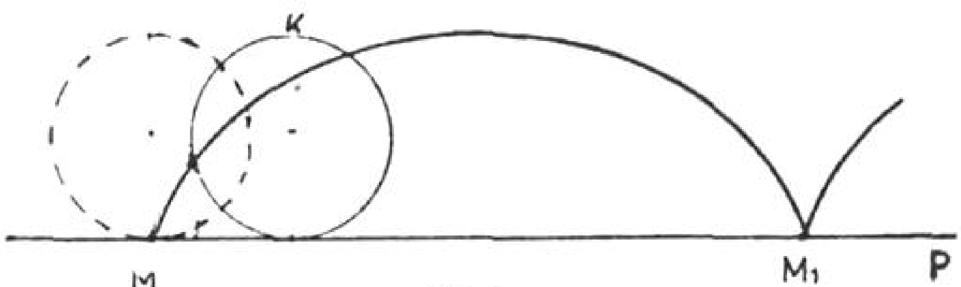
Владимир Мићић (Београд)

О ЦИКЛОИДАМА

На насловним страницама Математичког листа у току ове школске године појављивале су се различите фигуре, у првом броју једна фигура, у другом броју две, . . . , у шестом броју шест фигура. Тим је фигурама заједничко било да свака од њих садржи по једну кружну линију, која је на првој фигури обухваћена једном кривом линијом, назовимо је „латицом", на другој фигури је кружна линија обухваћена са две „латице", . . . , На крају смо добили мали букет разноликих „цветова". На који су начин настали ови „цветови"?

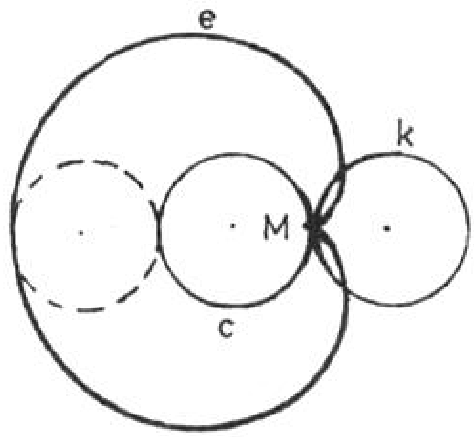
1. Нека је у равни дата права p и нека кружна линија k додирује праву p у тачки M. Претпоставимо да права p мирује и да се кружна линија котрља, у изабраном смеру, без клизања, по тој правој. Тачка M кружне линије ће при томе, крећући се са k, описати путању која је приказана на слици 1. Крива ли-



Сл. 1

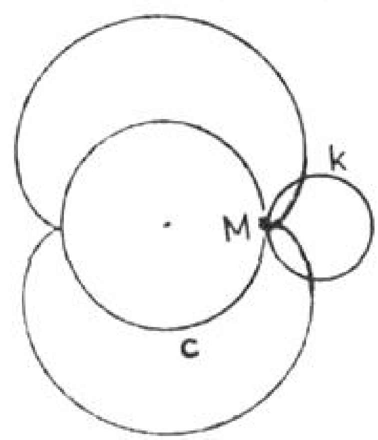
нија која приказује ту путању зове се циклоида. Када се кружна линија обрне за пун угао, тачка M ће заузети положај тачке M_1, која припада правој p и налази се на растојању једнаком дужини кружне линије од тачке M. Након још једног обртаја тачка M ће заузети положај тачке M_2, која припада правој p и налази се на растојању једнаком двострукој дужини кружне линије од тачке M. Продужујући овакав поступак добићемо циклоиду, криву линију која се састоји од подударних делова, који могу, уз мало маште, да се схвате као „латице" једног праволинијског „цвета".

2. Вратимо се сада нашим насловним страницама. Нека је у равни дата кружна линија c и њој подударна кружна линија k, која је додирује споља у тачки M. Ако се кружна линија k котрља, у изабраном смеру, без клизања, око кружне линије c, која мирује, тачка M ће, крећући се са k, описати криву линију e, зовемо је епициклоидом; при томе ће се тачка M након што се k обрне за пун угао, вратити у свој полазни положај, па даљим обртањем кружне линије k тачка M описује исту путању (сл. 2).



Сл. 2

Нека је у равни дата кружна линија c и нека њу споља, у тачкки M, додирује кружна линија k, при чему је однос полупречника r кружне линије k према полупречнику R кружне линије c једнак $1:2$. Претпоставимо да се као у претходном случају, кружна линија k обрће око кружне линије c, која мирује. Имајући у виду да су дужине кружних линија пропорционалне њиховим полупречницима (фактор пропорционалности је 2), јасно је да ће сада тачка M описати две подударне „латице" јер једним обртањем кружне линије k за пун угао додирна тачка двеју посматраних кружних линија прође тачно половину лука кружне линије c. На тај начин настаје наш „цвет" са две „латице" (слика 3).



