdot \frac{4}{10}} < \frac{40}{16} \\ &\text{акко} \quad e^{\theta \cdot \frac{2}{5}} < 2,5. \end{aligned}$$

Да бисмо доказали да $L < D$ доказаћемо да је тачан последњи члан тог екви-ланца. Заиста, најпре имамо овај „ланац" неједнакости:

$$e^{\theta \cdot \frac{2}{5}} < e^{\frac{2}{5}} < e^{\frac{1}{2}}$$

одакле видимо да је доста да докажемо неједнакост $e^{\frac{1}{2}} < 2,5$. Квадрирањем обе стране долазимо до ове, њој еквивалентне неједнакости: $e < 6,25$. Добијена неједнакост је очигледно тачна, па смо коначно доказали да $L < D$, тј. да за $a_1 = 4$ имамо подбачај. И тако тражено приближно решење је $0,4$.

На крају уопште у вези са децималским поступком да истакнем неколико чињеница:

*Прво,* децималски поступак -према већ раније реченом- у основи почива на претпоставци о непрекидности учествујуће функције. Уз то, да бисмо га пустили у дејство морамо најпре наћи макар једну ракљу, тј. границе на којима се дешава прелаз подбачај-пребачај.

*Друго*, децималски поступак у досадашњим примерима се -слободније речено- одвијао *слева-надесно*. Наравно, то не мора да буде неопходно. Можемо користити и поступак здесна-налево. И тада је битно да у сваком кораку пронађемо „прелаз пребачај-подбачај".

*Треће,* у много случајева децималски поступак има бесконачно много корака, у сваком од њих се одређује по једна децимала. Међутим, може се догодити да поступак има коначно корака, односно да се зауставља. Примера ради, уочимо једначину $2x - 1 = 0$. Лако се види да једна ракља је $[0, 1]$. Као идућа, слева-надесно тражена, ракља се појави ракља са левим крајем $0,4$ а десним $0,5$. Међутим, како $2 \cdot 0,5 - 1 = 0$, то значи да $0,5$ је решење и поступак се завршава.
Уопште, ако у неком кораку поступка се појави једнакост облика $f(a) = 0$, онда $a$ је решење и децималски поступак се завршава.

*Четврто,* децималски поступак има много „рођака". Наиме, у њему је присутна идеја *дељења на десет делова*, а могућ је поступак у коме се таква подела врши на 2 или 3 или 4 или ... делова. Међу свима њима најчувенији је поступак са учешћем броја 2, тзв. *бисекцијски* поступак. Он се обилато користи у доказивању разних теорема Математичке анализе. Примера ради, напред наведен Став се по правилу доказује бисекцијским поступком који -слободније речено- „тече до бесконачности".

**Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2003/04 година**