РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД 46 -ТИОТ РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2023

4.03.2023

ПРВА ГОДИНА

1А. Докажи дека бројот $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...56}_{n}$ е полн квадрат за секој природен број n.

Решение. Го запишуваме бројот на следниот начин:

$$\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{55\ldots56}_{n} = \underbrace{11\ldots1}_{2n} + 4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n} + 1 = \frac{1}{9}\left(\underbrace{99\ldots9}_{2n} + 4\cdot\underbrace{99\ldots9}_{n} + 9\right) = \quad \textbf{(5 поени)}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\underbrace{99\ldots9}_{2n} + 1 + 4\cdot\left(\underbrace{99\ldots9}_{n} + 1\right) + 4\right) = \frac{1}{9}(10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4) = \quad \textbf{(10 поени)}$$

$$= \frac{1}{9}(10^n + 2)^2 = \left[\frac{1}{3}(10^n + 2)\right]^2 = \left(\underbrace{33\ldots3}_{n} + 1\right)^2 = \underbrace{33\ldots34}_{n}{}^2, \quad \textbf{(10 поени)}$$

што требаше да се докаже.

1Б. Докажи дека, ако збирот на броевите $\overline{abc}$ и $\overline{xyz}$ е делив со 37, тогаш и бројот $\overline{abcxyz}$ е делив со 37.

Решение. Нека $37 \mid (\overline{abc} + \overline{xyz})$, тогаш $\overline{abc} + \overline{xyz} = 37k$ за некој $k \in \mathbb{N}$ **(5 поени)**. За бројот $\overline{abcxyz}$ имаме:

$$\overline{abcxyz} = 1000\cdot\overline{abc} + \overline{xyz} = \textbf{(5 поени)} = 999\cdot\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{xyz}) = (\textbf{5}\text{ поени})$$

$$= 37\cdot 27\cdot\overline{abc} + 37k = (\textbf{5}\text{ поени}) = 37(27\cdot\overline{abc} + k),$$

од каде заклучуваме дека $37 \mid \overline{abcxyz}$. (**5** поени)

2АБ. Нека a е цел број и нека равенката $|2ax - x - b| = b$ има две решенија x_1 и x_2 кои се цели броеви. Ако збирот на целите броеви од интервалот (x_1, x_2) е 15, докажи дека b е непарен број.

Решение 1. Со решавање на равенката се добива $2ax - x - b = b$ или $2ax - x - b = -b$, т.е. $x = \frac{2b}{2a-1}$ или $x = 0$. Значи едно решение е $x_1 = 0$, а другото решение е $x_2 = \frac{2b}{2a-1}$ **(10 поени).** Бидејќи $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, заклучуваме дека $x_2 = 6$ (т.е. збирот на целите броеви меѓу 0 и 6, без 0 и 6, изнесува 15) **(5 поени)**. Следи дека $x_2 = \frac{2b}{2a-1} = 6$, т.е. $b = 3(2a - 1)$ е непарен број **(10 поени)**.

Решение 2. Бројот b е апсолутна вредност на некој број, па значи $b \geq 0$. За $x = 0$ равенката станува $|-b| = b$, што значи дека $x_1 = 0$ е едно решение на равенката **(5 поени).** Ако со x_2 го означиме второто решение, тогаш бидејќи $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$, заклучуваме дека $x_2 = 6$ (т.е. збирот на целите броеви меѓу 0 и 6, без 0 и 6, изнесува 15) **(5 поени)**. Да претпоставиме сега дека b е парен број, односно $b = 2k$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Тогаш равенката добива облик: $|2ax_2 - x_2 - b| = b$, односно $|12a - 6 - 2k| = 2k$.
Последново станува $2|6a - 3 - k| = 2k$, или во поедноставена форма $|6a - 3 - k| = k$. Од тука добиваме $6a - 3 - k = k$ или $6a - 3 - k = -k$ **(5 поени)**. Во првиот случај следува дека $6a - 3 = 2k$ што е контрадикција бидејќи левата страна е непарен, а десната парен број. Во вториот случај, следува $6a - 3 = 0$, т.е. $a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ што е контрадикција со условот дека a е цел број. Заклучуваме дека b не може да биде парен број, односно бројот b е непарен. **(10 поени)**

3А. (Сигма 126, Рубрика задачи, задача 1701) Ако a,b,c се природни броеви, тогаш докажи дека $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$.

Решение 1. Ако $7 \mid a$ или $7 \mid b$ или $7 \mid c$, тогаш $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ **(5 поени).** Нека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$, и $7 \nmid c$, тогаш a,b,c се од облик $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$, за некое $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Од тоа што $(7k+1)^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 7$, $(7k+2)^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7$, $(7k+3)^3 \equiv 3^3 \equiv 6 \pmod 7$, $(7k+4)^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod 7$, $(7k+5)^3 \equiv 5^3 \equiv 6 \pmod 7$ и $(7k+6)^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod 7$, следува дека можни остатоци при делење на кубовите a^3, b^3, c^3 на природните броеви a,b,c со 7 се 1 или 6 **(10 поени)**. Тоа значи дека барем два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, од каде следува дека разликата на тие два броја е делива со 7. Така имаме дека $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ **(10 поени)**.

Решение 2. Ако $7 \mid a$ или $7 \mid b$ или $7 \mid c$, тогаш $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ **(5 поени)**. Нека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$, и $7 \nmid c$, тогаш a,b,c се од облик $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5$ или $7k+6$, за некое $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Од тоа што

$$(7k+1)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2 + 3\cdot 7k + 1 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2 + 3\cdot k) + 1,$$
$$(7k+2)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 2 + 3\cdot 7k\cdot 2^2 + 2^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 2 + 3\cdot k\cdot 2^2 + 1) + 1,$$
$$(7k+3)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 3 + 3\cdot 7k\cdot 3^2 + 3^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 3 + 3\cdot k\cdot 3^2 + 3) + 6,$$
$$(7k+4)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 4 + 3\cdot 7k\cdot 4^2 + 4^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 4 + 3\cdot k\cdot 4^2 + 9) + 1,$$
$$(7k+5)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 5 + 3\cdot 7k\cdot 5^2 + 5^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 5 + 3\cdot k\cdot 5^2 + 17) + 6,$$
$$(7k+6)^3 = 7^3k^3 + 3\cdot 7^2k^2\cdot 6 + 3\cdot 7k\cdot 6^2 + 6^3 = 7\cdot(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2\cdot 6 + 3\cdot k\cdot 6^2 + 30) + 6,$$

следува дека можни остатоци при делење на кубовите a^3, b^3, c^3 на природните броеви a, b, c со 7 се 1 или 6 **(10 поени)**. Тогаш барем два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, од каде пак следува дека разликата на тие два броја е делива со 7. Така имаме дека $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ **(10 поени)**.

3Б. (Сигма 127, Задачи од училницата, Прва година, задача 2) Нека a и b се реални броеви за кои важи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Најди ги сите можни вредности на изразот $A = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2$.

Решение. Со квадрирање на втората равенка добиваме $a^2 - 2ab + b^2 = \frac{9}{4}$, односно $a^2 + b^2 = \frac{9}{4} + 2ab$. Заменуваме во првото равенство $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{5}{2}$ и добиваме $\frac{\frac{9}{4}+2ab}{ab} = \frac{5}{2}$, од каде $ab = \frac{9}{2}$ **(5 поени)**. Ако пак на двете страни на равенството $a^2 - 2ab + b^2 = \frac{9}{4}$ додадеме $4ab$, имаме $(a+b)^2 = \frac{9}{4} + 4ab$. За $ab = \frac{9}{2}$ добиваме $(a+b)^2 = \frac{81}{4}$, односно $a+b = \frac{9}{2}$ или $a+b = -\frac{9}{2}$ **(10 поени)**. Сега дадениот израз го запишуваме во облик

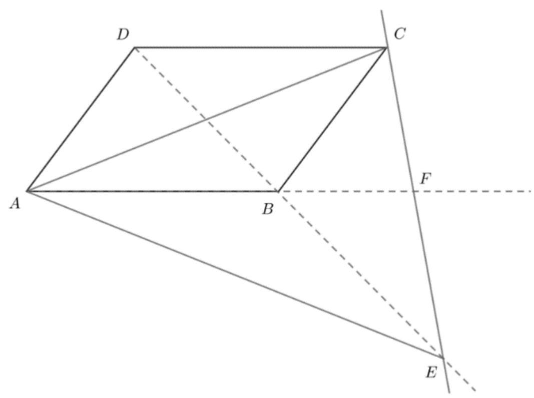
$$A = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2 = (a+b)^2 + 2ab(a+b) + (ab)^2 = [(a+b)+ab]^2$$ **(5 поени)**.

За $a+b = \frac{9}{2}$ и $ab = \frac{9}{2}$ добиваме дека $A = \left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)^2 = 81$. За $a+b = -\frac{9}{2}$ и $ab = \frac{9}{2}$ добиваме дека $A = \left(\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\right)^2 = 0$. Значи можните вредности на изразот се само 81 и 0 **(5 поени)**.

4АБ. (Сигма 126, Задачи од училницата, Прва година, задача 2)

Нека $ABCD$ е паралелограм. На полуправата DB е избрана точка E таква што полуправата AB е симетралата на $\measuredangle CAE$. Нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$.

Решение. Отсечките BF и DC се паралелни. Според теоремата на Талес за пропорционални отсечки имаме $\overline{EC}:\overline{EF} = \overline{DC}:\overline{BF}$ и бидејќи $\overline{AB} = \overline{DC}$, добиваме дека $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$ …..(1) **(5 поени)**. Полуправата AF е симетрала на $\measuredangle CAE$ во ΔCAE, па според својството за симетрала на агол имаме дека $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$ **(5 поени)**. На двете страни на ова равенство го додаваме бројот 1 и го запишуваме во облик $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1 + \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$.



Средуваме до $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$ **(10 поени)**. Од равенството (1), добиваме дека $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$, или конечно $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$ **(5 поени)**.

ВТОРА ГОДИНА

1А. Реши ја равенката во множеството реални броеви: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(\sqrt{5}-x)^2}=7$.

Решение. Јасно, $x\neq 0,\sqrt{5}$. Воведуваме смена $y=\sqrt{5}-x$ и го добиваме системот $\begin{cases} x+y=\sqrt{5} \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=7 \end{cases}$ **(3 поени)**.

Имаме: $7=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{(x+y)^2-2xy}{x^2y^2}=\frac{5-2xy}{x^2y^2}$ **(4 поени)** и оттука ја добиваме квадратната равенка по xy, $7(xy)^2+2xy-5=0$ **(3 поени)**. Нејзини решенија се $\frac{-1\pm\sqrt{1+35}}{7}=\frac{-1\pm 6}{7}$, т.е. $xy=\frac{5}{7}$ и $xy=-1$ **(3 поени)**.

Од $x+y=\sqrt{5}$ и $xy=\frac{5}{7}$ следува дека x и y се решенија на квадратната равенка $z^2-\sqrt{5}z+\frac{5}{7}=0$, односно $x,y=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-\frac{20}{7}}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{\frac{15}{7}}}{2}=\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}$. Од $x+y=\sqrt{5}$ имаме $x=\sqrt{5}-y=\sqrt{5}-\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}=\frac{7\sqrt{5}\mp\sqrt{105}}{14}$ па равенката по x ги има решенијата $x_{1,2}=\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}$ **(6 поени)**. Од $x+y=\sqrt{5}$ и $xy=-1$ следува дека x и y се решенија на равенката $z^2-\sqrt{5}z-1=0$, односно $x,y=\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5+4}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}$ и поради $x=\sqrt{5}-y=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}=\frac{\sqrt{5}\mp 3}{2}$ следува дека решенија се $x_{3,4}=\frac{\sqrt{5}\pm 3}{2}$ **(6 поени)**.

1Б. Лора купува пакет со сини и црвени хартиени листови, во кој односот на бројот на сините и бројот на црвените листови е $2:7$. Секој ден, Лора користи 1 син и 3 црвени листови. Еден ден, откако зела 3 црвени листови и го потрошила последниот син лист, во пакетот останале 15 црвени листови. Колку вкупно листови имало во пакетот на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во пакетот имало x сини и y црвени листови. Тогаш, $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$ **(5 поени)**. Бидејќи Лора користи секој ден по еден син лист, по x денови во пакетот ќе нема повеќе сини листови **(5 поени)**. Но, Лора секој ден користи и по три црвени листови, па затоа за x денови ќе потроши $3x$ црвени листови, а бидејќи откако ги потрошила сите сини листови останале 15 црвени листови, на почетокот во пакетот имало $y=3x+15$ црвени листови **(5 поени)**. Тогаш, $\frac{x}{3x+15}=\frac{2}{7}$, $7x=6x+30$ и оттука $x=30$ **(5 поени)**. За вкупниот број на листови добиваме $x+y=30+3\cdot 30+15=135$ **(5 поени)**.

2АБ. (**Сигма 122, Задачи од училницата, Втора година, 1 задача**)

Ако a и b се позитивни цели броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$, најди ја најмалата вредност на збирот $a+b$.

Решение. Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$, сведувајќи на заеднички именител на левата страна, добиваме $\frac{6+3+2}{6a}=\frac{1}{b^2-2b}$, а оттука пак $11(b^2-2b)=6a$ **(3 поени)**. Гледаме дека 11 е делител на левата страна од каде мора да е делител и на десната страна, односно $11\mid a$ **(3 поени)**. Следува $a=11A$, за A е позитивен цел број. Од $11(b^2-2b)=66A$ следува дека $b^2-2b=6A$, па 6 е делител на десната страна заради што мора да е делител и на левата страна **(3 поени)**. Значи $6\mid b^2-2b$, односно $6\mid b(b-2)$. Последното е производ на два последователни парни или два последователни непарни броја **(4 поени)**. Нивниот производ е делив со 6, значи е делив со 2, оттука мора да се и двата парни **(3 поени)**. Едниот од нив треба да е делив истовремено и со 3 **(3 поени)**. Ја бараме најмалата вредност на збирот $a+b$, па проверуваме за најмалиот b делив и со 2 и со 3 односно за $b=6$ **(3 поени)**. Добиваме $b^2-2b=36-12=24=6\cdot 4$ па $6A=24$, односно $A=4$. Оттука $a=44$, $b=6$. Јасно најмалата вредност на збирот е $a+b$ е 50 **(3 поени)**.

3АБ. (**Сигма 126, Рубрика задачи, задача 1710**) Реши го системот равенки $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases}$.

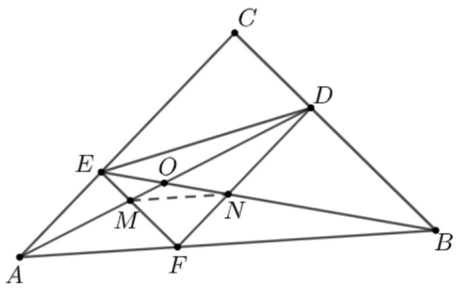
Решение. $\begin{cases} x+y-z=2 \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ (x+y)^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-3xy(x+y-z)=86+z^3 \end{cases}$ **(7 поени)** $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ (2+z)^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-6xy=86+z^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z \\ 4+4z+z^2=8+z^2 \\ (x+y)^3-6xy=86+z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \\ 3^3-6xy=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=1 \\ xy=-10 \end{cases}$ **(10 поени)** $\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=1 \\ x(3-x)=-10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ z=1 \\ x^2-3x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y=5 \\ z=1 \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2 \\ z=1 \\ x=5 \end{cases} \right)$ **(8 поени)**.

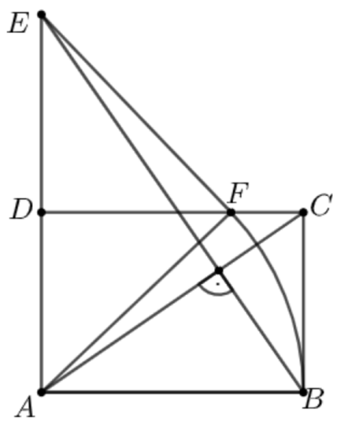
Значи, системот има две подредени тројки решенија $(-2,5,1)$ и $(5,-2,1)$.

4А. На страните BC, CA и AB на триаголникот ABC избрани се точки D, E, F, соодветно, така што четириаголникот $CEFD$ е паралелограм. Нека $\{O\}=AD\cap BE$, $\{M\}=AD\cap EF$ и $\{N\}=DF\cap BE$. Докажи дека триаголникот DEO и четириаголникот $FNOM$ имаат еднакви плоштини.



Решение. Од паралелноста на EF и CB следува $P_{BED}=P_{BMD}$ и оттука $P_{DEO}=P_{BED}-P_{BOD}=P_{BMD}-P_{BOD}=P_{BMO}$ **(5 поени)**.
Слично, од паралелноста на CA и DF имаме $P_{ADE}=P_{ANE}$ и оттука $P_{DEO}=P_{ADE}-P_{AOE}=P_{ANE}-P_{AOE}=P_{ANO}$ **(5 поени)**. Значи, $P_{BMO}=P_{ANO}$ и оттука следува дека $P_{BMN}=P_{ANM}$ **(5 поени)**. Бидејќи триаголниците BMN и ANM имаат еднаква страна и еднаква плоштина, следува дека висините од B и A на BMN и ANM, соодветно се еднакви па поради тоа MN и AB се паралелни и важи $P_{FNM}=P_{ANM}$ **(5 поени)**. Тогаш, $P_{FNOM}=P_{FNM}+P_{NOM}=P_{ANM}+P_{NOM}=P_{ANO}=P_{DEO}$, што требаше да се докаже **(5 поени)**.

4Б. Даден е правоаголник $ABCD$, $AB>BC$. Нормалата спуштена од B кон дијагоналата AC ја сече правата AD во точка E, а кружницата со центар A која минува низ B ја сече страната CD во точка F. Докажи дека AF и EF се заемно нормални прави.



Решение. Нека $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$. Триаголниците ABE и BCA се слични (правоаголни се и $\measuredangle BAC=\measuredangle AEB$ (како агли со заемно нормални краци)) **(5 поени)** па затоа $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$ и оттука $\overline{AE}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}}=\frac{a^2}{b}$ **(5 поени)**. За правоаголниот триаголник AFD имаме $\overline{AF}=a, \overline{AD}=b$, па $\overline{DF}=\sqrt{a^2-b^2}$ **(3 поени)**. Тогаш, од правоаголниот триаголник DFE, каде $\overline{ED}=\overline{AE}-\overline{AD}=\frac{a^2}{b}-b=\frac{a^2-b^2}{b}$ **(3 поени)**, добиваме

$$\overline{EF}^2=\left(\frac{a^2-b^2}{b}\right)^2+\sqrt{a^2-b^2}^2=(a^2-b^2)\frac{a^2-b^2+b^2}{b^2}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2}$$ **(3 поени)**.

Од $\overline{EF}^2+\overline{AF}^2=\frac{a^2(a^2-b^2)}{b^2}+a^2=\frac{a^2(a^2-b^2+b^2)}{b^2}=\left(\frac{a^2}{b}\right)^2=\overline{AE}^2$ **(3 поени)**, следува дека триаголникот AFE е правоаголен, па затоа AF и EF се заемно нормални прави **(3 поени)**.

ТРЕТА ГОДИНА

1А. (Сигма 124, Рубрика Задачи, Задача 1673) Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^{\log_3(x-1)}+2(x-1)^{\log_3 x}=3x^2$.

Решение. Јасно е дека $x\in(1,+\infty)$. Нека $\log_3(x-1)=u$ и $\log_3 x=v$ **(5 поени)**. Со овие смени имаме дека $x^{\log_3(x-1)}=3^{\log_3 x^{\log_3(x-1)}}=3^{\log_3(x-1)\cdot\log_3 x}=3^{uv}$ **(4 поени)**, односно $(x-1)^{\log_3 x}=3^{\log_3(x-1)^{\log_3 x}}=3^{\log_3 x\cdot\log_3(x-1)}=3^{uv}$ **(4 поени)**. Исто така $x^2=3^{\log_3 x^2}=3^{2\log_3 x}=3^{2v}$ **(2 поени)**. Сега дадената равенка преминува во облик $3\cdot 3^{uv}=3\cdot 3^{2v}$, од каде добиваме дека $uv=2v$, односно $v(u-2)=0$. Од последното имаме дека $v=0$ или $u-2=0$ **(5 поени)**. За $v=0$, од $\log_3 x=v$ добиваме дека $x=1$. Но $1\notin(1,+\infty)$ па $x=1$ не е решение на дадената равенка **(3 поени)**.
За $u-2=0$, односно $u=2$, од $\log_3(x-1)=u$ добиваме дека $x=10$. Јасно, $10\in(1,+\infty)$, па $x=10$ е единствено решение на дадената равенка **(2 поени)**.

1Б. (Сигма 125, Рубрика задачи, Задача 1963) Во множеството реални броеви најди ги решенијата на системот равенки $\begin{cases} yx^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y\cdot\log_y(3x-y)=1\end{cases}$.

Решение. Да забележиме дека од дефиницијата на логаритамската функција, следува дека $x>0$, $y>0$, $3x-y>0$ и $y\neq 1$. Ако логаритмираме со основа y во првата равенка на системот и го искористиме равенството $\frac{1}{\log_4 y}=\log_y 4$ за втората равенка на системот, дадениот систем преминува во облик

$$\begin{cases}\log_y\left(yx^{\log_y x}\right)=\log_y x^{\frac{5}{2}} \\ \log_y(3x-y)=\dfrac{1}{\log_4 y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_y y+\log_y\left(x^{\log_y x}\right)=\dfrac{5}{2}\log_y x \\ \log_y(3x-y)=\log_y 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\log_y x\cdot\log_y x=\dfrac{5}{2}\log_y x \\ 3x-y=4\end{cases}$$ **(10 поени)**

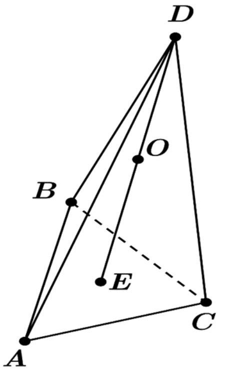
Воведуваме смена $\log_y x=t$. Равенката $1+\log_y x\cdot\log_y x=\frac{5}{2}\log_y x$ го добива обликот $1+t^2=\frac{5}{2}t$, односно $2+2t^2=5t$ или $2t^2-5t+2=0$, што всушност е квадратна равенка по t, со решенија $t_1=2$ и $t_2=\frac{1}{2}$ **(5 поени)**.
Разгледуваме два случаи:
1. За $t_1=2$, од $\log_y x=t$, добиваме дека $\log_y x=2$, односно $x=y^2$. Со замена во $3x-y=4$, добиваме $3y^2-y-4=0$, квадратна равенка по y со решенија $y_1=\frac{4}{3}$ и $y_2=-1$. Јасно, $y>0$, па $y=\frac{4}{3}$ е единствена можна вредност за y во овој случај. Тогаш, со замена во $x=y^2$, добиваме дека $x=\frac{16}{9}$.

Заклучуваме дека во овој случај, решение на дадениот систем е подредениот пар $\left(\frac{16}{9},\frac{4}{3}\right)$ **(5 поени)**.

2. За $t_2=\frac{1}{2}$, од $\log_y x=t$, добиваме дека $\log_y x=\frac{1}{2}$, од каде следува дека $x=\sqrt{y}$, односно $x^2=y$. Со замена во $3x-y=4$, добиваме $x^2-3x+4=0$, што претставува квадратна равенка по x која нема реални корени.
Па, во овој случај и дадениот систем нема да има реални решенија **(5 поени)**.
Значи, единствено решение на дадениот систем е подредениот пар $\left(\frac{16}{9},\frac{4}{3}\right)$.

2АБ. (Сигма 121, Рубрика задачи, Задача 1632) Правилна триаголна пирамида има раб на основата b и агол меѓу бочните рабови α. Докажи дека радиусот на опишаната сфера околу пирамидата е $\dfrac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$.

Решение. Нека ΔABC е основа на пирамидата, а D е нејзиниот врв. Нека O е центарот на сферата опишана околу неа и нека точката E е проекцијата на точката O врз рамнината ABC. Од $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=R$ следува дека $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE}$. ΔABC е рамностран триаголник, па следува дека точката E е центарот на опишаната кружница околу него. Бидејќи пирамидата е правилна, точката D исто така се проектира во E. Значи, точките E, D и O се колинеарни. Од ΔABC имаме $\overline{CE} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$ **(5 поени)**, а од рамнокракиот ΔADC имаме дека $\overline{CD} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ **(5 поени)**. ΔDEC е правоаголен, па $\sin\angle CDE = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$ **(7 поени)**. Од рамнокракиот ΔDOC имаме дека $\overline{DO} = \overline{OC} = r$, па $r = \overline{DO} = \frac{\overline{CD}}{2\cos\angle CDE} = \frac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$ **(8 поени)**.



3АБ. Најди ги сите вредности на реалниот параметар m за кои функцијата $f(x) = \left|x^2 - 6x\right| - m$ има точно три реални нули.

Решение. Дадената функција $f(x) = \left|x^2 - 6x\right| - m$ можеме да ја запишеме во облик

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x - m, & x^2 - 6x \geq 0 \\ -\left(x^2 - 6x\right) - m, & x^2 - 6x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 6x - m, & x \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty) \\ -x^2 + 6x - m, & x \in (0, 6) \end{cases}.$$ **(5 поени)**

За да има точно три нули, можни се два случаја и тоа равенката $x^2 - 6x - m = 0$ да има точно два реални и различни корена, а равенката $-x^2 + 6x - m = 0$ да има двоен корен или обратно.

Случај 1. Равенката $x^2 - 6x - m = 0$ има два реални и различни корена ако нејзината дискриминанта $D_1 > 0$, односно $36 + 4m > 0$. Равенката $-x^2 + 6x - m = 0$ има двоен корен ако нејзината дискриминанта $D_2 = 0$, односно $36 - 4m = 0$. Според тоа го добиваме следниот систем $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 + 4m > 0 \\ 36 - 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > -36 \\ 4m = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -9 \\ m = 9 \end{cases}$, од каде следува дека единствено решение на системот е $m = 9$ **(5 поени)**. Да провериме дали за $m = 9$ решенијата на равенките припаѓаат во соодветните интервали. За $m = 9$ равенката $x^2 - 6x - m = 0$ преминува во равенка од облик $x^2 - 6x - 9 = 0$ која има решенија $x_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$ и тие припаѓаат на $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$. За $m = 9$ равенката $-x^2 + 6x - m = 0$ преминува во облик $x^2 - 6x + 9 = 0$ која има двоен корен $x = 3$ и тој припаѓа на $(0, 6)$ **(5 поени)**.

Случај 2. Равенката $x^2 - 6x - m = 0$ има двоен корен ако нејзината дискриминанта $D_1 = 0$, односно $36 + 4m = 0$. Равенката $-x^2 + 6x - m = 0$ има два реални и различни корена ако нејзината дискриминанта $D_2 > 0$, односно $36 - 4m > 0$. Според тоа го добиваме следниот систем $\begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 + 4m = 0 \\ 36 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m = -36 \\ -4m > -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ m < 9 \end{cases}$, од каде следува дека единствено решение на систем $m = -9$ **(5 поени)**. Да провериме дали за $m = -9$ решенијата на равенките припаѓаат во соодветните интервали. За $m = -9$ равенката $x^2 - 6x - m = 0$ преминува во равенка од облик $x^2 - 6x + 9 = 0$ која има двоен корен $x = 3$, но тој не припаѓа на интервалот $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$ **(5 поени)**.

Заклучуваме дека единствена можна вредност за параметарот m за кои функцијата $f(x) = \left|x^2 - 6x\right| - m$ има точно три реални нули е $m = 9$ и тие се $x_1 = 3 - \sqrt{18}$, $x_2 = 3 + \sqrt{18}$ и $x_3 = 3$.

4А. Докажи дека $2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + 6\sin 6^\circ + \ldots + 180\sin 180^\circ = 90\text{ctg}1^\circ$.

Решение. Ќе докажеме дека $2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 4\sin 4^\circ \sin 1^\circ + 6\sin 6^\circ \sin 1^\circ + \ldots + 178\sin 178^\circ \sin 1^\circ = 90\cos 1^\circ$ **(5 поени)**. Левата страна на равенството е еквивалентна со

$$1 \cdot 2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2 \cdot 2\sin 4^\circ \sin 1^\circ + 3 \cdot 2\sin 6^\circ \sin 1^\circ + \ldots + 89 \cdot 2\sin 178^\circ \sin 1^\circ$$ **(5 поени)**.

Користејќи го идентитетот $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, последниот израз е еквивалентен со

$$\left(\cos 1^\circ - \cos 3^\circ\right) + 2\left(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ\right) + \ldots + 89\left(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ\right) =$$

$$= \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \ldots + \cos 177^\circ - 89\cos 179^\circ.$$ **(5 поени)**

Користејќи го идентитетот $\cos\alpha = -\cos\left(180^\circ - \alpha\right)$, групирајќи, од последниот израз добиваме дека

$$\cos 1^\circ + \left(\cos 3^\circ + \cos 177^\circ\right) + \left(\cos 5^\circ + \cos 175^\circ\right) + \ldots + \left(\cos 89^\circ + \cos 91^\circ\right) - 89\cos 179^\circ = \qquad \textbf{(5 поени)}$$

$$= \cos 1^\circ + \left(\cos 3^\circ + \cos\left(180^\circ - 3^\circ\right)\right) + \left(\cos 5^\circ + \cos\left(180^\circ - 175^\circ\right)\right) + \ldots + \left(\cos 89^\circ + \cos 91^\circ\right) - 89\cos\left(180^\circ - 179^\circ\right) =$$

$$= \cos 1^\circ + \left(\cos 3^\circ - \cos 3^\circ\right) + \left(\cos 5^\circ - \cos 5^\circ\right) + \ldots + \left(\cos 89^\circ - \cos 89^\circ\right) - 89\cos\left(180^\circ - 179^\circ\right) =$$

$$= \cos 1^\circ - 89\left(-\cos 1^\circ\right) = \cos 1^\circ + 89\cos 1^\circ = 90\cos 1^\circ . \textbf{ (5 поени)}$$

Со тоа докажавме дека $2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 4\sin 4^\circ \sin 1^\circ + 6\sin 6^\circ \sin 1^\circ + \ldots + 178\sin 178^\circ \sin 1^\circ = 90\cos 1^\circ$, односно $2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + 6\sin 6^\circ + \ldots + 180\sin 180^\circ = 90\operatorname{ctg} 1^\circ$.

4Б. Ако $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 1$, пресметај ја вредноста на изразот $\sin^6 x - 4\sin^4 x + 8\sin^2 x$.

Решение. Од $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 1$ имаме дека $\cos x + \cos^3 x = 1 - \cos^2 x$. Со квадрирање на левата и десната страна на последното равенство добиваме дека

$$\left(\cos x + \cos^3 x\right)^2 = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos^4 x + \cos^6 x = \sin^4 x \Leftrightarrow \textbf{(10 поени)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 2\left(1 - \sin^2 x\right)^2 + \left(1 - \sin^2 x\right)^3 = \sin^4 x \Leftrightarrow \textbf{(5 поени)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + 2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x = \sin^4 x \Leftrightarrow \textbf{(5 поени)}$$

$$\Leftrightarrow 4 - 8\sin^2 x + 4\sin^4 x - \sin^6 x = 0 \Leftrightarrow \sin^6 x - 4\sin^4 x + 8\sin^2 x = 4 . \textbf{ (5 поени)}$$

ЧЕТВРТА ГОДИНА

1А.2Б. (Сигма 123, Задача 1 од Училницата) Одреди ги сите парови цели броеви x и y такви што $1+2026x+2028y=xy$.

Решение. За целите броеви x и y, ќе го разгледаме производот:

$$(x-2028)(y-2026)=xy-2028y-2026x+2026\cdot 2028. \quad \textbf{(10 поени)}$$

Да забележиме дека важи $1+2k\cdot(2k+2)=1+4k^2+4k=(2k+1)^2$ и ако го искористиме условот, за производот добиваме: $(x-2028)(y-2026)=1+2026\cdot 2028=2027^2$ **(7 поени)**. Бројот 2027 е прост број, па следува дека $x-2028\in\{\pm1,\pm2027,\pm2027^2\}$. Ги добиваме следниве парови за x и y:

$(x,y)\in\{(2029,2027^2+2026),(2027,-2027^2+2026),(4055,4053),(1,-1),$

$(2027^2+2028,2027),(-2027^2+2028,2025)\}$ **(8 поени).**

1Б. (Задачи од Училница Сигма 119) Одреди ја разликата на аритметичката прогресија со прв член 4, кај која a_{10}, a_{31} и a_{34} се страни на правоаголен триаголник со хипотенуза a_{34}.

Решение. Од Питагорината теорема имаме: $a_{10}^2+a_{31}^2=a_{34}^2$ **(3 поени)**. Ако ги означиме првиот елемент од прогресијата со a_1 и разликата со d, тогаш последното равенство станува:

$$(a_1+9d)^2+(a_1+30d)^2=(a_1+33d)^2. \quad \textbf{(10 поени)}$$

Со средување на изразот добиваме $a_1^2+12a_1d-108d^2=0$ **(4 поени)**, и ако во овој израз ставаме $a_1=4$ добиваме $27d^2-12d-4=0$ **(2 поени)**. Решенијата на последната квадратна равенка се $d_1=\frac{2}{3}$ и $d_2=-\frac{2}{9}<0$ **(3 поени)**. Го елиминираме второто решение, бидејќи за страните на триаголникот тогаш ќе се добијат негативни броеви, што е невозможно **(2 поени)**. Значи бараната вредност за разликата е $d=\frac{2}{3}$. **(1 поен)**

2А. (Задачи од Училница Сигма 117) Најди ја равенката на заедничката тангента на параболите $y=x^2+2x+2$ и $y=x^2+x+2$.

Решение. Нека заедничката тангента има равенка $y=kx+b$ **(2 поени)**. Тогаш секоја од равенките: $x^2+2x+2=kx+b$ и $x^2+x+2=kx+b$ има единствено решение **(5 поени)**. Јасно, детерминантите на квадратните равенки $x^2+(2-k)x+2-b=0$ и $x^2+(1-k)x+2-b=0$ се и двете нули, имено:

$D_1=(2-k)^2-4(2-b)=k^2-4k+4b-4=0$ и $D_2=(1-k)^2-4(2-b)=k^2-2k+4b-7=0$ **(10 поени)**.

Со одземање на втората од првата равенка добиваме $-2k+3=0$ или $k=\frac{3}{2}$ **(5 поени)**.

Од првата равенка следи $b=\frac{4+4k-k^2}{4}=\frac{31}{16}$ **(2 поени)**, па бараната равенка е $y=\frac{3}{2}x+\frac{31}{16}$ **(1 поен)**.

3А. Нека $a_0=2023$ и $a_n=\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+1}$ за секој природен број *n*. Докажи дека за $n\geq 0$ важи $a_n\geq 2023-n$.

Решение 1. Ќе го искористиме принципот на математичка индукција. Јасно, $a_0=2023\geq 2023-0$ **(2 поени)**. Да претпоставиме дека $a_k\geq 2023-k$ за некој $k\geq 1$ **(3 поени)**. За a_{k+1} добиваме:

$$a_{k+1}=\frac{a_k^2}{a_k+1}>\frac{a_k^2-1}{a_k+1}=a_k-1\geq(2023-k)-1=2023-(k+1). \quad \textbf{(20 поени)}$$

Решение 2. Јасно $a_n>0$, за секој природен број *n*. Бидејќи $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_n+1}<1$ добиваме дека $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е строго монотоно опаѓачка низа **(5 поени)**. Ако искористиме дека

$$a_{k+1}-a_k=\frac{a_k^2}{a_k+1}-a_k=\frac{-a_k}{a_k+1}=\frac{1}{a_k+1}-1,$$ **(5 поени)** за $n\geq 1$ добиваме:

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = 2023 + \left(\frac{1}{a_0+1} - 1\right) + \left(\frac{1}{a_1+1} - 1\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{a_{n-1}+1} - 1\right) = 2023 - n + \left(\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}+1}\right) > 2023 - n.$$

(15 поени)

3Б. Нека k е парен број. Дали е можно да се запише бројот 1 како збир од реципрочните вредности на k непарни природни броеви?

Решение. Да претпоставиме дека постојат непарни природни броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, каде k е парен број, така што важи:

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_k}. \ (*) \quad \textbf{(3 поени)}$$

Равенството (*) може да се изрази во облик: $1 = \dfrac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n_1 n_2 \cdots n_k}$, каде $m_i = \dfrac{n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k}{n_i} = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_{i-1} \cdot n_{i+1} \cdot \ldots \cdot n_k$, за $i \in \{1, 2, ..., k\}$ **(12 поени)**. Оттука добиваме дека $n_1 n_2 \cdots n_k = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ **(2 поени)**.

Притоа:

– Бројот $n_1 n_2 \cdots n_k$ е непарен бидејќи е производ на непарни броеви. **(3 поени)**

– Бројот $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ е парен, бидејќи е збир на парен број (k) непарни броеви. **(3 поени)**

Оттука, заклучуваме дека броителот и именителот на дропката претставена со десната страна во (*) се различни броеви. Значи, такво запишување на бројот 1 не е можно. **(2 поени)**

4АБ. Колку најмалку броеви треба да бидат отстранети од множеството $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2023\}$, така што ниту еден од преостанатите елементи во множеството да не е производ на два различни преостанати елементи?

Решение. Условот на задачата ќе биде исполнет кога преостанатите елементи во M ќе бидат доволно големи, така што производот на ниту еден пар од нив нема да припаѓа меѓу нив. Најпрво, да воочиме дека од множеството M мора да биде отстранет бројот 1, бидејќи во спротивно неговиот производ со било кој друг елемент a од M ќе даде $a \cdot 1 = a$ од M. **(2 поени)**

Натаму, јасно е дека малите броеви 2,3, ..., се множители во најголем број производи кои припаѓаат во M. (Специјално, во M припаѓаат производите на бројот 2 со броевите 3, 4, ..., 1011, производите на бројот 3 со броевите 4, 5, ..., 674, производите на бројот 4 со броевите 5, 6, 7, ..., 505, итн.) Најголемиот број чиј што производ со друг број припаѓа во M е бројот 44, чијшто производ со 45 е $44 \cdot 45 = 1980$. **(3 поени)**

Ќе го искористиме бројот $44 + 45 = 89$ за да ја изведеме следната конструкција од дисјунктни триелементни множества, дефинирани во облик $\{k, 89-k, k \cdot (89-k)\}$ за $k = 2, 3, ..., 44$:

$$\{2, 87, 174\}, \ \{3, 86, 258\}, \ldots, \{44, 45, 1980\}.$$

Јасно, сите елементи на овие множества се елементи на M, и лесно се увидува дека секој пар од множества е взаемно дисјунктен пар. **(13 поени)**

Сега, за да секоја од овие тројки од броеви го исполни условот од задачата, потребно и доволно е од секое од наведените множества да отстраниме по еден број. **(2 поени)**

На пример, да ги отстраниме најмалите броеви од секое множество. Со тоа се отстранети 43 броеви, па заедно со бројот 1, вкупно отстранети се 44 броеви. Преостанатото множество е: $\{45, 46, 47, \ldots, 2023\}$, при што најмалиот можен производ во него е $45 \cdot 46 = 2070 > 2023$ и е надвор од множеството. Со тоа условот на задачата за ова множество е исполнет. **(3 поени)**

Од друга страна, согласно горната конструкција, јасно е дека со враќање на било кој од исфрлените броеви ќе може да се формира производ кој ќе припаѓа во M. Заклучуваме дека најмалиот број елементи кои треба да се отстранат од множеството M изнесува 44. **(2 поени)**

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ОПШТИНСКИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2023

4.02.2023

Прва година

1А. Еден селанец пошол на пазар и со себе понел n вреќи со компири. На патот од селото до пазарот требало да плати давачки на три капии. На првата капија давачката му била $\frac{1}{4}$ од товарот со кој пристигнал, но стражарот се сожалил на селанецот, па од наплатеното му вратил три вреќи. На втората капија давачката на селанецот била $\frac{1}{3}$ од товарот со кој пристигнал, но и вториот стражар се сожалил на селанецот, па од наплатеното му вратил две вреќи. На последната, трета капија давачката на селанецот била $\frac{1}{2}$ од товарот со кој пристигнал, но и овој стражар се сожалил и од наплатеното на селанецот му вратил една вреќа. Кога стигнал на пазарот селанецот избројал дека му останале точно половина од бројот на вреќи со компири со кои тргнал на пазар. Со колку вреќи компири селанецот тргнал на пазар?

Решение 1. На првата капија селанецот пристигнал со n вреќи. Според условот на задачата давачката му била $\frac{1}{4}$ од товарот со кој пристигнал, што значи дека му останале $\frac{3}{4}$ од товарот, т.е. $\frac{3n}{4}$ вреќи со компири. Бидејќи стражарот му вратил три вреќи, селанецот од првата капија заминал со $\frac{3n}{4}+3$ вреќи. **(5 поени)** На втората капија давачката му била $\frac{1}{3}$ од товарот со кој пристигнал, значи му останале $\frac{2}{3}$ од товарот со кој пристигнал, т.е. $\frac{2}{3}\left(\frac{3n}{4}+3\right)=\frac{2n}{4}+2=\frac{n}{2}+2$. Вториот стражар му вратил две вреќи, па селанецот од втората капија заминал со $\frac{n}{2}+2+2=\frac{n}{2}+4$ вреќи. **(5 поени)** На третата капија давачката му била $\frac{1}{2}$ од товарот со кој пристигнал, па му останала $\frac{1}{2}$ од товарот со кој пристигнал, т.е. $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+4\right)=\frac{n}{4}+2$. Но третиот стражар му вратил една вреќа, па селанецот од третата капија заминал со $\frac{n}{4}+2+1=\frac{n}{4}+3$ вреќи. **(5 поени)** На пазарот пристигнал со половина од бројот на вреќи со кој пошол, значи $\frac{n}{2}=\frac{n}{4}+3$ **(5 поени)**, од каде следи дека $n=12$ вреќи компири. **(5 поени)**

Решение 2. Од текстот на задачата имаме дека $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(n-\frac{n}{4}+3\right)+2\right)+1=\frac{n}{2}$, **(15 поени)** од каде $\frac{n}{4}+3=\frac{n}{2}$, **(5 поени)** односно селанецот тргнал со $n=12$ вреќи компири. **(5 поени)**

1Б. Во зоолошка градина имало 5 врапчиња со еднакви маси и 6 ластовички со еднакви маси. При мерење на вкупната маса на сите врапчиња и вкупната маса на сите ластовички со помош на вага, се покажало дека масата на сите врапчиња е поголема од масата на сите ластовички. Ако едно врапче си го замени местото со една ластовичка, тогаш вагата ќе биде во рамнотежа. Вкупната маса на врапчињата и ластовичките е 380 грама. Колку изнесува масата на едно врапче, а колку масата на една ластовичка?

Решение. Да ја означиме масата на едно врапче со x, а масата на една ластовичка со y. Тогаш, имаме дека $5x>6y$, но ако едно врапче си го промени местото со една ластовичка, тогаш вагата ќе биде во рамнотежа, односно $4x+y=5y+x$ ... (1). **(5 поени)** Вкупната маса на врапчињата и ластовичките е 380 грама, односно $5x+6y=380$ ... (2). **(5 поени)** Од (1) имаме $3x=4y$ т.е. $y=\dfrac{3x}{4}$ ... (3). **(5 поени)** Со замена на (3) во (2), добиваме $5x+6\cdot\dfrac{3x}{4}=380$, од каде $x=40$, а од (1) се добива дека $y=30$. Масата на едно врапче изнесува 40 грама, а на една ластовичка 30 грама. **(10 поени)**

2А. (Сигма 126, Задачи од училницата, Прва година, задача 3) Дадени се множествата $A=\{11k+8\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{4m\,|\,m\in\mathbb{Z}\}$ и $C=\{11\cdot(4n+1)-3\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$. Докажи дека $A\cap B=C$.

Решение. Ќе ја докажеме еквиваленцијата $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in C$. Со тоа ќе биде докажана дадената еднаквост.

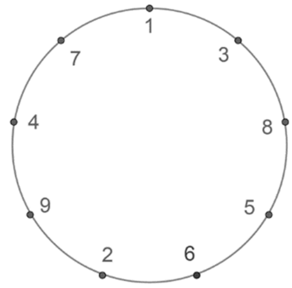
$\Rightarrow$: Нека x е произволен број и нека $x\in A\cap B$. Тогаш $x\in A$ и $x\in B$. Значи, постојат цели броеви k и m, така што $x=11k+8$ и $x=4m$, односно $11k+8=4m$. **(5 поени)** Оттука добиваме дека $11k=4m-8$, односно $11k=4\cdot(m-2)$. Бидејќи 11 и 4 се заемно прости броеви, следува дека $4\,|\,k$, т.е. $k=4t$, за некој $t\in\mathbb{Z}$. **(5 поени)** Тогаш бројот x може да се запише како $x=11k+8=11\cdot4t+8=11\cdot4t+11-3=11\cdot(4t+1)-3$. Јасно, со ваков облик $x\in C$. Докажавме дека $x\in A\cap B\Rightarrow x\in C$ .....(1) **(5 поени)**

$\Leftarrow$: Нека $x\in C$. Тогаш постои $n\in\mathbb{Z}$, така што $x=11\cdot(4n+1)-3$. Средуваме до облик $x=11\cdot4n+8=4\cdot(11n-2)$. **(5 поени)** Ако замениме со $u=4n$, $u\in\mathbb{Z}$ и $v=11n+2, v\in\mathbb{Z}$, добиваме дека $x=11\cdot u+8=4\cdot v$. Следува дека $x\in A\cap B$. Докажавме дека $x\in C\Rightarrow x\in A\cap B$ .....(2).

Конечно од (1) и (2) следува дека $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in C$, а оттука $A \cap B = C$. **(5 поени)**

2Б. (Сигма 126, Рубрика задачи, задача 1698) Дали е можно броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 да се запишат на кружница така што збирот на било кои два соседни броја не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7 ?

Решение. Одговорот е потврден, како што може да се види од цртежот десно. Уште повеќе, $n = 9$ е најмалиот природен број различен од 1, таков што броевите од 1 до n можат да се распоредат на кружница така што збирот на кои било два соседни броја не е делив ниту со ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7. Имено, ако $1 < n < 9$ тогаш 2 и 4 може да го имаат за сосед само бројот 6 и 7 соодветно. За лесно да го конструираме добиеното решение, доволно е да забележиме дека на кружницата:



(i) 1 мора да е меѓу 3 и 7, **(5 поени)**
(ii) 2 мора да е меѓу 6 и 9, **(5 поени)**
(iii) 4 мора да е меѓу 7 и 9. **(5 поени)**
Распоредување на останатите броеви е како на цртежот. **(10 поени)**

Напомена: Ако ученикот скицира кружница на која се запишани броеви што го задоволуваат барањето, а не нуди објаснување/решение, тогаш ги добива сите 25 поени.

3АБ. (Сигма 127, Задачи од училницата, Прва година, задача 1)

Нека a и b се цели броеви такви што во развиениот облик на полиномот $(x^2+ax+b)^3$ коефициентот пред x^4 е 99, а коефициентот пред x е 162. Најди ги вредностите на броевите a и b.

Решение 1. Дадениот израз го запишуваме во развиен облик:

$$(x^2+ax+b)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(ax+b) + 3x^2(ax+b)^2 + (ax+b)^3 =$$
$$= x^6 + 3x^4(ax+b) + 3x^2(a^2x^2 + 2axb + b^2) + a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3$$
$$= x^6 + 3ax^5 + 3bx^4 + 3a^2x^4 + 6abx^3 + 3b^2x^2 + a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 =$$
$$= x^6 + 3ax^5 + (3b+3a^2)x^4 + (6ab+a^3)x^3 + (3b^2+3a^2b)x^2 + 3ab^2x + b^3.$$ **(10 поени)**

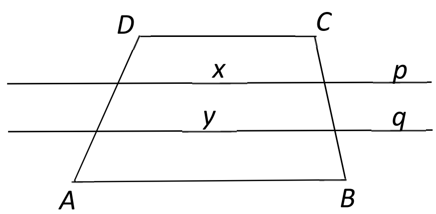
Коефициентот пред x^4 е $3b+3a^2$, а коефициентот пред x е $3ab^2$. Од условите на задачата имаме дека $3b+3a^2=99$ и $3ab^2=162$, односно $b+a^2=33$ и $ab^2=54$. **(5 поени)** Десните страни на двете равенства се деливи со 3, па затоа мора a и b да бидат деливи со 3 (одговори зошто). Сега, за $a=3m$ и $b=3n$, каде што m и n се цели броеви, со замена во равенствата добиваме $3n+9m^2=33$ и $27mn^2=54$, односно $n+3m^2=11$ и $mn^2=2$. Имајќи предвид дека $n^2>0$, од $mn^2=2$ следува дека $m=1$ и $n^2=2$, што не е можно (n е цел број), или $m=2$ и $n^2=1$. Оттука $n=-1$ или $n=1$. Но, равенството $n+3m^2=11$ го задоволува само бројот $n=-1$. Следува дека бараните броеви се $a=3\cdot 2=6$ и $b=3\cdot(-1)=-3$. **(10 поени)**

Решение 2. Дадениот израз го запишуваме во развиен облик:

$$(x^2+ax+b)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(ax+b) + 3x^2(ax+b)^2 + (ax+b)^3 =$$
$$= x^6 + 3x^4(ax+b) + 3x^2(a^2x^2 + 2axb + b^2) + a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3$$
$$= x^6 + 3ax^5 + 3bx^4 + 3a^2x^4 + 6abx^3 + 3b^2x^2 + a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 =$$
$$= x^6 + 3ax^5 + (3b+3a^2)x^4 + (6ab+a^3)x^3 + (3b^2+3a^2b)x^2 + 3ab^2x + b^3.$$ **(10 поени)**

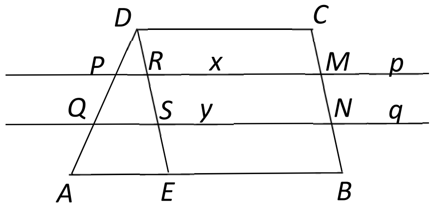
Коефициентот пред x^4 е $3b+3a^2$, а коефициентот пред x е $3ab^2$. Од условите на задачата имаме дека $3b+3a^2=99$ и $3ab^2=162$, односно $b+a^2=33$ ...(1) и $ab^2=54$ ... (2). **(5 поени)** Бидејќи $54=2\cdot 3^3$, од (2) заклучуваме дека $b^2=1$ или $b^2=9$. Ако $b^2=1$, тогаш $a=54$, и со замена во (1) добиваме дека $b=33-54^2=-2883$, што не е можно, затоа што $b^2=1$. Значи, $b^2=9$, па од (2) следи дека $a=6$. Со замена во (1) добиваме дека $b=33-6^2=-3$, што е во ред, затоа што $b^2=9$. Значи, $a=6$ и $b=-3$. **(10 поени)**

4АБ. Правите p и q се паралелни со основите на трапезот $ABCD$ и го делат кракот AD на три еднакви дела. Најди ги должините на отсечките x и y кои краците ги отсекуваат од правите p и q соодветно, ако $\overline{AB}=13$ и $\overline{CD}=4$.



Решение. Нека пресечните точки на правите p и q со кракот AD се P и Q соодветно. Тогаш, $\overline{DP}=\overline{PQ}=\overline{QA}=a$. Низ темето D повлекуваме права паралелна со кракот BC која основата AB ја сече во точката E. Нека пресечните точки на на правите p и q со отсечката DE се R и S соодветно. Четириаголникот $EBCD$ е паралелограм (од $EB \| CD$ и $BC \| ED$), од каде $\overline{EB}=\overline{CD}=4$ и

$\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=13-4=9$. Но, исто така и $\overline{RM}=\overline{SN}=4$, каде M и N се пресечните точки на правите p и q со кракот BC соодветно. **(5 поени)** Од сличноста $\Delta AED\sim\Delta QSD$ имаме $\overline{AE}:\overline{QS}=\overline{AD}:\overline{QD}$, односно $9:\overline{QS}=(3a):(2a)$, од каде $\overline{QS}=\frac{9\cdot 2a}{3a}=6$, па $y=\overline{QS}+\overline{SN}=6+4=10$. **(10 поени)** Од сличноста на $\Delta AED\sim\Delta PRD$ имаме $\overline{AE}:\overline{PR}=\overline{AD}:\overline{PD}$, односно $9:\overline{PR}=(3a):a$, од каде $\overline{PR}=\frac{9a}{3a}=3$, па $x=\overline{PR}+\overline{RM}=3+4=7$. **(10 поени)**



Втора година

1А.2Б. (**Сигма 126, задача 3, Задачи од училница**) Ако x и y се реални решенија на системот $\begin{cases} x+\frac{x}{y}+y=8 \\ x\cdot\frac{x+y}{y}=15 \end{cases}$, најди ја најмалата вредност на збирот $x+y$.

Решение. Ќе ставиме смена $x+y=u$ и $\frac{x}{y}=v$ **(7)** и добиваме еквивалентен систем на дадениот, $\begin{cases} u+v=8 \\ u\cdot v=15 \end{cases}$. Последниот систем ќе го решиме со помош на метод на замена, ставајќи $v=8-u$ **(3)**. Добиваме $u(8-u)=15 \Leftrightarrow u^2-8u+15=0 \Leftrightarrow u_1=3, u_2=5$ **(10)**. Јасно е дека најмалата вредност на збирот е $x+y=u=3$ **(5)**.

1Б. Нека a,b,c,d и e се последователни природни броеви такви што $a<b<c<d<e$. Ако $a^2+b^2+c^2=d^2+e^2$, која е вредноста на a?

Решение. Бидејќи броевите се последователни ќе ги означиме со $n-1, n, n+1, n+2$ и $n+3$ **(5)**. Добиваме равенство $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=(n+2)^2+(n+3)^2$ кое е еквивалентно со $3n^2+2=2n^2+10n+13$, т.е. со $n^2-10n-11=0$ **(10)**. Решенија на последната равенка се 11 и -1, па според условите на задачата следува $n=11$ **(7)**. Тогаш $a=11-1=10$ **(3)**.

2А. (**Сигма 125, Рубрика задачи**) Реши ја параметарската квадратна равенка $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$ со параметри a и b.

Решение. Равенката $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$ е еквивалентна со $(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ чии решенија ќе ги најдеме со формулата за наоѓање на корените на квадратна равенка

$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2-4ab(a^2-b^2)}}{2(a^2-b^2)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^3b+4ab^3}}{2(a^2-b^2)}$$

$$x_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2-2ab-b^2)^2}}{2(a^2-b^2)} \qquad \textbf{(5)}$$

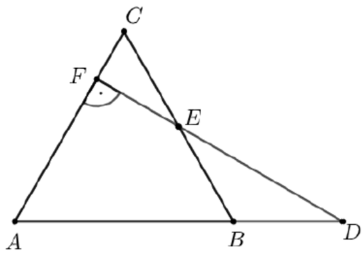
$$x_1=\frac{a^2+b^2+a^2-2ab-b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{2a^2-2ab}{2(a^2-b^2)}=\frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a}{a+b} \text{ при услов } a\neq\pm b;$$

$$x_2=\frac{a^2+b^2-a^2+2ab+b^2}{2(a^2-b^2)}=\frac{2b^2+2ab}{2(a^2-b^2)}=\frac{b(b+a)}{(a-b)(a+b)}=\frac{b}{a-b} \text{ при услов } a\neq\pm b \ \textbf{(5)}.$$

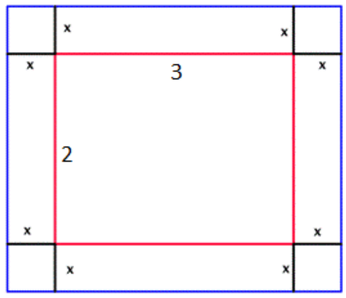
Ако $a=\pm b$ тогаш равенката нема да е квадратна и ќе има решение $x=\frac{\pm b^2}{2b^2}=\pm\frac{1}{2}$ кога $b\neq 0$ **(5)**. Ако $a=b=0$, равенката има бесконечно многу решенија **(5)**.

3А. Даден е рамностран триаголник ABC и точка D на правата AB таква што $\overline{AB}=2\overline{BD}$. Притоа, нормалата спуштена од точката D кон AC ја сече страната BC во точка E и страната AC во точка F. Ако $\overline{CF}=6$, колку изнесуваплоштината на четириаголникот $ABEF$?

Решение. Бидејќи триаголникот ECF е правоаголен со остри агли од $30°$ и $60°$, следува дека $\overline{CE}=2\overline{CF}=12$ и тогаш $\overline{FE}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$ **(8)**. Нека страната на рамностраниот триаголник е a. Од правоаголниот триаголник ADF со остри агли од $30°$ и $60°$ следува дека $2\overline{FA}=\overline{AD}$, т.е. $2(a-6)=a+\frac{a}{2}$ и оттука добиваме $a=24$ **(10)**. За плоштината на четириаголникот $ABEF$ имаме $P_{ABC}-P_{ECF}=\frac{24^2\sqrt{3}}{4}-\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=6\cdot 21\sqrt{3}=126\sqrt{3}$ **(7)**.



3Б. (Сигма 123, задача 4, Задачи од училница) Бобан направил јорган со димензии $2\,\mathrm{m}$ и $3\,\mathrm{m}$. Тој има уште $6\,\mathrm{m}^2$ материјал кој што може да го искористи за да додаде раб околу јорганот. Колку широк треба да го направи работ за да го искористи целиот материјал? (Работ мора да биде со иста ширина на сите четири страни.).



Решение. Ако нацртаме скица на јорганот, во облик на правоаголник, проблемот се сведува на одредување на плоштина на правоаголник. Така, на цртежот десно, внатрешниот правоаголник е јорганот, а на него е доцртан работ кој Бобан сака да го додаде околу јорганот **(5)**. За да се искористи целиот материјал за работ, потребно е плоштината на работ со ширина x да изнесува $6\,\mathrm{m}^2$ (толку материјал преостанало) **(5)**. Таа плоштина може да се пресмета како разлика на плоштината на големиот правоаголник со страни $(2+2x)$ и $(3+2x)$ и плоштината на внатрешниот правоаголник со страни 2 и 3 **(5)**. Добиваме равенка: $(2+2x)\cdot(3+2x)-2\cdot 3=6 \Leftrightarrow 4x^2+10x-6=0$ **(5)**. Решенијата на квадратната равенка се $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=-3$. Второто решение не се зема предвид бидејќи е негативен број, па останува ширината на работ околу јорганот да е $x=0{,}5\,\mathrm{m}$ **(5)**.

4АБ. Ева и Сара заедно имаат 51 година. Марко и Сара заедно имаат 54 години. Ако збирот на цифрите на годините на Сара е за 1 поголем од годините на Ева, колку години има Марко?

Решение. Нека годините на Ева се x, годините на Сара се y и годините на Марко се z. Тогаш, $x+y=51$, $z+y=54$ **(3)**, па јасно, Сара има или едноцифрен или двоцифрен број на години. Нека $y=10a+b$, каде $a,b=0,1,\dots,9$ **(3)**. Од условот на задачата тогаш $a+b=1+x$ **(3)**. Заменувајќи во првата равенка, добиваме $a+b-1+10a+b=51$, т.е. $11a+2b=52$ **(4)**. Од последната равенка следува дека a е парен број, т.е. парна цифра па $a=0,2,4,6,8$ **(4)**. Со проверка, добиваме дека $a=4$, а оттука $b=4$ **(5)**. Значи, Сара има 44 години, а тогаш Марко има 10 години **(3)**.

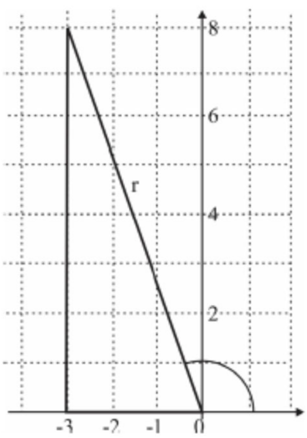
Трета година

1А. (Сигма 122, Задачи од училницата, Трета година, Задача 2) Нека m и n се природни броеви за кои важи равенството $\log_3\left(\log_{2^m}\left(\log_{3^n}3^{100}\right)\right)=0$. Докажи дека бројот n е содржател на бројот 5.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $\log_{2^m}\left(\log_{3^n}3^{100}\right)=1$, **(5п.)** односно $3^{n\cdot 2^m}=3^{100}$ **(10п.)**. Оттука $n\cdot 2^m=100$, од каде $m=1$ и $n=50$ **(5п.)** или $m=2$ и $n=25$. **(5п.)** Во двата случаи n е содржател на бројот 5.

1Б. (Сигма 122, Задачи од училницата, Трета година, Задача 4)

Пресметај ја вредноста на $\cos\theta$ ако се знае дека $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ и $\operatorname{tg}\theta=-\frac{8}{3}$.



Решение. Косинусот е парна функција, а за агол $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ истиот е негативен. **(5п.)**

Сега, според условите на задачата, конструираме триаголник како на цртежот. **(10п.)**

Хипотенузата на триаголникот е $r=\sqrt{8^2+(-3)^2}=\sqrt{73}$. **(5п.)** Тогаш $\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{73}}=\frac{-3\sqrt{73}}{73}$. **(5п.)**

2А. Пресметај ја вредноста на изразот $\left(1+\operatorname{tg}1^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}2^\circ\right)\dots\left(1+\operatorname{tg}44^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}45^\circ\right)$.

Решение. Ако $\alpha+\beta=45^\circ$, тогаш од идентитетот $\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta}$ добиваме $\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta+\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta=1$. **(10п.)**

Следува $\left(1+\text{tg}k^\circ\right)\left(1+\text{tg}\left(45^\circ-k^\circ\right)\right)=1+\text{tg}k^\circ+\text{tg}\left(45^\circ-k^\circ\right)+\text{tg}k^\circ\cdot\text{tg}\left(45^\circ-k^\circ\right)=2$, за секој $k=1,2,...,22$. **(10п.)**

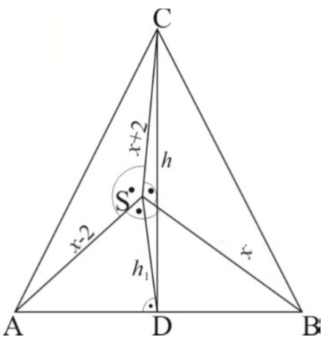
Бидејќи $1+\text{tg}45^\circ=2$, добиваме дека $\left(1+\text{tg}1^\circ\right)\left(1+\text{tg}2^\circ\right)...\left(1+\text{tg}44^\circ\right)\left(1+\text{tg}45^\circ\right)=2^{23}$. **(5п.)**

2Б. Реши ја равенката $8^{\frac{2}{x}}-8\cdot2^{\frac{3}{x}}+12=0$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $2^{3\cdot\frac{2}{x}}-8\cdot2^{\frac{3}{x}}+12=0$. **(10п.)** Воведуваме смена $t=2^{\frac{3}{x}}$, па последната равенка преминува во квадратна равенка од облик $t^2-8t+12=0$. **(5п.)** Решенијата на квадратната равенка се $t_1=2$ и $t_2=6$. **(5п.)** Според тоа, за $t_1=2$ добиваме дека $x_1=3$, а за $t_2=6$ добиваме дека $x_2=3\log_6 2$. Значи, решенија на дадената равенка се $x_1=3$ и $x_2=3\log_6 2$. **(5п.)**

3АБ. (Сигма 121, **Задачи од училницата, Трета година, Задача 3)**

За тристрана пирамида $ABCS$, плоштината на основата ABC изнесува $14\,\text{cm}^2$. Бочните рабови на пирамидата се два по два заемно нормални, а нивните должините се три последователни парни броеви. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.



Решение. Должините на бочните рабови ќе ги означиме со $\overline{AS}=x-2,\overline{BS}=x,\overline{CS}=x+2,$ за *x* парен број. Секој од бочните ѕидови на пирамидата е правоаголен триаголник. Да ги означиме уште и должината на основниот раб $\overline{AB}=c$, h_1 висината во ΔABS спуштена кон хипотенузата и h висината во ΔABC спуштена кон *AB*. Плоштината на пирамидата може да се запише како $P=P_{\Delta ABC}+P_{\Delta ACS}+P_{\Delta ABS}+P_{\Delta BCS}$. Односно добиваме

$P=14+\frac{1}{2}\left[(x-2)(x+2)+x(x-2)+x(x+2)\right].$ **(5п.)**

За обвивката на пирамидата добиваме бочна плоштина $M=\frac{1}{2}(3x^2-4)=\frac{3}{2}x^2-2.$ **(3п.)**

За плоштината на ΔABS може да запишеме $x(x-2)=ch_1$, каде $c=\sqrt{x^2+(x-2)^2}=\sqrt{2x^2-4x+4}.$ **(3п.)** Оттука, со замена во претходното равенство добиваме $h_1=\frac{x(x-2)}{\sqrt{2x^2-4x+4}}$. **(3п.)** Од ΔDCS имаме $h=\sqrt{(x+2)^2+h_1^{\,2}}$. **(3п.)** За плоштината на основата сега може да запишеме $28=ch,$ па со замена на погоре добиените вредности, последново добива облик на равенка $28^2=(x+2)^2(x^2+(x-2)^2)+x^2(x-2)^2=...=3x^4+16$, од каде $x=4.$ **(5)**

Конечно, за плоштината на пирамидата добиваме $P=36$ квадратни единици, а за волуменот, заради трите прави агли при врвот, $V=\frac{x(x-2)(x+2)}{6}=8$ кубни единици. **(3п.)**

4АБ. Определи ги сите парови реални броеви (k,m) за кои $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е квадратна функција од облик $f(x)=\left(k^2+m^2\right)x^2+kmx+m$ и важи $f(m)=k$ и $f(k)=m$.

Решение. Јасно $k^2+m^2\neq0$, односно $k\neq$ или $m\neq0$. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases}f(m)=k\\f(k)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k\\\left(k^2+m^2\right)k^2+k^2m+m=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k\\\left(k^2+m^2\right)k^2+k^2m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k\\k^2\left(k^2+m^2+m\right)=0\end{cases}$$

Од втората равенка да системот $k^2\left(k^2+m^2+m\right)=0$ имаме дека $k=0$ или $k^2+m^2+m=0$. **(5п.)** Ќе ги разгледаме двата случаи:

1. За $k=0$ првата равенка на системот $\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k$ преминува во облик $m^4+m=0$, односно $m\left(m^3+1\right)=0$. Според тоа, $m=0$ или $m=-1$. Бидејќи f е квадратна функција, $k^2+m^2\neq0$, односно $k\neq0$ или $m\neq0.$ Единствени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата во овој случај се $k=0$ и $m=-1$. **(5п.)**

2. За $k^2+m^2+m=0$, односно за $k^2+m^2=-m$ првата равенка на системот $\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k$ преминува во облик $-m^3+km^2=k-m$. Тогаш $m^2\left(k-m\right)=k-m$, односно $\left(k-m\right)\left(m^2-1\right)=0$.

Според тоа имаме две можности $k=m$ или $m^2=1$. **(5п.)**

2.1. Ако $k=m$, тогаш од $k^2+m^2=-m$ имаме дека $2m^2+m=0$, односно $m=0$ или $m=-\frac{1}{2}$. Јасно, во овој случај единствени броеви кои ги исполнуваат условите на задачата се $k=m=-\frac{1}{2}$. **(5п.)**

2.2. Ако $m^2=1$, тогаш $m=1$ или $m=-1$. За $m=1$, од $k^2+m^2=-m$ добиваме дека $k^2+1=-1$ и оваа равенка нема решение во множеството реални броеви. За $m=-1$, од $k^2+m^2=-m$ добиваме дека $k^2+1=1$, односно $k=0$. Значи, во овој случај $k=0$ и $m=-1$ се броевите кои ги задоволуваат условите на задачата. **(5п.)**

Јасно, паровите $(0,-1)$ и $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ се единствените за кои функцијата f ги задоволува условите на задачата.

Четврта година

1А.Одреди ги сите парови од цели броеви (m,n) такви што $4\cdot 3^{2m}+5=n^2$.

Решение 1. Да воочиме дека од $4\cdot 3^{2m}=n^2-5$ следува дека $4\cdot 3^{2m}$ е цел број, што значи дека $m\geq 0$. **(3п.)**
Даденото равенство го запишуваме во следниот облик: $n^2-4\cdot 3^{2m}=5$, односно $(n-2\cdot 3^m)(n+2\cdot 3^m)=5$, **(10п.)**
каде изразите во заградите се цели броеви. Бидејќи $n-2\cdot 3^m<n+2\cdot 3^m$, последното равенство е точно само во следните два случаи: $\begin{cases} n-2\cdot 3^m=1 \\ n+2\cdot 3^m=5 \end{cases}$ **(5п.)** и $\begin{cases} n-2\cdot 3^m=-5 \\ n+2\cdot 3^m=-1 \end{cases}$ **(5п.)**

Лесно се добива дека решение на првиот систем е $n=3, m=0$, **(1п.)** а на вториот $n=-3, m=0$. **(1п.)**
Конечно, решение на задачата се паровите $(0,-3)$ и $(0,3)$.

Решение 2. Најпрво, да воочиме дека од $4\cdot 3^{2m}=n^2-5$ следува дека $4\cdot 3^{2m}$ е цел број, што значи дека $m\geq 0$. **(3п.)**
За $m=0$ добиваме $n^2=4\cdot 3^{2\cdot 0}+5=9$, од каде следи дека $n=-3$ или $n=3$. Во овој случај добиваме два пара, $(0,-3)$ и $(0,3)$. **(2п.)** За $m\geq 1$, бројот $n^2=4\cdot 3^{2m}+5$ при делење со 3 дава остаток 2. **(10п.)** Но ова не е можно бидејќи при делење со 3, квадратот на произволен цел број n дава остаток 0 (ако n е делив со 3) или 1 (ако n не е делив со 3). Оттука, за $m\geq 1$ задачата нема решение. **(10п.)** Решение на задачата се паровите $(0,-3)$ и $(0,3)$.

1Б. Најди ја најголемата вредност на природниот број n за кој што $25!+26!$ е делив со 3^n.

Решение. Важи $25!+26!=25!(1+26)=3^3\cdot 25!$. **(5п.)** Разгледувајќи ја каноничната факторизација на бројот $25!$ лесно се заклучува дека $25!=3^{10}\cdot k$, каде k е природен број кој не е делив со 3. **(15п.)**. Оттука следува $25!+26!=3^{13}\cdot k$, што значи $n=13$. **(5п.)**

2А. (Сигма 115, Задачи од училницата) Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи $f(1)=1$ и $f(x+y)=3y\cdot f(x)+2x\cdot f(y)$, за било кои реални броеви x и y.
Решение. Ако во даденото равенство ставиме $x=y=0$, добиваме $f(0)=0$. **(8п.)** Ако пак замениме $x=1, y=0$, добиваме $f(1)=2\cdot f(0)=2\cdot 0=0$. **(12п.)** Бидејќи f е функција, не е можно истовремено да важи $f(1)=0$ и $f(1)=1$. Оттука е јасно дека функција со бараните својства не постои. **(5п.)**

2Б. (Сигма 125, Задачи од училницата) Познато е дека за некои вредности на променливите x и y важи $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8\leq 0$. Докажи дека $x\geq -\frac{1}{6}$.

Решение. Бидејќи важи $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8=x^4y^2+\left(2x^3+6x^2\right)y+x^2+8\leq 0$, изразот може да го разгледуваме како квадратен трином по променлива y кој не е позитивен. **(10п.)** За $x\neq 0$, имаме дека $x^4>0$, па параболата е отворена нагоре и ја сече x-оската. Тогаш $D=\left(2x^3+6x^2\right)^2-4x^4\left(x^2+8\right)\geq 0$, **(10п.)** од каде следува дека $24x^5+4x^4\geq 0$ **(3п.)**. Значи $4x^4\left(6x+1\right)\geq 0$, па јасно е дека мора $x\geq -\frac{1}{6}$. **(2п.)**

3А. (Сигма 126, Рубрика Задачи, 1703). Ако за аглите во триаголникот ABC важи $\frac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$, тогаш одреди ја вредноста на аголот α.

Решение. Даденото равенство се запишува во обликот $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3},$ односно $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\sqrt{3}.$ **(5п.)** Со користење на синусната теорема последното равенство се трансформира во обликот $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}=\sqrt{3}$ **(10п.)** кое е еквивалентно со равенството $c^2+b^2-a^2=\sqrt{3}bc.$ На тој начин добиваме $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$ ...(1). **(2п.)** Од косинусната теорема го имаме равенството $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ ...(2), **(3п.),** па од (1) и (2) следува дека $2\cos\alpha=\sqrt{3}$, односно $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ Од последното равенство добиваме дека $\alpha=30^\circ.$ **(5п.)**

3Б. (Сигма 119, задача 1603 од Рубрика задачи) Некои членови на аритметичките прогресии $a_n=4n+13$ и $b_n=5n+11,$ за $n\in\mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p+11).$

Решение. Од условот $a_n=b_m$ добиваме $4n+13=5m+11,$ т.е. $n=\frac{5m-2}{4}=m+\frac{m-2}{4}$. **(5п.)** Бидејќи n е природен број, следува дека $k=\frac{m-2}{4}\in\mathbb{N}$. **(3п.)** Оттука $m=4k+2$ **(2п.),** па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k=5m+11=5(4k+2)+11=20k+21,\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$ **(4п.)** Притоа, $x_{k+1}-x_k=20$. **(1п.)** Значи, (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k=0,1,2,...,p-1.$ **(3п.)** За бараниот збир добиваме $S_p=\frac{p}{2}(42+(p-1)\cdot 20)=\frac{p}{2}(20p+22)=p(10p+11).$ **(7п.)**

4АБ. На еден математички натпревар на кој учествувале n ученици, дадени се вкупно 4 тешки и 8 лесни задачи. Секој од учениците точно решил 11 од задачите. Притоа, за секој пар од тешка и лесна задача, одреден е бројот на ученици кои точно ги решиле и двете задачи и утврдено е дека збирот на овие 32 броеви е 256. Колку ученици учествувале на натпреварот?

Решение. Од условот на задачата, секој ученик на натпреварот не решил точно една тешка или една лесна задача.
Нека l е бројот на ученици кои не решиле лесна задача, а t е бројот на ученици кои не решиле тешка задача. Тогаш, на натпреварот имало вкупно $n=l+t$ ученици. **(5п.)**
Притоа:

- Секој ученик кој не решил лесна задача, решил 4 тешки и 7 лесни задачи, односно решил $4\cdot 7=28$ парови од лесна и тешка задача. **(5п.)**
- Секој ученик кој не решил тешка задача, решил 3 тешки и 8 лесни задачи, односно решил $3\cdot 8=24$ парови од лесна и тешка задача. **(5п.)**

Според условите на задачата, имаме дека: $28\cdot l+24\cdot t=256$, односно $7\cdot l+6\cdot t=64$. **(5п.)**
Поради тоа што l и t се природни броеви, од последното равенство заклучуваме дека l е парен број.
Натаму, од $t=\frac{64-7\cdot l}{6}$ може да заклучиме дека $l\leq 9$. Со директна проверка за броевите $l=2,4,6,8$ заклучуваме дека целобројна вредност за t се добива само за $l=4$, при што $t=6.$ Оттука добиваме дека на натпреварот имало $n=4+6=10$ ученици. **(5п.)**