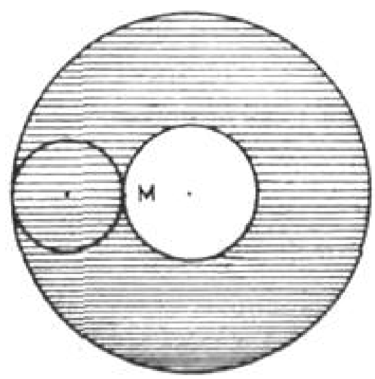
Сл. 3

На сличан начин, под условом да су односи полупречника r и R једнаки, редом, $1:3$, $1:4$, $1:5$, $1:6$, добићемо преостала четири „цвета" из нашег букета. Њихове слике налазимо на насловној страници овог броја Математичког листа. Оваквим поступком можемо доћи до цветова са произвољним бројем „латица". Ако је однос $r:R$ једнак $1:n$, где је n произвољан природан број, добићемо „цвет" са n „латица". Уочавамо да ће, након што се кружна линија k обрне n пута за пун угао, тачка M стићи до свог полазног положаја и поново кренути истом путањом.

Природно је поставити следеће питање: Шта се може рећи о путањи тачке M ако је однос $r:R$ произвољан позитиван реалан број?

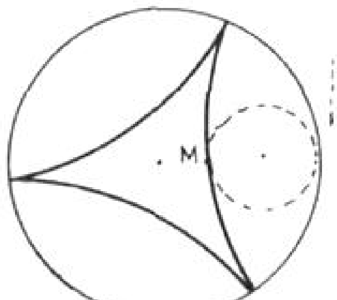
Ако је однос $r:R$ произвољан рационалан број, онда су полупречници самерљиве дужи. Тада постоје природни бројеви p и q, такви да је $pR=qr$ и бројеви p и q су узајамно прости. Након q обртаја ће се тачка M наћи поново у свом полазном положају, обухвативши при томе кружну линију c тачно p пута. То је последица чињенице да је, у овом случају, $pO=qo$, где смо са O означили дужину кружне линије c а са o дужину кружне линије k.

Ако је однос $r:R$ произвољан позитиван ирационалан број, онда су полупречници несамерљиве дужи и тада не постоје споменути природни бројеви p и q. У таквом случају се тачка M, ма колико се пута кружна линија k обрнула око кружне линије c, неће вратити у свој полазни положај, па се неће десити да она поново крене већ пређеном путањом. Геометријска фигура коју она описује се у том случају не „затвара", не завршава се и испуниће цео кружни прстен између кружне линије c и са њом концентричне кружне линије чији је полупречник $R+2r$, укључујући и тачке које припадају тим двема кружним линијама (слика 4).

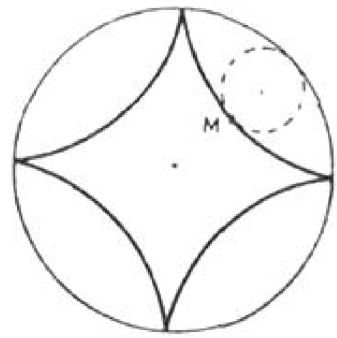


Сл. 4

3. Упознаћемо сада још једну класу кривих које настају на описани начин. Нека је у равни дата кружна линија c полупречника R и нека њу изнутра додирује кружна линија k полупречника r. Јасно је да у таквом случају полупречник r кружне линије k мора бити мањи од R. Ако се кружна линија k котрља, без клизања, по кружној линији c, која мирује, додирна тачка M ће, крећући се са k, описати криву линију h; зовемо је хипоциклоидом. Ако је, на пример, однос $r:R$ једнак $1:3$, односно $1:4$, добићемо геометријске фугуре приказане на сликама 5 и 6. У вези са овом класом кривих линија у равни могу се размотрити слична питања као и за класу епициклоида; овде се могу појавити и нека друга, специфична питања.



Сл. 5



Сл. 6

Напомена. У математици постоји разрађен апарат за описивање скупова тачака, које припадају посматраним линијама, помоћу формула, њихових једначина. Користећи се овим математичким апаратом, ми смо слике које су се појављивале на насловним страницама Математичког листа цртали помоћу рачунара.

Задаци

1. Нацртати, приближно, епициклоиду за коју је однос $r : R$ једнак $2 : 3$.

2. Нацртати, приближно, хипоциклоиду за коју је однос $r : R$ једнак а) $1 : 2$; б) $1 : 6$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија