

## О површинама фигура

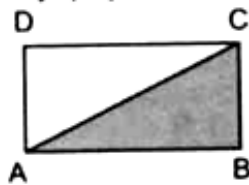
први део

Ратко Тошић, Нови Сад

У четвртном разреду се учи израчунавање површине правоугаоника. Ако су дужине страница правоугаоника  $a$  и  $b$ , онда се његова површина израчунава по формули  $P=ab$ .

### ПОВРШИНА ТРОУГЛА

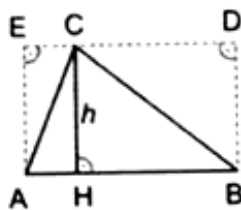
Површина правоуглог троугла са датим катетама, лако се добија тако што се тај троугао допуни до правоугаоника (слика 1).



Сл.1

Наиме, правоугаоник  $ABCD$  састоји се из два подударна правоугла троугла (странице једног једнаке редом страницама другог), а како су површине подударних

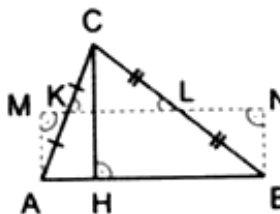
фигура једнаке, то је  $P_{ABC} = \frac{1}{2}ab$ , где су  $a$  и  $b$  дужине катета.



Сл.2

Сада не представља никакав проблем извођење формуле за површину произвољног троугла, ако су дате једна његова страница и њој одговарајућа висина. На пример, троугао  $ABC$  (слика 2) допунимо до правоугаоника  $ABDE$ .

На тај начин добијамо да је површина троугла  $P = \frac{1}{2}ah$ , где је  $a$  страница троугла, а  $h$  њој одговарајућа висина.



Сл.3

Други начин приказан је на слици 3.

Тачке  $K$  и  $L$  су средишта страница  $AC$  и  $BC$  редом,  $ABNM$  је правоугаоник. Тада је  $P_{ABC} = P_{ABNM}$ . (Образложи детаљно извођење формуле за површину троугла на овај начин!)

Предлажемо читаоцима да формулу за површину произвољног троугла изведу и на тај начин што ће га представити у облику уније (слика 4) или разлике (слика 5) два правоугла троугла.



Сл.4



Сл.5

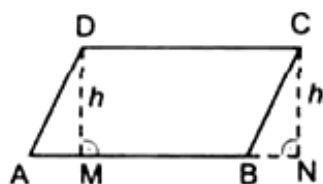
### ПОВРШИНА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Поменућемо сада два начина за извођење формуле  $P = ah$  за површину произвољног паралелограма, где је  $a$  страница паралелограма, а  $h$  њој одговарајућа висина.

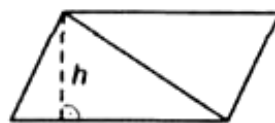
**Први начин** (слика 6): Површина паралелограма  $ABCD$  једнака је површини правоугаоника  $MNCD$  исте висине. Образложи!

**Други начин** (слика 7): Треба уочити да дијагонала дели паралелограм на два подударна троугла. Образложи детаљно!

Да ли можеш да наведеш још неке начине за извођење формуле за површину паралелограма?



Сл.6

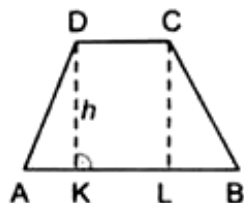


Сл.7

### ПОВРШИНА ТРАПЕЗА

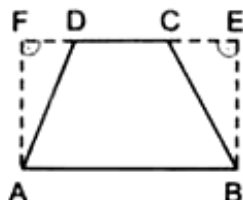
Формула за површину трапеца је  $P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ , где су  $a$  и  $b$  дужине основица,

а  $h$  висина трапеца. Пет начина за извођење ове формуле представљено је на сликама 8 – 12. Остављамо за вежбу читаоцу да детаљно образложи та извођења.



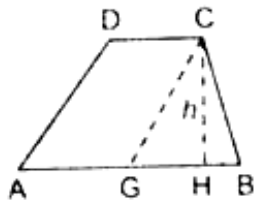
$$P_{ABCD} = P_{AKD} + P_{KLCD} + P_{LBC}$$

Сл.8



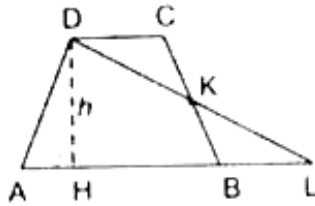
$$P_{ABCD} = P_{ABEF} - P_{ADF} - P_{BEC}$$

Сл.9



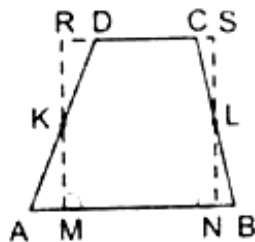
$$CG \parallel AD, P_{ABCD} = P_{AGCD} + P_{GBC}$$

Сл.10



$$K - \text{средиште крака } BC, P_{ABCD} = P_{ALD}$$

Сл.11



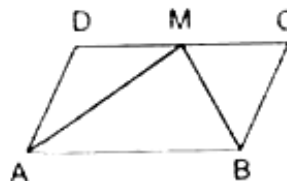
$$K \text{ и } L - \text{средишта страници } AD \text{ и } BC \text{ редом,} \\ P_{ABCD} = P_{MNSR}$$

Сл.12

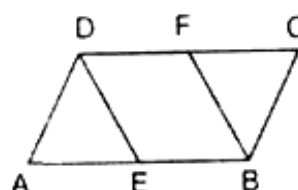
Да ли можеш да предложиш још неке начине извођења формуле за површину трапеза?

### ЗАДАЦИ

1. (а) Површина осенченог дела је  $18 \text{ cm}^2$  Одреди површину паралелограма  $ABCD$  ( $M$  је произвољна тачка на страници  $DC$ .)



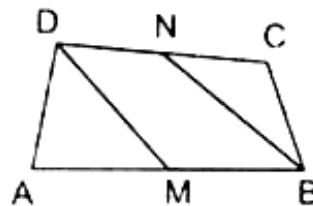
- (б) Површина осенченог дела је  $14 \text{ cm}^2$  Одреди површину паралелограма  $ABCD$ , ако су  $E$  и  $F$  средишта страници  $AB$  и  $CD$  редом.



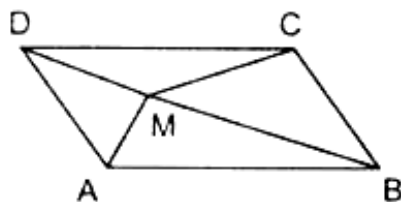
Упутство. (а) Кроз тачку  $M$  повуци праву паралелну са  $AD$   
(б) Повуци дијагоналу  $BD$ .

2. Утврди који део површине фигуре чини осенчени део.

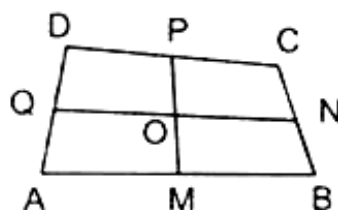
(а) Тачке  $M$  и  $N$  су средишта страница  $AB$  и  $DC$  конвексног четвороугла  $ABCD$ .



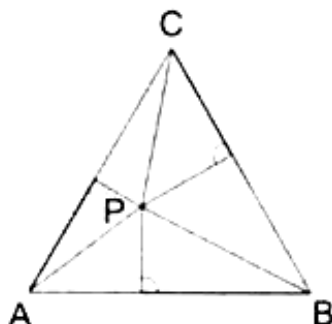
(б)  $M$  је произвољна тачка у унутрашњости паралелограма  $ABCD$ .



(в)  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  су редом средишта страница  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  конвексног четвороугла  $ABCD$ .



(г) Из произвољне тачке  $P$  у унутрашњости једнакостраничног троугла спуштене су нормале на његове странице и повучене дужи које је спајају са теменима.



Упутство. (а) Повуци дијагоналу  $BD$ .

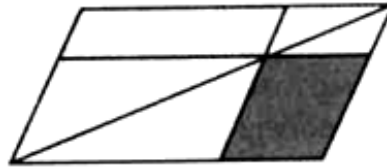
(б) Кроз тачку  $M$  повуци праве паралелне страницама паралелограма.

(в) Повуци дужи које спајају тачку  $O$  са теменима четвороугла.

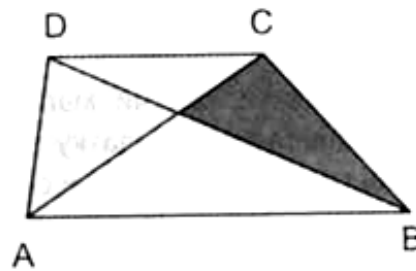
(г) Кроз тачку  $P$  повуци праве паралелне страницама троугла.

3. Одреди однос црног и осенченог дела следећих фигура:

- (a) Кроз произвољну тачку на дијагонали паралелограма повучене су праве паралелне његовим страницама.



- (b)  $ABCD$  је произвољан трапез.



## О површинама фигура

други део

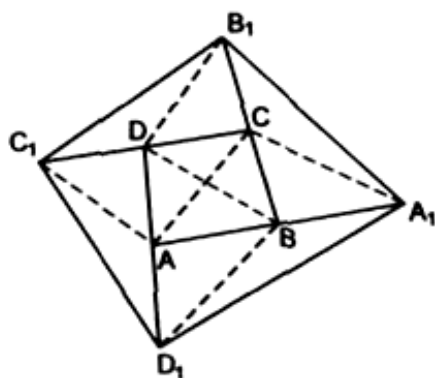
Ратко Тошић, Нови Сад

Из формуле за површину троугла  $P = \frac{a \cdot h_1}{2}$  закључујемо следеће:

- површине два троугла са једнаким основицама односе се као одговарајуће висине;
- површине два троугла са једнаким висинама односе се као одговарајуће основице.

Те особине смо користили при решавању задатака у првом делу овог чланка (МЛ2, 2007/8). У следећа два примера такође ћемо користити те особине.

**Пример 1.** Дат је конвексан четвороугао  $ABCD$ . Нека су  $A_1, B_1, C_1, D_1$  такве тачке да је  $B$  средиште дужи  $AA_1$ ,  $C$  средиште дужи  $BB_1$ ,  $D$  средиште дужи  $CC_1$  и  $A$  средиште дужи  $DD_1$ . Одреди однос површина четвороуглова  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ .



**Решење.** Повуцимо дужи  $AC, BD$  (дијагонале четвороугла  $ABCD$ ),  $A_1C, B_1D, C_1A$  и  $D_1B$ . Троуглови  $ABC$  и  $BA_1C$  имају једнаке основице ( $AB=BA_1$ ) и заједничку висину из темена  $C$ . Зато је  $P_{ABC} = P_{BA_1C}$ . Исто тако, троуглови  $BA_1C$  и  $CB_1A_1$  имају једнаке основице  $CB$  и  $CB_1$  и заједничку висину из темена  $A_1$ . Зато је  $P_{BA_1C} = P_{CB_1A_1}$ , одакле је  $P_{BB_1A_1} = 2 \cdot P_{ABC}$ . На исти начин доказујемо да је

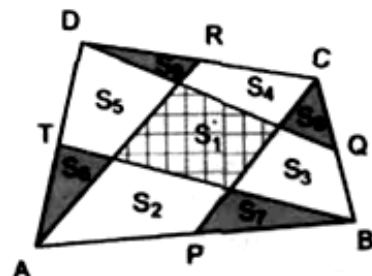
$$P_{CC_1B_1} = 2 \cdot P_{BCD}, \quad P_{DD_1C_1} = 2 \cdot P_{CDA}, \quad P_{AA_1D_1} = 2 \cdot P_{DAB}.$$

Сабирањем четири једнакости добијамо да је

$$P_{BB_1A_1} + P_{CC_1B_1} + P_{DD_1C_1} + P_{AA_1D_1} = 2 \cdot (P_{ABC} + P_{BCD} + P_{CDA} + P_{DAB}) = 4 \cdot P_{ABCD}.$$

Како је  $P_{A_1B_1C_1D_1} = P_{BB_1A_1} + P_{CC_1B_1} + P_{DD_1C_1} + P_{AA_1D_1} + P_{ABCD}$  то је  $P_{A_1B_1C_1D_1} = 5 \cdot P_{ABCD}$ . Тражени однос је 1:5.

**Пример 2.** Одреди однос површина црног и осенченог дела фигуре на слици. Тачке  $P, Q, R$  и  $T$  су редом средишта страница  $AB, BC, CD$  и  $DA$  конвексног четвороугла  $ABCD$ .



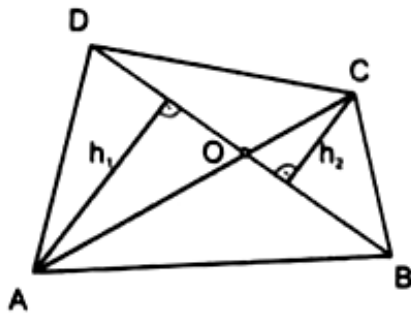
**Решење.** Четвороугао  $ABCD$  површине  $S$  подељен је на 9 делова. Означимо њихове површине као на слици. Тада је, према задатку 2а (стр.4),

$$S_2 + S_1 + S_4 = \frac{S}{2} \quad \text{и} \quad S_3 + S_1 + S_5 = \frac{S}{2}, \quad \text{тј.} \quad 2S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S.$$

С друге стране је  $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9 = S$ . Изједначавањем левих страна последње две једнакости, добијамо да је  $S_1 = S_6 + S_7 + S_8 + S_9$ , тј. црни и осенчени део имају једнаке површине.

У следећем задатку доказујемо једну интересантну особину конвексног четвороугла.

**Задатак.** Дијагонале конвексног четвороугла  $ABCD$  секу се у тачки  $O$  и деле тај четвороугао на троуглове  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  и  $ODA$ . Доказати да је  $S_{OAB} \cdot S_{OCD} = S_{OBC} \cdot S_{ODA}$ .

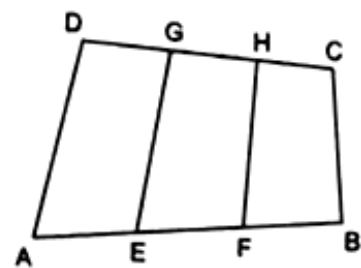


**Решење.** Нека су  $h_1$  и  $h_2$  дужине нормала из тачака  $A$  и  $C$  редом на дијагонали  $BD$ . Непосредним израчунавањем добија се да је

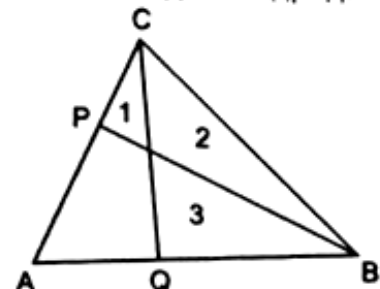
$$\begin{aligned} S_{OAB} \cdot S_{OCD} &= \frac{OB \cdot h_1}{2} \cdot \frac{OD \cdot h_2}{2} = \frac{OB \cdot OD \cdot h_1 \cdot h_2}{4} = \\ &= \frac{OB \cdot h_2}{2} \cdot \frac{OD \cdot h_1}{2} = S_{OBC} \cdot S_{ODA}. \end{aligned}$$

### Задаци за самосталан рад

1. Странаца  $AB$  конвексног четвороугла  $ABCD$  подељена је у тачкама  $E$  и  $F$  на три једнака дела, а странаца  $DC$  тачкама  $G$  и  $H$  на три једнака дела, тако да дужи  $EG$  и  $FH$  деле четвороугао  $ABCD$  на три четвороугла. Докажи да је површина четвороугла  $EFHG$  три пута мања од површине четвороугла  $ABCD$ .



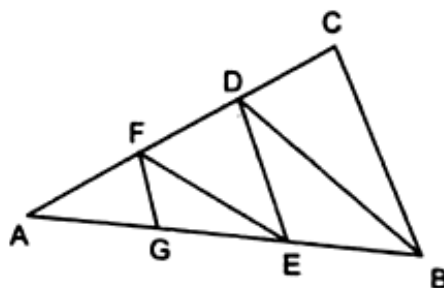
2. Конвексни четвороугао је дијагоналама подељен на четири троугла чије су површине различити цели бројеви, већи од 2, а мањи од 10. Одреди површину четвороугла.
3. Троугао  $ABC$  подељен је дужима  $BP$  и  $CQ$  на три троугла и један четвороугао. Ако су површине три мања троугла 1, 2 и 3, одреди површину троугла  $ABC$  (види слику).



4. Трапез је својим дијагоналама подељен на четири троугла. Површине троуглова уз основице трапеза су  $4\text{cm}^2$  и  $9\text{cm}^2$ . Одреди површину трапеза.

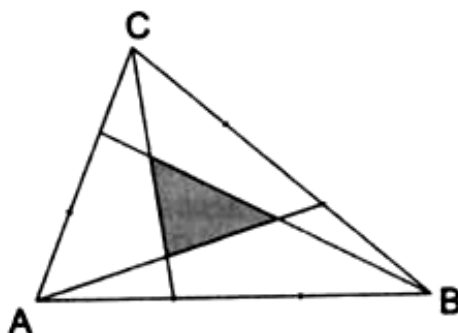
5. Постоји ли троугао чије висине имају редом дужине 1, 2 и 3?

6. Како у троуглу ABC (види слику) повући изломљену линију BDEFG тако да пет добијених троуглова имају једнаке површине?



#### Специјални задатак број 44

Свака страница троугла ABC подељена је на три једнака дела, а затим је свако теме спојено са једном тачком поделе као на слици. На тај начин је троугао ABC подељен на 7 делова – три четвороугла и четири троугла. Докажи да је површина „централног“ троугла једнака збиру површина остала три троугла.



#### Решења задатака из чланка *О површинама фигура*, МЛ2, 2007/8

- 1.(a) Нека је MN дуж паралелна са AD,  $N \in AB$ . Она дели паралелограм ABCD на два паралелограма. Дијагонале AM и BM, редом, паралелограма ANMD и NBCM, деле те паралелограме на подударне троуглове, тј. на делове једнаких површина. Дакле, површина осенченог дела је:

$$P_{ABM} = P_{ANM} + P_{NBM} = \frac{1}{2} P_{ANMD} + \frac{1}{2} P_{NBCM} = \frac{1}{2} P_{ABCD};$$

дакле, површина паралелограма је два пута већа од површине осенченог дела, тј.  $36\text{cm}^2$ .

- (6) Повуцимо дијагоналну BD. Како троуглови AED и EBD имају једнаке основице и заједничку висину из темена D, њихове површине су једнаке, тј.

$$P_{AED} = P_{EBD}.$$



На исти начин закључујемо да је површина  $P_{BCF}=P_{BFD}$ , па је површина осенченог дела

$$P_{EBFD}=P_{EBD}+P_{BFD}=P_{AED}+P_{BCF}$$

једнака површини неосенченог дела. Дакле,

$$P_{ABCD}=2 P_{EBFD}=28\text{cm}^2.$$

- 2.(a) Повуцимо дијагоналу  $BD$ . Као у задатку 1б, закључујемо да је површина осенченог дела једнака половини површине целог четвороугла.
- (б) Кроз тачку  $M$  повуцимо праве паралелне страницама паралелограма. Оне деле паралелограм  $ABCD$  на четири паралелограма. Дужима  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$  и  $DM$  као дијагоналама, ти паралелограми су подељени на подударне троуглове. У сваком од тих паралелограма један троугао је осенчен, а други није. Закључујемо да је укупна површина осенченог дела једнака половини површине паралелограма  $ABCD$ .
- (в) Повуцимо дужи  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$ . Оне деле четвороугао  $ABCD$  на четири троугла;  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ , и  $DOA$ . Дужи  $OM$ ,  $ON$ ,  $OP$ ,  $OQ$  су редом тежишне линије тих троуглова и деле их на по два троугла једнаких површина, од којих је један осенчен, а други неосенчен. Дакле, укупна површина осенченог дела једнака је половини површине четвороугла  $ABCD$ .
- (г) Кроз тачку  $P$  повуцимо праве паралелне страницама троугла. Те три праве деле троугао  $ABC$  на шест делова, од којих су три паралелограми, а три једнакостранични троуглови. Паралелограми су дијагоналама  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  редом подељени на подударне троуглове, од којих је један осенчен, а други неосенчен. Једнакостранични троуглови су висинама из темена  $P$  такође подељени на подударне правоугле троуглове, од којих је један осенчен, а други неосенчен. Закључујемо да је укупна површина осенченог дела једнака половини површине троугла  $ABC$ .
- 3.(a) Нека су праве паралелне страницама паралелограма повучене кроз тачку  $S$  на дијагонали  $AC$ . Како су  $AC$ ,  $AS$  и  $SC$  редом дијагонале паралелограма  $ABCD$ ,  $AQSM$  и  $SNCP$ , то је  $P_{ABC}=P_{ADC}$ ,  $P_{AQS}=P_{AMS}$ ,  $P_{SNC}=P_{SPC}$  следи да је
- $$P_{QBNS}=P_{ABC}-P_{AQS}-P_{SNC}=P_{ADC}-P_{AMS}-P_{SPC}=P_{MSPD}.$$
- (b) Нека је  $O$  тачка пресека дијагонала трапеца. Како је  $P_{AOD}=P_{ABD}-P_{ABO}$ ,  $P_{BOC}=P_{ABC}-P_{ABO}$  и  $P_{ABD}=P_{ABC}$  (заједничка основица и једнаке висине) то је  $P_{AOD}=P_{BOC}$ , тј. површине црног и осенченог троугла су једнаке.

## О површинама фигура

трећи део

Ратко Тошић, Нови Сад

Подсетимо се:

Тежишна линија троугла је дуж која спаја теме са средиштем наспрамне странице.

Средња линија троугла је дуж која спаја средишта две странице троугла. За средњу линију знамо да је једнака половини одговарајуће странице троугла и да јој је паралелна.

Искористићемо сада знање о површини троугла и средњој линији троугла да бисмо доказали следеће тврђење које се састоји из три дела.

### Тврђење.

- Тежишне линије троугла секу се у једној тачки.
- Та тачка (тежиште троугла) дели сваку тежишну линију у односу 2 : 1.
- Тежишне линије троугла деле тај троугао на шест троуглова једнаких површина.

### Доказ.

Нека су  $A_1$  и  $B_1$  средишта страница  $BC$  и  $AC$  редом (слика).  $AA_1$  и  $BB_1$  су тежишне линије и нека је тачка  $T$  њихов пресек. Повуцимо праву  $CT$  и нека је  $C_1$  пресек те праве са страницом  $AB$ . Означимо површине шест троуглова на које праве  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  деле троугао  $ABC$  са  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$  као на слици. Дуж  $A_1B_1$  је средња линија троугла  $ABC$ ; према томе је  $A_1B_1 \parallel AB$ , па је четвороугао  $ABA_1B_1$  трапез. Следи да је  $S_1 = S_2 = S$ . Даље је  $S_1 = S_3$  (једнаке основице и заједничка одговарајућа висина из темена  $A$  и  $T$ ) и, аналогно,  $S_2 = S_4$ , па је

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S.$$

Троуглови  $TAC$  и  $TBC$  имају једнаке површине ( $2S$ ) и заједничку основицу  $TC$ . Следи да су висина из темена  $A$  и  $B$  на заједничку основицу једнаке. Те висине су, међутим, и одговарајуће висине троуглова  $AC_1T$  и  $BC_1T$  са заједничком основицом  $C_1T$ . Следи да је  $S_5 = S_6$ , према томе је  $AC_1 = C_1B$ , па је  $CC_1$  тежишна линија.

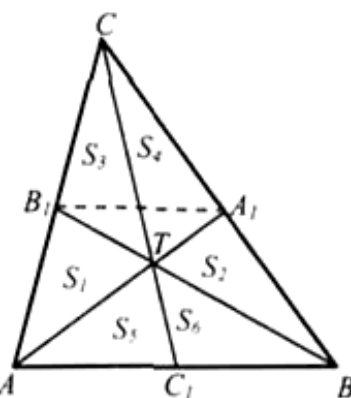
Троуглови  $ATC$  и  $A_1TC$  имају заједничку висину из темена  $C$ , а површина првог ( $2S$ ) је два пута већа од површине другог ( $S$ ). Зато је и однос основица

$$AT : A_1T = 2 : 1.$$

Аналогно добијамо да је

$$BT : B_1T = 2 : 1.$$

Троуглови  $ATB$  и  $ATB_1$  имају заједничку висину из  $A$  а одговарајућа основица првог је двоструко већа од одговарајуће основице другог. Следи да је  $S_5 + S_6 = 2S$ , па ка-



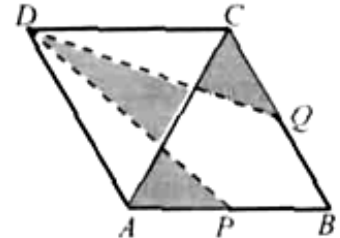
ко је  $S_5 = S_6$ , то је  $S_5 = S_6 = S$ . Овим је доказано да су површине свих шест малих троуглова једнаке.

Преостаје да се докаже да је и  $CT : C_1T = 2 : 1$ , а то следи из чињенице да је

$$P_{ATC} = 2S = 2P_{AC_1T}.$$

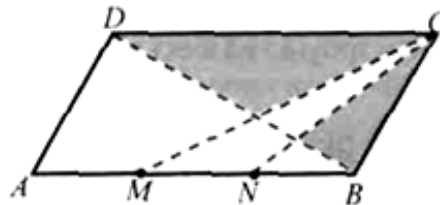
### Задаци за самостални рад

1. Тачке  $P$  и  $Q$  су средишта страница  $AB$  и  $BC$  паралелограма  $ABCD$ . Који део површине паралелограма чини осенчени део?
2. Тачка  $M$  је средиште странице  $CD$  квадрата  $ABCD$ . Дуж  $BM$  сече дијагоналу  $AC$  у тачки  $P$ . Који део површине квадрата чини површина троугла  $ABP$ ?



### Специјални задатак број 45

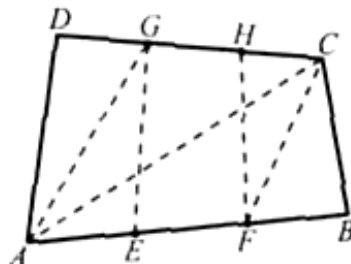
Тачке  $M$  и  $N$  деле страницу  $AB$  паралелограма  $ABCD$  на три једнака дела.



Који део површине паралелограма чини осенчени део?

### Решења задатака из чланка О површинама фигура, МЛЗ, 2007/8

1. Повуцимо дијагонале  $AC$ ,  $AG$  и  $FC$  као на слици.



Нека је  $P$  површина датог четвороугла. Троуглови  $ADG$  и  $ADC$  имају заједничку висину из темена  $A$ , па је:

$$P_{ADG} = \frac{1}{3} P_{ADC}. \quad (1)$$

Слично добијамо да је

$$P_{FBC} = \frac{1}{3} P_{ABC}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) је  $P_{ADG} + P_{FBC} = \frac{1}{3} P$ , па је

$$P_{FCG} = \frac{2}{3} P. \quad (3)$$

На основу задатка 2(а) (МЛ2, 2007/8) је

$$P_{EFHG} = \frac{1}{2} P_{AFCG}, \text{ па је на основу (3)}$$

$$P_{EFHG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} P = \frac{1}{3} P.$$

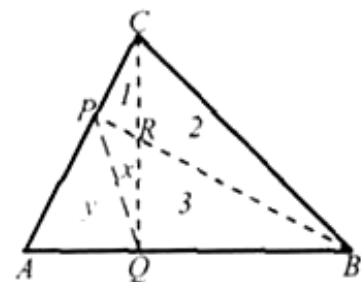
2. Нека су  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$  површине троуглова на које је четвороугао подељен својим дијагоналама. Према задатку из чланка "О површинама фигура", МЛ3, 2007/8, производ површина два троугла уз наспрамне странице четвороугла једнак је производу површина друга два троугла. Четири различита броја из скупа  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  за које је  $mn = pq$ , могу се изабрати само на један начин. То су бројеви 3, 4, 6 и 8 ( $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ ). Дакле, површина четвороугла је  $3 + 4 + 6 + 8 = 21$ .
3. Повуцимо дуж  $PQ$  као на слици и означимо са  $x$  и  $y$  површине троуглова  $PQR$  и  $PQA$ .

Како је  $2 \cdot x = 3 \cdot 1$ , то је  $x = \frac{3}{2}$ .

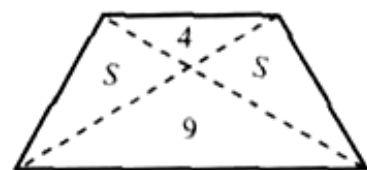
Користићемо чињеницу да се површине два троугла са једнаким основицама односе као одговарајуће висине. Имамо:

$$\frac{y}{3 + \frac{3}{2}} = \frac{y + \frac{3}{2} + 1}{3 + 2}, \text{ одакле добијамо да је } y = \frac{45}{2}, \text{ па је површина троугла } ABC$$

једнака  $S = x + y + 1 + 2 + 3 = 30$ .



4. Према задатку 3 (б) из чланка "О површинама фигура", МЛ2, 2007/8, површине два троугла уз кракове трапеца су међусобно једнаке. Ако је површина једног таквог троугла  $S$ , онда је  $S^2 = 4 \cdot 9 = 36$ , тј.  $S = 6 \text{ cm}^2$ . Површина трапеца је  $2 \cdot 6 + 4 + 9 = 25 \text{ cm}^2$ .



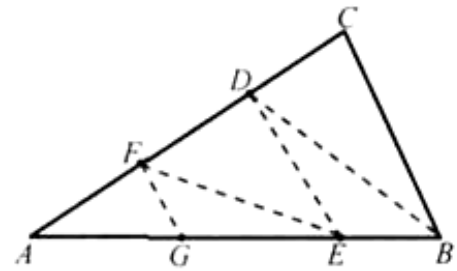
5. Нека висине 1, 2, 3 одговарају редом страницама  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . На основу формуле за површину троугла је  $\frac{a}{2} = \frac{2b}{2} = \frac{3c}{2}$ , тј.  $a = 2b = 3c$ , тј. странице троугла су  $c$ ,  $\frac{3}{2}c$ ,  $3c$ , а како је  $3c > c + \frac{3}{2}c$ , то је немогуће (није задовољена неједнакост троугла).

6. Према условима задатка, мора бити

$$CD = \frac{AC}{5}, \quad BE = \frac{AB}{4},$$

$$FD = \frac{AD}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} AC = \frac{4}{15} AC,$$

$$GE = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AB = \frac{3}{8} AB.$$



Следи да тачке  $G$  и  $E$  деле страницу  $AB$  у односу  $3 : 3 : 2$ , а тачке  $F$  и  $D$  деле страницу  $AC$  у односу  $8 : 4 : 3$ .

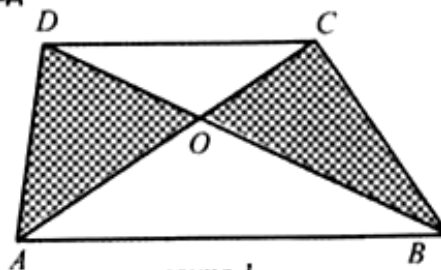
## О површинама фигура

четврти део

## ЈЕДНА ОСОБИНА ТРАПЕЗА И ЊЕНЕ ПРИМЕНЕ

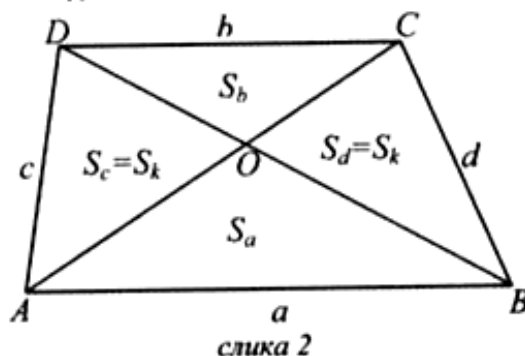
Ратко Тошић, Нови Сад

На слици је представљен трапез који је подељен дијагоналама на четири троугла. Од та четири троугла два належу на основице трапеза, а два на кракове. У претходна два броја МЛ је доказано да су површине троуглова које належу на кракове трапеза једнаке (слика 1).



слика 1

У овом чланку детаљније ћемо испитати однос површина четири троугла добијена поделом трапеза његовим дијагоналама, као и однос тих површина према површини целог трапеза. Показује се да ти односи зависе само од односа дужина основица трапеза.



слика 2

Означимо са  $S_a$ ,  $S_b$ ,  $S_c$ ,  $S_d$  површине троуглова који належу редом на основице  $a$ ,  $b$  и кракове  $c$  и  $d$  трапеза  $ABCD$ . Знамо већ да је  $S_c = S_d$  и означићемо обе те површине са  $S_k$ :  $S_k = S_c = S_d$ . У МЛ-3, 2007/08, на страни 2, доказано је следеће тврђење (задатак):

Ако се дијагонале конвексног четвороугла  $ABCD$  секу у тачки  $O$ , делећи тај четвороугао на троуглове  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$  и  $ODA$ , онда за површине тих троуглова важи:

$$S_{OAB} \cdot S_{OCD} = S_{OBC} \cdot S_{ODA}.$$

У даљем излагању користићемо то својство конвексних четвороуглова, примењујући га на трапез.

Одмах закључујемо да је (слика 2)

$$S_a \cdot S_b = S_k^2. \quad (1)$$

С друге стране, ако је  $S$  површина целог трапеза, онда је

$$S_a + S_b + 2S_k = S. \quad (2)$$

Троуглови  $OAB$  и  $OCD$  су слични, па се њихове површине односе као и квадрати одговарајућих страница, тј.

$$\frac{S_a}{S_b} = \frac{a^2}{b^2},$$

одакле је:

$$S_a = \frac{a^2}{b^2} S_b, \quad S_b = \frac{b^2}{a^2} S_a. \quad (3)$$

Како троуглови  $OAB$  и  $OAD$  имају заједничку висину из темена  $A$ , а однос одговарајућих основица је:

$$\frac{OB}{OD} = \frac{a}{b},$$

слиди да је:

$$\frac{S_a}{S_k} = \frac{a}{b}, \quad \text{тј.} \quad S_a = \frac{a}{b} S_k. \quad (4)$$

Слично добијамо да је:

$$S_b = \frac{b}{a} S_k. \quad (5)$$

Заменајујући (4) и (5) у (2), добијамо да је:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab} S_k = S, \quad \text{тј.} \quad S_k = \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot S. \quad (6)$$

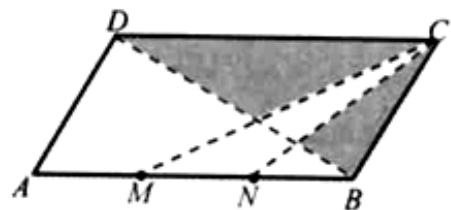
Сада, на основу (4) и (5) следи да је:

$$S_a = \frac{a^2}{(a+b)^2} S; \quad S_b = \frac{b^2}{(a+b)^2} S. \quad (7)$$

Применићемо сада добијене формуле (6) и (7) у решавању специјалног задатка број 45 из предходног броја Математичког листа (МЛ-4, 2007/08).

#### Задатак.

Тачке  $M$  и  $N$  деле страницу паралелограма  $ABCD$  на три једнака дела. Који део површине паралелограма чини осенчени део на слици?



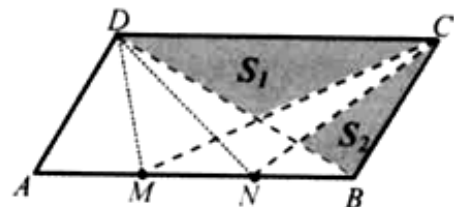
#### Решење.

Означимо површине два осенчена троугла са  $S_1$  и  $S_2$  као на слици. Нека је  $AB = CD = a$ ,  $S$  површина целог паралелограма,  $S'$  површина трапеца  $MBCD$  (са основицама  $\frac{2}{3}a$  и  $a$ ),  $S''$  површина трапеца

$NBCD$  (са основицама  $\frac{1}{3}a$  и  $a$ ).

Лако се види да је  $S' = \frac{5}{6}S$ ,  $S'' = \frac{2}{3}S$ .

Према (7),



$$S_1 = \frac{a^2}{\left(a + \frac{2}{3}a\right)^2} \cdot S' = \frac{9}{25} \cdot S' = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} S = \frac{3}{10} S,$$

а према (6),

$$S_2 = \frac{a \cdot \frac{a}{3}}{\left(a + \frac{1}{3}a\right)^2} \cdot S'' = \frac{9}{48} \cdot S'' = \frac{9}{48} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{1}{8} S.$$

Према томе, укупна осенчана површина је:

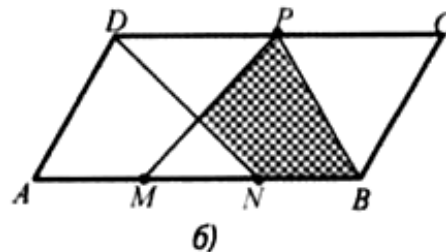
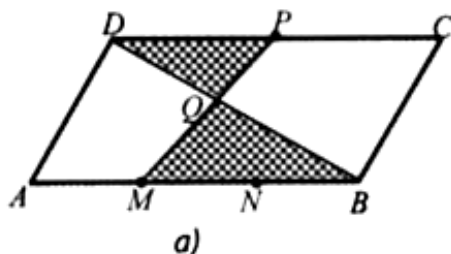
$$S_1 + S_2 = \frac{3}{10} S + \frac{1}{8} S = \frac{17}{40} S.$$

У овом решењу применили смо општи метод о коме говоримо у овом чланку, а друго решење је дато на страни 40 овог броја МЛ.

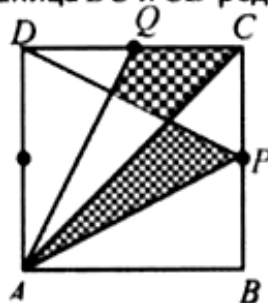
### Задаци за самостални рад

Који део површине фигуре чини осенчени део?

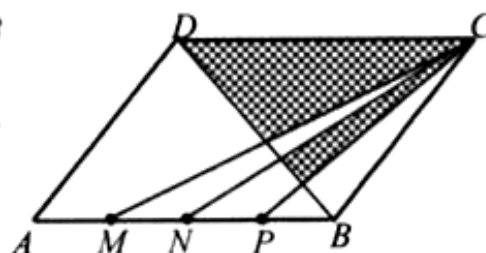
1. Тачке  $M$  и  $N$  деле страницу  $AB$  паралелограма  $ABCD$  на три једнака дела, а тачка  $P$  полови наспрамну страницу  $CD$ .



2. Тачке  $P$  и  $Q$  су средишта страница  $BC$  и  $CD$  редом квадрата  $ABCD$ .

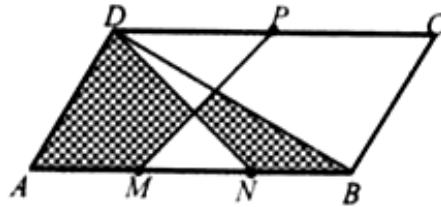


3. Тачке  $M$ ,  $N$  и  $P$  деле страницу  $AB$  паралелограма  $ABCD$  на четири једнака дела.

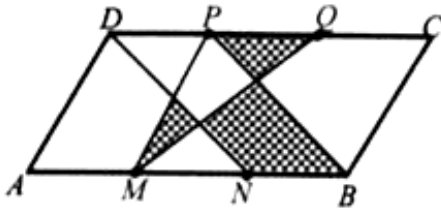




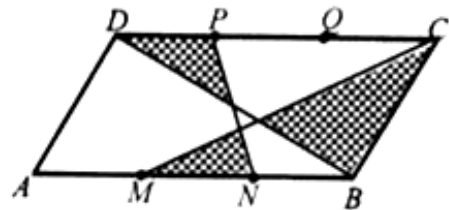
4. Тачке  $M$  и  $N$  деле страницу  $AB$  паралелограма  $ABCD$  на три једнака дела, а тачка  $P$  полови наспрамну страницу  $CD$ .



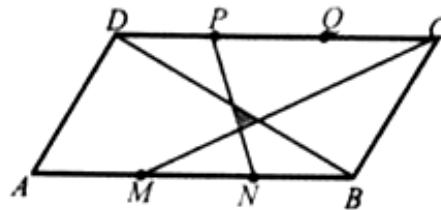
5. Тачке  $M$  и  $N$  деле страницу  $AB$  на три једнака дела, а тачке  $P$  и  $Q$  деле страницу  $CD$  на три једнака дела.



a)



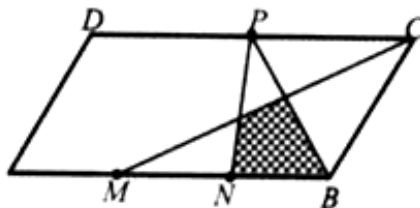
б)



в)

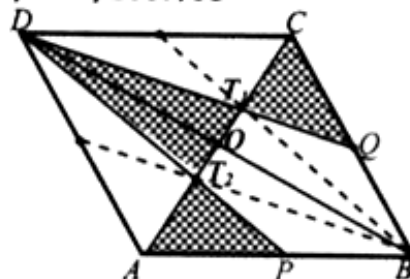
#### Специјални задатак број 46

Који део површине паралелограма  $ABCD$  чини осенчени део? Тачке  $M$  и  $N$  деле страницу  $AB$  паралелограма на три једнака дела, а тачка  $P$  полови наспрамну страницу  $CD$ .



#### Решења задатака из чланка *О површинама фигура*, МЛ4, 2007/08

1. Повуцимо дијагоналу  $BD$  и уведимо ознаке као на слици.



$DQ$  и  $CO$  су тежишне линије троугла  $DBC$ .  $ODT_1$  и  $CQT_1$  су два од шест троуглова на које је троугао  $DBC$  подељен својим тежишним линијама. Како тежишне линије деле троугао на шест троуглова једнаких површина, то је:

$$S_{ODT_1} = S_{CQT_1} = \frac{1}{6} S_{DBC} = \frac{1}{12} S, \text{ где је } S \text{ површина паралелограма. Слично добија}$$

мо да је  $S_{ODT_2} = S_{APT_2} = \frac{1}{6} S_{ABD} = \frac{1}{12} S$ . Површина осенчаних делова је:

$$S_{APT_2} + S_{ODT_2} + S_{ODT_1} + S_{CQT_1} = \frac{4}{12} S = \frac{1}{3} S.$$

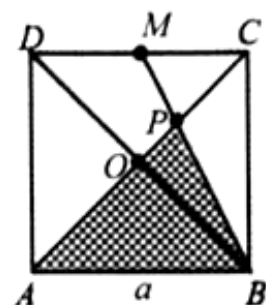
## 2. Први начин.

Нека је  $S = a^2$  површина квадрата. Повуцимо дијагоналу  $BD$ .  $BM$  и  $CO$  су тежишне линије троугла  $BCD$ , па је

$$S_{OBP} = \frac{1}{6} S_{BCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{12} S. \text{ С друге стране, јасно је да}$$

је  $S_{ABO} = \frac{1}{4} S$ , па је тражена површина:

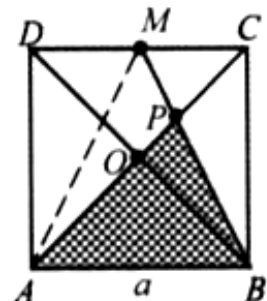
$$S_{ABP} = S_{ABO} + S_{OBP} = \frac{1}{4} S + \frac{1}{12} S = \frac{4}{12} S = \frac{1}{3} S.$$



## Други начин.

Нека је  $S = a^2$  површина квадрата. Повуцимо дуж  $MA$  (види слику). Површина трапеца  $ABCM$  једнака је  $S' = \frac{3}{4} S$ . Следи да је:

$$S_{ABP} = \frac{a^2}{\left(\frac{3}{2}a\right)^2} \cdot S' = \frac{4}{9} S' = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{1}{3} S.$$



**Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија**