

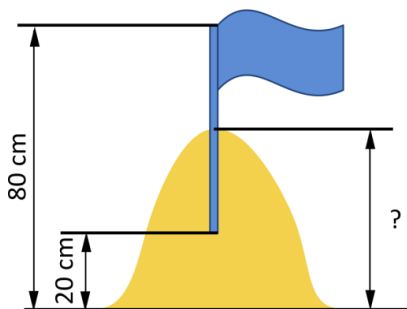
Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

МАЛА ЗБИРКА ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИЈА

На општинските и регионалните натпревари во секое одделение задолжително се задаваат геометриски задачи. Оттука и потребата учениците при подготовката за натпреварите систематски да решаваат задачи од ваков вид. Имајќи го ова предвид во оваа статија ќе презентираме повеќе геометриски задачи, за кои сметаме дека учениците треба да ги решаваат во почетната фаза при подготовките за општинските и регионалните натпревари, што може да се прави и во рамките на редовната настава. Имено, дел од презентираниите задачи се погодни и за реализација на следењето, проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците.

ПРЕСМЕТУВАМЕ ДОЛЖИНИ И ПЕРИМЕТРИ

1. Тиме и Томе изградиле замок од песок и го украсиле со знаме како на цртежот. Половината од држачот на знамето се наоѓа над највисоката точка на замокот. Горниот дел од држачот на знамето се наоѓа 80 cm над површината на земјата, а долниот дел е 20 cm над површината на земјата. Колку е висок песочниот замокот?



Решение. Држачот на знамето има должина $80 - 20 = 60\text{ cm}$. Половината од неговата должина е еднаква на $60 : 2 = 30\text{ cm}$. Според тоа, замокот е висок $30 + 20 = 50\text{ cm}$.

2. Коста направил нова ограда во својата градина. Тој искористил 25 штици од дрво, секоја од кои е долга 30 cm . Коста штиците ги поврзал така што во секој спој на било кои две штици има исто мало преклопување (види цртеж). Вкупната должина на новата ограда на Коста е $6,9\text{ m}$. Колкава е должината во сантиметри на преклопувањето меѓу кој било пар соседни штици?



Решение. Нека должината на делот во кој штиците се преклопуваат е x cm. Тогаш 24 штици во оградата се со должина $30 - x$ cm, а една е со должина 30 cm. Затоа

$$24(30 - x) + 30 = 690$$

$$720 - 24x = 660$$

$$x = 2,5 \text{ cm}$$

3. На една права од лево кон десно се означени единаесет точки. Збирот на сите растојанија од првата до останатите точки е еднаков на 2018. Збирот на сите растојанија од втората до останатите точки е еднаков на 2000. Колкаво е растојанието меѓу првата и втората точка?

Решение. Нека растојанието од првата до втората точка е x , а збирот на растојанијата од втората до сите преостанати точки, освен првата е еднакво на y . Бидејќи збирот на растојанијата од втората до сите други точки е 2000, добиваме $x + y = 2000$. Понатаму, збирот на растојанијата од првата до сите други точки можеме да го добиеме ако на збирот на растојанијата од втората до преостанатите точки, освен првата десет пати се додаде растојанието од првата до втората точка (направи цртеж). Според тоа, $10x + y = 2018$ и како $x + y = 2000$, добиваме $9x + 2000 = 2018$, т.е. $x = 2$.

4. На долните цртежи се прикажани незакопчана лента и истата таа лента закопчана на една дупка.

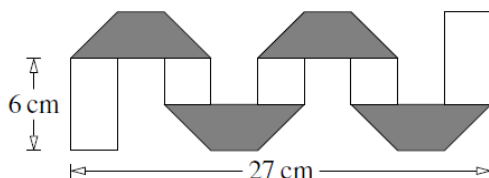


Колкава е разликата на должината на лентата кога таа е закопчана на една дупка и кога лентата е закопчана на сите 5 дупки?

Решение. Ако лентата е закопчана на 1 дупка, за да се закопча на 5 дупки, треба да поместиме за 4 дупки. Со секое поместување за 1 дуп-

ка должината на лентата се намалува за 2 cm . Според тоа, кога лентата е закопчана на 5 дупки нејзината должина ќе се намали за $4 \cdot 2 = 8\text{ cm}$.

5. Правоаголна лента широка 3 cm е бела од едната страна, а црна од другата страна. Таа ја свиткала лентата како на цртежот десно. Црните трапези се складни.

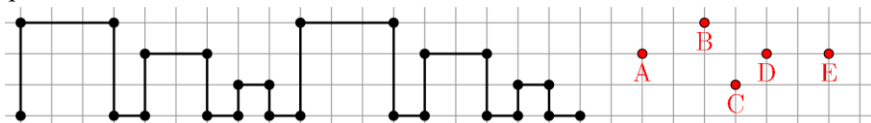


Колкава е должината на правоаголната лента?

Решение. Јасно црните трапези се рамнокраки трапези со агол при поголемата основата 45° и агол при помалата основа 135° . Нака лентата е широка $x\text{ cm}$. Според тоа секој црн трапез е составен од два рамнокраки правоаголни триаголници со должини на катети $x\text{ cm}$ и еден квадрат со должина на страна $x\text{ cm}$. Оттука добиваме дека $5x + 4x = 27$, односно $x = 3\text{ cm}$. Понатаму, должината на лентата ќе ја пресметаме ако ги собереме должините на нејзините бели делови и на нив го додадеме збирот на поголемите основи на четирите сиви трапези (Зошто?). Според тоа, должината на лентата е еднаква на

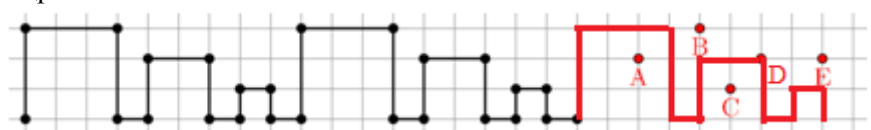
$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 9 = 12 + 9 + 36 = 57\text{ cm}.$$

6. Матеа нацртала два пати иста искршена линија и го добила следниов цртеж:



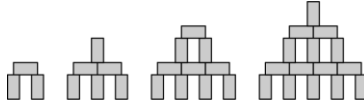
Потоа истата искршена линија ја нацртала уште еднаш. Која точка лежи на искршената линија? Колкава е должината на искршената линија до таа точка, ако должината на страната на секое квадратче е 1 cm ?

Решение. Ако ја продолжиме искршената линија како на долниот цртеж добиваме дека само точката D лежи на линијата која ја нацртала Матеа.



Лесно се пресметува дека должината на искршената линија до таа точка е еднаква на $9 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 13 \cdot 1 = 56 \text{ cm}$.

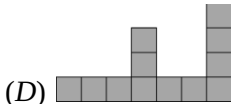
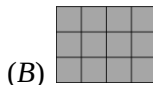
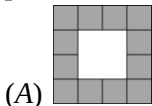
7. Со блокови со димензија $1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 2\text{cm}$ последователно се прават кули како што е прикажано на долниот цртеж.



Колку ќе биде висока кулата која што е направена со помош на 28 блокови?

Решение. Првата кула е направена со $1+2=3$ блокови и има висина $2+1=3 \text{ cm}$. Втората кула е направена со помош на $1+2+3=6$ блокови и нејзината висина е $2+1+2=5 \text{ cm}$. Третата кула е направена со $1+2+3+4=10$ блокови и има висина $2+1+2+1=6 \text{ cm}$. Четвртата кула е направена со помош на $1+2+3+4+5=15$ блокови и има висина $2+1+2+1+2=8 \text{ cm}$. За петтата кула треба $1+2+3+4+5+6=21$ блок и таа ќе има висина $2+1+2+1+2+1=9 \text{ cm}$. Конечно, за шесттата кула се потребни $1+2+3+4+5+6+7=28$ блокови и нејзината висина ќе биде $2+1+2+1+2+1+2=11 \text{ cm}$.

8. Ана има 4 фигури со следнава форма . Која од следниве фигури Ана не може да ја направи со помош на дадените 4 фигури?



Должината на страната на секое квадратче е еднаква на 1 cm . Определи ги периметрите на фигурите кои Ана може да ги направи.

Решение. Фигурата (A) се прави ако последователно се ставаат фигурите една по друга под прав агол. Нејзиниот периметар е еднаков на $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 20 \text{ cm}$.

Фигурата (B) се направи ако четирте фигури се постават вертикално една до друга. Нејзиниот периметар е еднаков на $2(4+3) = 14 \text{ cm}$.

Фигурата (C) се прави ако три фигури ставиме хоризонтално и една вертикално. Нејзиниот периметар е еднаков на $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 26 \text{ cm}$.

Фигурата (D) може да се направи ако почнувајќи од лево фигурите ги поставуваме хоризонтално, па вертикално, па хоризонтално и вертикално. Нејзиниот периметар е $7 + 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 26 \text{ cm}$.

За фигурата (E) прво мора во еден од трите реда да поставиме една фигура хоризонтално, па втората да е вертикално. Но тогаш барем во еден од двата соседни редови покриено е средно квадратче и треба да покриеме уште три разделени квадратчиња, што не е можно. Значи оваа фигура не може да се состави со дадените четири фигури.

9. Даден е триаголник со должини на страни се 6 cm , 10 cm и 11 cm . Рамностран триаголник има ист периметар како дадениот. Колкава е должината на страната на рамностраниот триаголник?

Решение. Периметарот на дадениот триаголник е $6 + 10 + 11 = 27 \text{ cm}$.

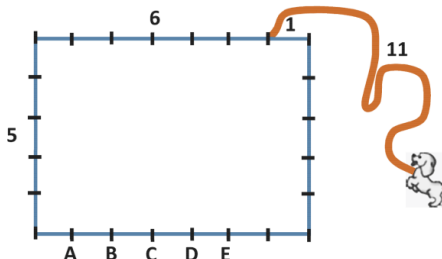
Ако a е должината на страната на рамностраниот триаголник, тогаш $3a = 27$, односно $a = 9 \text{ cm}$.

10. На цртежот испрекинатата линија и полната линија формираат седум рамностранни триаголници. Должината на испрекинатата линија е 20 cm . Колкава е должината на полната линија?



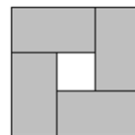
Решение. Секој триаголник има една страна која припаѓа на испрекинатата линија и две страни кои припаѓаат на полната линија. Бидејќи триаголниците се рамностранни, нивните страни се со еднаква должина, па затоа должината на полната линија е двапати поголема од должината на испрекинатата линија. Конечно, должината на испрекинатата линија е $2 \cdot 20 = 40 \text{ cm}$.

11. Марко го врзал своето куче 1 метар од темето на една правоаголна ограда со должини на страни 7 m и 5 m , како на цртежот десно, и притоа употребил јаже со должина од 11 m . Тој поставил коски на местата означени со буквите A, B, C, D и E . Колку коски може да достигне кучето?



Решение. Ако кучето оди лево по горната страна, тогаш до точката A во која е првата коска има $6+5+1=12\text{ m}$ и бидејќи јажето е долго 11 m , тоа не може да стигне до ниту една коска. Ако кучето оди десно по горната страна, тоа ќе стигне до точката која на долната страна мерејќи од десно кон лево од е на растојание $11-1-5=5\text{ m}$ од темето на правоаголникот. Тоа е точката B , што значи дека кучето ќе стигне до 4 коски.

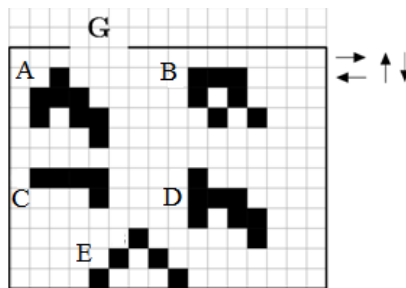
12. На цртежот десно имаме четири еднакви правоаголници поставени во внатрешноста на квадрат. Периметарот на секој правоаголник е еднаков на 16 cm . Колку изнесува периметарот на квадратот?



Решение. Нека должината на поголемата страна на правоаголниците е a , а должината на помалата страна е b . Тогаш должината на страната на квадратот е еднаква на $a+b$, па затоа неговиот периметар е еднаков на

$$4(a+b) = 2 \cdot 2(a+b) = 2 \cdot 16 = 32\text{ cm}.$$

13. Петте фигури поставени на мрежата (цртеж лево) може да се движат само во насоките кои ги покажуваат црните стрелки. Која фигура може да излезе низ отворот G ?



Решение. Нека должината на страната на квадратчињата во мрежата е 1. За да фигура излезе низ отворот G потребно и доволно е во секој ред растојанието на најоддалечените црни точки на таа фигура да е помало или еднаков на 3. Ова својство го има само фигурата B , што значи дека само таа може да излезе низ отворот G . Лесно се пресметува дека периметарот на оваа фигура е еднаков на $3+2 \cdot 2+5+4+4=20$.

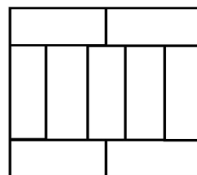
14. Марко има два вида стапчиња: кратки, со должина од 1 cm и долги, со должина од 3 cm , кои се прикажани на долниот цртеж.



Користејќи го најголемиот можен број стапчиња, тој составил квадрат без притоа да ги крши или преклопува стапчињата? Определи го периметарот на квадратот кој го составил Марко.

Решение. Марко има 9 стапчиња со должина 1 cm и 9 стапчиња со должина 3 cm . Тој може да состави квадрат без притоа да ги крши или преклопува стапчињата ако ги употреби сите стапчиња. Притоа, три страни од квадратот ќе имаат по 3 стапчиња со должина од 3 cm , а четвртата страна на квадратот ќе има 9 стапчиња со должина од 1 cm . Според тоа, должината на страната на квадратот ќе биде еднаква на $3 \cdot 3 = 9 \cdot 1 = 9\text{ cm}$. Конечно, периметарот на квадратот ќе биде еднаков на $4 \cdot 9 = 36\text{ cm}$.

15. Големиот правоаголник на цртежот десно е составен од 9 мали идентични правоаголници. Поголемата страна на малите правоаголници е долга 10 cm . Колкав е периметарот на големиот четириаголник?



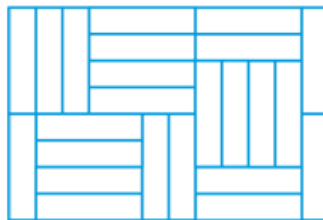
Решение. Нека x е должината на помалата страна на малиот правоаголник. Тогаш $5x = 20$, па затоа $x = 4\text{ cm}$. Значи, должините на страните големиот правоаголник се

$$a = 2 \cdot 10 = 20\text{ cm} \text{ и } b = 10 + 2 \cdot 4 = 18\text{ cm}.$$

Според тоа, периметарот на големиот правоаголник е

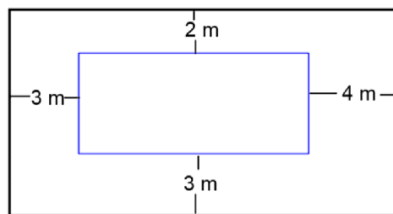
$$O = 2(a + b) = 2(20 + 18) = 76\text{ cm}.$$

16. Под во форма на правоаголник е поплочен со еднакви правоаголни плочи како што е прикажано на цртежот десно. Должината на пократката страна на плочите е 20 cm . Определи го периметарот на подот.



Решение. Должината на подолгата страна на плочите со кои е поплочен подот е еднаква на $4 \cdot 20 = 80\text{ cm}$. Должината на пократката страна на подот е еднаква на $2 \cdot 80 = 160\text{ cm}$, а должината на подолгата страна на подот е еднаква на $2 \cdot 80 + 4 \cdot 20 = 26 \cdot 20 = 520\text{ cm}$. Според тоа, периметарот на подот е еднаков на $2(160 + 240) = 800\text{ cm} = 8\text{ m}$.

17. На цртежот десно се прикажани два правоаголника кои имаат паралелни страни. Определи ја разликата на периметрите на тие два правоаголника.

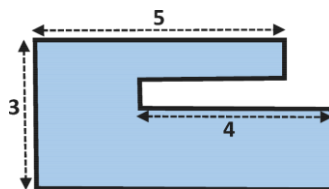


Решение. Нека должините на страните на малиот правоаголник се a и b . Тогаш неговиот периметар е еднаков на $2(a+b)$. Сега, должините на страните на големиот правоаголник се $a+7$ и $b+5$, па затоа неговиот периметар е

$$2(a+7+b+5) = 2(a+b) + 24 m.$$

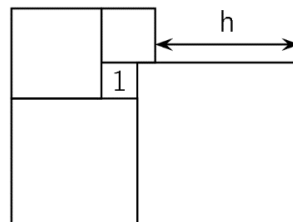
Значи, разликата на периметрите на овие два правоаголника е $24 m$.

18. Градината на Саша има форма како на цртежот. Сите страни на цртежот се паралелни или нормални. Некои од димензиите изразени во метри се дадени на цртежот. Определи го периметарот на градината.



Решение. Збирот на трите вертикални страни отсечки кои учествуваат во периметарот и се со непознати должини е еднаков на $3 m$. Понатаму, збирот $5+4=9 m$ е еднаков на збирот на должините на двете хоризонтални отсечки чии должини не ни се познати. Конечно, периметарот на градината на Саша е еднаков на $2(3+9) = 24 m$.

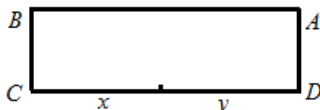
19. Пет квадрати се поставени како што е прикажано на цртежот десно. Најмалиот квадрат има плоштина 1, а должината на страната на вториот по големина квадрат е за половина поголема од должината на страната на најмалиот квадрат. Колку е бројната вредност на должината h ?



Решение. Бидејќи $1=1 \cdot 1$, заклучуваме дека должината на страната на најмалиот квадрат е 1. Сега должината на страната на вториот по големина квадрат е 1,5, должината на страната на третиот по големина квадрат е 2,5, должината на страната на четвртиот по големина квадрат е 4,5 и должината на страната на петтиот по големина квадрат е 5,5. Затоа важи $3,5+2,5+h=4,5+5,5$ односно $h=4$.

20. Четири деца се наоѓаат во четирите ќошиња на базен со димензии на површината $10m \times 25m$. Нивниот тренер се наоѓа некаде на една страна на од базенот. Кога тој ги повикал, три од децата излегле од базенот и дошле до него одејќи по рабовите на базенот по најкратките патишта. Тие поминале вкупно $50m$. Кое е најкраткото растојание кое тренерот треба да го измине за да стигне до четвртото дете?

Решение. Нека претпоставиме дека тренерот се наоѓа на подолга страна на базенот (цртеж десно). Со x и y да ги означиме растојанијата од тренерот до двата најблиски ученика. Тогаш $x + y = 25$. До симетрија се можни два случаја:



- 1) Учениците A, B и C дошле до тренерот. Тогаш од условот на задачата следува $x + x + 10 + y + 10 = 50$, па затоа $x = 5m$. Според тоа, $y = 20m$ и тоа е најкраткото растојание кое тренерот треба да го помине за да стигне до четвртиот ученик.
- 2) Учениците B, C и D дошле до тренерот. Тогаш од условот на задачата следува $x + 10 + x + y = 50$, па затоа $x = 15m$. Според тоа, $y = 10m$, па најкраткото растојание до ученикот A е $y + 10 = 20m$.

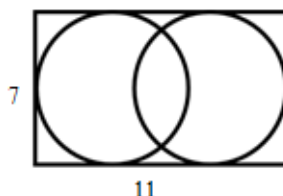
Нека претпоставиме дека тренерот е по-кратката страна на базенот (цртеж десно).



Со x и y да ги означиме растојанијата од тренерот до двата најблиски ученика. Тогаш $x + y = 10$. Јасно, не е можно и двата ученика A и D да дошле до тренерот, бидејќи збирот на нивните растојанија до тренерот е поголем од $25 + 25 = 50$. Сега, до симетрија имаме само еден случај, а тоа е дека учениците A, B и C дошле до тренерот. Но, тогаш од условот на задачата добиваме $x + y + x + 25 = 50$, од каде следува $x = 15m > 10m$, што не е можно.

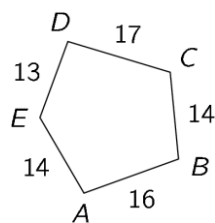
Конечно, од претходните разгледувања следува дека одговорот е $20m$.

21. На цртежот лево се прикажани правоаголник со димензии 7×11 и две кружници, секоја од кои допира три страни на правоаголникот. Колкаво е растојанието меѓу центрите на кружниците



Решение. Јасно, дијаметрите на кружниците се еднакви на 7, што значи дека нивните радиуси се еднакви на $7:2=3,5$. Според тоа, центрите на кружниците од страните на правоаголникот се на растојание 3,5. Затоа растојанието меѓу центрите на кружниците е еднакво на $11-2\cdot 3,5=4$.

22. На цртежот е нацртан петоаголник. Горан нацртал пет кружници со центри во точките A, B, C, D, E така што кружниците со центри на иста страна на петоаголникот се допираат. Должините на страните на петоаголникот се дадени. Која точка е центар на кружницата со најголем радиус?



Решение. Нека радиусите нацртани во точките A, B, C, D, E се еднакви на a, b, c, d, e . Од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} a+b=16, \\ b+c=14, \\ c+d=17, \\ d+e=13, \\ e+a=14. \end{cases}$$

Ако ги собереме првата, третата и петтата равенка, а потоа ги одземеме втората и четвртата равенка, добиваме $2a=20$, т.е. $a=10$. Сега последователно добиваме $b=6$, $c=8$, $d=9$, $e=4$. Според тоа, кружницата со центар во точката A има најголем радиус.

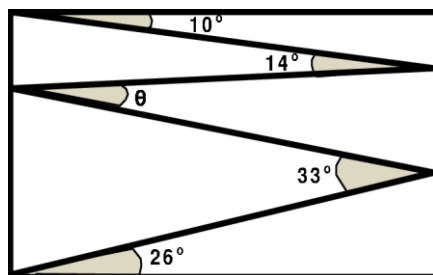
ПРЕСМЕТУВАМЕ АГЛИ

23. Големините на аглите, изразени во степени, во еден триаголник се три различни природни броеви. Определи го најмалиот можен збир на најмалиот и најголемиот агол во триаголникот?

Решение. Нека должините на страните на триаголникот се a, b, c и нека α, β, γ се соодветно аглите наспроти нив. Бидејќи наспроти поголема страна во триаголникот лежи поголем агол, од неравенството на триаголник $a < b + c$ следува $\alpha < \beta + \gamma$. Понатаму, бидејќи мерките на α, β, γ изразени во степени се природни броеви и $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ако β и γ се соодветно најмалиот и најголемиот агол, тогаш најма-

лиот моѝен збир $\beta + \gamma$ се добива за $\alpha = 89^\circ$, $\beta = 1^\circ$ и $\gamma = 90^\circ$, и тој е еднаков на 91° .

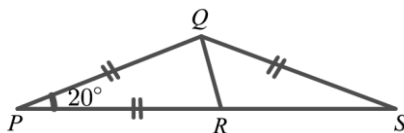
24. Васко во правоаголник нацртал искршена линија при што формирал агли од $10^\circ, 14^\circ, 33^\circ$ и 26° (цртежот десно). Аголот θ е еднаков на:



Решение. Во темињата на трите средни агли повлекуваме хоризонтални прави. Ако се искористат својствата на аглиите на трансферзалата, тогаш од $33^\circ = 26^\circ + 7^\circ$ и $14^\circ = 10^\circ + 4^\circ$ следува $\theta = 4^\circ + 7^\circ = 11^\circ$.

25. На цртежот десно важи $\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{QS}$ и $\angle QPR = 20^\circ$.

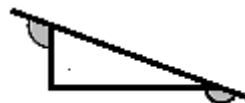
Опреди го аголот $\angle RQS$.



Решение. Триаголникот PQR е

рамнокрак, па затоа важи $\angle PRQ = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$. Понатаму, триаголникот PSQ е рамнокрак, па затоа важи $\angle PSQ = 20^\circ$. Сега, бидејќи надворешниот агол во триаголникот е еднаков на збирот на двата несоседни негови агли, добиваме $\angle RQS = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.

26. Триаголникот на цртежот десно е правоаголен. Опреди го збирот на означените агли.



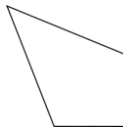
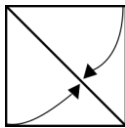
Решение. Ако острите агли на правоаголниот триаголник се α и β , тогаш означените агли на

цртежот се еднакви на $180^\circ - \alpha$ и $180^\circ - \beta$. Но, $\alpha + \beta = 90^\circ$, па затоа

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

27. Зоран превиткал квадратно парче хартија, така што две соседни страни ги превиткал кон дијагоналата на квадратот, како на левиот

цртеж, со што го добил четириаголникот прикажан на десниот цртеж. Определи го најголемиот агол во новодобиениот четириаголник?

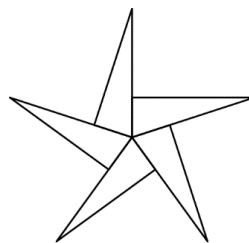


Решение. При превиткувањето на хартијата Зот=ран добил делтоид во кој аглите кои не се еднакви се со мерки 90° и 45° . Збирот на аглите во делстоидот е еднаков на 360° , па затоа мерката на еднаквите е

$$\frac{360^\circ - 90^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{225^\circ}{2} = 112^\circ 30'.$$

Според тоа, мерката на најголемиот агол во новодобиениот четириаголник е $112^\circ 30'$.

28. Пет складни правоаголни триаголници се поставени така што нивните поголеми остри агли се допираат и е добиена ѕвездата прикажана на цртежот десно. Но, исто така е можно да се формира друга ѕвезда со поставување на повеќе од дадените правоаголни триаголници така што нивните помали остри агли ќе се допираат. Колку триаголници се потребни за да се формира втората ѕвезда?



Решение. Нака острите агли на складните правоаголни триаголници се α и β , $\alpha > \beta$. Тогаш $\alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, па затоа $\beta = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Сега, бидејќи при формирањето на новата ѕвезда збирот на помалите агли на поставените n правоаголни триаголници треба да изнесува 360° , добиваме $n \cdot 18^\circ = 360^\circ$, па затоа $n = 20$.

29. Во рамнокрак триаголник ABC , точките K и L припаѓаат на страните AB и BC соодветно и важи

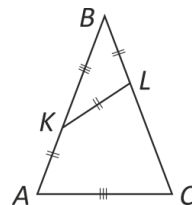
$$\overline{AK} = \overline{KL} = \overline{LB} \text{ и } \overline{KB} = \overline{AC},$$

цртеж десно. Определи го $\angle ABC$.

Решение. Од $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{KB} = \overline{AC}$ и $\overline{AK} = \overline{LB}$ следува $\overline{AC} = \overline{LC}$. Според тоа, четириаголникот $ACKL$ е делтоид, па затоа важи

$$\angle CLK = \angle CAK = \angle ACK = \alpha.$$

Понатаму, триаголникот BKL е рамнокрак и важи

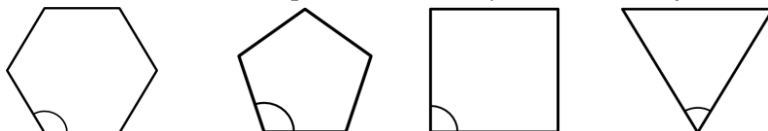


$$\angle KBL = \angle BKL = \beta \text{ и } \angle KLB = 180^\circ - \angle CLK = 180^\circ - \alpha.$$

Значи, $2\beta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$, од каде добиваме $2\beta = \alpha$. Од друга страна $2\alpha + \beta = 180^\circ$ и ако замениме $\alpha = 2\beta$ добиваме

$$2 \cdot 2\beta + \beta = 180^\circ, \text{ т.е. } \angle ABC = \beta = 36^\circ.$$

30. Кој од означените агли во правилните многуаголници е најголем?



Решение. Ако се искористи формулата за мерката на внатрешниот агол α на правилен n -аголник: $\alpha_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, добиваме

- мерката внатрешниот агол на правилниот шестаголник е

$$\alpha_6 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ,$$

- мерката внатрешниот агол на правилниот петаголник е

$$\alpha_5 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ,$$

- мерката внатрешниот агол на правилниот четириаголник (квадратот) е

$$\alpha_4 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ,$$

- мерката внатрешниот агол на правилниот триаголник (рамностран триаголник) е

$$\alpha_3 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{3} = 60^\circ.$$

Значи, од означените агли најголем е аголот на правилниот шестаголник.

31. Фудбалска топка е направена од бели шестаголници и црни петаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Вкупно на топката има 12 петаголници. Колку вкупно има шестаголници?



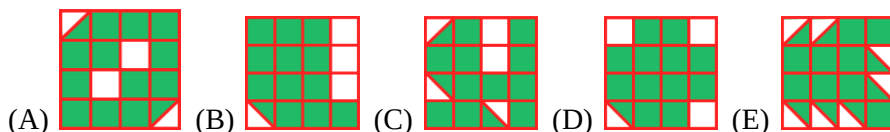
Решение. При формирањето на топката се употребени 12 петаголници, што значи дека имаме $5 \cdot 12 = 60$ внатрешни агли на петаголниците кои се соседни на по два внатрешни агли на шестаголниците.

Бидејќи секој внатрешен агол на шестаголниците е соседен само на еден внатрешен агол на петаголниците, добиваме дека употребените шестаголници имаат точно $60 \cdot 2 = 120$ внатрешни агли.

Конечно, за да се направи топката се употребени $120 : 6 = 20$ правилни шестаголници.

ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЛОШТИНИ НА РАМНИНСКИ ФИГУРИ

32. На кој од долните цртежи е обоен со зелено најголем дел од квадратот?



Решение. Плоштината на едно мало квадратче да ја означиме со $2x$. Тогаш плоштината на бело триаголниче е еднаква на x . Сега, бидејќи плоштината на секој од дадените квадрати е еднаква на $16 \cdot 2x = 32x$, добиваме дека плоштините на деловите кои се обоени со зелено на квадратите (A), (B), (C), (D), (E) се

$$P_A = 32x - 2 \cdot 2x - 2x = 26x,$$

$$P_B = 32x - 3 \cdot 2x - x = 25x,$$

$$P_C = 32x - 2 \cdot 2x - 3x = 25x,$$

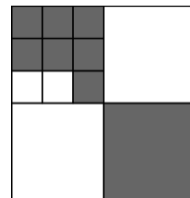
$$P_D = 32x - 3 \cdot 2x - x = 25x \text{ и}$$

$$P_E = 32x - 7x = 25x.$$

Конечно, со зелено најголем де е обоен од квадратот (A).

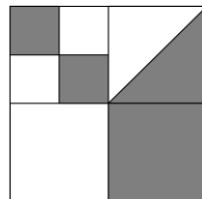
33. Големиот квадрат прикажан на цртежот десно е поделен на помали квадрати. Колкав дел од големиот квадрат е обоен во сиво?

Решение. Големиот квадрат прво е поделен на четири еднакви квадрати, а потоа еден од нив е поделен на 9 еднакви квадрати. Значи, со сива боја е обоена $\frac{1}{4}$ од големиот квадрат и $\frac{7}{9}$ од четвртина од големиот квадрат.



Според тоа, со сива боја се обоени $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{9} = \frac{9+7}{36} = \frac{4}{9}$ од големиот квадрат.

34. Големиот квадрат е поделен на помали квадрати и во еден од помалите квадрати е повлечена едната дијагонала дијагонала, како на цртежот десно. Кој дел од големиот квадрат е обоен со сиво?



Решение. Аналогно како во решението на претходната задача заклучуваме дека со сива боја се обоени

$\frac{1}{4}$ од големиот квадрат, $\frac{1}{2}$ од четвртина од големиот квадрат и $\frac{1}{2}$ од четвртина од големиот квадрат. Конечно со сива боја е обоена

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2+1+1}{8} = \frac{1}{2}$$

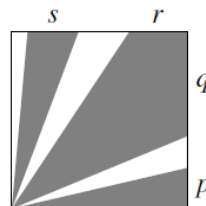
од големиот квадрат.

35. На цртежот десно е прикажан лентест рамнокрак триаголник и неговата висина. Секоја лента има иста висина. Кој дел дел од плоштината на целиот триаголник е белиот дел?



Решение. Бидејќи висината над основата го дели рамнокракиот триаголник на два складни триаголници, а секоја лента има иста висина, заклучуваме дека во секој ред лентите имаат еднакви плоштини. Но, во секој ред една од лентите е бела, а другата е сива или црна, па затоа половина од плоштината на триаголникот е обоена со бела боја, а другата половина е сива или црна.

36. Квадрат со плоштина 36 cm^2 има црни површини како на цртежот десно. Збирот на плоштините на сивите површини е 27 cm^2 . Пресметај го збирот $p+q+r+s$.



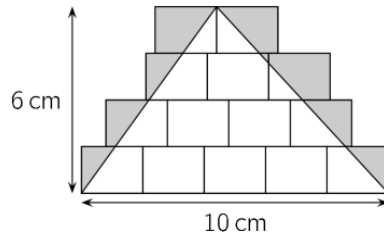
Решение. Должината на страната на квадратот е $\sqrt{36} = 6 \text{ cm}$. Сивите површини всушност се триаголници со основи p, q, r, s и висна 6 cm , па затоа

$$27 = \frac{6p}{2} + \frac{6q}{2} + \frac{6r}{2} + \frac{6s}{2} = 3(p+q+r+s),$$

од каде добиваме

$$p+q+r+s=9 \text{ cm}$$

37. Неколку идентични правоаголници се нацртани на подот. Триаголник со основа 10 cm и висина 6 cm е нацртан врз нив, како на цртежот десно. Делот надвор од триаголникот е обоен во сиво. Колкава е плоштината на делот обоен со сива боја?



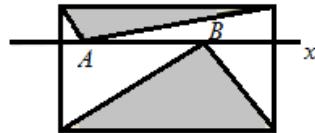
Решение. Плоштината на белиот триаголник е $P = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30\text{ cm}^2$. Понатаму, има 4 реда правоаголници, па затоа должината на едната страна на правоаголниците е $6 : 4 = 1,5\text{ cm}$. Во првиот ред има 5 правоаголници, па затоа должината на другата страна на правоаголниците е $10 : 5 = 2\text{ cm}$. Според тоа, плоштината на еден правоаголник е

$$S_1 = 2 \cdot 1,5 = 3\text{ cm}^2.$$

На цртежот има 14 правоаголници, што значи дека збирот на нивните плоштини е $S = 14S_1 = 42\text{ cm}^2$. Конечно плоштината на делот обоен со сива боја е еднаква на

$$S - P = 42 - 30 = 12\text{ cm}^2.$$

38. На цртежот десно се дадени правоаголник, права x која е паралелна на страната на правоаголникот и точки A и B од правата x . Збирот на плоштините на обоените делови на правоаголникот е еднаков на 10 cm^2 .



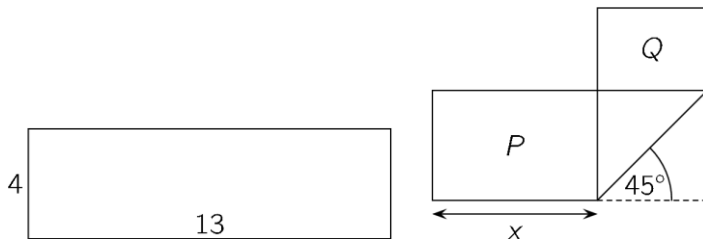
Колкава е плоштината на правоаголникот?

Решение. Нека a и b ($a > b$) се должините на страните на правоаголникот, а h_1 и h_2 се висните на обоените триаголници. Тогаш $h_1 + h_2 = b$ и затоа за плоштината на правоаголникот важи

$$\begin{aligned} P &= ab = a(h_1 + h_2) = 2\left(\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2}\right) \\ &= 2 \cdot 10 = 20\text{ cm}^2. \end{aligned}$$

39. Правоаголна лента од хартија со димензии 4×13 (цртеж долу лево) е преклопена како што е прикажано на долниот десен цртеж. Притоа се

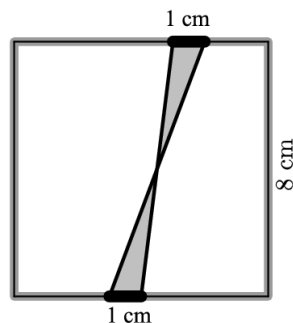
формирани два правоаголници со плоштини P и Q (види цртеж) при што $P = 2Q$. Колкава е вредноста на x ?



Решение. Плоштината на големиот квадрат е еднаква на $4 \cdot 13 = 52$.

При превиткувањето на хартијата, бидејќи аголот е 45° плоштината на двата триаголници кои се еден над друг е еднаква на плоштината на квадрат со должина на страна 4, т.е. е еднаква на $4 \cdot 4 = 16$. Значи, $P + Q = 52 - 16 = 36$. Оттука, и до $P = 2Q$ добиваме $3Q = 36$, односно $Q = 12$. Според тоа, $P = 36 - Q = 36 - 12 = 24$, па затоа $4x = P = 24$, од каде добиваме $x = 6$.

40. Две отсечки, секоја со должина еднаква на 1 cm , се означени на спротивните страни на квадрат со должина на страна еднаква на 8 cm . Краевите на отсечките се поврзани како на цртежот десно. Колкава е плоштината, изразена во cm^2 , на делот од квадратот обоен со сива боја?



Решение. Нека h_1 и h_2 се висните на обоените триаголници. Тогаш $h_1 + h_2 = 8\text{ cm}$, па

затоа плоштината на делот на квадратот обоен со сива боја е

$$P = \frac{1 \cdot h_1}{2} + \frac{1 \cdot h_2}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2} = 4\text{ cm}^2.$$

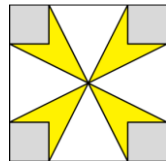
41. Прекривката за маса на Ленче е квадрат и изгледа како на цртежот десно. Колкав процент од прекривката е обоен со црна боја?



Решение. Страната на квадратот ја делиме на пет дела и добиваме дека прекривката е поделена со мрежа од 25 квадрати. Црни делови имаме само во сите квадрати чија една страна припаѓа на страната на квадратот, а тоа се вкупно 16 квадрати. Притоа, половината од секој од овие квадрати е обоен сиво, а полови-

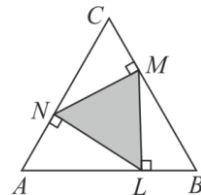
ната е обоен црно, што значи дека делот од прекривката кој е обоен со црна боја е еднаков на $\frac{16}{2} = 8$ мали квадрати. Конечно, $\frac{8}{25} \cdot 100 = 32\%$ од прекривката е обоен со црна боја.

42. Плоштината на големиот квадрат прикажан на цртежот десно е 16 cm^2 , а плоштината на секој од малите квадрати е 1 cm^2 . Колкава е плоштината на жолтиот цвет?



Решение. Бидејќи $4 \cdot 4 = 16$ должината на страната на големиот квадрат е 4 cm . Слично, должината на страната на малите квадрати е 1 cm . Според тоа, должините на основите на белите триаголници се $4 - 2 \cdot 1 = 2 \text{ cm}$, а нивните висини се $\frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$. Значи, плоштината на еден бел триаголник е еднаква на $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \text{ cm}^2$. Конечно, плоштината на жолтиот цвет е еднаква на $16 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ cm}^2$.

43. Точките N , M и L од страните на рамностраниот триаголник ABC , се такви што $NM \perp BC$, $ML \perp AB$ и $LN \perp AC$ (види цртеж). Плоштината на триаголникот ABC е 36 cm^2 . Колкава е плоштината на триаголникот LMN ?



Решение. Според условот на задачата триаголниците CMN , ANL и BLM се половина од рамностран триаголник. Ако должината на страната на рамностраниот триаголник ABC е еднаква на a , тогаш од

$$\overline{CN} = \overline{AL} = \overline{BM} = b \text{ и } \overline{CM} = \overline{AN} = \overline{BL} = \frac{b}{2},$$

добиваме $\frac{3b}{2} = a$, па затоа $b = \frac{2}{3}a$. Сега, ако плоштината на рамностранниот триаголниксо должина на страна b е еднаква на P , тогаш

$$36 : P = (a : b)^2,$$

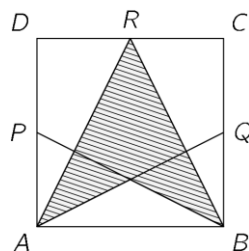
од каде добиваме

$$36 : P = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ т.е. } P = 36 : \frac{9}{4} = 16 \text{ cm}^2.$$

Конечно, плоштината на триаголникот LMN е еднаква на

$$36 - \frac{3}{2} \cdot 16 = 12 \text{ cm}^2.$$

44. На цртежот десно е даден квадрат $ABCD$, каде P , Q и R се средини на страните DA , BC и CD соодветно. Колкав дел од квадратот $ABCD$ е обоен сиво?

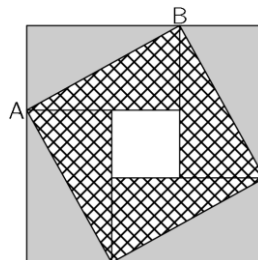


Решение. Нека должината на страната на квадратот е a . Тогаш $\overline{DR} = \overline{RC} = \overline{AP} = \overline{BQ} = \frac{a}{2}$. Понатаму, четириаголникот $ABQP$ е правоаголник, што значи дека неговите дијагонали се половат. Значи висината на белиот триаголник чија една страна е AB е средна линија на триаголникот ABQ , па затоа таа е еднаква на $\frac{\overline{BQ}}{2} = \frac{a}{4}$. Од досега изнесеното следува дека збирот на плоштините на белите триаголници е еднаков на

$$\frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} + \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} + \frac{a \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{5a^2}{8}.$$

Според тоа, $\frac{5}{8}$ од квадратот е бел, а $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ е сив.

45. Голем квадрат се состои од четири идентични правоаголници и еден мал квадрат. Плоштината на големиот квадрат е 49 cm^2 и должината на дијагоналата AB на еден од правоаголниците е 5 cm . Определи ја плоштината на малиот квадрат?



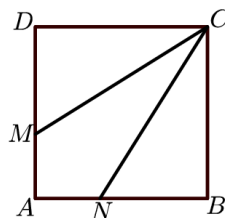
Решение. Со a и b да ги означиме должините на страните на правоаголниците. Тогаш за плоштината на големиот квадрат добиваме $(a + b)^2 = 49$, а од Питагоровата теорема следува $a^2 + b^2 = 5^2$. Значи,

$$49 = a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + 5^2,$$

па затоа $2ab = 24$. Конечно, плоштината на малиот квадрат е еднаква на

$$49 - 4ab = 49 - 2 \cdot 24 = 1 \text{ cm}^2.$$

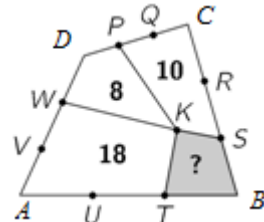
46. Должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на 3 cm . Точките M и N припаѓаат на страните AD и AB , соодветно, и се такви што отсечките CM и CN го делат квадратот на три



делови со еднакви плоштини. Колкави се должините на отсечките DM и MN ?

Решение. Плоштината на квадратот е еднаква на $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на триаголникот MDC е еднаква на 3 cm^2 . Значи, $\frac{\overline{DM} \cdot \overline{CD}}{2} = 3$, од каде добиваме $\frac{3\overline{DM}}{2} = 3$, т.е. $\overline{DM} = 2 \text{ cm}$. Од Питагоровата теорема следува $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ и како четириаголникот $ANCM$ е делтоид добиваме $\frac{\overline{MN} \cdot \overline{AC}}{2} = 3$, односно $\frac{\overline{MN} \cdot 3\sqrt{2}}{2} = 3$ и затоа $\overline{MN} = \sqrt{2} \text{ cm}$.

47. На цртежот е прикажан четириаголникот $ABCD$ кој е поделен на четири помали четириаголници со заедничко теме K . Другите обележани точки ги делат страните на четириаголникот $ABCD$ на три еднакви делови. Запишаните броеви ги означуваат плоштините на соодветните мали четириаголници. Определи ја плоштината на четириаголникот $TBSK$.



Решение. Точката K ја поврзуваме со делбените точки на страните и како секоја страна е поделена на три еднакви делови добиваме

$$\begin{aligned} P_{\triangle KBS} &= P_{\triangle KSR} = P_{\triangle KRC} = a, \\ P_{\triangle KCQ} &= P_{\triangle KQP} = P_{\triangle KPD} = b, \\ P_{\triangle KDW} &= P_{\triangle KWV} = P_{\triangle KVA} = c, \\ P_{\triangle KAU} &= P_{\triangle KUT} = P_{\triangle KTB} = d. \end{aligned}$$

Сега, од условот на задачата следува

$$2a + 2b = 10, \quad b + c = 8, \quad 2c + 2d = 18,$$

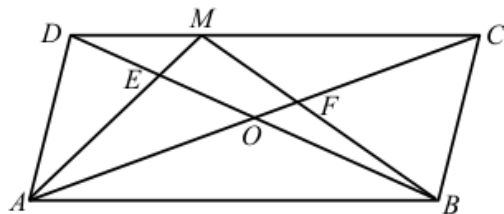
па затоа

$$a + b = 5, \quad b + c = 8, \quad c + d = 9.$$

Конечно,

$$P_{TBSK} = a + d = (a + b) + (c + d) - (b + c) = 9 + 5 - 8 = 6.$$

48. На цртежот е даден паралелограм $ABCD$ со плоштина S . Пресечната точка



на дијагоналите на паралелограмот е O . На отсечката DC е означена точката M . Пресечната точка на AM и BD е E , пресечната точка на BM и AC е F . Збирот на плоштините на триаголниците AED и BFC е $\frac{1}{3}S$. Колкава е плоштината на четириаголникот $EOFM$, изразена преку S ?

Решение. Имаме:

$$P_{\triangle ABO} = P_{\triangle AOD} = P_{\triangle BOC} = P_{\triangle DOC} = \frac{1}{4}S.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned} P_{\triangle BFO} + P_{\triangle AEO} &= P_{\triangle BOC} + P_{\triangle ADO} - (P_{\triangle BFC} + P_{\triangle AED}) \\ &= \frac{1}{2}S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{6}S. \end{aligned}$$

Триаголникот $\triangle ABM$ има плоштина $\frac{1}{2}S$, бидејќи има иста должина на основата и иста висина како паралелограмот $ABCD$. Конечно,

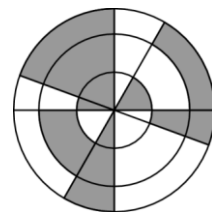
$$\begin{aligned} P_{EOFM} &= P_{\triangle ABM} - (P_{\triangle BFO} + P_{\triangle AEO} + P_{\triangle AOB}) \\ &= \frac{1}{2}S - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)S = \frac{1}{2}S - \frac{5}{12}S = \frac{1}{12}S. \end{aligned}$$

49. На цртежот десно се прикажани четири срциња кои се преклопуваат. Плоштините на срцињата се 1 cm^2 , 4 cm^2 , 9 cm^2 и 16 cm^2 , соодветно. Колку изнесува плоштината на сивата површина?



Решение. Плоштината на надворешната сива површина е еднаква на $16 - 9 = 7\text{ cm}^2$, а плоштината на внатрешната сива површина е еднаква на $4 - 1 = 3\text{ cm}^2$. Според тоа, плоштината на сивата површина е еднаква на $7 + 3 = 10\text{ cm}^2$.

50. На цртежот десно се прикажани три концентрични кружници со четири дијаметри (отсечки кои кои минуваат низ заедничкиот центар на кружниците). Колку проценти од добиената фигура се обоени со сива боја?

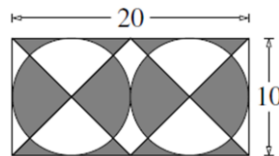


Решение. Сивите делови кои се под хоризонталниот дијаметар на кружниците симетрично да ги пресликаме во однос на центарот на кружниците. Забележуваме дека при ова пресликување секој сив дел под хоризонталниот дијаметар ќе се преслика во точно

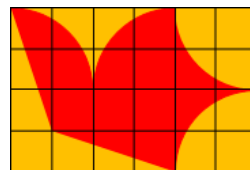
еден бел дел над хоризонталниот дијаметар и сите бели делови ќе бидат обоени во сива боја. Последното значи дека точно половина од сите делови на круговите се обоени со сива боја, што значи дека 50% од добиената фигура се обоени со сива боја.

51. Колкава е плоштината на сивата површина на цртежот десно?

Решение. Дијаметрите на кружниците се еднакви на 10. Тоа значи дека кружниците се впишани во квадрати со должина на страна 10 и со дијагоналите на квадратите се поделени на 4 складни делови. Според тоа, ако сивите четвртини од круговите ги заменат местата со белите четвртини од круговите, тогаш добиваме четири сиви и четири бели триаголници кои се складни меѓу себе. Тоа значи дека половината од правоаголникот е обоен со сива боја, а половината е бел. Но, плоштината на четириаголникот е еднаква на $20 \cdot 10 = 200$, па затоа плоштината на сивата површина е еднаква на 100.



52. На цртежот десно е прикажано знамето на извидничкиот клуб на Фросина, на кое е нацртан гулаб во лет. Границата на гулабот е составена само од отсечки и делови од кружница. Површината на гулабот има плоштина 192 cm^2 .

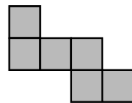


Опреди ги димензиите на знамето?

Решение. Ако триаголникот од најдолниот ред кој учествува во формирање на гулабот го префрлиме најгоре во првата колона, а потоа четвртината од кругот која ја добивме и четвртината од кругот која ја имавме во првите два реда ги префрлиме во четвртините од кругот кои се наоѓаат во десните темиња на правоаголникот, добиваме површина која е составена од 12 складни квадрати. Нека должината на страната на секој од овие квадрати е a . Според условот на задачата $12a^2 = 192$, од каде добиваме $a^2 = 16$. Значи $a = 4 \text{ cm}$. Сега должината на поголемата основа е $6a = 24 \text{ cm}$, а должината на помалата основа е $4a = 16 \text{ cm}$.

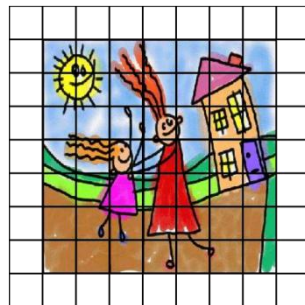
ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

53. Андреј искористил шест еднакви мали квадрати за да ја формира фигурата прикажана на цртежот десно. Кој е најмалиот број на еднакви мали квадрати кои Андреј треба да ги додаде на својата фигура, за да формира поголем квадрат?



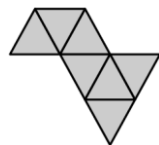
Решение. Фигурата која ја направил Андреј има 3 редици и 4 колони. Бидејќи малите квадрати се еднакви, секој поголем квадрат мора да има еднаков број редици и колони. Додавањето на најмал број еднакви мали квадрати, значи да добиеме најмал можен голем квадрат. Најмалиот можен голем квадрат се добива ако имаме најмал можен број редици и колони. Но, веќе имаме 4 четири колони, па затоа квадратот треба да има 4 редици и 4 колони. Според тоа, тој е составен од $4 \cdot 4 = 16$ мали квадрати, што значи дека Андреј треба да додаде уште $16 - 6 = 10$ мали квадрати и тоа е бараниот најмал можен број мали квадрати.

54. За да урами слика со димензии 7×7 Андреј искористил 32 мали квадратчиња (цртеж десно). Колку мали квадрати му се потребни на Андреј за да урами слика со димензии 10×10 ?



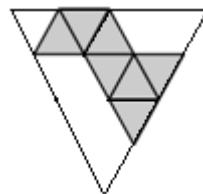
Решение. При урамување на слика од дадениот вид Андреј над секоја страна поставува онолку квадратчиња колку што е должината на страната. Притоа во секој агол тој поставува уште по едно квадратче, што значи вкупно уште 4 квадратчиња. Значи, при урамување на слика со димензии 10×10 на Андреј му се потребни $4 \cdot 10 + 4 = 44$ квадратчиња.

55. Пабло сака да формира голем триаголник користејќи мали складни триаголници. Тој веќе поставила неколку мали триаголници како на цртежот десно. Кој е најмалиот можен број мали триаголници со кои Пабло може да го доврши големиот триаголник?

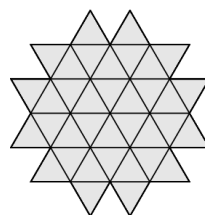


Решение. Јасно, страните на големиот рамностран триаголник се паралелни со страните на секој од малите триаголници кои Пабло веќе ги поставил. Затоа најмалиот можен број мали триаголници кои се

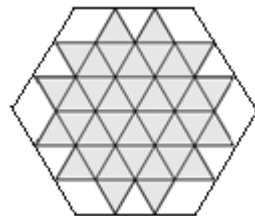
потребни за да се добие големиот триаголник ќе го определиме ако прво го нацртаме големото рамностран триаголник, а потоа ги преброиме потребните мали триаголници. На цртежот десно е прикажан најмалиот можен голем рамностран триаголник кој може да се добие. Сега е јасно дека на секоја негова страна лежат по 4 мали рамнострани триаголници. Затоа во првиот ред имаме 7, во вториот ред 5, во третиот ред 3 и во четвртиот ред 1 мал триаголник. Тоа се вкупно $1+3+5+7=16$ мали триаголници. Андреј поставил 7, па затоа тој треба да постави уште $16-7=9$ мали триаголници.



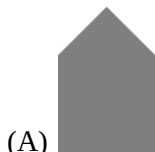
56. На цртежот десно е прикажана фигура која е добиена од 36 мали складни рамнострани триаголници. Које најмалиот број на такви триаголници кои треба да се додадат на фигурата за да се добие правилен шестаголник?

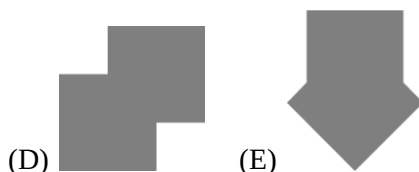


Решение. Аналогно како во претходната задача заклучуваме дека по две страни на правилниот шестаголник мора да се паралелна на една страна на малите рамнострани триаголници. Најмалиот можен број триаголници кои треба да се употребат го добиваме ако го формираме најмалиот можен правилен шестаголник. Согласно погоре кажаното тој се добива ако низ крајните точки повлечеме прави паралелни на страните на малите триаголници и потоа преброиме колку мали рамнострани триаголници ни се потребни. Правилниот шестаголник кој треба да го направиме е прикажан на цртежот десно. Сега е јасно дека 18 е најмалиот можен број мали рамнострани триаголници потребни за да се добие правилен шестаголник.



57. Дадени се два еднакви квадрати (цртеж десно). Кои од следниве фигури не може да се добијат со лепење на овие квадрати?





Решение. Фигурата (B) може да се добие ако квадратите се постават еден врз друг, а потоа горниот квадрат се ротира за 90° во насока на движењето на стрелките на часовникот.

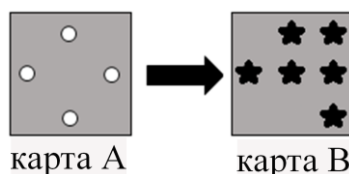
Фигурата (C) може да се добие ако квадратите се постават еден врз друг а потоа горниот квадрат се транслатира за вектор паралелен со хоризонталните страни на квадратите и интензитет помал од должината на страните на квадратите.

Фигурата (D) може да се добие ако квадратите се постават еден врз друг а потоа горниот квадрат се транслатира за вектор паралелен со соодветната дијагонала на квадратите и интензитет помал од должината на дијагоналите на квадратите.

Фигурата (E) може да се добие од фигурата (B) со транслација на горниот квадрат за вектор паралелен со неговата вертикална дијагонала и интензитет еднаков на половина од должините на страните на квадратите.

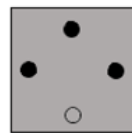
Фигурата (A) не може да се добие. Имено, јасно е дека едниот квадрат мора да остане во почетната положба, а другиот да е ротиран за агол од 90° . Но, дијагоналата на квадратот е поголема од неговата страна, па затоа темињата на вториот квадрат мора да се надвор од првиот квадрат.

58. Филип има две карти со иста големина, A и B. На картата A има дупки. Тој ја поставил картата A точно врз картата B. Што гледа Филип притоа?



Решение. Јасно, кога картата A ќе се преклопи со картата B горните три кругчиња на картата A ќе се најдат над трите ѕвезди кои се на соодветните места на картата B, а додека преостанатите три кругчиња на картата B ќе бидат прекриени и од нив нема ништо да се гледа. Според тоа, низ овие три кругчиња Филип ќе гледа три црни кругчиња. Најдолното кругче на картата A ќе се најде над сива површина на картата B, па затоа низ ова кругче Филип ќе гледа сиво кругче.

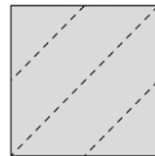
Претходно кажаното е прикажано на цртежот десно, на кој може да се види што гледа Филип поставување на картата А над картата В.



59. Ана превиткала едно парче хартија двапати, а потоа на свитканата хартија направила една дупка. Кога ја одвиткала хартијата, парчето хартија изгледало како на цртежот десно. Како Ана го превиткала парчето хартија?



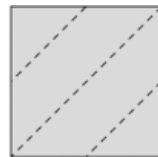
Решение. Дупките кои ги добила Ана се симетрични во однос на дијагоналата на квадратот. Затоа едното превиткување мора да е по дијагоналата која е симетрала на отсечката чии крајни точки се центрите на дупките. Второто превиткување мора да е такво што во делот каде што е направена дупката не се преклопат деловите кои се добиваат со превиткувањето. Решението на задачата е прикажано на цртежот десно.



60. Горјан превиткал парче хартија и користејќи дупчалка, на свитканото парче хартија, направил една дупка. Потоа хартијата ја одвиткал и таа изгледала како што е прикажано на цртежот десно. Како Горјан го превиткал парчето хартија?



Решение. Дупките кои ги добил Горјан се симетрични во однос на дијагоналата на квадратот. Затоа едното превиткување мора да е по дијагоналата која е нормална на правата која минува низ центрите на дупките. Сега дупките две по две ќе се преклопат, па како во следното превиткување мора да имаме преклопување во една дупка заклучуваме дека второто превиткување мора да е по симетралата на отсечката чии крајни точки се центрите на двете дупки добиени со првото превиткување на хартијата. Според тоа, Горјан ја превиткал хартијата на начин како што е прикажано на цртежот горе десно.



61. Андреј превиткал едно парче хартија двапати, а потоа на свитканата хартија направил една дупка. Кога ја одвиткал хартијата, парчето хартија изгледало како на цртежот десно. Како Андреј го превиткал парчето хар-

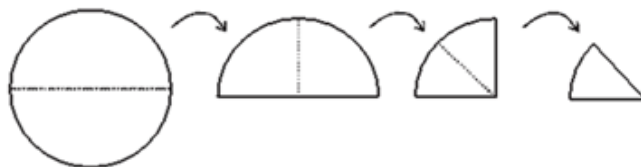


тија?

Решение. Дупките кои се на хартијата по нејзиното одвиткување се симетрични во однос на симетралите на страните на квадратот. Затоа едното превиткување е да кажеме по хоризонталната симетрала на страните на квадратот, по што се гледаат две дупки кои се симетрични во однос на вертикалната симетрала на страните на квадратот. Според тоа, второто превиткување е по оваа симетрала на страните на квадратот (цртеж десно).



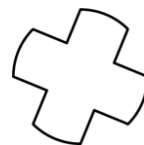
62. Андреј превиткал круг од хартија на половина. Добиената фигура ја превиткал на половина, па постапката ја повторил уште еднаш (види цртеж долу).



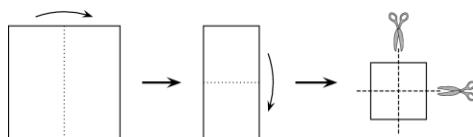
Потоа, Андреј го пресекол завитканото парче хартија како што е прикажано на цртежот десно. Која фигура ја добил Андреј, откако ја одвиткал хартијата?



Решение. Ако се наблудува како Андреј ја превиткал и потоа ја пресекол хартијата, тогаш лесно се гледа дека тој од кругот отсекол четири дела. По последното превиткување на хартијата се добива кружен исечок чиј агол е еднаков на 45° . Бидејќи сечењето е направено паралелно со радиусот на исечкот, а во секое отсечено парче хартија аголот е $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ (Зошто?), заклучуваме дека отсечените делови се формирани од две отсечки кои се под агол од 90° и делот од кружницата кој е меѓу нив. Значиј по сечењето Андреј ја добил фигурата прикажана на цртежот десно.

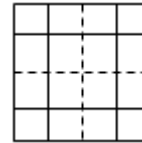


63. Јана превиткала лист од хартија два пати, а потоа го исекала два пати како што е прикажано на цртежот десно. Колку парчиња хартија добила Јана?

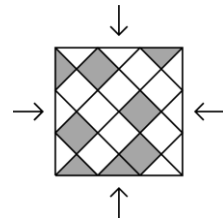


Решение. Со превиткувањето Јана добила четири слоја хартија. Во левиот горен агол сите четири слоја хартија се поврзани, во левиот долен и десниот горен агол слоевите хартија се поврзани два по два, а во десниот долен агол не постојат два слоја кои се поврзани еден со друг. Затоа при сечењето Јана во левиот горен агол добила 1 парче хартија, во левиот долен и десниот горен агол добила по 2 парчиња хартија и во десниот долен агол добила 4 парчиња хартија. Значи, таа добила вкупно $1 + 2 + 2 + 4 = 9$ парчиња хартија.

Забелешка. До истиот резултат се доаѓа ако го одвиткаме парчето хартија (цртеж десно). Притоа испрекинатите линии се линиите на превиткување, а полните линии се линиите на сечење. Јасно, бројот на парчињата хартија кои се добиваат е еднаков на 9.



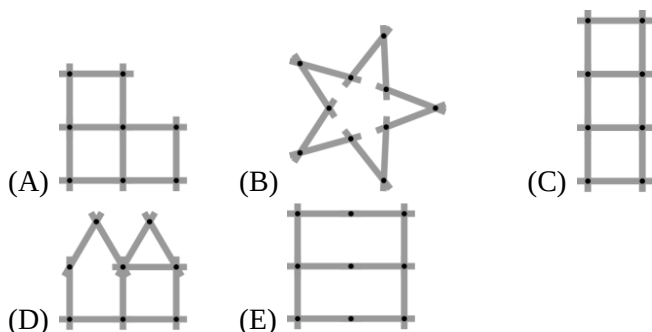
64. Квадратниот под на цртежот десно е покриен со сиви и бели триаголници и квадратни плочки. Колку најмалку плочки треба да ги заменат местата така што погледот на подот да е ист од сите четири означени насоки?



Решение. Забележуваме дека погледот на подот е ист од горната и од левата страна, а од десната и долната страна на квадратот имаме два сосема различни погледи. Сега, ако втората црна триаголна плочка на долната страна и долната бела триаголна плочка ги заменат местата погледот на подот ќе биде ист од горната, левата и долната страна. Конечно, за да погледот е ист и од десната страна, доволно е да се заменат местата на внатрешната црна квадратна плочка со горната бела соседна на неа квадратна плочка чие теме лежи на десната страна на квадратот. Така добивме дека доволно е местата да ги заменат две триаголници и две квадратни плочки и ова е најмалиот можен број замени. Навистина, горната и десната страна се разликуваат во две позиции (триаголна и квадратна плочка), па затоа е потребно 4 или повеќе плочки да ги заменат местата.

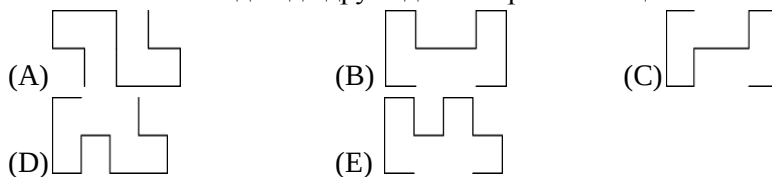
65. Пабло игра со метро кое се состои од 10 еднакви поврзани стапчиња (цртеж десно). Која од следниве фигури Пабло не може да ја направи со помош на метрот? (Стапчињата не се одделуваат.)





Решение. Во задачата всушност се бара која фигура не може да се нацрта тргнувајќи од едно теме, без притоа да се подигне моливот. При вакво цртање, ако имаме темиња од кои излегуваат (се инцидентни) непарен број отсечки, тогаш мора да почнеме со теме кое и инцидентно со непарен број отсечки и да завршиме во теме кое е инцидентно со непарен број отсечки. Но при секое минување низ едно теме минуваме по две отсечки кои го содржат, па затоа не смее да имаме повеќе од две темиња кои се инцидентни со непарен број отсечки. Фигурата (C) има четири такви темиња, па затоа истата не може да ја нацртаме на саканиот начин. Лесно се гледа дека фигурите (A), (B), (D) и (E) може да ги нацртаме на саканиот начин (провери!).

66. Даме има две исти парчиња од жица со облик како на цртежот десно. Која од следниве форми не може да се добие кога ќе се стават едно до друго двете парчиња жица?



Решение. Фигурата (A) може да се состави од двете парчиња ако тие се постават како на долните цртежи:



Фигурата (B) може да се состави ако двете парчиња се постават како на долните цртежи:



Фигурата (C) може да се состави ако двете парчиња се постават како на долните цртежи:

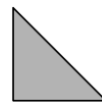


Фигурата (D) може да се состави ако двете парчиња се постават како на долните цртежи:

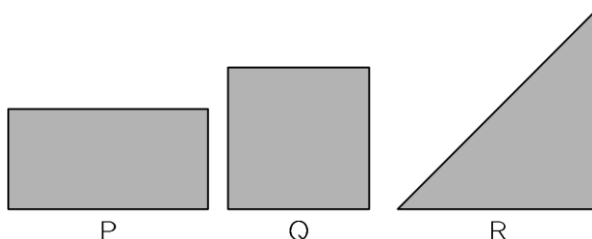


Фигурата (E) не може да се состави, бидејќи таа има 11 отсечки, а двете фигури заедно имаат само 10 отсечки.

67. Филип има парче хартија. Тој го свиткал точно на половина. Потоа вака свиткано, пак го свиткал точно на половина и така го добил триаголникот прикажан на цртежот десно.



Кое парче хартија P, Q или R може да биде парчето хартија кое Филип го имал на почетокот?



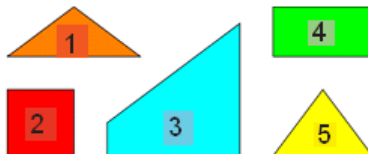
Решение. Сите три парчиња P, Q или R може да бидат парчето хартија на Филип. Навистина, парчето хартија P прво може да се превитка така што ќе се добие квадрат, а потоа превиткувајќи го квадратот по дијагонала се добива триаголникот кој го добил Филип. Парчето хартија Q прво ќе го превиткаме по дијагонала, а потоа добиениот рамнокрак правоаголен триаголник ќе го превитае по висината повлечена над хипотенузата. Парчето хартија R двапати го превиткуваме по видината повлечена над хипотенузата на рамнокраките правоаголни триаголници.

68. Горјан има 52 складни рамнокраки правоаголни триаголници. Тој сака да направи квадрат користејќи некои од триаголниците. Колку квадрати со различни димензии може да направи?

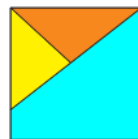
Решение. Горјан може да формира 5 квадрати со должина еден, два, три, четири и пет пати поголема од должината на катетата на рамнокракиот триаголник, за кои соодветно се потребни 2, 8, 18, 32, 50 рамнокраки правоаголни триаголници. Дополнително, Горјан може да формира и 3 квадрати со должина еден, два и три пати поголема од

должината на хипотенузата на рамнокракиот правоаголен триаголник, за кои соодветно се потребни 4,16,36 рамнокраки правоаголни триаголници. Значи, вкупно таа може да формира $5 + 3 = 8$ квадрати.

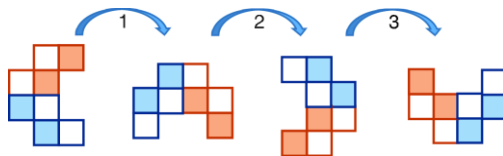
69. На долниот цртеж се дадени пет фигури. Дали со некои три од дадените фигури може да се состави квадрат?



Решение. Треба да употребиме три од дадените пет фигури. Ако меѓу нив е фигурата 2 која е квадрат, тогаш не постои начин како со уште две други фигури таа може да се дополни до квадрат. Истото важи и за фигурата 4. Според тоа, ако со три од дадените пет фигури може да се состави квадрат, тогаш та е можно само со фигурите 1, 3 и 5. Сега најголемата страна на 1 има иста должина како висината на трапезот 3, па затоа тие две треба да се паралелни и поставувањето е како на цртежот десно.



70. Горјан ја врти првата фигура на цртежот десно. Првите три свртувања се прикажани на цртежот. Тој во иста насока фигурата ја свртел точно десет пати. Во која положба е фигурата по десеттото вртење?



Решение. По четвртото вртење фигурата повторно ќе се најде во почетната положба. Во истата положба таа ќе се најде и по осмото вртење, па затоа по десеттото вртење фигурата ќе биде во иста положба како и по второто вртење (цртеж десно).



71. Горјан ја облекол маицата прикажана долниот цртеж и застанал пред огледало.



Како маицата ја видел Горјан во огледалото?

Решение. За да добиеме како маицата Горјан ја видел во огледалото доволно е прво маицата симетрично да ја пресликаме во однос на хоризонталната права под маицата, а потоа истата да ја ротираме за 180° . На овој начин прво го добиваме левиот цртеж, а потоа десниот цртеж на кој е прикажано што видел Горјан во огледалото.

