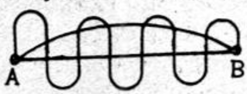
Јово Стефановски
Скопје

ЗА ЕКСТРЕМНИТЕ ВРЕДНОСТИ НИЗ ПРИМЕРИ

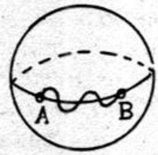
Во математиката често се среќаваат задачи во кои треба да се одреди најмала (минимум), односно најголема вредност (максимум) на некоја величина. Тоа, најчесто, се задачи кои се однесуваат на решенија на некои односи, релации, зависности од практичниот живот. Практичните примери содржат објекти од природата, т.е. градови, села, патишта, тунели, реки итн., а при решавањето на задачите таквите објекти ги заменуваме со геометриски фигури: точка, права, рамнина, кружница, многуаголник и сл. Ќе покажеме неколку примери во кои се бара минимум или максимум, односно со заедничко име екстремна вредност. За почеток може да ни послужи следното:

а) Од сите криви во рамнината што ги поврзуваат точките A и B, најмала должина има отсечката AB (црт. 1).



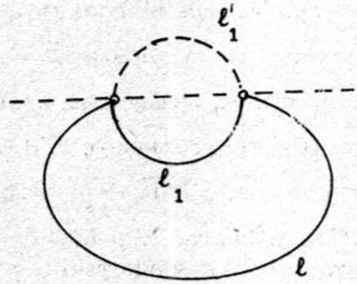
Црт. 1

б) Лакот на сферата има својство на најмала должина меѓу две точки A и B (црт. 2).



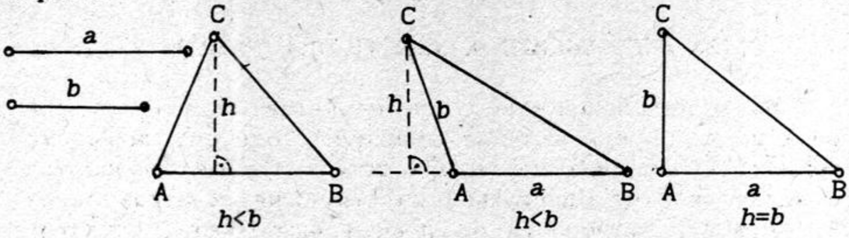
Црт. 2

в) Нека е дадена крива со должина l (црт. 3). Која крива со должината l оградува најголема плоштина? Секако, кривата l ќе загради поголема плоштина ако, делот l_1 се преслика во l'_1. Максимална плоштина ќе загради кружницата со должина l.



Црт. 3

Пример 1. Дадени се отсечките a и b. Определи триаголник со максимална плоштина на кој a и b се негови страни.



$$P = \frac{a \cdot h}{2}; \qquad P_1 = \frac{a \cdot b}{2}.$$

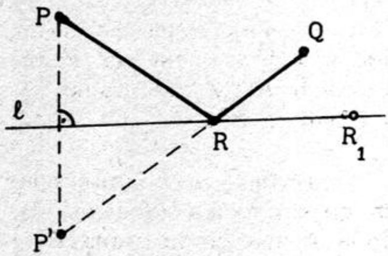
Црт. 4

Плоштината P_1 е поголема од P, бидејќи во остроаголниот и тапоаголниот триаголник $b>h$. Бараниот триаголник е правоаголен со катети a и b.

Пример 2. (Херонов проблем)

Нека P и Q се места од истата страна на реката l. Еден коњаник треба по најкраток пат да тргне од местото P, да го напие коњот и да стигне во местото Q. Определи го местото R на реката l, каде што треба коњаникот да го напие коњот.

Решение: Точката P' е симетрична на P во однос на правата l. $P'Q \cap l = \{R\}$. Точката R е решение на проблемот.

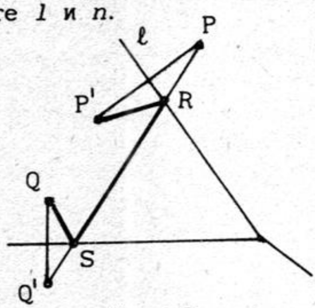


Црт. 5

Ако избереме произволна точка R_1 од правата l, можеме да го заклучиме следното: Од триаголникот $P'R_1Q$ следува дека $\overline{P'R_1}+\overline{R_1Q}'<\overline{P'Q}$. Според цртежот, $\overline{PR}+\overline{RQ} = \overline{P'R}+\overline{RQ}$. Точките R', R и Q лежат на истата права и тоа е оптималното и единствено решение, бидејќи со изборот на произволната точка R_1 од правата l се добива триаголни кот $P'R_1Q$, каде што страната $P'Q$ е стриктно помала од збирот на другите две страни.

Пример 3. Нека P и Q се места меѓу реките *l* и *n*. Треба по најкраток пат да се помине од местото P во Q, но претходно да се појде на реките *l* и *n*.

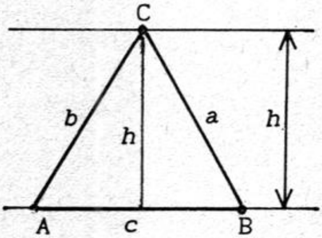
Решение: P' е слика на P во однос на правата *l*, а Q' е слика на Q во однос на правата *n*. $P'Q' \cap n = \{S\}$ и $P'Q' \cap l = \{R\}$. Најкраткиот пат е $QS \cup SR \cup RP$.



Црт. 6

Пример 4. Определи го триаголникот со дадена страна *c* и плоштина P, така што збирот на страните *a* и *b* да биде најмал.

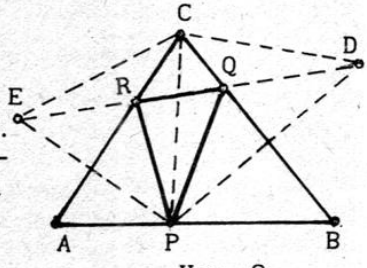
Решение: $P = \frac{a \cdot h}{2}$; висината на триаголникот ABC е определена, бидејќи е позната страната и плоштината. Решението се сведува на примерот 2, односно триаголникот ABC е рамнокрак со висина *h*.



Црт. 7

Пример 5. Во дадениот триаголник ABC впиши триаголник со најмал периметар.

Решение: Да ја избереме точката P на страната AB и да ги определиме симетричните точки E и D на точката P во однос на AC и BC. Отсечкта ED е обиколка на триаголникот PQR. Должината на отсечката ED претставува најмал периметар за впишан триаголник со теми во точката P. Бидејќи $\overline{EC} = \overline{CD} = \overline{CP}$,



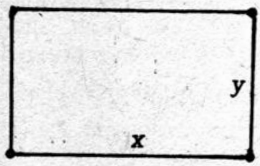
Црт. 8

тогаш отсечката ED ќе има најмала должина, ако CP има најмала должина, т.е. ако CP е висина.

Пример 6. Од сите правоаголници со даден периметар $2a$, определи кој има најголема плоштина.

Решение: Дадено е дека $2x+2y = 2a$. Ако $m = \frac{x+y}{2}$ и $d = \frac{x-y}{2}$, тогаш $x = m+d$ и $y = m-d$.

$x \cdot y = m^2 - d^2.$



Црт. 9

Максимална вредност $x \cdot y$ има за $d = 0$, т.е. ако $x = y$. Ако $d \neq 0$, тогаш $x \cdot y < \frac{x+y}{2}$, односно $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$. Геометриска средина на две позитивни броеви стриктно е помала од аритметичката ако тие не се еднакви. Според тоа правоаголникот е квадрат.

Задачи:

1. Од сите триаголници што имаат исти основи и висини, определи го тој што има најмал збир на другите две страни.

2. Од сите паралелограми што имаат исти основи и висини, определи го тој што има најмал периметар.

3. Од некоја точка D на хипотенузата AB на правоаголниот триаголник ABC повлечени се нормали DE и DF на катетите. Определи, во кој случај отсечката EF има најмала должина.

4. Две точки A и B се наоѓаат на различни страни од дадена права p. Определи точка на правата p така што, разликата на растојанијата до A и B биде најголема.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус