Ристо Малчески
Скопје

ХАРМОНИСКА ПРОГРЕСИЈА

Во оваа работа е разгледан поимот хармониска прогресија, кој е во тесна врска со поимот хармониска средина. Притоа се докажани основните својства на хармониската прогресија и е дадена врската меѓу хармониската и аритметичката, односно геометриската прогресија.

Во натамошните разгледувања ќе сметаме дека читателот е запознат со аритметичката и геометриската прогресија и својствата на истите.

1. ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ХАРМОНИСКАТА ПРОГРЕСИЈА

Дефиниција 1. Нека $r,c\in\mathbf{R}$, $c\neq 0$. Низата c_i, $i=1,2,3,...$ дефинирана со

$$c_1=c,\ c_{k+1}=\frac{1}{r+\frac{1}{c_k}},\ k=1,2,... \tag{1}$$

ја нарекуваме хармониска прогресија, а бројот r го нарекуваме нејзин параметар.

Природно се наметнува прашањето дали постојат низи кои ја задоволуваат дадената дефиниција. Одговорот на ова прашање е позитивен, што може да се види од следните примери.

Пример 1. Нека $r=1$, $c=1$. Од (1) добиваме

$$c_1=1,\ c_2=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},\ c_3=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{3},\ c_3=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{4},... .$$

Пример 2. Нека $r=2$, $c=1$. Од (1) добиваме

$$c_1=1,\ c_2=\frac{1}{3},\ c_3=\frac{1}{5},\ c_4=\frac{1}{7},... .$$

Пример 3. Нека $r=2$, $c=2$. Од (1) добиваме

$$c_1=2,\ c_2=\frac{2}{5},\ c_3=\frac{2}{9},\ c_4=\frac{2}{13},... .$$

Во претходните разгледувања дефиниравме определен поим и се убедивме, дека во смисол на дадената дефиниција постои непразно множество објекти. Да разгледаме некои својства на хармониската прогресија.

Теорема 1. Разликата меѓу реципрочните вредности на секои два соседни членови на хармониската прогресија е константна величина и е еднаква на параметарот на хармониската прогресија, т.е. $\frac{1}{c_{k+1}}-\frac{1}{c_k}=r$, за секој $k=1,2,3,...$.

Доказ. Од (1) добиваме $\frac{1}{c_{k+1}}=\frac{1}{\frac{1}{r+\frac{1}{c_k}}}=r+\frac{1}{c_k}$, за секој $k=1,2,3,...$, од што следува $\frac{1}{c_{k+1}}-\frac{1}{c_k}=r$, за секој $k=1,2,3,...$. ♦

Теорема 2. Нека е дадена хармониската прогресија (1). Тогаш нејзиниот општ член е даден со формулата

$$c_k = \frac{1}{(k-1)r+\frac{1}{c_1}}, \quad \text{за секој } k = 1,2,3,\dots \, . \tag{2}$$

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k.

i) За $k=1$ имаме $c_1 = \frac{1}{0 \cdot r+\frac{1}{c_1}}$, т.е. формулата (2) важи.

ii) Нека претпоставиме дека формулата (2) важи за $k=n$. За $k=n+1$ од (1) и од индуктивната претпоставка следува

$$c_{n+1} = \frac{1}{r+\frac{1}{c_n}} = \frac{1}{r+(n-1)r+\frac{1}{c_1}} = \frac{1}{nr+\frac{1}{c_1}},$$

т.е. важи формулата (2).

Сега тврдењето на теоремата следува од принципот на математичка индукција. ♦

Забелешка 1. Според претходната теорема општите членови на хармониските прогресии од пример 1,2 и 3 се дадени со формулите

$c_n = \frac{1}{(n-1)\cdot 1+1} = \frac{1}{n}$, $\quad c_n = \frac{1}{(n-1)\cdot 2+1} = \frac{1}{2n-1}$ и $c_n = \frac{1}{(n-1)\cdot 2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{4n-3}$, соодветно.

На почетокот од оваа статија го „превидовме“ прашањето дали за секои $r, c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$ со (1) може да се дефинира хармониска прогресија. Одговорот на ова прашање е даден во следната последица, чиј доказ непосредно следува од претходната теорема.

Последица 1. а) Со формулите (1) може да се дефинира бесконечна хармониска прогресија ако и само ако $-\frac{1}{rc} \notin \mathbf{N}$.

б) Ако $-\frac{1}{rc} = n \in \mathbf{N}$, тогаш со формулите (1) може да се дефинира конечна хармониска прогресија $c_1, c_2, \dots, c_n$. ♦

Во следната теорема ќе го докажеме карактеристичното својство на хармониската прогресија, според кое истата и ја именувавме.

Теорема 3. Секој член на хармониската прогресија, освен првиот и последниот кај конечните хармониски прогресии, е хармониска средина на неговите соседни членови, т.е.

$$c_k = \frac{2}{\frac{1}{c_{k-1}}+\frac{1}{c_{k+1}}}, \quad \text{за } k = 2,3,4,\dots \, . \tag{3}$$

Доказ. Ако ја искористиме формулата (2) добиваме

$$\frac{2}{\frac{1}{c_{k-1}}+\frac{1}{c_{k+1}}} = \frac{2}{(k-2)r+\frac{1}{c_1}+kr+\frac{1}{c_1}} = \frac{1}{(k-1)r+\frac{1}{c_1}} = c_k, \quad \text{за секој } k = 2,3,4,\dots \, . \ ♦$$

Следното тврдење на прв поглед изгледа како обопштување на теорема 3, но всушност двете тврдења се еквивалентни.

Последица 2. Секој член на хармониската прогресија е хармониска средина на по број еднакво оддалечените членови од него, т.е.

$$c_k = \frac{2}{\frac{1}{c_{k-i}}+\frac{1}{c_{k+i}}}, \quad \text{за } i = 1,2,\dots,k-1.$$

Доказ. Постапете аналогно како во доказот на теорема 3. ♦

Забелешка 2. Претходно искажаните својства на хармониската прогресија важат како во случај кога таа е конечна, така и во случај кога таа е бесконечна. Следното својство е слично на својствата искажани во теорема 3 и последица 2, но тоа се однесува само на конечните хармониски прогресии.

Теорема 4. Нека е дадена конечната хармониска прогресија $c_1,\dots,c_n$. Тогаш хармониската средина на секои два еднакво оддалечени, по број, од c_1 и c_n е константна и е еднаква на хармониската средина на c_1 и c_n, т.е.

$$\frac{2}{\frac{1}{c_k}+\frac{1}{c_{n-k+1}}}=\frac{2}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_n}}, \qquad \text{за } k=1,2,\dots,n.$$

Доказ. Непосредно од формулата (2) следува

$$\frac{2}{\frac{1}{c_k}+\frac{1}{c_{n-k+1}}}=\frac{2}{(k-1)r+\frac{1}{c_1}+(n-k)r+\frac{1}{c_1}}=\frac{2}{\frac{1}{c_1}+(n-1)r+\frac{1}{c_1}}=\frac{2}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_n}}, \qquad \text{за } k=1,2,\dots,n. \ ♦$$

Нека е дадена хармониската прогресија (1), со ненулти параметар r. Тогаш, за збирот на првите n членови добиваме

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{rc_1}{r}+\frac{1}{r+\frac{1}{c_1}}+\frac{1}{2r+\frac{1}{c_1}}+\dots+\frac{1}{(n-1)r+\frac{1}{c_1}}\\&=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\frac{1}{rc_1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{rc_1}}+\frac{1}{2+\frac{1}{rc_1}}+\dots+\frac{1}{n-1+\frac{1}{rc_1}}\right]=\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+D}\end{aligned}$$

каде $D=\frac{1}{rc_1}$.

Од формула за збирот на првите n-членови на хармониската прогресија може да се заклучи дека истата е доста непрактична за определување на истиот. Во ова може да се увериме и ако го разгледаме слениот пример.

Пример 4. За збирот на првите пет членови на хармониската прогресија од пример 3 имаме:

$$S_{10}=2+\frac{2}{5}+\frac{2}{9}+\frac{2}{13}+\frac{2}{17}.$$

Забелешка 3. Непосредно од формулата (2) следува дека ако параметарот r е различен од 0, тогаш за бесконечната хармониска прогресија важи $\lim_{n\to\infty} c_n=0$. Во врска со знакот на параметарот r важи следната теорема.

Теорема 5. Низата од реципрочни вредности на хармониската прогресија со параметар r е монотона и тоа:

а) ако $r<0$, тогаш таа строго монотоно опаѓа, и

б) ако $r>0$, тогаш таа строго монотоно расте.

Доказ. Од формулата (2) непосредно следува

$$\frac{1}{c_{k+1}}=kr+\frac{1}{c_1}>(k-1)r+\frac{1}{c_1}=\frac{1}{c_k}, \qquad \text{кога } r>0, \text{ i}$$

$$\frac{1}{c_{k+1}}=kr+\frac{1}{c_1}<(k-1)r+\frac{1}{c_1}=\frac{1}{c_k}, \qquad \text{кога } r<0. \ ♦$$

2. ВРСКА МЕЃУ ХАРМОНИСКАТА, АРИТМЕТИЧКАТА И ГЕОМЕТРИСКАТА ПРОГРЕСИЈА

Да ја разгледаме хармониската прогресија $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ со параметар r. Според (2) за низата реципрочни вредности од членовите на хармониската прогресија важи

$$a_k = \frac{1}{c_k} = (k-1)r + \frac{1}{c_1}, \qquad \text{за } k = 1,2,...,n,...$$

т.е. таа е аритметичка прогресија со разлика $d = r$. Значи, збирот на првите n реципрочни вредности на членовите на хармониската прогресија (1) е даден со

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \left(\frac{1}{c_1} + \frac{n-1}{2} r\right) n. \tag{4}$$

Обратно, ако $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е аритметичка прогресија со разлика d, $d \neq 0$ и ако $a_n \neq 0$, за секој $n = 1,2,...$ тогаш низата од реципрочни вредности е хармониска прогресија со параметар $r = d$. Јасно, збирот на првите n реципрочни вредности на разгледуваната аритметичка прогресија е даден со

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k + \frac{1}{da_1}}.$$

Пример 5. Да ја разгледаме хармониската прогресија од пример 2. Имаме $r = 2$, $c = 1$ т.е. $c_n = \frac{1}{2n-1}$, $n = 1,2,...$ Низата од нејзините реципрочни вредности е $\frac{1}{c_n} = 2n - 1$, $n = 1,2,...$ и таа е аритметичка прогресија зададена со $a_1 = 1$, $d = 2$. Според тоа, збирот на првите n реципрочни вредности на разгледуваната хармониска прогресија е

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(2 + 2(n-1))n}{2} = n^2.$$

Нека $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ е хармониска прогресија со параметар r и нека $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$. Да ја разгледаме низата

$$b_1 = x^{\frac{1}{c_1}}, \; b_2 = x^{\frac{1}{c_2}}, \; ..., b_n = x^{\frac{1}{c_n}}, \; ... \tag{5}$$

Според (2) имаме $b_k = x^{\frac{1}{c_1}} (x^r)^{k-1}$, за секој $k = 1,2,3,...$, т.е. низата (5) е геометриска прогресија со почетен член $x^{\frac{1}{c_1}}$ и количник x^r. Јасно, збирот на првите n членови на низата (5) е даден со формулата

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = x^{\frac{1}{c_1}} \frac{x^{rn} - 1}{x^r - 1} = \frac{x^{rn + \frac{1}{c_1}} - x^{\frac{1}{c_1}}}{x^r - 1} = \frac{x^{\frac{1}{c_{n+1}}} - x^{\frac{1}{c_1}}}{x^r - 1}.$$

Нека $b, q \in \mathbf{R}^+$, $q \neq 1$. Низата $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ дефинирана со $b_k = bq^{k-1}$, за $k = 1,2,...$ е геометриска прогресија. За секој $x \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\}$ дефинираме низа $c_1, c_2, ..., c_n, ...$ каде $c_k = \log_{b_k} x$, за $k = 1,2,...$. Ставаме $r = \log_x q$. Од

$$c_{k+1} = \log_{b_{k+1}} x = \frac{1}{\log_x b_{k+1}} = \frac{1}{\log_x b + k\log_x q} = \frac{1}{\log_x q + (\log_x b + (k-1)\log_x q)}$$
$$= \frac{1}{\log_x q + \log_x b_k} = \frac{1}{\log_x q + \frac{1}{\log_{b_k} x}} = \frac{1}{r + \frac{1}{c_k}}$$

следува дека низата $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ е хармониска прогресија со прв член $c_1 = \log_b x$ и параметар $r = \log_x q$.

Пример 6. Да ја разгледаме хармониската прогресија зададена со $r = 2$, $c = 2$. За $x = 2$, со опишаната постапка од оваа хармониската прогресија ја добиваме геометриската прогресија $b_1 = \sqrt{2}$, $q = 4$. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Да ја разгледаме геометриската прогресија зададена со $b_1 = 4$, $q = 2$. Нека земеме $x = \frac{1}{2}$. Според претходно опишаната постапка се добива хармониска прогресија зададена со $c_1 = -\frac{1}{2}$, $r = -1$. Деталите ги оставаме за вежба.

3. ПОТЕНЦИЈАЛ НА АРИТМЕТИЧКА, ГЕОМЕТРИСКА И ХАРМОНИСКА ПРОГРЕСИЈА

Да ја разгледаме конечната хармониска прогресија $c_1, c_2, \dots, c_n$. Од (2) и (3) добиваме

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{n-1}{2} r} = \frac{2}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_1} (n-1) r} = \frac{2}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_n}},$$

што значи дека хармониската средина на сите нејзини членови е еднаква на хармониската средина на двата крајни члена.

Да забележиме дека аналогни релации важат и за конечните аритметички и геометриски прогресии. Имено, ако $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ се аритметичка и геометриска прогресија, соодветно, тогаш

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} b_k} = \sqrt{b_1 b_n}.$$

Дефиниција 2. Нека $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ се конечни аритметичка, геометриска и хармониска средина, соодветно. Броевите

$$p_a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad p_b = \left(\prod_{k=1}^{n} b_k \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad p_c = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k}}$$

ги нарекуваме потенцијал на прогресиите $\{a_i\}_{i=1}^{n}, \{b_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, соодветно.

Непосредно од дефиницијата на потенцијал, формулата (4) и својствата на аритметичката и геометриската прогресија следува

$$p_a = a_1 + \frac{n-1}{2}d,$$ каде d е разликата на $\{a_i\}_{i=1}^n$,

$$p_b = b_1 q^{\frac{n-1}{2}},$$ каде q е количникот на $\{b_i\}_{i=1}^n$, и

$$p_c = \frac{1}{\frac{n-1}{2}r + \frac{1}{c_1}},$$ каде r е параметарот на $\{c_i\}_{i=1}^n$.

Јасно, ако n е непарен број, тогаш $p_a = a_{\frac{n+1}{2}}$, $p_b = b_{\frac{n+1}{2}}$ и $p_c = c_{\frac{n+1}{2}}$, т.е. потенцијалите се еднакви на средните членови на прогресиите.

Теорема 6. Нека е дадена конечната хармониска прогресија $\{c_i\}_{i=1}^n$, со параметар r. Тогаш низата $\{c_i'\}_{i=1}^n$ дефинирана со $c_i' = c_{n-i+1}$, за $i = 1,2,\ldots,n$ е конечна хармониска прогресија со параметар $-r$ и потенцијалите на двете прогресии се еднакви.

Доказ. Јасно,

$$c_k' = c_{n-k+1} = \frac{1}{(n-k)r + \frac{1}{c_1}} = \frac{1}{(n-1)r + \frac{1}{c_1} + (k-1)(-r)} = \frac{1}{\frac{1}{c_n} + (k-1)(-r)} = \frac{1}{\frac{1}{c_1'} + (k-1)(-r)},$$

што значи дека $\{c_i'\}_{i=1}^n$ е хармониска прогресија со параметар $-r$. За потенцијалите на низите $\{c_i'\}_{i=1}^n$ и $\{c_i\}_{i=1}^n$ имаме

$$p_{c'} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k'}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_{n-k+1}}} = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k}} = p_c. \ \blacklozenge$$

Забелешка 4. На крајот од оваа работа да забележиме дека за аритметичката и геометриската прогресија важат својства аналогни на својствата за хармониската прогресија искажани во теорема 6. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија