Даниел Велинов
Градежен факултет, Скопје

ФУНКЦИЈА ЦЕЛ ДЕЛ И НЕКОИ НЕЈЗИНИ СВОЈСТВА

За секој реален број x постои единствен цел број n, така што n е најголемиот цел број помал од x, односно $n \leq x < n+1$. Тој број n се нарекува цел дел од x или уште подна функција од x (floor function). Ознаката која се користи е $\lfloor x \rfloor$ или во нашата литература $[x]$. Ние овде ќе ја користиме ознаката $[x]$ за цел дел од x. Запишуваме $n = \lfloor x \rfloor$. Покрај подна функција постои и таванска функција (ceiling function) која се означува со $\lceil x \rceil$. Таа се дефинира како најмалиот цел број поголем од x, односно тоа е целиот број n за кој што важи дека $n-1 < x \leq n$. Кога $x \in \mathbb{Z}$ имаме дека $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ Нашиот предмет на интерес овде ќе биде подната функција или цел дел функцијата, како што во продолжение ќе ја нарекуваме. Разликата $x-[x]$ ќе ја нарекуваме дробен дел од x и ќе ја означуваме со $\{x\}$.

Пример 1. (Australia, 1999) Реши го системот равенки:

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=200 \\ \{x\}+y+[z]=190.1 \\ [x]+\{y\}+z=178,8 \end{cases}.$$

Имаме, $x=[x]+\{x\}$ и собирајќи ги сите три равенки добиваме дека

$$2x+2y+2z=568,9$$

од каде следува

$$x+y+z=284,45 \tag{1}$$

Со одземање на сите три равенки од системот од (1) добиваме

$$\begin{cases} \{y\}+[z]=84,45 \\ [x]+\{z\}=94,35 \\ \{x\}+[y]=105,65 \end{cases}.$$

Оттука,

$$[z]=84, \{y\}=0,45, [x]=94, \{z\}=0,35, \{x\}=0,65, [y]=105,$$

односно

$$x=94,65,\ y=105,45,\ z=84,35.$$

Пример 2. (AIME, 1997) Нека a е позитивен, $\{a^{-1}\}=\{a^2\}$ и $2<a^2<3$. Најди ја вредноста на $a^{12}-144a^{-1}$.

Да забележиме дека дадената хипотеза повлекува дека $\{a^{-1}\}=a^{-1}$, бидејќи $a>1,\ 0<a^{-1}<1$ и $\{a^2\}=a^2-2$. Па, a ја задволува равенката $a^{-1}=a^2-2$, односно $a^3-2a-1=0$, односно $(a+1)(a^2-a-1)=0$, каде единствен позитивен корен е $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Сега користејќи дека $a^2=a+1$ и $a^3=2a+1$, пресметуваме $a^6=8a+5$, $a^{12}=144a+89$ и $a^{13}=133a+144$. Конечно имаме дека $a^{12}-144a^{-1}=\frac{a^{13}-144}{a}=233$.

Пропозиција. Важи:

1. Нека $a,b\in\mathbb{Z}$, $b>0$, q количник, r остаток при делење на a со b. Тогаш $q=\left[\frac{a}{b}\right],\ r=\left\{\frac{a}{b}\right\}\cdot b$;
2. $[x+n]=[x]+n,\ x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{Z}$;
3. $[x]+[-x]=0,\ x\in\mathbb{Z},\qquad [x]+[-x]=1,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$;
4. $x\le y$ следува $[x]\le[y]$;
5. $\left[x+\frac{1}{2}\right]$ го заокружува x до најблискиот цел број на x;
6. $[x]+[y]\le[x+y]\le[x]+[y]+1$;
7. $[x]\cdot[y]\le[xy]$;
8. За секој позитивен реален број x и секој природен број n, бројот на позитивни фактори на n кои не го надминуваат x е $\left[\frac{x}{n}\right]$;
9. $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$.

Теорема (Теорема на Beatty). Нека α и β се два позитивни ирационални броеви такви што

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$$

Множествата

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\dots\} \text{ и } \{b_n\}_{n=1}^{\infty}=\{[\beta],[2\beta],[3\beta],\dots\}$$

формираат партиција на множеството на природни броеви.

Пример 3. (USAMO, 1981) За секој реален број x докажи дека

$$[x]+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+...+\frac{[nx]}{n}\le[nx].$$

За да го решиме овој пример ќе го искористиме следново тврдење дадено како посебен пример, ставајќи $a_k=-[kx]$.

Пример 4. (Austrian-Polish Math Olympiad) Нека $a_1,a_2,...$ е низа од реални броеви за која важи $a_{i+j}\le a_i+a_j$ за сите $i,j\in\mathbb{N}$. Докажи дека

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_n}{n}\ge a_n \text{ за сите } n\in\mathbb{N}.$$

Доказот ќе го дадеме со индукција. Случаите $n=1$ и $n=2$ се тривијални. Претпоставуваме точност на тврдењето за $n\le k$ за некој природен број $k\ge 2$, односно

$$a_1\ge a_1$$

$$a_1+\frac{a_2}{2}\ge a_2$$

$$\vdots$$

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k}\ge a_k$$

Собирајќи ги овие неравенства добиваме

$$ka_1+(k-1)\frac{a_2}{2}+...+\frac{a_k}{k}\ge a_1+a_2+...+a_k.$$

Додавајќи $a_1+a_2+...+a_k$ на двете страни на последното неравенство добиваме:

$$(k+1)\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}...+\frac{a_k}{k}\right)\ge(a_1+a_k)+(a_2+a_{k-1})+...+(a_k+a_1)\ge ka_{k+1}.$$

Делејќи ги двете страни на неравенството со $(k+1)$ добиваме

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k}\ge\frac{ka_{k+1}}{k+1}$$

или

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+...+\frac{a_k}{k}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\ge a_{k+1},$$

од каде според принципот на математичка индукција имаме дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

Пример 5. За секој реален број x и y докажи дека

$$[2x]+[2y]\ge[x]+[y]+[x+y].$$

Ги запишуваме x и y како $x=[x]+\{x\}$ и $y=[y]+\{y\}$.Имаме,

$$[2x]+[2y]=2[x]+[2\{x\}]+2[y]+[2\{y\}] \text{ и уште}$$

$$[x+y]=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}].$$

Оттука доволно е да докажеме дека $[2\{x\}]+[2\{y\}]\geq[\{x\}]+[\{y\}]$. Без губење на општоста можеме да земеме дека $\{x\}\geq\{y\}$. Бројот $\{x\}$ е ненегативен, и уште

$$[2\{x\}]+[2\{y\}]\geq[2\{x\}]\geq[\{x\}]+[\{x\}]\geq[\{x\}]+[\{y\}].$$

Пример 6. (AIME, 1985) Колку од првите 1000 позитивни броеви можат да се запишат во облик $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$, каде x е реален број?

Ја дефинираме функцијата $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$. Нека n е природен број. Тогаш $f(x+n)=f(x)+20n$. Ова всушност значи дека ако некој природен број k може да се запише во облик $f(x_0)$ за некој реален број x_0, тогаш за $n=1,2,3,\ldots$, слично може да се запише и

$$k+20n=f(x_0)+20n=f(x_0+n).$$

Врз основа на оваа дискусија ние можеме да се ограничиме на разгледување кои од првите 20 природни броеви можат да се запишат на бараниот начин, каде $x\in(0,1]$.

Понатаму, ако x расте, вредноста на $f(x)$ се менува само ако $2x,4x,6x,8x$ достигнува цела вредност и промената на $f(x)$ е секогаш на нова поголема вредност. Во интервалот $(0,1]$ такви промени настануваат точно кога x е од форма $\frac{m}{n}$, каде $l\leq m\leq n$ и $n=2,4,6$ или 8. Постојат точно 12 такви дропки, кои во растечки редослед се:

$$\frac{1}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},1.$$

Па, само 12 од првите 20 природни броеви можат да се запишат во бараната форма. Бидејќи $1000=50\cdot 20$, постојат $50\cdot 12=600$ природни броеви кои можат да се запишат во бараната форма.

Пример 7. (Gauss) Нека p и q се заемно прости броеви. Докажи дека

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Бидејќи p и q се заемно прости броеви, бројот $\frac{ip}{q}$ не е цел број. Имаме,

$$\left[\frac{ip}{q}\right]+\left[\frac{(q-i)p}{q}\right]=p+\left[\frac{ip}{q}\right]+\left[\frac{-ip}{q}\right]=p-1,$$

за $1\leq i\leq q-1$. Оттука,

$$2\left(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right)=$$
$$=\left(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]\right)+\ldots+\left(\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]+\left[\frac{p}{q}\right]\right)=(p-1)(q-1)$$

од каде се добива бараниот резултат.

Пропозиција. (Hermite Identity) Нека x е реален број и нека n е природен број. Тогаш

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

Пример 8. (IMO, 1968) Нека $x\in\mathbb{R}$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=[x].$$

Ставајќи $n=2$ во Хермитовиот идентитет добиваме

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

или

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]-[x].$$

Имаме:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x+2^k}{2^{k+1}}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x}{2^{k+1}}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{x}{2^k}\right]-\left[\frac{x}{2^{k+1}}\right]\right)=[x].$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди го позитивниот број n така што $\frac{1}{n}$ е најблиску до $[\sqrt{123456789}]$.
2. Најди ги сите реални решенија на равенката $4x^2+40[x]+51=0$.
3. За даден позитивен број n, докажи дека $\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\right]$.
4. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}=\{2,3,4,6,7,8,10,\ldots\}$ се состои од сите природни броеви кои не се полни квадрати. Докажи дека $a_n=n+\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right]$.

Литература

1. T. Andreesu, D. Andrica, Z. Feng, 104 Number Theory problems, Birkhäuser, Boston, 2007.
2. D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011.
3. A. Liu, Chinese Mathematics competitions and Olympiads 1981-1993, AMT Publishing, Canberra, 1998.
4. A. Liu, Chinese Mathematics competitions and Olympiads 1993-2001, Book 2, AMT Publishing, Canberra, 2005.
5. A. Negut, Problems for the Mathematical Olympiads, GIL Publishing House, 2005.