Primjena majorizacije u trigonometriji

Predrag Lončar[1], *Varaždin*

Razno-razne zanimljive nejednakosti pojavljuju se u mnogim područjima matematike, a gotovo redovito i na matematičkim natjecanjima. Opisat ćemo jednu metodu koja se koristi u mnogim područjima, a ovdje ćemo ilustrirati njezinu primjenu na nekoliko problema iz trigonometrije. Koristit ćemo pojam konveksne funkcije, čija je definicija, kao i čuvena Jensenova nejednakost, objašnjena u [1]. Prisjetimo se te definicije.

Definicija 1. *Neka je I interval u skupu $\mathbf{R}$ realnih brojeva. Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ kažemo da je konveksna na I ako za svako x, y iz I i svako λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \tag{1}$$

Ako pritom za svako x i y iz I, takvo da je $x \neq y$, i svako λ, $0 < \lambda < 1$, vrijedi stroga nejednakost, kažemo da je funkcija f strogo konveksna. Funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ je (strogo) konkavna ako je funkcija $-f$ (strogo) konveksna.

Nejednakost (1) ima svoju geometrijsku interpretaciju: tetiva, tj. pravocrtna spojnica dviju točaka $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ treba biti iznad grafa ili na grafu konveksne funkcije $y = f(x)$. To svojstvo može poslužiti kao definicija konveksnosti kod funkcija jedne, pa i kod funkcija više varijabli. O konveksnim funkcijama, njihovim karakterizacijama i o dobivanju geometrijskih nejednakosti pomoću njih, već je bilo govora u MFL-u, u člancima [1], [2] i [6]. Za provjeravanje stroge konveksnosti, tj. stroge konkavnosti koristan je teorem 3 iz [2] ($f'' > 0$ je dovoljan uvjet za strogu konveksnost, odnosno $f'' < 0$ za strogu konkavnost). Ovdje ćemo se upoznati s još jednim načinom korištenja konveksnih funkcija za dobivanje geometrijskih nejednakosti u trokutu – pomoću teorije majorizacije. Upoznajmo stoga njezine osnove!

Definicija 2. *Neka su $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dvije n-torke realnih brojeva. Sa $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$ i $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots \underline{y}_n)$ označimo njihova nerastuća preuređenja, tj. takve njihove permutacije da vrijedi $\underline{x}_1 \geq \underline{x}_2 \geq \ldots \geq \underline{x}_n$ i $\underline{y}_1 \geq \underline{y}_2 \geq \ldots \geq \underline{y}_n$. Kažemo da Y majorizira X i pišemo $Y \succ X$ odnosno $X \prec Y$, ako je ispunjeno: $\sum\limits_{i=1}^{k} \underline{y}_i \geq \sum\limits_{i=1}^{k} \underline{x}_i$ za sve $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{y}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{x}_i$.*

Definicija 3. *Neka su $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dvije n-torke realnih brojeva. Kažemo da je X usrednjenje od Y ako postoji n^2 nenegativnih realnih brojeva $p_{\mu\nu}$ takvih da je*

$$\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1, \ \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} = 1 \text{ i } x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} y_\nu \ \text{ za sve } \mu = 1, 2, \ldots, n.$$

[1] Autor je predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu; e-mail: `ivan.loncar@vz.htnet.hr`

Napomena 1. Može se pokazati da je $Y \succ X$ ako i samo ako je $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ usrednjenje od $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Napomena 2. Muirhead je 1903. pokazao da je $Y \succ X$ ako i samo ako X možemo dobiti iz Y uzastostopnom primjenom od najviše $n-1$ ovakvih transformacija T na $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:

$$\begin{aligned} &T(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad = (y_1, \dots, y_{j-1}, \lambda y_j + (1-\lambda)y_k, y_{j+1}, \dots, y_{k-1}, (1-\lambda)y_j + \lambda y_k, y_{k+1}, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Pri tome je $0 \le \lambda \le 1$. Dakle, sve komponente, osim j-te i k-te $(j < k)$ ostaju fiksne, dok j-ta i k-ta postaju konveksne kombinacije od y_j i y_k. Pokažimo da j-ta komponenta mora biti $\lambda y_j + (1-\lambda)y_k$, a k-ta $(1-\lambda)y_j + \lambda y_k$ za neko λ, $0 \le \lambda \le 1$. Kako transformacija T djeluje samo na j-tu i k-tu komponentu možemo, bez smanjenja općenitosti, uzeti $n = 2$, $j = 1$ i $k = 2$, tj. $X = (x_1,\ x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$. Uzmimo da je $x_1 \ge x_2$ i $y_1 \ge y_2$. Sada $Y \succ X$ povlači $y_1 \ge x_1$ i $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ po definiciji 2, pa stoga i $y_2 \le x_2$. Imamo dakle $y_2 \le x_2 \le x_1 \le y_1$, pa postoje λ_1 i λ_2 takvi da je $0 \le \lambda_1 \le 1$, $0 \le \lambda_2 \le 1$ i vrijedi

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 y_1 + (1-\lambda_1)y_2, \\ x_2 &= (1-\lambda_2)y_1 + \lambda_2 y_2. \end{aligned} \tag{3}$$

No zbog $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ imamo $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1 - y_2) = 0$, tj. ili $\lambda_1 = \lambda_2$ ili $y_1 = y_2 = x_1 = x_2$. U posljednjem slučaju možemo uzeti $\lambda_1 = \lambda_2$, pa u svakom slučaju vrijedi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Ujedno iz formula (3) vidimo da je X usrednjenje od Y (vidi definiciju 3), što je u skladu s napomenom 1.

Teorem 1. *Ako za* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *i* $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *vrijedi* $X \prec Y$*, onda je nejednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} f(y_i), \tag{4}$$

ispunjena za sve konveksne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija i $X \prec Y$. Po napomeni 1 x_μ je konveksna kombinacija od y_ν, tj. $x_\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} y_\nu$ za sve $\mu = 1, 2, \dots, n$. Zbog konveksnosti od f imamo $f(x_\mu) \le \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} f(y_\nu)$. Sumiramo li te nejednakosti po μ, slijedi

$$\sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu) \le \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{\mu\nu} f(y_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} (\sum_{\mu=1}^{n} p_{\mu\nu}) f(y_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} f(y_\nu).$$

□

Napomena 3. Može se dokazati da vrijedi i obrat teorema 1 i da, ako je funkcija f strogo konveksna, u nejednakosti (4) vrijedi znak jednakosti jedino u slučaju kada su skupovi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ jednaki.

S važnošću teorije majorizacije možete se upoznati u Matematičko-fizičkom listu u [3, teorem 1], u jednoj nejednakosti za simetrične funkcije od tri varijable, koja je ustvari poseban slučaj Muirheadovog teorema. Navedimo ga bez dokaza.

Teorem 2. *Neka su* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ n*-torke realnih brojeva, a* Π *proizvoljna permutacija skupa* $\{1, 2, \dots, n\}$. *Nuždan i dovoljan* *uvjet da* $\sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{x_1} \alpha_{\Pi(2)}^{x_2} \ldots \alpha_{\Pi(n)}^{x_n}$ *bude usporediva s* $\sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{y_1} \alpha_{\Pi(2)}^{y_2} \ldots \alpha_{\Pi(n)}^{y_n}$ *za sve* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$, *je da jedan od* X *i* Y *bude majoriziran s onim drugim. Nejednakost*

$$\sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{x_1} \alpha_{\Pi(2)}^{x_2} \ldots \alpha_{\Pi(n)}^{x_n} \leq \sum_{\Pi} \alpha_{\Pi(1)}^{y_1} \alpha_{\Pi(2)}^{y_2} \ldots \alpha_{\Pi(n)}^{y_n} \tag{5}$$

vrijedi za sve realne n*-torke* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$ *za* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ako i samo ako je* $X \prec Y$. *Jednakost u nejednakosti (5) nastupa ako i samo ako je* $x_i = y_i$ *za sve* $i = 1, 2, \ldots, n$ *ili* $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$.

Teorem 1 omogućuje dokazivanje i nekih netrivijalnih nejednakosti s konveksnim funkcijama. Jedna takva je sadržaj sljedeće leme.

Lema 1. *Neka je* I *interval u* $\mathbf{R}$ *i* $f : I \to \mathbf{R}$ *neprekidna konveksna funkcija. Neka je* $0 \leq \delta \leq \eta$. *Tada za sve* x *takve da su* $x - \eta$, $x - \delta$, $x + \delta$, $x + \eta$ *u* I *vrijedi nejednakost*

$$f(x - \delta) + f(x + \delta) \leq f(x - \eta) + f(x + \eta). \tag{6}$$

Dokaz. Neka je $X = (x + \delta,\ x - \delta)$ i $Y = (x + \eta,\ x - \eta)$. Tada $X \prec Y$ jer $x + \eta \geq x + \delta$ i $x + \eta + x - \eta = x + \delta + x - \delta = 2x$. Nejednakost (6) je stoga posljedica teorema 1. $\square$

Issai Schur je, po uzoru na nejednakost (4), uveo važan pojam Schur konveksne funkcije.

Definicija 4. *Za realnu funkciju* $F : A \to \mathbf{R}$ *definiranu na skupu* $A \subset \mathbf{R}^n$ *kažemo da je* **Schur konveksna** *ili* **S-konveksna** *ako* $X \prec Y$ *povlači* $F(X) \leq F(Y)$. *Ako je* $X \prec Y$, *pri čemu* X *nije permutacija od* Y, *povlači* $F(X) < F(Y)$ *kažemo da je* F *strogo* **Schur konveksna** *ili* **S-konveksna**. *Za realnu funkciju* $F : A \to \mathbf{R}$ *definiranu na skupu* $A \subset \mathbf{R}^n$ *kažemo da je* **Schur konkavna** *ili* **S-konkavna** *ako je funkcija* $-F$ **Schur konveksna**.

Iz teorema 1 neposredno slijedi

Posljedica 1. *Ako je* f *simetrična i konveksna funkcija, tada je* f *Schur konveksna, pa* $X \prec Y$ *povlači* $f(X) \leq f(Y)$. *Ako je* f *simetrična i konkavna funkcija, tada je* f *Schur konkavna, pa* $X \prec Y$ *povlači* $f(X) \geq f(Y)$.

Netrivijalno je da su elementarni simetrični polinomi od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definirani s

$$S_k(X) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

monotono nerastuće i Schur konkavne funkcije za $x_i \geq 0$. Ako je $k > 1$, $S_k(X)$ su i strogo Schur konkavne funkcije za $x_i > 0$. U slučaju $k = n$ je $S_n(X) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, imamo sljedeću posljedicu Schur konkavnosti od $S_n(X)$.

Posljedica 2. *Ako su* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *i* $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *dvije nenegativne n-torke takve da vrijedi* $X \prec Y$*, onda vrijedi* $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n$.

Teorem 3. *Neka je* $I \subset \mathbf{R}$ *interval, i* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I^n$. *Ako je* $f : I \to \mathbf{R}$ *(strogo) konveksna funkcija, onda je funkcija* $F(X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ *(strogo) Schur konveksna na* I^n*, tj.* $X \prec Y$ *na* I^n *povlači* $F(X) \leq F(Y)$. *Ako je* $f : I \to \mathbf{R}$ *strogo konveksna funkcija i* $X \prec Y$*, onda* $F(X) = F(Y)$ *vrijedi jedino u slučaju kada su skupovi* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *i* $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *jednaki.*

Dokaz. Neka je $X \prec Y$. Po primjedbi 2, X možemo dobiti iz Y uzastopnom primjenom transformacija T (vidi (2)), pa je dovoljno dokazati za slučaj da je $X = TY$. No onda možemo u dokazu, bez smanjenja općenitosti, uzeti $n = 2$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ i

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2, \\ x_2 &= (1-\lambda) y_1 + \lambda y_2, \end{aligned}$$

za neko λ, $0 \leq \lambda \leq 1$ (vidi napomenu 3). Korištenjem definicije (1) sada imamo

$$\begin{aligned} F(X) &= f(x_1) + f(x_2) = f(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) + f((1-\lambda) y_1 + \lambda y_2) \\ &\leq (\lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2)) + ((1-\lambda) f(y_1) + \lambda f(y_2)) \\ &= f(y_1) + f(y_2) = F(Y). \end{aligned}$$

Zadnja tvrdnja o znaku jednakosti izlazi iz napomene 3.

Nejednakosti za kutove trokuta

Primijenimo sada teoriju majorizacije za dobivanje nekih geometrijskih nejednakosti u trokutu. Neka su α, β i γ kutovi ravninskoga trokuta, tj. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Lema 2. Vrijede ove majorizacije,

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{za sve trokute,} \tag{7}$$

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right) \quad \text{za sve šiljastokutne trokute,} \tag{8}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0) \quad \text{za sve tupokutne trokute.} \tag{9}$$

Dokaz. Uzmimo, bez smanjenja općenitosti, $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tada je $3\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma = \pi$, tj. $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$. Isto tako je $3\gamma \leq \alpha + \beta + \gamma = \pi$, tj. $\gamma \leq \frac{\pi}{3}$, što povlači $\alpha + \beta = \pi - \gamma \geq \frac{2\pi}{3}$. Sada $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$, $\alpha + \beta \geq \frac{2\pi}{3}$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ povlače $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma)$. U slučaju tupokutnih trokuta, imamo $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, pa stoga $\beta + \gamma = \pi - \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. No zbog $\gamma \leq \beta$, sada imamo $2\gamma \leq \frac{\pi}{2}$, tj. $\gamma \leq \frac{\pi}{4}$, što povlači, $\pi - \gamma = \alpha + \beta \geq \frac{3\pi}{4}$. Sada $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \beta \geq \frac{3\pi}{4}$ i $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ povlače $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma)$ za tupokutne trokute. Ostale navedene majorizacije se lako dokazuju. $\square$

Promatrajmo funkciju $f(x) = \sin x$ koja je strogo konkavna na intervalu $(0, \pi)$ i primijenimo na nju teorem 3 s $X = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ uvažavajući majorizacije (8) iz leme 2. Time dobijemo

$$\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin 0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}.$$

odnosno

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{za šiljastokutne trokute.}$$

Na isti način dokazali bi, koristeći majorizacije (7) i (9) i teorem 3, nejednakosti:

$$2 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{za sve trokute,}$$

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 1 + \sqrt{2} \quad \text{za tupokutne trokute.}$$

Znak jednakosti dostiže se u sve tri nejednakosti jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta (vidi teorem 3).

Promatrajmo sada funkciju $\ln\sin x$ koja je strogo konkavna na intervalu $(0, \pi)$ i ocijenimo je na skupu tupokutnih trokuta. Po majorizaciji (9) i teoremu 3 imamo,

$$\ln\sin\alpha + \ln\sin\beta + \ln\sin\gamma \leq \ln\sin\frac{\pi}{2} + \ln\sin\frac{\pi}{4} + \ln\sin\frac{\pi}{4},$$

tj.

$$\ln(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \leq 2\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \ln\frac{1}{2},$$

i konačno, eksponenciranjem,

$$0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{1}{2} \quad \text{za tupokutne trokute.} \tag{10}$$

Znak jednakosti dostiže se jedino u slučaju jednakokračnog pravokutnog trokuta (vidi teorem 3).

Na isti bi način, koristeći majorizaciju (7) i teorem 3, dokazali da je

$$0 < \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \text{za sve trokute,}$$

i da se znak jednakosti dostiže jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta.

Zadatak 1. Dokažite da za sve šiljastokutne trokute vrijedi nejednakost

$$\sqrt{2} < \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Zadatak 2. Napišite analogne nejednakosti za sve trokute i posebno za šiljastokutne trokute za funkcije $\cos x$, $\cos^2\frac{x}{2}$, koje su strogo konkavne na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, i za funkciju $\ln\cos\frac{x}{2}$, koja je strogo konkavna na $(0,\ \pi)$.

Funkcija tangens

Funkcija $tg^m x$ je strogo konveksna na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ za $m \geq 1$; a funkcija $tg^m \frac{x}{2}$ je strogo konveksna na intervalu $(0, \pi)$ za $m \geq 1$. Majorizacija (8), (7) i teorem 3 daju za $m \geq 1$ ove nejednakosti u trokutu:

$$3^{\frac{m+2}{2}} \leq \operatorname{tg}^m \alpha + \operatorname{tg}^m \beta + \operatorname{tg}^m \gamma \quad \text{za šiljastokutne trokute,}$$

$$3^{-\frac{m-2}{2}} \leq \operatorname{tg}^m \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^m \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^m \frac{\gamma}{2} \quad \text{za sve trokute.}$$

Funkcija $\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ je strogo konkavna na $(0, \pi)$, pa istim zaključivanjem kao u dokazu nejednakosti (10) imamo

$$0 < \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{9} \quad \text{za šiljastokutne trokute.}$$

Znakovi jednakosti u sve tri nejednakosti dostižu se jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta.

Nejednakosti za duljine stranica trokuta

Neka su a, b i c duljine stranice trokuta i $s = \frac{a+b+c}{2}$ njegov poluopseg. U daljnjem pretpostavljamo da vrijedi $a \geq b \geq c > 0$. Nadalje, vrijedi nejednakost trokuta $b+c > a$ ili ekvivalentno $s > a$. Neka je $p = s - a$, $q = s - b$ i $r = s - c$. Sada je $0 < p \leq q \leq r < s$, $p + q + r = s$, $a = s - p = q + r$, i analogno $b = r + p$ i $c = p + q$.

Lema 3. *Za sve trokute vrijede ove majorizacije,*

$$\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) \prec (r, q, p) \prec (s, 0, 0), \tag{11}$$

$$\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a, b, c) \prec (s, s, 0), \tag{12}$$

$$(a, b, c) \prec (2r, 2q, 2p), \tag{13}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \prec (a, b, c). \tag{14}$$

Dokaz. Dokažimo (11). Uz gornje pretpostavke imamo $3r \geq p + q + r = s$, tj. $r \geq \frac{s}{3}$. Nadalje je $3p \leq p + q + r = s$, tj. $p \leq \frac{s}{3}$, što povlači $q + r = s - p \geq \frac{2s}{3}$. Sada $r \geq \frac{s}{3}$, $q + r \geq \frac{2s}{3}$ i $p + q + r = s$ povlači $\left(\frac{s}{3}, \frac{s}{3}, \frac{s}{3}\right) \prec (r, q, p)$ (definicija 2). Nadalje je $s > r$, $s + 0 > s - p = q + r$ i $s + 0 + 0 = p + q + r$, pa $(r, q, p) \prec (s, 0, 0)$.

Dokažimo (12). Iz $p \leq \frac{s}{3}$ ujedno slijedi $a = s - p = q + r \geq \frac{2s}{3}$. Osim toga je $a + b = q + r + r + p = s + r \geq s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$. Kako je $a + b + c = 2s$, imamo $\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a, b, c)$. Nadalje je $s > a$, $s + s > a + b$ i $s + s + 0 = a + b + c$, pa $(a, b, c) \prec (s, s, 0)$.

Dokažimo (13). Prvo, $2r \geq q + r = a$, $2r + 2q \geq q + r + r + p = a + b$ i $2r + 2q + 2p = 2s = a + b + c$, pa je (13) dokazano.

Dokažimo (14). Imamo $\frac{a+b}{2} \geq \frac{c+a}{2} \geq \frac{b+c}{2}$ i $a \geq \frac{a+b}{2}$, $a+b \geq \frac{a+b}{2} + \frac{c+a}{2}$ i $a+b+c = \frac{a+b}{2} + \frac{c+a}{2} + \frac{b+c}{2}$, pa je (14) dokazano.

Napomena 4. Ocjene simetričnih funkcija na skupu tupokutnih trokuta često predstavljaju problem. C. Tanasescu je pokazao da za tupokutne trokute vrijede ove majorizacije,

$$(2(\sqrt{2}-1)s, (2-\sqrt{2})s, (2-\sqrt{2})s) \prec (a,b,c), \tag{15}$$

$$((\sqrt{2}-1)s, (\sqrt{2}-1)s, (3-2\sqrt{2})s) \prec (r,q,p). \tag{16}$$

Uočite da se na desnoj strani majorizacije (15) pojavljuju stranice jednakokračnog pravokutnog trokuta, a na desnoj strani majorizacije (16) njihove dopune do s.

Primijenimo sada majorizaciju na dokazivanje nejednakosti za stranice trokuta. Kolekcija takvih nejednakosti može se naći u knjizi [5] i mnoge dokazati, pa i poboljšati uz pomoć teorije majorizacije. Sljedeći zadatak je poboljšana verzija zadatka 5.47 iz te knjige, u kojem je gornja ograda $\frac{3}{2}s$ zamijenjena s boljom $\sqrt{2}s$.

1. Dokazati da za sve trokute vrijedi nejednakost

$$\sqrt{a(s-a)} + \sqrt{b(s-b)} + \sqrt{c(s-c)} \leq \sqrt{2}s.$$

Kako je za sve trokute $\left(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}, \frac{2s}{3}\right) \prec (a,b,c)$ (majorizacija (12), a funkcija $f(x) = \sqrt{x(s-x)}$ je strogo konkavna na intervalu $(0,s)$ (graf od $f(x)$ je luk gornje polukružnice), teorem 3 daje

$$\sqrt{a(s-a)} + \sqrt{b(s-b)} + \sqrt{c(s-c)} \leq 3\sqrt{\frac{2s}{3} \cdot (s - \frac{2s}{3})} = \sqrt{2}s.$$

Jednakost se dostiže jedino u slučaju jednakostraničnog trokuta.

2. Dokazati da za sve trokute vrijedi nejednakost

$$8abc \leq (a+b)(b+c)(c+a). \tag{17}$$

Iako se čini kompliciranom, nejednakost (17) slijedi odmah iz majorizacije (14) i posljedice 2.

Zadatak 3. Dokažite nejednakost (17) na drugi način, koristeći nejednakost između geometrijske i aritmetičke sredine. Odatle se vidi da (17) vrijedi i ako su a, b i c proizvoljni nenegativni brojevi i da znak jednakosti vrijedi jedino u slučaju $a = b = c$.

Literatura

[1] Josip E. Pečarić, *Konveksne funkcije i nejednakosti*, MFL, 4/ 159, god. XXXIX, Zagreb 1988.–1989., str. 121–131.

[2] Marko Valčić, *Primjena Jensenove nejednakosti u trigonometriji*, MFL 1/ 221, god. LVI, Zagreb 2005.–2006., str. 18–19.

[3] Hojoo Lee, *Nejednakosti s homogenim simetričnim polinomima*, MFL 1/ 205, god. LII, Zagreb 2001.–2002., str. 12–17.

[4] A. W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Mathematics in Science and Engineering, Volume 143., Academic Press 1979.

[5] O. Bottema, R. Ž. Đorđević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen 1969.

[6] Josip E. Pečarić, *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Mala matematička biblioteka 6., Zagreb 1996.