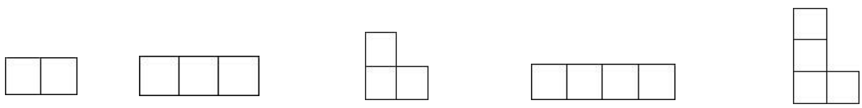
Ристо Малчески, Скопје
Здравко Цветковски, Скопје

ЗАДАЧИ СО БОЕЊЕ И ПОКРИВАЊЕ

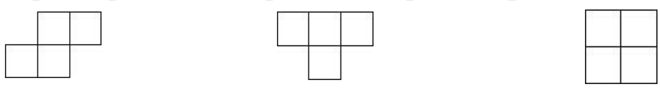
Во оваа статија ќе се осврнеме на проблемот на покривање на фигури, најчесто правоаголни мрежи, квадратни мрежи, шаховски табли (квадратна 8×8 мрежа) со помош на некои познати фигури, т.е. со таканаречените домина, тримина, тетрамина и слично. Исто така, ќе се осврнеме на проблемот на боење, кој претставува важен дел од комбинаторика и кој тесно е поврзан со Принципот на Дирихле и проблемот на покривање. Овие видови на задачи најдобро се спознаваат и учат преку решени примери. Задачите кои што ќе ги разгледаме најчесто задавани на различни национални натпревари, и затоа пред сѐ се наменети за нашите идни натпреварувачи.

Пред да поминеме на конкретни примери, најпрво ќе дадеме објаснување на некои поими кои ќе ги користиме во понатамошното излагање.

Правоаголна мрежа со димензии $m\times n$ е правоаголник со должини на страни m и n, $m,n\in\mathbb{N}$ кој со помош на прави паралелни со страните на правоаголникот е разделен на mn квадрати со димензии 1×1, таканаречени единични квадрати, кои едноставно ќе ги нарекуваме клетки. Понатаму најчесто користените форми на фигурите се

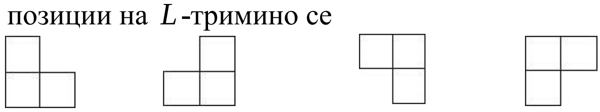


Домино   право тримино   L-тримино   право тетрамино   L-тетрамино



S-тетрамино   T-тетрамино   Квадратно татрамино

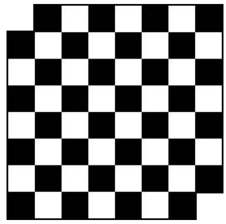
Под покривање на дадена фигура, се подразбира нејзино целосно покривање со помали фигури, кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од границите на дадената фигура. Да напоменеме дека фигурите со кои го вршиме покривањето може да ротираат по било кој правец, т.е. да ги заземаат сите можни позиции кои се добиваат со нивна ротација. На пример сите позиции на L-тримино се



Во продолжение ќе дадеме карактеристични примери, со кои веруваме дека учениците ќе ги усвојат основните постапки за решавање на задачи со покривање, како и значењето на врската покривање-боење.

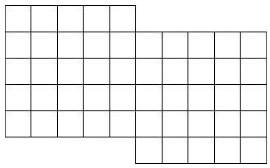
Задача 1. Дали може шаховска табла, од која се отстранети горното лево и долното десно квадратче, да се покрие со домина?

Решение. По отстранување на споменатите квадратчиња дадената шаховска табла изгледа како што е прикажано на цртежот десно.



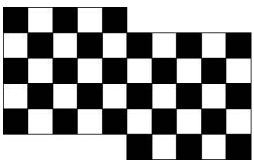
Очигледно едно домино (како и да е поставено) секогаш покрива точно по едно црно и едно бело квадратче. Кога дадената табла би можела да се покрие со домина, според претходното таа би имала ист број црни и бели клетки. Но на таблата има 32 црни и 30 бели клетки. Според тоа, дадената табла не може да се покрие на бараниот начин. ■

Задача 2. Дали мрежата (фигурата) прикажана на цртежот десно може да се покрие со 25 домина?



Решение. Дадена фигура (мрежа) да ја обоиме дадената мрежа како на цртежот лево.

Јасно, секое домино, без разлика дали е поставено хоризонтално или вертикално покрива 1 црно и 1 бело поле.



Според тоа, ако бараното покривање постои, тогаш при истото се покриени еднаков број црни и бели полиња. Тоа значи дека се покриени 25 црни и 25 бели полиња. Но, нашата фигура содржи 26 црни и 24 бели полиња, па затоа дадената мрежа не може да се покрие на саканиот начин. ■

Задача 3. Табла со димензии 6×6 е покриена со домина. Да се докаже дека меѓу 5-те хоризонтални и 5-те вертикални прави со кои е поделена таблата постои права која не пресекува ниту едно домино.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека таква права не постои, односно дека секоја од десетте прави пресекува најмалку едно домино.

Да забележиме дека ако некоја права пресекува едно домино, тогаш таа мора да пресекува барем уште едно домино (Зошто?). Затоа секоја од правите пресекува најмалку по 2 домина, т.е. десетте прави пресекуваат најмалку $10\cdot 2=20$ домина. Според тоа, за покривање на таблата се искористени најмалку 20 домина, кои бидејќи не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата покриваат најмалку $20\cdot 2=40$ полиња. Последното противречи на фактот дека таблата има 36 полиња. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата. ■

Задача 4. Дадена е шаховска табла, на која е отстрането горното лево аголно квадратче. Дали може оваа табла да се покрие со прави тримина?

Решение. Да ја обоиме таблата во три бои (1, 2 и 3), како на цртежот десно. Тогаш едно право тримино (во било која позиција) секогаш покрива по една клетка од сите три бои. Значи кога би можело да се постигне бараното покривање, би имале по $63:3=21$ клетка во секоја од трите бои. Но имаме 22 клетки обоени во боја 1, 21 обоени во боја 2 и 20 обоени во боја 3.

	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2

Од претходно изнесеното следува дека дадената табла не може да се покрие на саканиот начин. ■

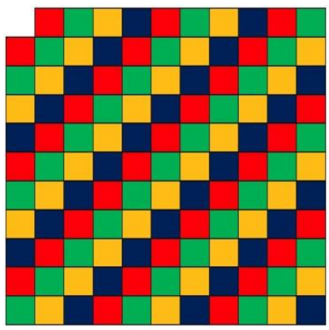
Задача 5. Дали табла со димензии 10×10, може да се покрие со прави тетрамина?

Решение. Да ја обоиме дадената табла во четири бои 1, 2, 3 и 4, како на цртежот десно. Секое право тетрамино секогаш покрива по едно поле од секоја боја. Но имаме 25 полиња обоени во боја 1, 26 во боја 2, 25 во боја 3 и 24 полиња обоени во боја 4. Според ова дадената табла не може да се покрие на бараниот начин.■

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Задача 6. Дали може 11×11 табла од која е отстрането едно аголно поле, да се покрие со прави тетрамина?

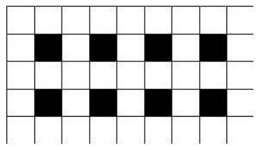
Решение. Заради симетрија можеме да земеме дека од таблата е отстрането горното лево аголно поле. Бидејќи секое право тетрамино покрива по четири полиња, а таблата има $11\cdot 11-1=120$ полиња, за покривање на истата ни се потребни $120:4=30$ прави тетрамина.



Таблата да ја обоиме во четири бои: црвена, жолта, зелена и сина како што е прикажано на цртежот десно. Притоа, како и да поставиме право тетрамино тоа покрива по едно поле од секоја боја. Оттука следува дека со триесет прави тетрамина треба да покриеме 30 црвени, 30 зелени, 30 жолти и 30 сини полиња. Но, при вакво боење на таблата имаме 30 црвени, 31 зелено, 30 жолти и 29 сини полиња, па затоа бараното покривање не е можно. ■

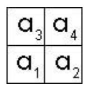
Задача 7. Под во форма на правоаголник е поплочен со плочки со димензии 2×2 и 1×4. Една плочка случајно се скршила, но постои една плочка вишок од останатата форма. Дали може со прередување, подот да се покрие со дадените плочки.

Решение. Да го обоиме подот како на цртежот десно. Тогаш секоја 1×4 плочка покрива или 0 или 2 црни полиња, додека секоја плочка од облик 2×2 покрива секогаш едно црно поле, од каде следува дека е невозможно да се замени скршената плочка со плочка од другата форма и притоа подот да биде целосно покриен. ■



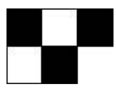
Задача 8. На секое поле на шаховска табла, запишан е број. Познато е дека збирот на броевите на секои три полиња кои можат да се покријат со L-тримино (во било која позиција) е еднаков на 3. Докажи дека сите запишани броеви се еднакви на 1.

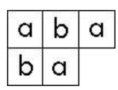
Решение. Да разгледаме квадрат 2×2 (цртеж десно). Тогаш од условот имаме $a_1+a_2+a_4=a_1+a_3+a_4$, т.е. следува дека $a_2=a_3$. Слично се добива дека $a_1=a_4$.



Според тоа, сите броеви кои се запишани во црните полиња се еднакви меѓу себе (на a), и сите броеви што се запишани во белите полиња се еднакви меѓу себе (на b).

Да ја разгледаме фигурата прикажана на првиот цртеж десно, во која согласно претходно изнесеното запишаните броеви се како на вториот цртеж десно. Тогаш

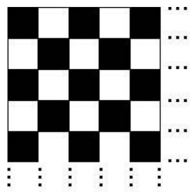




$$2b+a=2a+b \text{ т.е. } a=b.$$

Значи сите броеви запишани во полињата на таблата се еднакви меѓу себе од каде бидејќи збирот на три броја покриени со L-тримино е еднаков на 1, добиваме $a=b=1$, што и требаше да се докаже. ■

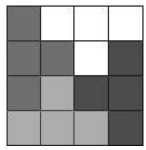
Задача 9. Дали може табла 50×50, да се покрие со T -тетрамина?



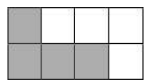
Решение. Бројот на T -тетрамината кои ни се потребни за покривање на таблата е $\frac{50\cdot50}{4}=625$. Да ја обоиме таблата шаховски на стандарден начин (цртеж десно). Тогаш секое T -тетрамино покрива 3 црни и 1 бело или 1 црно и 3 бели полиња. Но, ние имаме 625 тетрамина, т.е. непарен број тетрамина и како секое покрива непарен број црни и непарен број бели полиња, заклучуваме дека вкупно ќе бидат покриени непарен број црни и непарен број бели полиња. Од друга страна, таблата има $50\cdot25$ црни и $50\cdot25$ бели полиња, што значи парен број црни и парен број бели полиња, па затоа бараното покривање не е можно. ■

Задача 10. Да се докаже дека шаховска табла 8×8 не може да се покрие со S -тетрамина, но може да се покрие со секое од останатите тетрамина.

Решение. Покривањето на таблата со право и квадратно тетрамино е очигледно.

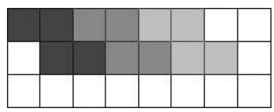


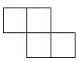
Секоја табла 4×4 може да се покрие со T -тетрамина (цртеж десно), па според тоа таблата 8×8 може да се покрие со T -тетрамина.

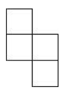
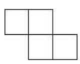


Секоја табла 2×4 може да се покрие со L-тетрамина (цртеж десно) , па според тоа таблата 8×8 може да се покрие со L-тетрамина.

Останува да покажеме дека табла 8×8 неможе да се покрие со S -тетрамина. Да ги разгледаме првите три реда од таблата и сите можности на нивно покривање со S -тетрамина.



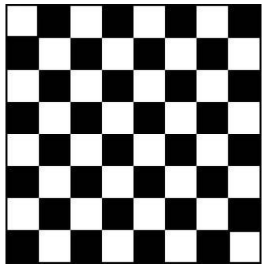
1° Првото поставено S -тетрамино е во позиција  тогаш сите останати S -тетрамина десно од него мораат да бидат исто ориентирани (цртеж десно) и јасно последните три квадратчиња не можат да се покријат со S -тетрамина.

2° Првото S -тетрамино е во позиција , и тогаш останатите S -тетрамина десно од него мораат да бидат во позиција  (цртеж десно). Но тогаш горното десно аглово квадратче неможе да биде покриено.

Значи во било кој случај не постои покривање со S-тетрамина на првите три реда на дадената табла па значи не постои покривање и на дадената табла. Со ова задачата е решена. ■

Задача 11. Дали шаховска табла со димензии 8×8, може да се покрие со 15 T-тетрамина и едно квадратно тетрамино.

Решение. Ќе докажеме дека такво покривање непостои.



Да ја обоиме таблата во две бои, на стандарден начин (цртеж десно). Тогаш едно T-тетрамино секогаш покрива или 3 црни и 1 бело или 1 црно и 3 бели полиња. Значи, со 15 T-тетрамина вкупно ќе покријат непарен број црни и непарен број бели полиња, додека едно квадратно тетрамино секогаш покрива 2 црни и 2 бели полиња.

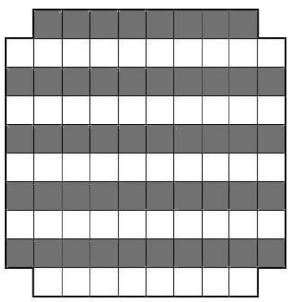
Според тоа, со 15 T-тетрамина и 1 квадратно тетрамино вкупно ќе покријат непарен број црни и непарен број бели полиња, но на таблата има по 32 полиња во двете бои. Значи, бараното покривање не постои. ■

Задача 12. Дадена е табла $n\times n$ така што четирите аголни полиња се отстранети. За кои природни броеви n, дадената табла може да се покрие со L-тетрамина?

Решение. Вкупно на таблата имаме n^2-4 клетки. За да ја покриеме дадената табла со L-тетрамина мора $4\,|\,n^2-4$, т.е. мора n да е парен број.

Нека $n=2k$ тогаш треба да употребиме k^2-1, L-тетрамина.

Но овој услов не е доволен за да постои такво покривање.



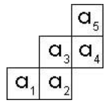
Имено ја боиме дадената табла алтернативно, како на цртежот десно. Секое L-тетрамино покрива 3 црни и 1 бело или 1 црно и 3 бели полиња. Бидејќи на таблата имаме еднаков број црни и бели полиња, за да постои покривање мора да се употребат еднаков број на L-тетрамина од двата вида. Според тоа, мора да важи $2\,|\,k^2-1$, т.е. $k=2l+1$, $l\in\mathbb{N}$ па следува дека

$$n=2k=2(2l+1)=4l+2.$$

Лесно се покажува дека ова е и доволен услов.

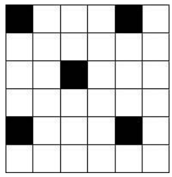
Значи, ако $n=4l+2$ тогаш постои покривање на таблата $n\times n$ со L-тетрамина. ■

Задача 13. Дали е можно во квадратна таблица 6×6 да се разместат броевите од 1 до 36, така што збирот на броевите кои се наоѓаат во секое S-тетрамино (во било која позиција) е делив со 9?



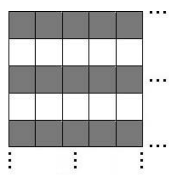
Решение. Нека такво разместување постои. Да ја разгледаме фигурата прикажана на цртежот десно. Тогаш од услов следува дека броевите $a_1+a_2+a_3+a_4$ и $a_2+a_3+a_4+a_5$ се деливи со 9. Но, тогаш и разликата

$$a_1+a_2+a_3+a_4-(a_2+a_3+a_4+a_5)=a_1-a_5$$



е делива со 9, што значи дека броевите a_1 и a_5 даваат ист остаток при делење со 9. Нека сега таблата 6×6 ја обоиме како на цртежот десно. Тогаш горната фигура можеме да ја поставиме во четири положби, при што во секоја положба полињата во кои се запишани броевите a_1 и a_5 ги покриваат црните полиња. Тоа значи дека мора да постојат најмалку 5 броја кои при делење со 9 даваат еднаков остаток. Последното не е можно, бидејќи при делење со 9 на дадените броеви секој од остатоците 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 се јавува точно четири пати. ■

Задача 14. Квадрат 23×23 целосно е покриен со 1×1, 2×2 и 3×3 фигури. Колку најмалку 1×1 фигури е потребно за да постои даденото покривање?



Решение. Да претпоставиме дека постои покривање на квадратот такво што не е потребна ниту една 1×1 фигура.

Да го обоиме дадениот квадрат како на цртежот десно. Тогаш имаме 23 црни клетки повеќе од бели клетки. Секој 2×2 квадрат покрива еднаков број бели и црни клетки, имено по две, секој 3×3 квадрат покрива 3 клетки повеќе во едната отколку во другата боја. Знали, разликата на црно обоени и бело обоени клетки секогаш ќе биде делива со 3. Но $3\nmid 23$, па следува дека во овој случај бараното покривање не постои.

Значи потребна е барем една 1×1 фигура. Ќе покажеме дека постои покривање така што е употребена точно една 1×1 фигура. Квадратот 1×1 ќе го поставиме на централното поле. Остатокот на таблата ќе го разделиме на четири правоаголници 12×11. Секој 12×11 правоаголник може да се покрие со еден ред 2×2 квадрати и три реда 3×3 квадрати. Со ова задачата е решена. ■

Задача 15. Да се докаже дека правоаголник $a\times b$ може да се покрие со $1\times n$ правоаголници ако и само ако $n\,|\,a$ или $n\,|\,b$.

Решение. Ако $n\,|\,a$ или $n\,|\,b$ тогаш очигледно правоаголникот $a\times b$ може да се покрие со $1\times n$ правоаголници.

1	2	3	···	r	···	n	1	2	···	r
1	2	3	···	r	···	n	1	2	···	r
1	2	3	···	r	···	n	1	2	···	r
1	2	3	···	r	···	n	1	2	···	r
⋮					⋮					⋮
1	2	3	···	r	···	n	1	2	···	r
1	2	3	···	r	···	n	1	2	···	r

b

a

Обратно, нека претпоставиме дека даден правоаголник $a\times b$ може да се покрие со $1\times n$ правоаголници и нека $n\nmid a$. Тогаш $a=qn+r$, каде $0<r<n$. Да го обоиме дадениот правоаголник во n бои како на цртежот десно. Тогаш имаме по $bq+b$ клетки во секоја од боите $1,2,...,r$ и по bq клетки во секоја од боите $r+1,r+2,...,n$. Хоризонтално поставен $1\times n$ правоаголник секогаш покрива по една клетка од секоја боја, додека вертикално поставен $1\times n$ правоаголник секогаш покрива по n клетки во една иста боја. Нека се поставени h хоризонтални $1\times n$ правоаголници. Тогаш остануваат по $bq+b-h$ клетки во секоја од боите $1,2,...,r$ и по $bq-h$ клетки во секоја од боите $r+1,r+2,...,n$ па следува дека $n\,|\,bq+b-h$ и $n\,|\,bq-h$ од каде имаме дека $n\,|\,(bq+b-h)-(bq-h)=b$.

Аналогно ако претпоставиме дека $n\nmid b$, се добива дека мора $n\,|\,a$. Со ова задачата е решена. ■

Задача 16. Дали може 250 кутии во форма на квадар со димензии $1\times 1\times 4$, да се сместат во кутија со димензии $10\times 10\times 10$.

Решение. Ќе поставиме координатен систем во центарот на долната лева аглова $1\times 1\times 1$ коцка. Ќе ги обоиме единичните коцки на кутијата $10\times 10\times 10$ во четири бои 0, 1, 2 и 3 како на цртежот десно.

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Ако дадена коцка има центар со кординати (x,y,z) тогаш ќе ја обоиме во i-тата боја ако $x+y+z\equiv i \pmod 4$. При ова боење секоја $1\times 1\times 4$ кутија без разлика како е поставена секогаш содржи по една коцка од секоја боја. Според тоа, кога би можеле 250 кутии $1\times1\times4$ да се сместат во $10\times10\times10$ кутија би требало да имаме по 250 коцки од секоја боја.

Првиот, најдолен слој од кутијата е обоен како на дадениот цртеж. На првиот слој имаме 26, 25, 24, 25 коцки во боја 0, 1, 2 и 3, соодветно. Боењето вториот слој ќе се добие од првото со додавање на 1, т.е. ќе имаме 26, 25, 24, 25 коцки во боја 1, 2, 3 и 0 соодветно. Третиот слој ќе има 26, 25, 24, 25 коцки во боја 2, 3, 0 и 1 соодветно итн. Вкупно коцки обоени во боја 0 имаме $(26+25+24+25)\cdot2+26+25=251$. Затоа даденото сместување не е можно. ■

Задача 17. Во квадратна мрежа 8×8, една аголна клетка е обоена во црна боја, а останатите 63 клетки се обоени во бела боја. Дозволено е пребојуваење на даден ред или колона. Дали може по конечен број пребојувања сите клетки на мрежата да бидат обоени во бела боја.

Решение. По било кое пребојување, бројот на црни клетки меѓу четирите аглови клетки е секогаш непарен, па тие никогаш не можат да бидат сите бели, т.е. бараната состојба не може да се случи. ■

Во претходните задачи разгледувавме покривање на правоаголници при што за решавање на некои од нив го користевме боењето на клетките во две или повеќе бои. Во следниве задачи ќе се задржиме на боење на точки во рамнина, односно во просторот.

Задача 18. Точките во рамнината се обоени во една од две бои. Да се докаже дека постојат две точки кои се на растојание 1 и се обоени во иста боја.

Решение. Конструираме рамностран триаголник со страна 1. Тогаш од принципот на Дирихле следува дека барем две темиња се обоени во иста боја. ■

Задача 19. Секоја точка во рамнината е обоена во една од две бои, црвена или сина. Докажи дека постои боја така што за било кое растојание d, постојат две точки на растојание d и се обоени во иста боја.

Решение. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека постојат $a,b\in\mathbb{R}$ (без губење на општоста можеме да земеме дека $a\le b$) така што не постојат две точки кои се на растојание a односно b и се обоени во црвена односно сина боја, соодветно.

Нека C е произволна сина точка. Конструираме рамнокрак триаголник ABC така што $\overline{AC}=\overline{BC}=b$ и $\overline{AB}=a$. Бидејќи C е сина точка следува дека мора A и B да се црвени, но тогаш A и B се на растојание a и се црвено обоени, контрадикција. Со ова задачата е решена. ■

Задача 20. Точките од рамнината се обоени во една од три бои. Да се докаже дека постојат две точки кои се на растојание 1 и се обоени во иста боја.

Решение. Конструираме рамностран триаголник ABC, со страна 1. Ако две од точките A,B,C се обоени во една иста боја тогаш задачата е решена. Затоа нека претпоставиме дека сите три точки се обоени во различни бои.

Ја конструираме точката D така што $\overline{BD}=\overline{CD}=1$. Ако D е обоена во една од боите во кои се обоени B и C, тогаш задачата е решена. Затоа нека D е исто обоена како A. Со ротација на ромбот $ABDC$ за произволен агол околу точката A, како погоре точките A,B',C' се обоени во три различни бои (во спротивно задачата е решена), па затоа точката A' е обоена во иста боја како точката A. На тој начин добиваме кружница чии точки се обоени како и точката A. Оваа кружница содржи тетива со должина 1, со што заадачата е решена. ■

Задача 21 . Докажи дека меѓу кои било 6 луѓе секогаш постојат тројца кои меѓу себе се познаваат или постојат тројца кои меѓу себе не се познаваат.

Решение. Нека луѓето ги поистоветиме со точки. Ако двајца се познаваат тогаш ги поврзуваме со отсечка со сина боја, ако пак не се познаваат ги поврзуваме со отсечка со црвена боја. Тогаш задачата е еквивалентна со задачата:

> Меѓу шест точки во рамнина од кои никои три не се колинеарни и кои се поврзни со отсечки кои се обоени во една од две бои, црвена или сина, секогаш постојат три точки кои се меѓу себе се поврзани со отсечки во една иста боја.

Навистина, нека се дадени точките A,B,C,D,E,F . Од принципот на Дирихле следува дека најмалку три од отсечките AB,AC,AD,AE,AF, да кажеме дека отсечките AB,AC,AD се сини. Сега, ако една од отсечките BC,CD,DB е сина, тогаш нејзините крајни точки заедно со точката A се три точки кои се поврзани со отсечки обоени со иста боја. Ако пак сите три отсечки BC, CD, DB се цеврни, тогаш точките B, C, D го задоволуваат условот на задачата. ■

Задача 22. Секоја точка на една права е обоена во една од две бои, сина или црвена. Докажи дека на правата постои отсечка таква што нејзините крајни точки и нејзината средишна точка се обоени во иста боја.

Решение. Нека AB е отсечка чии крајни точки се обоени во сина боја. Нека D и E (од различни страни на A и B) се точки такви што $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BE}$. Сега, ако некоја од точките D и E е обоена во сина боја, тогаш задачата е решена. Затоа нека точките D и E се обоени во црвена боја. Средишната точка F на AB е средишна и на отсечката DE, и јасно F е обоена или во сина или во црвена боја, па задачата е решена. ■

Задала 23. Секоја точка од рамнината е обоена во една од две бои, сина или црвена. Докажи дека во рамнината постои рамностран триаголник чии темиња се обоени во една иста боја.

Решение. *Прв начин.* Да разгледаме три сини точки A, B, C такви што B е средина на AC, (такви постојат според задача 19). Нека D, E и F се трети темиња на рамностраните триаголници конструирани над AC, AB, BC , соодветно од иста страна на правата AC. Тогаш ако барем една од E , F и D е сина , задачата е решена. Ако пак сите три точки E , F и D се црвени тогаш бараниот триаголник е EFD (тој е рамностран и сите негови темиња се обоени црвено).

Втор начин. Да разгледаме правилен шестоаголник $A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, заедно со неговиот центар A_1, (направи цртеж). Без губење на општоста можеме да земеме дека A_1 е сина точка. Од принципот на Дирихле следува дека меѓу точките $A_2,...,A_7$ постојат барем три точки обоени во една иста боја. Ќе разгледаме два случај.

1° Нека тие три точки се сини. Ако две од нив се последователни темиња на шетоаголникот тогаш тие заедно со A_1, даваат син рамностран триаголник. Затоа без губење на општоста можеме да земеме дека трите сини точки се A_2, A_4, A_6 но тогаш $\triangle A_2A_4A_6$ е рамностран син триаголник.

2° Нека трите точки се црвени. Ако се тоа A_2, A_4, A_6 или A_3, A_5, A_7 тогаш задачата е решена. Нека сега меѓу овие три точки постојат две кои се последователни темиња. Нека се тоа A_2 и A_3. Ако третата црвена точка е

A_4, тогаш A_6 мора да е сина, а A_5 мора да е црвена . Тогаш ако A_7 е сина го имаме синиот рамностран $\triangle A_1A_6A_7$, а ако пак A_7 е црвена го имаме црвениот рамностран $\triangle A_3A_5A_7$. Ако третата црвена точка е A_5, тогаш јасно A_7 е сина. Ако A_6 е сина задачата е решена. Затоа нека A_6 е црвена. Ако A_4 е црвена го имаме црвениот рамностран $\triangle A_2A_4A_6$. Затоа нека A_4 е сина и нека A_8 е точката на пресек на правите A_3A_4 и A_2A_7. Тогаш $\triangle A_2A_3A_8$ и $\triangle A_4A_7A_8$ се рамнострани триаголници. Ако A_8 е сина го имаме синиот рамностран $\triangle A_4A_7A_8$, ако пак A_8 е црвена го имаме црвениот рамностран $\triangle A_2A_3A_8$.

Со ова задачата е решена. ■

Задача 24. Секоја точка од страните на даден рамностран триаголник ABC е обоена во една од две бои. Дали постои правоаголен триаголник чии темињата се некои три точки од страните на триаголникот (вклучувајќи ги и темињата на дадениот триаголник), кои се обоени во една иста боја.

Решение. Ќе покажеме дека таков триаголник постои.

Нека го претпоставиме спротивно, т.е. дека не постои правоаголен триаголник кој ги задоволува условите на задачата. Секоја страна на $\triangle ABC$ ја делиме со D,E,F,G,H и I на по три еднакви дела (направи цртеж). Тогаш точките D,E,F,G,H,I се темиња на правилен шестаголник.

Нека постојат две спротивни темиња на шестаголникот кои се обоени во иста боја, т.е. нека H и E се обоени со црна боја. Тогаш бидејќи не постои монохроматски правоаголен триаголник мора D и G да се обоени во бела боја. Но тогаш I мора да е или црна или бела, т.е. во секој случај добиваме постоење на монохроматски правоаголен триаголник, имено $\triangle HIE$ или $\triangle GID$.

Значи сите парови спротивни темиња се обоени во различни бои. Да забележиме дека мора да постојат две соседни темиња на шестаголникот кои се обоени во различна боја (зошто?). Нека G и H се содветно бела и црна точка. Тогаш мора D да е црна, а E бела точка. Сега секако се добива монохроматски триаголник. Имено ако една од точките A и B е бела, на пример A го добиваме триаголникот $\triangle AGE$. Ако пак точките A и B двете се црни го имаме триаголникот $\triangle AHD$, што е противречност.

Со ова задачата е решена. ■

Задача 25. Секоја точка од рамнината е обоена во една од три бои, црвена, жолта или сина. Да се докаже дека во таа рамнина постојат две точки кои се на растојание 1 и се обоени со иста боја.

Решение. Да воочиме една точка и да ја означиме со A. Нека таа е на пример во жолта боја. Опишуваме кружница со центар во A и радиус $\sqrt{3}$. Ако сите точки на таа кружница се обоени во иста боја, тогаш задачата е решена, имено постојат две точки кои се на растојание 1 и се исто обоени бидејќи дијаметарот на кружницата е $2\sqrt{3}>1$. Затоа нека претпоставиме дека точките од кружницата не се сите обоени во иста боја. Да означиме точка B на кружницата која не е жолта, нека B е на пример црвена. Сега конструираме ромб $ABCD$ на кој подолгата дијагонала е AB, а остриот агол е 60°. Тогаш $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$. Ако точката C е обоена во жолта боја тогаш A и C се бараните точки, ако C е црвена тогаш B и C би биле бараните точки. Затоа нека претпоставиме дека C е сина. Сега точката D мора да биде обоена во една од трите бои, и поради $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=1$ добиваме дека секогаш постојат две точки кои го задоволуваат условот на задачата. ■

Задача 26. Секоја точка во Декартов координатен систем со целобројни координати е обоена во една од три бои. Докажи дека постои правоаголник со страни паралелни со координатните оски чии темиња се обоени во иста боја.

Решение. Да ги разгледаме оние точки од рамнината кои се добиваат со пресек на четири паралелни вертикални прави со останатите хоризонтални прави. Од принципот на Дирихле следува дека во секој ред постојат две исто обоени точки. Различни можности за боење на еден ред има 3^4, и бидејќи бројот на хоризонтални линии е бесконечен следува дека постојат два исто обоени реда. Двете исто обоени точки во овие два исто обоени реда формираат правоаголни чии темиња се обоени во иста боја. ■

Задача 27. Шест точки се поврзани со отсечки кои се произволно обоени во две бои (црвена и сина). Докажи дека секогаш постои затворена патека од четири отсечки кои се обоени во една иста боја.

Решение. Нека точките се A,B,C,D,E,F. Од решението на задача 18 следува дека постои монохроматски триаголник со темиња во дадените точки. Без губење на општоста можеме да земеме дека отсечките AB, BC и CA се обоени во иста боја, да кажеме црвена. Ако постои точка (од

D, E, F) од која тргнуваат две црвени отсечки кон некои две од точките A, B, C тогаш задачата е решена (направи цртеж).

Исто така ако постојат две од точките D, E, F, од кои тргнуваат по две сини отсечки кон некои две од точките A, B, C и тогаш задачата е решена (направи цртеж).

Останува случајот кога од секоја од точките D, E, F тргнува црвена отсечка кон различна точка од точките A, B, C. Без губење на општоста можеме да земеме дека AD, BE и CF се црвени. Ако една од DE, EF и DF е црвена тогаш задачата е решена (имено ако DE е црвена ја имаме затворената црвена патека $DEBAD$). Ако пак сите отсечки DE, EF и DF се сини тогаш бидејќи EC и DC се сини ја добиваме затворената сина патека $DFECD$. Со ова задачата е решена. ■

Покрај боењето точки, интересни се и задачите со боење на броеви. На крајот од овој дел ќе решиме една таква задача.

Задача 28. Секој природен број е обоен во една од две бои, црна или бела. Збирот на било кои два различно обоени броеви е обоен во црна боја, додека нивниот производ е број кој е обоен во бела боја. Во каква боја е обоен производот на два бело обоени броја. Да се најдат сите вакви боења?

Решение. Нека a и b се два бели броја. Ќе докажеме дека ab е бел број. Нека c е произволен црн број. Тогаш бројот $a+c$ е црн и $ab+bc=(a+c)b$ е бел број. Јасно bc е бел број. Нека претпоставвиме дека ab е црн број, тогаш според условот $ab+bc$ е црн број, што е во контрадикција со тоа што $(a+c)b$ е бел број . Значи ab е бел број.

Нека c е најмалиот бел број, тогаш според условот и претходно изнесеното имаме дека сите броеви од облик kc, $k \in \mathbb{N}$ се исто така бели броеви. Ќе покажеме дека други бели броеви не постојат. Нека претпоставиме дека x е бел број и $x=kc+r$, $0 \le r < c$. Ако $r \ne 0$ тогаш бидејќи c е најмал бел број следува дека r е црн број. Тогаш според условот $kc+r$ е црн број, што е во спротивност со претпоставката. Значи мора да е $r=0$, т.е. единствени бели броеви се броевите од облик kc, каде c е најмалиот бел број. ■