Делчо Лешковски
Скопје

НЕКОЛКУ ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК РЕД

Под поимот **Диофантова равенка** (според грчкиот математичар Диофант од Александрија) се подразбира равенка со една или повеќе непознати која што се решава во множеството на целите броеви.

За линеарната Диофантова равенка со две непознати, односно за равенката од облик $ax+by=n,\ a,b,n\in\mathbb{Z}$, досега многупати е пишувано. Сега ќе обрнеме малку повеќе внимание на некои Диофантови равенки од повисок степен.

1. Питагорина равенка

Квадратната Диофантова равенка со три непознати од облик $x^2+y^2=z^2$ уште е позната како Питагорина равенка. Следнава теорема дава формула за добивање на сите ненулти целобројни решенија на оваа равенка.

Теорема 1.1 Ненултите целобројни решенија на Питагорината равенка

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1.1}$$

каде што y е парен број, се дадени со:

$$x=k(r^2-s^2),\quad y=2krs,\quad z=k(r^2+s^2). \tag{1.2}$$

Притоа k е произволен ненулти цел број, а r и s се ненулти, заемно прости цели броеви со различна парност.

Доказ. Ако кои било два од трите броеви x,y,z имаат заеднички делител, тогаш тој е делител и на третиот број. Затоа, без губење на општоста, можеме да ги бараме **примитивните решенија** на равенката, т.е. оние x,y,z чиј што најголем заеднички делител е 1. Тогаш сите други ненулти решенија можат да се добијат множејќи ги примитивните решенија со произволен ненулти цел број k. Во таа смисла отпаѓа случајот кога x и y се истовремено парни броеви. Од друга страна x и y не можат истовремено да бидат непарни. Имено, квадратот на секој непарен цел број е од облик $8M+1$, па во тој случај би добиле дека $z^2=8L+2$. Но, квадратот на секој парен цел број е од облик $4N$, а z^2 нема таков облик. Според тоа x и y мора да имаат различна парност.

Нека y е парен, а x е непарен. Јасно е дека z е непарен. Тогаш $y^2=4{y_1}^2=z^2-x^2$ односно ${y_1}^2=\frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$. Секој заеднички делител на $\frac{z+x}{2}$ и $\frac{z-x}{2}$ е делител и на нивниот збир z и нивната разлика x. Бидејќи НЗД(x, z)$=1$,

следува дека $\frac{z+x}{2}$ и $\frac{z-x}{2}$ се заемно прости броеви. Ако x, y, z се ненегативни цели броеви, тогаш можеме да ставиме

$$\frac{z+x}{2} = r^2, \frac{z-x}{2} = s^2, \tag{1.3}$$

каде што НЗД $(r,s) = 1$.

Со собирање и одземање на равенките (1.3) и со замена на (1.3) во $y_1^2 = \frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$, добиваме

$$x = r^2 - s^2, \quad y = 2rs, \quad z = r^2 + s^2. \tag{1.4}$$

Бидејќи x и z се непарни, следува дека r и s се со различна парност. Докажавме дека ако равенката (1.1) има примитивни решенија во множеството на ненегативни цели броеви, тие се дадени со (1.4) за $r^2 > s^2$. Важи и обратното, со замена на изразите од (1.4) во равенката (1.1) гледаме дека таа е задоволена за сите целобројни вредности на r и s.

Јасно е дека ако тројката (x, y, z) е решение на (1.1) тогаш решенија се и: $(x, y, -z)$, $(x, -y, z)$, $(-x, y, z)$, $(-x, -y, z)$, $(-x, y, -z)$, $(x, -y, -z)$, $(-x, -y, -z)$.

Со тоа теоремата е докажана. ■

2. Диофантова равенка од облик $x^2 + 2y^2 = z^2$

Теорема 2.1 Примитивните решенија на Диофантовата равенка

$$x^2 + 2y^2 = z^2 \tag{2.1}$$

во ненегативните цели броеви, се дадени со

$$x = \pm(r^2 - 2s^2), \quad y = 2rs, \quad z = r^2 + 2s^2, \tag{2.2}$$

каде што $x > 0$ и r и s се ненегативни цели броеви такви што НЗД $(r, 2s) = 1$.

Доказ. Нека x (јасно, и z е непарен) е непарен, а y е парен број. Слично како во претходниот случај другите можности за x и y отпаѓаат. Тогаш $y = 2y_1$ и $2y_1^2 = \frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$. Бидејќи $\frac{z+x}{2}$ и $\frac{z-x}{2}$ се заемно прости цели броеви, тогаш важи или $z + x = 2r^2$ и $z - x = 4s^2$, или $z - x = 2r^2$ и $z + x = 4s^2$, каде што r и s се ненегативни цели броеви такви што НЗД $(r, s) = 1$.

Во првиот случај добиваме $x = r^2 - 2s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + 2s^2$, каде што НЗД $(r, 2s) = 1$.

Во вториот случај добиваме $x = 2s^2 - r^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + 2s^2$. Оттука имаме

$$x = \pm(r^2 - 2s^2), \quad y = 2rs, \quad z = r^2 + 2s^2, \tag{2.2}$$

каде што $x > 0$ и НЗД$(r, 2s) = 1$. ■

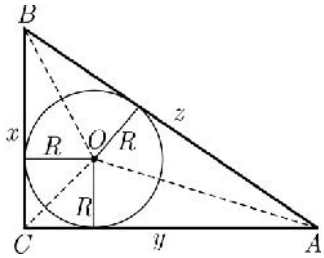
Обратно, заменувајќи ги изразите (2.2) во равенката (2.1) гледаме дека таа е задоволена за сите ненегативни цели броеви r и s такви што НЗД$(r, 2s) = 1$. ■

Забелешка. Ако во добиеното примитивно решение, се промени знакот на барем еден од x, y или z повторно се добива решение на равенката (2.1).

Пример 1. Докажи дека во правоаголен триаголник со страни цели броеви радиусот на впишаната кружница е цел број.

Доказ. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза со должина z и катети со должини x и y, и нека O е центарот на впишаната кружница а R е нејзиниот радиус. Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{2.3}$$



Плоштината на правоаголниот триаголник е $P = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}R(x + y + z)$. Нека дека y е парен број. Тогаш решението на (2.3) е дадено со

$$x = k(r^2 - s^2), \quad y = 2krs, \quad z = k(r^2 + s^2).$$

Бидејќи $xy = R(x + y + z)$, добиваме

$$2k^2rs(r^2 - s^2) = Rk(r^2 - s^2 + 2rs + r^2 + s^2),$$

од каде што

$$R = \frac{2k^2rs(r^2 - s^2)}{2kr(r + s)} = ks(r - s).$$

Според тоа R е цел број. ■

Пример 2. Реши ја во позитивни цели броеви Диофантовата равенка

$$x^2 + y^2 = 2z^2. \tag{2.4}$$

Решение. Нека x, y, z се цели броеви што ја задоволуваат (2.4). Да забележиме дека ако кои било два од трите броеви x, y, z имаат заеднички делител, тогаш тој е делител и на третиот број. Ако $d =$ НЗД(x, y, z) и ако $x = dx_0$, $y = dy_0$, $z = dz_0$, тогаш x_0, y_0, z_0 се заемно прости по парови и ја задоволуваат (2.4). Затоа ќе ги разгледуваме само примитивните решенија, x, y, z на (2.4). Лесно се заклучува дека ниеден од x, y, z не може да биде парен број.

Нека x, y, z се позитивни непарни броеви, НЗД$(x, y, z) = 1$ кои ја задоволуваат (2.4). Тогаш $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}, z$ ја задоволуваат равенката $(\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2 = z^2$.

Ако $x = y$ тогаш $z = x = y = 1$ ќе биде примитивно решение. Исклучувајќи го овој случај, можеме да го користиме решението на Питагорината равенка, односно ќе важи еден од следниве случаи: или $\frac{x+y}{2} = r^2 - s^2$, $\frac{x-y}{2} = 2rs$, $z = r^2 + s^2$, или $\frac{x-y}{2} = r^2 - s^2$, $\frac{x+y}{2} = 2rs$, $z = r^2 + s^2$, каде што позитивните цели броеви r и s се заемно прости и со различна парност. Оттука, добиваме

$$x = r^2 - s^2 + 2rs, \quad y = \pm(r^2 - s^2 - 2rs), \quad z = r^2 + s^2, \tag{2.5}$$

каде што r и s се такви што x и y се позитивни цели броеви.

Обратно, заменувајќи ги изразите (2.5) во равенката (2.4) гледаме дека таа е задоволена за сите цели броеви r и s. ■

3. Диофантова равенка од облик $x^4 + y^4 = z^2$

Теорема 3.1 Не постои решение во множеството на позитивни цели броеви на Диофантовата равенка

$$x^4 + y^4 = z^2. \tag{3.1}$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со помош на методот на Ферма познат како метод на бесконечно „слегување“. Суштината на овој метод е следнава: Ако постои позитивен цел број n со одредено својство $P(n)$ тогаш се докажува дека постои помал позитивен цел број со истото својство. На овој начин почнувајќи од даден позитивен цел број, ќе добиеме бесконечна опаѓачка низа од позитивни цели броеви, каде што секој од нив го има својството $P(n)$. Но, бидејќи секое непразно множество од позитивни цели броеви има најмал елемент, следува дека горната постапка води кон противречност. Значи, не постои позитивен цел број n со својството $P(n)$.

Да претпоставиме дека x, y, z е примитивно решение на равенката (3.1) во позитивните цели броеви. Тогаш, еден од броевите x^2 или y^2 мора да биде парен број. Равенката (3.1) може да се претстави како $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$. Нека, на пример, y е ненулти парен број. Користејќи го решението на Питагорината равенка, имаме

$$x^2 = r^2 - s^2, \quad y^2 = 2rs, \quad z = r^2 + s^2, \tag{3.2}$$

каде што r и s $(r^2 > s^2)$ се заемно прости броеви, со ист знак и различна парност.

Прво, да забележиме дека не е можно r и s да се истовремено непарни броеви, затоа што во тој случај $r^2 - s^2$ е од облик $4M+3$ и како таков не би бил потполн квадрат. Затоа, мора r да биде непарен а s парен број.

Бидејќи во равенката $y^2 = 2rs$, НЗД$(r, 2s) = 1$, десната страна мора да има множител парен степен на бројот 2, следува дека $r = \pm {r_0}^2, s = \pm 2{s_0}^2$, каде што r_0 и s_0 се позитивни цели броеви. Заменувајќи ги овие вредности на r и s во првата равенка на (3.2), добиваме

$$x^2 + (2{s_0}^2)^2 = ({r_0}^2)^2, \tag{3.3}$$

каде што НЗД$(r_0, 2s_0) = 1$. Применувајќи го на (3.3) решението на Питагорината равенка, добиваме

$${r_0}^2 = t^2 + u^2 \quad \text{и} \quad {s_0}^2 = tu\ . \tag{3.4}$$

каде што НЗД$(t, u) = 1$. Бидејќи НЗД$(t, u) = 1$, $t = \pm v^2$ и $u = \pm w^2$, каде што u и w се заемно прости и позитивни цели броеви. Затоа, од првата равенка во (3.4) добиваме $v^4 + w^4 = {r_0}^2$.

Добиваме уште едно примитивно решение на равенката (3.1) во кое ${r_0}^2 = |r| \leq r^2 < z < z^2$. Значи, претпоставката дека (3.1) има примитивно решение x, y, z во множеството позитивни цели броеви, повлекува дека постои и друго примитивно решение v, w, r_0 каде што $r_0 < z$. Според методот на Ферма добиваме дека почетната претпоставка не е вистинита, односно равенката (3.1) нема решение во множеството на позитивни цели броеви. ■

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија