XXXIV РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

IV одделение

Задача 1. Дадени се множествата $A=\{1,2,x,5,9\}$, $B=\{2,y,3\}$. Определи ги броевите x и y така што множеството B да има три елементи и $B\subseteq A$.

Решение. Бидејќи $3\in B$ и $B\subseteq A$заклучуваме дека $3\in A$, па затоа мора да е $x=3$. Сега, бидејќи множеството B треба да има три елементи важи $y\neq 2$ и $y\neq 3$. Понатаму, од $B\subseteq A$, следува дека $y\in\{1,5,9\}$.

Задача 2. Мајката на секое од своите три деца му дала ист неделен џепарлак. Кога секое дете потрошило по 300 денари, вкупно им преостанал износ еднаков на џепарлакот на едното од нив. Колкав износ мајката одделила за џепарлакот на своите деца?

Решение. Трите деца заедно потрошиле $3\cdot 300=900$ денари. Бидејќи после трошењето на овие пари им преостанал износ еднаков на џепарлакот на едното од нив, добиваме дека овие 900 денари се еднакви на два џепарлаци на едно од децата. Според тоа, џепарлакот на едно дете изнесува $900:2=450$ денари. Конечно, износот кој мајката го одделила за џепарлак на своите деца е $3\cdot 450=1350$ денари.

Задача 3. Збирот на природните броеви a и b е еднаков на 10. Која е најголемата, а која е најмалата вредност на $26\cdot a+27\cdot b$?

Решение. *Прв начин*. Од $a+b=10$ добиваме дека се можни следниве случаи: $a=9,b=1$; $a=8,b=2$; $a=7,b=3$; $a=6,b=4$; $a=5,b=5$; $a=4,b=6$; $a=3,b=7$; $a=2,b=8$ и $a=1,b=9$. Притоа имаме

$$26\cdot 9+27\cdot 1=261,\ 26\cdot 8+27\cdot 2=262,\ 26\cdot 7+27\cdot 3=263,$$
$$26\cdot 6+27\cdot 4=264,\ 26\cdot 5+27\cdot 5=265,\ 26\cdot 4+27\cdot 6=266,$$
$$26\cdot 3+27\cdot 7=267,\ 26\cdot 2+27\cdot 8=268 \text{ и } 26\cdot 1+27\cdot 9=269.$$

Значи, најмалата вредност на $26\cdot a+27\cdot b$ е 261, а најголемата вредност е 269.

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned}26\cdot a+27\cdot b&=26\cdot a+(26+1)\cdot b\\&=26\cdot a+26\cdot b+b\\&=26(a+b)\\&=26\cdot 10+b=260+b.\end{aligned}$$

Најмала вредност се добива кога b е најмал, т.е. кога $b=1$ и тоа е бројот 261. Најголема вредност се добива кога b е најголем, т.е. кога $b=9$ и тоа е бројот 269.

Задача 4. На тест по математика Јосиф точно решил 6 задачи, Дарко 5 задачи решил неточно, а Петре имал ист број на точни и неточни решенија. Колку задачи точно решиле сите тројца заедно, ако Јосиф точно решил двапати повеќе задачи од Дарко?

Решение. Дарко точно решил двапати помалку задачи од Јосиф, што значи дека тој решил $6:2=3$ задачи. Бидејќи Дарко имал 3 точни и 5 неточни задачи, на тестот имало $3+5=8$ задачи. Петре точно решил половина од задачите, што значи дека имал 4 точни решенија. Конечно, сите заедно точно решиле $6+3+4=13$ задачи.

Задача 5. Во една продавница имало три вида кутии со чоколади: од 16 kg, од 17 kg и од 40 kg. Продавачот не смее да отвора ниту една кутија и од неа да вади чоколади. Еден купувач барал да купи 100 kg чоколади. Како продавачот му измерил на купувачот 100 kg чоколади?

Решение. *Прв начин*. Јасно, продавачот не може да искористи три кутии од по 40 kg. Продавачот не може да искористи ниту две кутии од по 40 kg, бидејќи треба да даде уште 20 kg, што не може да се направи со кутиите од 16 kg и 17 kg.

Ако продавачот искористи една кутија од 40 kg, тогаш за останатите 60 kg треба да користи кутии од 16 kg и 17 kg. Тоа не може да го направи со кутии само од едниот вид, бидејќи 60 не се дели ниту со 16, ниту со 17. Значи, мора да има најмалку по една кутија од 16 kg и од 17 kg. Тогаш му преостануваат да измери уште $60-(16+17)=27kg$, што не може да се направи со кутиите од 16 kg и 17 kg.

Значи, продавачот треба да користи само кутии од 16 kg и 17 kg. Ако земе шест кутии од 16 kg, тогаш ќе му недостасуваат $100-6\cdot 16=4kg$. Но, кога една кутија од 16 kg се заменува со кутија од 17 kg, се добива 1 kg повеќе, па затоа продавачот треба да замени 4 кутии од 16 kg со кутии од 17 kg. Конечно, продавачот треба да искористи 4 кутии од 17 kg и 2 кутии од 16 kg.

Втор начин. Бидејќи $2\cdot(2\cdot 17+16)=100$, следува дека продавачот му дал на купувачот 4 кутии од по 17 kg и 2 кутии од по 16 kg.

V одделение

Задача 1. Бројот 100000 запиши го како производ на два броја во чии записи нема ниту една цифра 0.

Решение. Имаме $100000=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5$. Бројот 100000 треба да се запише како производ на два броја кои во записите не ја содржат цифрата 0, па добиваме дека во ниту еден од множителите броевите 2 и 5 не смее да бидат заедно. Според тоа, решение на задачата е:

$$100000=(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)=32\cdot 3125.$$

Задача 2. Во две продавници за овошје вкупно имало 365 *kg* јаболки кои се продавале по иста цена. Кога првата продавница продала определено количество јаболки и за тоа добила 4340 денари, а втората продавница за своето продадено определено количество јаболки добила 8750 денари, тогаш во првата продавница останале 102 *kg*, а во втората 76 *kg*. Колку килограми јаболки имало во секоја од продавниците на почетокот?

Решение. Двете продавници вкупно продале: $365-(102+76)=187\,kg$ јаболки. За тоа добиле $4340+8750=13090$ денари. Значи, цената на 1*kg* јаболка била: $13090:187=70$ денари. Во првата продавница на почетокот имало $4340:70+102=164\,kg$ јаболки, а во втората продавница имало $365-164=201\,kg$ јаболки.

Задача 3. Ако броевите 701 и 592 ги поделиме со ист природен број, добиваме соодветно остатоци 8 и 7. Со кој број сме ги поделиле дадените броеви?

Решение. Бараниот број е заеднички делител на броевите $701-8=693$ и $592-7=585$. Бидејќи $693=3\cdot 3\cdot 7\cdot 11$ и $585=3\cdot 3\cdot 5\cdot 13$, заеднички делители се 1, 3 и $3\cdot 3=9$. Бидејќи делителот мора да е поголем од остатоците, бараниот делител е бројот 9.

Задача 4. Нива во форма на правоаголник, со должина 20 *m* поголема од ширината, е заградена со 3 реда жица при што се употребени 840 *m* жица. Колкав е периметарот и колкави се должините на страните на нивата?

Решение. *Прв начин*. Нека должината на нивата ја означиме со a, ширината со b и периметарот со L. Тогаш, $a=20+b$ и $L=2(a+b)$.

Бидејќи, нивата е заградена со три реда жица чија вкупна должина е 840 метри, добиваме $3L=840$, т.е. $L=280m$. Сега, од $L=2(a+b)$ следува $2(a+b)=280$, т.е. $2(20+b+b)=280$, па затоа $20+2b=140$, од каде добиваме $b=60m$. Конечно, $a=20+b=20+60=80m$.

Втор начин. Нивата е заградена со три реда жица, па затоа нејзиниот периметар е еднаков на $840:3=280m$. Според тоа, збирот на страните на нивата е еднаков на $280:2=140m$. Поголемата страна е подолга $20m$, па затоа должината на помалата страна е еднаква на $(140-20):2=60m$. Конечно должината на поголемата страна е еднаква на $60+20=80m$.

Задача 5. Еден резервоар, кој собира 2000 литри вода се наполнува од две славини за 20 минути. По колку литри вода во минута тече од секоја славина, ако се знае дека во минута од едната славина течат 10 литри вода повеќе отколку од другата?

Решение. *Прв начин*. Ако првата славина полни x литри во минута, тогаш втората славина полни $x+10$ литри во минута. Тие за 20 минути го полнат резервоарот кој собира 2000 литри, па затоа

$$20(x+(x+10))=2000$$
$$20(2x+10)=2000$$
$$2x+10=100$$
$$x=45$$

Значи, првата славина дава 45 литри во минута, а втората $45+10=55$ литри во минута.

Втор начин. За 1 минута славините во резервоарот полнат $2000:20=100$ литри вода. Ако од двете славини тече вода колку што тече од славината која полни помалку, тогаш тие за една минута ќе наполнат $100-10=90$ литри вода. Значи, низ славината која полни помалку течат $90:2=45$ литри вода во минута. Конечно, низ другата славина течат $45+10=55$ литри вода во минута.

VI одделение

Задача 1. Тројца браќа поделиле определена сума пари така што првиот брат добил $\frac{1}{5}$ од вкупната сума, вториот брат добил $\frac{5}{8}$ од вкупната сума, а третиот брат го добил остатокот од парите. Потоа, третиот брат на првиот брат му дал $\frac{3}{4}$ од својот дел, а на вториот брат му го дал остатокот од својот дел. Колкав дел од вкупната сума добил првиот брат?

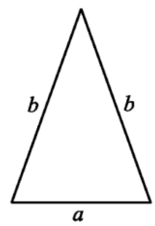
Решение. Бидејќи првиот и вториот брат добиле $\frac{1}{5}$ и $\frac{5}{8}$ од сумата соодветно, добиваме дека третиот брат добил $1-\frac{1}{5}-\frac{5}{8}=\frac{40-8-25}{40}=\frac{7}{40}$ од вкупната сума. Тој на првиот брат му дал $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{40}=\frac{21}{160}$ од вкупната сума, па затоа првиот брат вкупно добил $\frac{1}{5}+\frac{21}{160}=\frac{53}{160}$ од вкупната сума.

Задача 2. Должините на страните на рамнокрак триаголник се изразени во природни броеви во сантиметри. Колку различни рамнокраки триаголници може да се конструираат ако периметарот на триаголникот е $22cm$.

Решение. Збирот на должините на двете страни на триаголникот мора да биде поголем од должината на третата страна. Понатаму,

$$a+2b=22 \qquad (1)$$

и бидејќи $2b$ и 22 се парни броеви, мора и a да биде парен број. Од неравенството $2b>a$ и од (1) следува табелата



a	2	4	6	8	10
b	10	9	8	7	6

Според тоа, постојат пет различни рамнокраки триаголници кои го задоволуваат условот на задачата.

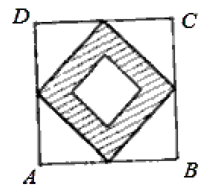
Задача 3. Определи го најголемиот петцифрен број таков што производот на неговите цифри е 2520?

Решение. Имаме $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$. Ако 1 е меѓу цифрите на бараниот број, тогаш производот на останатите цифри не се менува. Затоа најголемиот можен број со саканото својство ќе го добиеме ако од множителите најдеме четири најголеми едноцифрени броеви. Тоа се броевите $3^2=9, 2^3=8, 7$ и 5 и најголемиот петцифрен број кој го задоволува условот на задачата е 98751.

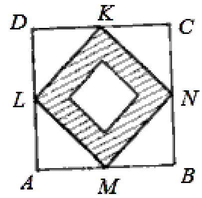
Задача 4. Ана може една кружна патека да ја истрча три пати во 8 минути. Марија, истата патека може да ја истрча два пати во 5 минути. Ако Ана и Марија почнат да трчаат во исто време од стартот, кој е вкупниот број на кругови кои ќе го истрчаат двете пред првпат повторно заедно да се сретнат на стартот? Колку пати секоја од нив ја истрчала патеката кога првпат повторно се сретнале на стартот?

Решение. За една минута Ана ќе истрча $\frac{3}{8}$ од патеката, а додека Марија за една минута ќе истрча $\frac{2}{5}$ од патеката. За повторно да се сретнат на стартот секоја од нив треба патеката да ја истрча цел број пати. Значи, треба да се определи најмалиот можен број минути k таков што $\frac{3}{8}k$ и $\frac{2}{5}k$ се природни броеви. Јасно, $k = НЗС(5,8) = 40$, што значи дека вкупниот број кругови кои ќе ги истрчаат е $40(\frac{3}{8}+\frac{2}{5}) = 40\cdot\frac{31}{40} = 31$. Значи, после 40 минути тие прв пат повторно ќе се сретнат на стартот. Ана ќе ја истрча патеката $\frac{3}{8}\cdot 40 = 15$ пати, а Марија ќе ја истрча $\frac{2}{5}\cdot 40 = 16$ пати.

Задача 5. Фигурата на цртежот десно се состои од три квадрати. Темињата на средниот квадрат се средините на страните на квадратот $ABCD$. Збирот на периметрите на најмалиот и најголемиот квадрат е $60cm$ и периметарот на најмалиот квадрат е четири пати помал од периметарот на најголемиот квадрат. Колкава е плоштината на шрафираниот дел на фигурата, т.е. плоштината на фигурата ограничена со средниот и најмалиот квадрат?



Решение. Нека M,N,K,L се темињата на средниот квадрат. Бидејќи периметарот на најмалиот квадрат е шетири пати помал од периметарот на најголемиот квадрат, следува дека периметарот на најмалиот квадрат е $60:5=12cm$, а на најголемиот квадрат е $12\cdot 4=48cm$. Должината на страната на најмалиот квадрат е $12:4=3cm$ и неговата плоштина е $3^2=9cm^2$. Должината на страната на најголемиот квадрат е $48:4=12cm$ и неговата плоштина е $12^2=144cm^2$. Плоштината на правоаголниот триаголник LAM е $\frac{6\cdot 6}{2}=18cm^2$, колку што е и плоштината на секој од останатите три триаголници. Плоштината на средниот квадрат $MNKL$ е еднаква на разликата од плоштината на најголемиот триаголник и збирот од плоштините на четирите триаголници, т.е таа е еднаква на $144-4\cdot 18=72cm^2$. Следува, плоштината на шрафираниот дел е $72-9=63cm^2$.



VII одделение

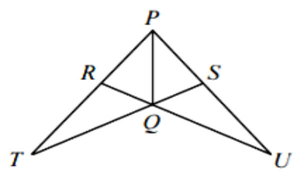
Задача 1. Во една станбена зграда постојат четири станови. Во првиот живее трочлено, во вториот и третиот четиричлено, а во четвртиот петчлено семејство. Заедничката сметка за одржување на зградата се дели сразмерно со бројот на членовите на семејствата. Колку проценти од износот на сметката треба да плаќа секое семејство?

Решение: Во зградата вкупно живеат 16 лица. На секое лице отпаѓа по $1:16=6,25\%$ од трошоците. Тричленото семејство треба да плаќа $3\cdot 6,25=18,75\%$, четиричлените по $4\cdot 6,25=25\%$ и петчленото $5\cdot 6,25=31,25\%$ од трошоците.

Задача 2. За фигурата на цртежот десно важи

$$\overline{PT}=\overline{PU} \text{ и } \overline{PR}=\overline{PS}.$$

Докажи дека PQ е симетрала на аголот RPS.



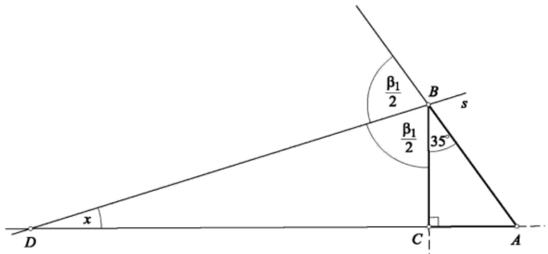
Решение. Триаголниците PST и PRU имаат заеднички агол при темето P и важи $\overline{PT}=\overline{PU}$ и $\overline{PR}=\overline{PS}$, па од признакот САС следува дека $\triangle PST\cong\triangle PRU$. Затоа $\measuredangle RTQ=\measuredangle SUQ$. Понатаму, $\measuredangle TQR=\measuredangle UQS$ како накрсни агли, а од условот на задачата следува

$$\overline{RT}=\overline{PT}-\overline{PR}=\overline{PU}-\overline{PS}=\overline{SU}.$$

Сега од признакот АСА следува $\triangle RQT\cong\triangle SQU$, па затоа $\overline{RQ}=\overline{SQ}$. Триаголниците PRQ и PSQ имаат заедничка страна и важи важи $\overline{RQ}=\overline{SQ}$ и $\overline{PR}=\overline{PS}$, па од признакот ССС следува $\triangle PRQ\cong\triangle PSQ$. Затоа, $\measuredangle RPQ=\measuredangle SPQ$, т.е. PQ е симетрала на аголот RPS.

Задача 3. Еден од острите агли на правоаголен триаголник е 35°. Колкав е аголот кој го формираат симетралата на најголемиот надворешен агол и правата на која и припаѓа најмалата страна на триаголникот?

Решение. Нека правиот агол во $\triangle ABC$ е во темето C (види цртеж). Острите агли на триаголникот се $\alpha=55^\circ$ и $\beta=35^\circ$. Надворешните агли се суплементни на соодветните внатрешни агли на триаголникот и тие се еднакви на $125^\circ, 145^\circ$ и 90°. Најмалата страна лежи наспроти најмалиот внатрешен агол и тоа е страната AC. Симетралата на најголемиот надворешен агол β_1 ја сече правата AC во точката D. Бараниот агол е остриот агол на правоаголниот триаголник BCD, па затоа последователно добиваме



$$x+\frac{\beta_1}{2}=90^\circ \Rightarrow x+(\tfrac{145}{2})^\circ=90^\circ \Rightarrow x+72^\circ 30'=90^\circ \Rightarrow x=17^\circ 30'.$$

Значи, бараниот агол е еднаков на $17^\circ 30'$.

Задача 4. Определи ги ненултите броеви a и b за кои важи

$$a+b=ab=\frac{a}{b}.$$

Решение. Од $ab=\frac{a}{b}$, следува $b^2=1$, па затоа $b=1$ или $b=-1$. Ако $b=1$, тогаш од равенството $a+b=ab$ следува $a=a+1$, што не е можно. Ако $b=-1$, тогаш $a-1=-a$ од каде следува $a=\frac{1}{2}$.

Задача 5. Определи четирицифрен број кој помножен со 9 дава четирицифрен број запишан со истите цифри, но во обратен редослед.

Решение: Нека $\overline{abcd}$ е бараниот број. Од условот на задачата следува $9\cdot\overline{abcd}=\overline{dcba}$. Јасно, цифрите a,d се различни од 0. Од $9\cdot\overline{abcd}\leq 9999$, следува дека $a=1$ (во спротивно $9\cdot\overline{abcd}$ е петцифрен број). Оттука, $9000\leq\overline{dcba}\leq 9999$, односно $d=9$. Со замена на a,d во првата равенка добиваме $9\cdot\overline{1bc9}=\overline{9cb1}$. Оттука $89b=c-8$. Бидејќи b е цифра, од последното равенство следува $b=0$ и $c=8$. Според тоа, бараниот број е 1089.

VIII одделение

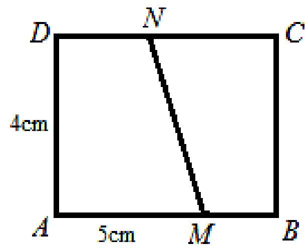
Задача 1. Без користење на калкулатор пресметај: $\sqrt{333^2+444^2}$.

Решение. Имаме

$$\sqrt{333^2+444^2}=\sqrt{(3\cdot 111)^2+(4\cdot 111)^2}=\sqrt{111^2(3^2+4^2)}=\sqrt{111^2\cdot 5^2}=555.$$

Задача 2. Даден е правоаголникот $ABCD$ со страни $\overline{AB}=5cm$ и $\overline{BC}=4cm$. Точката M лежи на страната AB, а точката N лежи на страната CD. Определи ја должината на отсечката MN ако периметрите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ се еднакви на $14cm$.

Решение. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $2(5+4)=18cm$. Збирот од периметрите на четириаголниците $AMND$ и $MBCN$ е еднаков на $2\cdot 14=28cm$.



Ако ги одземе овие збирови ќе ја добиеме двојната должина на отсечката MN. Значи

$$\overline{MN}=(28-18):2=5cm.$$

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\measuredangle ABC-\measuredangle ACB=30^\circ$. На страната AC земена е D таква што $\overline{AB}=\overline{AD}$. Определи ја големината на аголот CBD.

Решение. Имаме

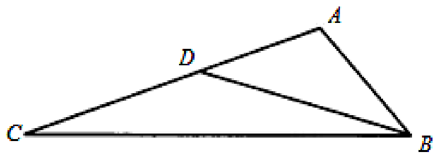
$$\measuredangle ABC=30^\circ+\measuredangle ACB,\ \measuredangle CAB=180^\circ-(\measuredangle ACB+\measuredangle ABC),$$

$$\measuredangle CAB=180^\circ-(30^\circ+2\measuredangle ACB)=150^\circ-2\measuredangle ACB.$$

Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AD}$, триаголникот $\triangle ADB$ е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle ADB=\measuredangle ABD=\frac{180^\circ-\measuredangle CAB}{2}$$

$$=\frac{30^\circ+2\measuredangle ACB}{2}=15^\circ+\measuredangle ACB.$$



Според тоа,

$$\measuredangle ABC=\measuredangle ABD+\measuredangle DBC,$$

$$15^\circ+\measuredangle ACB+\measuredangle CBD=30^\circ+\measuredangle ACB,$$

$$\measuredangle CBD=15^\circ.$$

Задача 3. Докажи, дека равенката $x^{32}-y^{32}=2016$ нема решенија во множеството на целите броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)(x^{16}+y^{16})=2^5\cdot 7\cdot 9.$$

Десната страна на равенката е парен број, па затоа броевите x, y мора да се со иста парност. Според тоа, шесте множители

$$x-y, x+y, x^2+y^2, x^4+y^4, x^8+y^8, x^{16}+y^{16}$$

на левата страна на равенката се парни броеви. Тоа не е можно бидејќи десната страна е делива со 2^5, но не и со 2^6, што значи дека од множителите на десната страна на равенката може да се состават најмногу пет парни броеви.

Задача 4. Нека $x=\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{22...2}_{n+1}5$ за n природен број. Докажи, дека x е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме

$$x=10^2(\underbrace{11...1}_{2n}+\underbrace{11...1}_{n})+25=10^2(\tfrac{10^{2n}-1}{9}+\tfrac{10^n-1}{9})+25$$

$$=\tfrac{1}{9}(10^{2(n+1)}+10^{n+2}-2\cdot 10^2)+25=\tfrac{10^{2(n+1)}+10^{n+2}+25}{9}=(\tfrac{10^{n+1}+5}{3})^2.$$

Сега тврдењето на задачата следува од тоа што бројот

$$10^{n+1}+5=1\underbrace{00...0}_{n}5$$

е делив со 3, бидејќи збирот на цифри на овој број е еднаков на 6.

IX одделение

Задача 1. Квадратите на два броја чија аритметичка средина е еднаква на 18, се разликуваат за 288. Кои се тие броеви?

Решение. Нека бараните броеви ги означиме со x и y. Од условот на задачата имаме

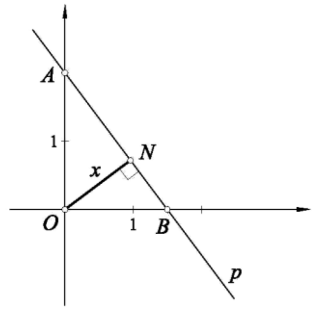
$$\tfrac{x+y}{2}=18 \text{ и } x^2-y^2=288, \text{ т.е. } x+y=36 \text{ и } (x-y)(x+y)=288.$$

Ако од првата равенка замениме во втората добиваме $36(x-y)=288$, т.е. $x-y=8$. Понатаму, ако ги собереме равенките $x+y=36$ и $x-y=8$ добиваме $2x=44$, т.е. $x=22$.

Конечно, со замена во $x+y=36$ наоѓаме $y=14$, што значи дека бараните броеви се 22 и 14.

Задача 2. Дадена е права p со равенка $4x+3y-6=0$. Колкаво е растојанието од координатниот почеток до таа права?

Решение. Правата ги сече координатните оски во точките $A(0,2)$ и $B(\frac{3}{2},0)$. Бараното растојание е должината на висината спуштена од темето O во правоаголниот триаголник ABO, цртеж десно. Нека $\overline{ON}=x$. Од Питагоровата теорема следува



$$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}.$$

Сега

$$\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{ON}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}x$$
$$x=\frac{6}{5}.$$

Значи, координатниот почеток O од правата p е оддалечен $\frac{6}{5}$ единици должина.

Задача 3. Односот на плоштините на страните на еден квадар е $2:3:5$. Пресметај го односот на рабовите на тој квадар.

Решение. Нека $ab:bc:ca=2:3:5$, т.е. $\frac{ab}{2}=\frac{bc}{3}=\frac{ca}{5}$. Оттука $\frac{a}{2}=\frac{c}{3}$ и $\frac{b}{3}=\frac{a}{5}$, па затоа $\frac{a}{10}=\frac{c}{15}$ и $\frac{b}{6}=\frac{a}{10}$. Конечно, $\frac{a}{10}=\frac{b}{6}=\frac{c}{15}$, односно

$$a:b:c=10:6:15.$$

Задача 4. Во една паралелка има 16 момчиња и 14 девојчиња. На тестот по математика, просекот на паралелката е 88 поени. Ако просекот на момчињата е 81, колку изнесува просекот на девојчињата?

Решение. Да го означиме просекот на девојчињата со x. Тогаш, девојчињата освоиле $14x$ поени, а момчињата освоиле $16\cdot 81$ поен. Но, просекот на паралелката е 88 поени, па затоа сите заедно освоиле $88\cdot(14+16)$ поени. Според тоа, точна е равенката

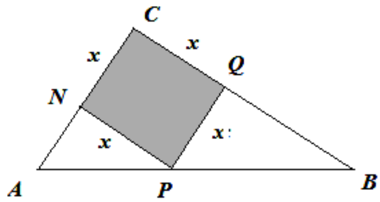
$$14x+16\cdot 81=88(14+16).$$

Решение на последната равенка е $x=96$, што значи дека девојчињата освоиле просечно по 96 поени.

Задача 5. Од правоаголен триаголник со страни 3 *cm*, 4 *cm* и 5 *cm* е отсечен квадрат. Квадратот е со најголема плоштина и едно теме на квадратот се совпаѓа со теме на триаголникот. Пресметај го периметарот и плоштината на триаголниците кои остануваат.

Решение. Ќе ги користиме ознаките како на цртежот десно. Нека

$$\overline{AC}=3, \overline{BC}=4 \text{ и } \overline{AB}=5.$$



Триаголниците ABC и APN се правоаголни и имаат заеднички остар агол, па затоа $\triangle ABC \sim \triangle APN$, што значи $\frac{3-x}{x}=\frac{3}{4}$.

Од последната равенка следува $x=\frac{12}{7}$. Затоа,

$$\overline{PN}=\overline{PQ}=x=\frac{12}{7}, \ \overline{AN}=3-x=\frac{9}{7} \text{ и } \overline{BQ}=4-x=\frac{16}{7}.$$

Сега, од Питагоровата теорема добиваме

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AN}^2+\overline{PN}^2}=\frac{15}{7} \text{ и } \overline{PB}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{BQ}^2}=\frac{20}{7}.$$

Конечно,

$$L_{\triangle APN}=\overline{AP}+\overline{PN}+\overline{AN}=\frac{15}{7}+\frac{12}{7}+\frac{9}{7}=\frac{36}{7}cm,$$

$$L_{\triangle PBQ}=\overline{PB}+\overline{PQ}+\overline{BQ}=\frac{20}{7}+\frac{12}{7}+\frac{16}{7}=\frac{48}{7}cm,$$

$$P_{\triangle APN}=\frac{\overline{PN}\cdot\overline{AN}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\cdot\frac{9}{7}=\frac{54}{49}cm^2,$$

$$P_{\triangle PBQ}=\frac{\overline{PQ}\cdot\overline{BQ}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{7}\cdot\frac{16}{7}=\frac{96}{49}cm^2.$$