ДИДАКТИЧКО-МЕТОДСКА
НУМЕРУСОВА БИБЛИОТЕКА 2

Д-Р НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

ДИДАКТИКА НА МАТЕМАТИКАТА

СО

ПРИРАЧНИК ЗА СТУДЕНТИ И НАСТАВНИЦИ

"НУМЕРУС" - СКОПЈЕ
1993 ГОДИНА

Главен уредник
Д-р Александар Самарџиски

Одговорен уредник
Јово Стефановски

Рецензенти

Д-р Живко Мадевски - редовен професор на ПМФ - Скопје

Д-р Смиле Марковски - вонреден професор на ПМФ - Скопје

Д-р Дончо Димовски - вонреден професор на ПМФ - Скопје

*

Со одлука од Наставно-научниот совет на Природно-математичкиот факултет на универзитетот "Свети Кирил и Методиј" во Скопје, бр. 08-1343/4 од 16.6.1992 год. книгава се одобрува за употреба како **основен учебник.**

*

Според мислењето на министерството за Култура број 22-161/2 од 15.01.1993 година, за публикацијата Дидактика на математиката со прирачник за студенти и наставници се плаќа повластена даночна стапка.

ПРЕДГОВОР

Потребата од учебник по предметот „методика на наставата по математика" за студентите по математика (и информатика) на Природно-математичкиот факултет во Скопје, како и недостатокот на литература од тој вид на македонски јазик, го наложи појавувањето на оваа книга. Во неа е опфатен целокупниот материјал што е предвиден со наставната програма по споменатиот предмет.

Во книгава им се дава акцент на општите проблеми од наставата по математика: математички поими и тврдења - нивното воведување и усвојување, математички расудувања и докажување теореми, математичките задачи и нивната улога за развитокот на математичкото мислење кај учениците, а исто така - на општите приоди во наставата: дидактички принципи, наставни методи и научни методи.

Насловот на книгава не е идентичен со името на предметот за кој е наменета. Причината е следнава. Терминот „методика" е правилно да се користи само како ознака за начинот на излагање на одделни наставни теми и конкретни прашања од училишниот курс (како на пример: „методика на решавање линеарни равенки и неравенки", „методика на изучување геометриски трансформации", „методика на испитување функции со елементарни средства", „методика на проверување на знаењата" итн.). Но, тој не е адекватен за означување на целиот комплекс проблеми од содржината и методите на наставата по математика, обединети во прашањата: „што да се учи" и „како да се научи".

Општите законитости на наставата ги проучува дидактиката, а проблемите на наставата по одреден предмет се разгледуваат во „посебна дидактика (по тој предмет)". Во таа смисла, за означување на проблематиката што е вклучена во оваа книга, повеќе одговара, т.е. е посоодветен и поудобен, терминот „дидактика на математиката", уште повеќе што тој сугестивно укажува на двата основни извори - математиката и дидактиката. Поради тоа е избран насловот „Дидактика на математиката".

* * *

Во книгава се користат математички ознаки, вообичаени за училишниот курс по математика, обично без посебно објаснение. Така, на пример, со $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ се означуваат множествата на: природните, целите, рационалните и реалните броеви соодветно. И ознаките за повикување се вообичаени. Така, на пример, II.5.3 значи: „третиот раздел од петтиот параграф во втората глава". При повикувањата „во самата глава", ознаката за главата (римската цифра) обично е испуштена. Во текстот се поместени и делови, означени со ┌** ... **┘ и отпечатени со „петит"; тие, обично, содржат коментари или дополнителни информации што може отпрво да се изоставаат.

При составувањето на книгава најмногу се користени учебниците [15], [23] и [36], но и други книги од приложениот список на крајот од книгава. Заедно со ракописот „Дидактика на математиката", како негов додаток и составен дел, изготвен е „Прирачник за идниот наставник", наменет како помош за студентот при спроведувањето на наставната практика („хоспитациите") и за запознавање со одделни прашања од организацијата на наставата. За неговото подготвување користев, меѓу другото, соодветни материјали од Републичкиот завод за школство (сега: Педагошки завод) на Република Македонија, како и искуствата и помошта од некои педагошки советници, а особено од колегата Р. Ансаров. На сите нив искрено им благодарам.

* * *

Главната цел на книгава е да им помогне на студентите по математика (и информатика) при подготвувањето на испитот од предметот „Методика на наставата по математика". Но, авторот верува дека таа ќе биде полезна и за активните наставници во средното и основното образование во врска со многу прашања од наставата по математика.

Декември 1991 Авторот
Скопје

С О Д Р Ж И Н А

Додаток: ПРИРАЧНИК ЗА СТУДЕНТИ И НАСТАВНИЦИ

I. ‖ ЗА ДИДАКТИКАТА И МАТЕМАТИКАТА

1. ПРЕДМЕТ НА ДИДАКТИКАТА НА МАТЕМАТИКАТА

1.1. ПОУЧУВАЊЕ, ДИДАКТИКА

Меѓу највважните одлики на човекот што го издвојуваат од другите живи суштества се *поучувањето* и *учењето*. Човекот отсекогаш го поучувал младото поколение за да го подготви за живот и работа. Со тоа, уште од првобитната заедница па наваму, искуствата од постарите биле пренесувани на новите генерации.

Со развитокот на општеството и појавата на првите цивилизации се наложила потребата од *организирано поучување* во посебни установи - *школи* и од посебни лица - *учители*. Првите пишувани извори во кои се зборува за школа датираат уште од третиот милениум (околу 2.500 год.) до н.е. во староегипетски паметници. Тоа биле дворски школи во кои свештениците ги учеле синовите од царските чиновници на елементарна писменост, пресметувања и мерења, неопходни за: собирање даноци, мерење на земјата (покрај реката Нил, по неговите излевања), за градење споменици за фараоните (гробници, палати, пирамиди) и др.

Многу знаења од источните цивилизации (Вавилон, Асирија, Феникија), со развојот на трговијата и морепловството, биле пренесувани во Стара Грција, каде што се формирале повеќе школи: Милетската, Јонската, Атинската и др. Во тие школи се појавиле првите „педагошки системи", особено во Атинската, чиишто најзначајни претставници биле прочуените филозофи *Платон* (427 - 347 год. до н.е.) и *Аристотел* (384 - 322 год. до н.е.). Првите обиди, пак, за разработка на вештината на поучувањето датираат од Стариот Рим, од *Марко Фабиј Квинтилијан* (околу 35 - 95 год.), учител по реторика.

Меѓутоа, во текот на долгиот среден век, науката и школата паднале под влијание на црквата, па нивниот развиток во тој период практично бил задушен. Дури за време на Ренесансата човековиот гениј успеал да ги скине тие синџири и да овозможи напредните идеи да излезат на видело. Со тоа, потребите од школи и настава, т.е. од организирано и масовно поучување, стануваат уште поголеми, а поучувањето да биде што побрзо и поекономично.

Поради тоа, во педагогијата во 17 век се зачнува посебна дисциплина, наречена *дидактика*, што ќе ги проучува начините, т.е. *вештината на поучување и учење*. Терминот дидактика потекнува од грчкиот збор „дидаскеин" (што значи „поучува") односно од изразот „дидактике техне" (што значи „вештина на поучување"), а е воведен од германскиот педагог *Волфганг Ратке* (1571 - 1635) во 1613 год.

Подоцна тој термин го презел *Јан Амос Коменски* (1592 - 1670), чешки филозоф, педагог и книжевник, во своето дело „Голема дидактика" (1632 година на чешки и 1657 година на латински јазик). Тој направил големи, револуционерни промени во школството: 1) ја проширил содржината на наставата со нови, реални предмети, 2) разработил редица дидактички принципи (нагледност, систематичност, трајност на знаењата) и 3) внел многу новини во организацијата на наставата (учебна година, наставен час, распоред на часовите, тековна годишна евиденција за постигнатиот успех, училиштен режим и др.).

Коменски прв го дефинирал поимот *дидактика* како „општа вештина како треба да биде поучуван секој во сè". Но таа дефиниција била прешироко, зашто го опфаќала образованието и воспитувањето општо, а тоа е предмет на педагогијата. Затоа, кон крајот на 19 век и почетокот на 20 век, предметот на дидактиката се ограничува на подрачјето на образованието, пред сè на организираното образование низ настава. (Таа била причината што педагогијата се поделила на две гранки: теорија на воспитувањето и теорија на образованието или дидактика.)

Но, ни денес нема единствена, и од сите прифатена дефиниција на дидактиката. Сепак, се чини дека е најприфатлива дефиницијата според која: *дидактиката е наука за општите законитости на наставата*. Таа ги проучува: целите, задачите и содржината на наставата (наставни планови и програми), принципите, методите и средствата на наставата, организацијата на наставата (планирање, подготовка и реализација), како и односот наставник-ученик (повторување и вежбање, проверување и оценување на работата на ученикот).

Со таа проблематика, гледана специфично - само од аспект на наставата по одреден наставен предмет, се занимава дидактиката на тој наставен предмет. Така, *дидактиката на математиката*[1] ги проучува законитостите на наставата по

---

[1] Се смета дека дидактиката на математиката се одвоила од педагогијата дури по трудовите на швајцарскиот педагог Јохан Песталоци (1746-1827), којшто во 1803 год. го објавил трудот „Нагледна обука за бројот".

математика, и тоа само во основното и средното образование.

1.2. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ НА ДИДАКТИКАТА НА МАТЕМАТИКАТА

Дидактиката на математиката, како и секоја друга наука (што има право на тој назив), има свој *предмет* на проучување и свои методи со кои го проучува тој предмет, т.е. своја *методологија*. Овде ќе се задржиме кратко на предметот, а подоцна ќе стане збор и за методологијата.

Предметот на ДМ[2] е определен во најголема мера со одговорите на следниве три прашања:

1) ШТО? - што да се учи од математиката? (- содржина);
2) КОГА? - кога да се изучува одреден материјал? (-структура);
3) КАКО? - како да се учи математика? (- наставни методи).

Со други зборови, *предметот на ДМ го сочинуваат: содржината, структурата и методите на наставата по математика.*

Во согласност со тоа, во ДМ може да се издвојат три *основни класи задачи:*

а) задачи сврзани со содржината на наставата по математика, т.е. со математичката информација што треба да се изучува;

б) задачи во врска со структурата на училишниот курс по математика, т.е. со изградбата, распоредот и последователноста на математичката информација;

в) задачи сврзани со наставните методи, т.е. со начинот на предавањето.

Секако, овие класи задачи (т.е. проблеми) се тесно сврзани меѓу себе: од една страна, воведувањето нови содржини во наставата бара нова структура и нови наставни методи, од друга страна, промената на структурата на училишниот курс обично условува воведување нови содржини и нови методи, а и примената на нови наставни методи честопати бара некакви измени во содржината и структурата.

Суштината на секој од тие проблеми се состои во следново:

а) *Содржината на математичкото образование*, во текот на долгата историја на школата, се изменила од обука за сметање и познавање на наједноставни геометриски фигури (во длабоката древност) до настава по неколку математички предмети во основното и средното образование: аритметика, геометрија, тригонометрија и елементи од математичката анализа (во 20 век). Тие промени се вршеле нерамномерно, а во согласност и во зависност од темпото со кое се развивале производните си-

---

[2] Овде и натаму, кратенката ДМ означува „дидактика на математиката".

ли и науката. И покрај тоа што науката се развива речиси непрекинато, специфичноста на работата во школата не дозволува постојани измени на наставните програми (т.е. нивно осовременување, „модернизација"), туку тоа е можно само периодично, со скокови, во вид на *реформи*, при што времето меѓу две последователни реформи сè повеќе се скратува.

Колку побрзо напредува науката, толку поголем станува обемот на научната информација, а потребите на технологијата бараат вклучување на нови научни сознанија и информации во училишниот курс. Од друга страна, научните основи на предметот што треба да се изучува не е можно да се скратуваат, а периодот на школувањето е природно ограничен, така што за новото тешко може да се најде место. Сето тоа го усложнува спроведувањето на реформите за осовременување на наставата, т.е. при секоја промена на содржината обично се јавуваат дидактички проблеми што треба да се решаваат.

б) *Проблемот за структурата на училишниот курс*, т.е. прашањето за изградување оптимален систем на последователно изучување на математичката информација што треба да се вклучи во новиот училиштен курс, останува нерешен и откако ќе се решат проблемите на содржината. Тој треба да се решава одделно и мошне внимателно.

Овој важен проблем станува сè поактуелен по најновите иследувања на психолозите и педагозите во таа област. Тие експериментално утврдиле дека способноста кај децата од помала училишна возраст за апстрактно мислење е значителна и доволна за усвојување на некои идеи од современата математика.

(Во таа смисла, во нашите наставни програми успешно се вклучени, на пример, почетни сознанија за множествата уште од I одделение, пропедевтичен материјал по геометрија во I-V одделение, елементи од математичката логика в I клас и др.)

Проучување и подобрување на структурата на училишниот курс по математика е можно и во времето меѓу две реформи; независно од модернизацијата на содржината, но притоа мора да се води сметка за внатрешната логика на предметот, за заемните врски меѓу наставните содржини и нивното значење за целите на математичкото образование, за достапноста на материјалот и можноста за дидактичка обработка, за дидактичките принципи, правила и барања.

в) *Проблемот на наставните методи* ги следи претходните два проблема. До почетокот на овој век се создадени повеќе методи за предавање математика, наречени *традиционални методи*. Со текот на времето, потврдена е нивната успешност во практиката, но процесот на нивното усовршување не е завршен (иако нивните можности за постигнување висока ефективност, главно, се исцрпени). Покрај задачата за усовршување на тие методи, како најважна осатнува и задачата: пронаоѓање нови, *современи наставни методи*, што ќе бидат поефективни не само за новите наставни содржини туку и за стариот, традиционален материјал.

1.3. ЗАБЕЛЕШКА ЗА НЕКОИ ПЕДАГОШКИ ТЕРМИНИ

Во книгава ќе користиме педагошки термини најчесто без да ги објаснуваме, сметајќи ги за позанти од педагогијата (специјално, од дидактиката) или пак за „интуитивно јасни". Педагошките дисциплини по својот карактер не се „дедуктивни системи". Затоа евентуалното *објаснение* што се дава за таков поим *не претставува дефиниција* во математичка смисла на зборот. Овде ќе се задржиме кратко на неколку педагошки термини што ќе бидат често употребувани: воспитување, образование, настава.

Воспитувањето како најширок педагошки поим претставува целокупност од сите намерни влијанија што го насочуваат развојот на личноста. Еден дел од тие влијанија се предодредени за воспитаникот да стекне одредени *знаења*, *вештини* (увежбани знаења, трансформирани во ментални или физички дејства) и *навики* (автоматизирани вештини), а другиот дел - да му помогнат во развивањето на неговите *психофизички способности* (мислење, помнење, фантазија, ментална и телесна еластичност, издржливост и сл.) и во формирањето на свој *поглед кон светот* (хуманизам, патриотизам, интернационализам, одредени позитивни црти на карактерот и др.).

Стекнувањето знаења, вештини и навики се вика **образование**, а развивањето психофизички способности и формирањето поглед на светот се вика **воспитување** (или, попрецизно, **воспитување во потесна смисла** - кога треба да се прави разлика од поимот воспитување „во најширока смисла", за кој стана збор погоре).

Поимот **настава** се дефинира како воспитување (т.е. учење) што се остварува под непосредно или посредно раководство на наставник, по утврдени наставни планови и програми. Според тоа, наставата претставува усогласена дејност на два субјакта: активност на наставникот (наречена **поучување**) и активност на ученикот (наречена **учење**), т.е. таа претставува органско единство на поучувањето и учењето. Притоа, *поучувањето* треба да се сфати како разновидна директна или индиректна помош што им се дава на учениците во учењето, т.е. како *раководење со учењето*. Секако, наставата, како еден од облиците на воспитувањето, има и образовна и воспитна компонента.

Ќе направиме уште неколку забелешки.

Во *редовната настава*, за време на редовното школување, *се спроведува најорганизирано, најсистематско и најинтензивно образование*. Затоа, дидактичките проблеми натаму во книгава ќе ги разгледуваме од аспект на тој, најорганизиран процес на образование во рамките на редовната настава, имајќи предвид дека тие дидактички сознанија за наставата по математика може, приспособени, да се применат и кај други облици на образование.

Терминот дидактика што го воведе Ратке и Коменски е прифатен и задржан денес само на германското и словенското подрачје, додека во англосаксонските земји особено во САД, тој термин не е наполно прифатен. Таму, за воспитување и образование се употребува заедничкиот израз *едукација* (од лат. збор *educatio*), а е создадена и специфична педагошка терминологија за конкретна педагошка дејност, особено за образованието, како на пример: курикулум, технологија, моделирање, стратегија, симулација, инструкција и др.

И називот *дидактика на математиката* не е општо прифатен (дури и на рускојазичното подрачје), а наместо него често се употребува називот *методика на наставата по математика*. При оваа терминологија, методиката се дели на:

а) *општа методика* - што ги проучува општите законитости на наставата по математика (што одговара на содржината на книгава);

б) *посебни методики* - ги третираат разните пристапи кон изучувањето на посебни области од математиката (на пр. методика на изучување геометриски трансформации, методика на решавање равенки, методика на изучување тригонометриски функции итн.);

в) *конкретни методики* - ги третираат начините за изучување конкретни прашања од посебните методики или од општата (на пр. методика на изучување квадратна равенка, методика на изучување складност на триаголници, методика на проверување домашна работа итн.).

Нашиот интерес во оваа книга, како што рековме порано, ќе бидат проблемите на „општата методика" на математиката.

1.4. ВЕЖБИ

1. Која од основните задачи на ДМ, во наставата, се решава (целосно или делумно): а) со наставната програма, б) со учебникот, в) од наставникот?
2. Да се коментираат проблемите што се јавуваат при менувањето (осовременувањето) на содржината на наставата во училишниот курс.
3. Кои се најважните задачи на ДМ сврзани со наставните методи?
4. Запознајте се со содржината на предметот математика за V-VIII одделение од соодветната брошура „Наставен план и наставни програми по математика за V-VIII одделение".
5. Во некоја педагошка или општа енциклопедија прочитајте ги одредниците за термините педагогија, дидактика, методика,

настава и направете споредба со објасненијата што се дадени во оваа книга:

а) *педагогија* (грч. παιδαγωγια - воспитување; наука за воспитувањето);

б) *дидактика* (грч.διδακτικη τεχνη - вештина на поучување; наука за наставата, т.е. за интелектуално образование преку настава);

в) *методика* (грч. μεθοδος - начин, пат, средство; дисциплина што ги проучува начините за изучување на одделни прашања од наставата);

г) *настава* (најорганизиран, најсистематски и најинтензивен воспитно-образовен процес ...).

2. МЕТОДОЛОГИЈА НА ДИДАКТИКАТА НА МАТЕМАТИКАТА

2.1. ОСНОВНИ ПРИСТАПИ ЗА ИСТРАЖУВАЊЕ ВО ДМ

Како што рековме во разделот 1.2, секоја наука има свои методи, т.е. своја методологија за проучување на проблемите од својот предмет. Терминот **методологија** (од грч. зборови „методос" - метод и"логос" - наука) означува *наука за методите на истражување и општа теорија на научното сознавање.* Методологијата на одделна наука ги проучува логичките операции и истражувачките постапки на таа наука.

Методологијата на секоја наука има свои специфичности (на пример, методите на сознавање во физиката се разликуваат од методите во историјата). По својата методологија, дидактиката на математиката е поблиску до педагогијата.

Во методологијата на ДМ постојат три основни пристапи кон проучувањето на дидактичките проблеми: *историски, емпириски и теориски.* Тие се поврзани меѓусебно, се преплетуваат и се дополнуваат, а се насочени кон исполнување на основната задача на методологијата на ДМ: да ги проширува постојните дидактички сознанија со нови.

1) *Историскиот пристап* значи: користење на искуството од наставата по математика, остварено од постарите генерации наставници и предадено преку методичката литература или непосредно. Со други зборови, за одреден дидактички проблем, прво треба да се установи: што е утврдено во историјата на наставната теорија и практика, како еволуирало сфаќањето и решавањето на тоа прашање и до кои резултати се дошло, со што ќе се овозможи продуктивно да се напредува во неговото разрешување.

2) *Емпирискиот пристап* се однесува на проучувањето на конкретен проблем од наставната практика. Наставата како ди-

намичен процес здружува голем број фактори што се преплетуваат, па затоа емпириското проучување е најраспространето и најкомплексно. Тоа може да има неколку степени: *набљудување, снимање на состојбите и дидактички експеримент.* Без оглед на степенот на кој се однесува, емпириското истражување, за да биде егзактно, треба да е проследено со статистичка обработка на добиените резултати.

(*а*) *Набљудувањето* на определен наставен проблем од страна на наставникот го вклучува евидентирањето на сите факти и заклучоци до кои доаѓа (на пример, активноста на учениците, нивното реагирање, интензитетот на доживувањето, богатството на изразувањето, можностите за мислење, умешноста за практична работа и сл.). Притоа, наставникот мора однапред да го определи планот на набљудувањето: што ќе посматра, во која ситуација, како ќе ги евидентира резултатите од набљудувањето итн.

(*б*) *Егзактното снимање на состојбите* на одбраниот наставен проблем е вториот степен на емпириското проучување. Тоа се реализира со помош на некои инструменти: анкети, прашалници, тестови и др.

(*в*) *Дидактичкиот експеримент* е највисокиот степен на емпириското истражување. Тој се спроведува со цел да се изврши проверка (потврдување или отфрлање) на одредени идеи во наставата. Во практиката тоа значи дека наставникот (односно истражувачот), намерно и плански, врши некои промени во својата наставна работа (земајќи, притоа, „доволно голем примерок"), добиените резултати ги споредува со резултатите што биле постигнувани кога немало такви промени и проценува како (на кој начин и до која мера) воведените новини се одразуваат на проучуваниот сегмент од наставната работа.

** Да забележиме дека условите за спроведување дидактички експеримент се мошне сложени, а теоријата, практиката и методиката на неговото спроведување сè уште не се доволно разработени. Добиените заклучоци честопати носат субјективен карактер, меѓу другото, и поради стремежот на експериментаторот да создаде најблагопријатни услови за колку што е можно подобар успех на испитуваниот наставен проблем. **

3) Основа за *теорискиот пристап кон проблемот* претставуваат претходните два пристапа. Имено, сите податоци, т.е. целиот фактографски материјал, собрани со помош на историски и емпириски проучувања, се подлага на теориска анализа и, по мисловен пат, применувајќи методи на научното сознавање (анализа и синтеза, индукција и дедукција, законите на логиката и дијалектиката), се изведуваат општи заклучоци.

Со тоа, истражувачот создава можности да се отиде чекор напред кон разрешувањето на испитуваниот проблем, т.е. кон решение со повисок квалитет. Секако, квалитетот на решението ќе зависи од обемот и квалитетот на собраните податоци, но и од интелектуалните способности на истражувачот.

** Теорискиот пристап се вика и *метод на теориска анализа*. Тој има големи можности и перспективи.

Да забележиме дека примената само на еден од трите пристапи во истражувањата, издвоен од другите, би бил едностран и неполн. Затоа треба да се применуваат во единство сите три пристапи: историскиот, емпирискиот и теорискиот. **

2.2. ВРСКИ НА ДМ СО ДРУГИ НАУКИ

Дидактиката на математиката е во тесна врска со повеќе науки што го проучуваат човекот и неговата општествена свест, секоја од своја позиција. Нејзиниот развиток е под влијание особено на неколку од тие „соседни" науки.

Пред сè, ДМ е во тесна врска *со педагогијата*. Имено, таа користи поими, ставови, принципи и методи од теоријата на образованието и наставата, т.е. од дидактиката. Затоа, развитокот на општата дидактика има непосредно влијание на ДМ.

Математичките науки исто така влијаат на развитокот на ДМ посредно, преку училишниот курс по математика, во врска со модернизацијата на наставата (менување на содржината, структурата и наставните методи).

ДМ користи поими и закони на **психологијата**: учењето се потпира на перцепции, претстави и помнење; зборот, процесот на мислењето, интересот, вниманието, волјата - имаат особена важност во наставата.

Врската на ДМ со науката **логика** е мошне важна, зашто учениците ги сознаваат основните правила на научното мислење и заклучување во процесот на наставата по математика.

На крајот, **историјата на математиката** е непресушен извор на информации за наставникот. Таа му укажува какви тешкотии може да се сретнат при третирањето на разни прашања во училишната математика, а дава и идеи како да се преодолеат некои од тие тешкотии. Историјата на математиката често укажува на можните и најприродни патишта за усвојување на определен материјал, дава примери за врска со животот и друго. Кратките историски излети на часовите го зголемуваат интересот на учениците за изучуваниот материјал и за математиката општо.

2.3. ВЕЖБИ

1. Објасни ја суштината на секој од основните пристапи во методологијата на ДМ.
2. Да се коментира историскиот пристап во смисла на познатата мисла од Б. Брехт: „За да се направи голем скок напред, треба да се направат неколку чекори наназад".

3. Прочитај го објаснението на терминот *методологија* во некоја енциклопедија или речник и согледај ги сличностите и разликите со објаснението, дадено во текстов погоре.

4. Има различни мислења дали одредена човекова дејност (поточно: област на истражувачка дејност) е *наука* или не е. Таканаречените „позитивисти", терминот наука го ограничуваат само на „точните науки", т.е. само на дисциплините од природно-математичкото подрачје.

   Едно такво мислење е искажано и во следнава мисла: „Никакво човеково истражување не може да се смета за вистинска наука, сè додека не помине низ математички доказ" (според *Леонардо да Винчи*, 1452 - 1519), а „поблаг" став имаме во следнава мисла: „Секоја наука во денешно време се стреми, колку што е можно повеќе, да ги математизира своите методи на истражување за да се обезбеди точност и сигурност на добиените резултати" (според *Емануел Кант*, 1724 - 1804, и *Карл Маркс*, 1818 - 1883).

   Во некоја енциклопедија или речник, прочитај го објаснението под терминот *наука* и спореди го со горните ставови, како и со твоето досегашно сфаќање „што е тоа наука".

3. ЦЕЛИ НА НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

3.1. ОПШТИ ЦЕЛИ

При определувањето на целите на наставата по математика тргнуваме од општите цели на образованието и воспитувањето на нашата средна школа, а тие се насочени кон: формирање на сестрано развиена личност, високообразован и воспитан градител на нашето општество. Основната задача на наставата по математика е: за релативно кусо време учениците да се здобијат со голем број придобивки, стекнувани од претходните генерации со векови, за да се овозможи натамошниот развој на човештвото.

Целите на наставата по математика се: општи и специфични.

Општите цели, коишто се карактеристични за школата како целина се: а) образовни, б) практични, в) воспитни. Сите тие се испреплетуваат меѓусебно, но се издвојуваат една од друга по своите особености.

а) *Образовните цели* на наставата по математика за средната школа се приспособуваат кон вооружување на учениците со систематизирани знаења од математичките науки, неопходни за разбирање на научните основи на современата техника и производство, за продолжување на образованието или за примена во конкретни ситуации и кон овладување со математичките методи за запознавање на реалниот свет.

б) *Практичните цели* на наставата по математика се насочени кон снабдување на учениците:

- со знаења што можат да се применат во обичниот живот, т.е. со вештини за применување на математиката при решавање на едноставни задачи од практиката („практична дејност");
- со вештини за користење на математички инструменти и сметачки прибори;
- со вештини за самостојно здобивање со знаења (користење учебна и научно-популарна литература).

в) *Воспитните цели* на наставата по математика се состојат во искористување на сите згодни моменти за сестрано воспитување на учениците низ наставата. Посебно, низ наставата треба:

- да се воспитува кај учениците *дијалектичко-материјалистичкиот поглед на светот*, т.е. дека материјата е првична и природата се наоѓа во постојано, непрекинато закономерно менување и развивање;
- да се развива *естетското воспитување* кај учениците - да се научат да го разбираат, да го ценат и да го негуваат убавото во животот, да го ценат трудот, да се развива кај нив чувството на должност и одговорност (за своето учење и поведение), да се развива патриотизам и други убави квалитети;
- да се развива *широка математичка култура* кај ученикот.

3.2. СПЕЦИФИЧНИ ЦЕЛИ

Покрај општите цели, наведени погоре, пред наставата по математика се поставуваат и некои специфични цели што произлегуваат од карактерот на математичките науки. Ќе ги наведеме најважните.

1) *Вооружување на ученикот со методите на научното сознавање.* Имено, математиката е најстрога и најточна од сите научни дисциплини; примената на нејзините методи го подигнува научното ниво на другите области од науката. Методите на научното сознавање најшироко и најдоследно се применуваат токму во математиката; затоа школската математика е најважното средство за вооружување на ученикот со тие методи.

2) *Формирање и развиток на математичкото мислење кај ученикот.* Мошне важна цел на наставата по математика е да го оспособи ученикот за:

- усно и писмено математичко изразување со сите квалитети: концизност, едноставност, јасност и целосност;
- правилно и слободно мисловно оперирање со математичките категории: поими и искази, теореми и формули, закони и операции, постапки и математички методи, со интуицијата и

внатрешната логика на развитокот на математиката.

3) Важна задача на наставата по математика е *развитокот на геометриската интуиција*, просторните претстави (преку соодветни модели) и навиките за правилно графичко изразување - во смисла на практичното знаење на математиката.

4) *Развитокот на логичкото расудување* (прво, во згодни прилики - низ пропедевтичен курс, а подоцна - во елементите на математичката логика).

5) Посебна задача на наставникот е да им ја покажува на учениците *естетската страна на математиката* - нејзината стројност и убавина. Со тоа наставникот остварува една од воспитните цели - естетско воспитување на учениците.

6) Како последна (но не и најмалку важна!) ќе ја приведеме специфичната цел: *побудување и одржување интерес кај ученикот за математиката*. Без успешно спроведување на оваа цел, тешко може да се замисли реализацијата на општите и другите наброени цели на наставата по математика. По правило, ученикот станува заинтересиран за работи што се нови и возбудливи, за кои може да се сфати практичната вредност при примената во ситуации и области за кои е заинтересиран, како и за работи што содржат елементи на загатки или мистерии. Во таа смисла, мотивираност на ученикот, т.е. побудување интерес за изучување на математиката може да се постигне преку:

- примената на математиката во другите предмети што ги изучува ученикот;
- укажување за примената на математиката во индустријата и професионалните дејности;
- истакнување на културните и образовните вредности;
- користење на интелектуалната љубопитност;
- математичка рекреација, клубови, натпревари, разни помагала (филмови, дијафилмови) и друго.

За успешна реализација на оваа цел, особено за одржување на интересот за математиката, незаменлив е наставникот ентузијаст, страсно заинтересиран за предметот и наставата; тој е „*conditio sine qua non*".

3.3. ВЕЖБИ

1. Коментирај ги особеностите на секоја од општите цели на наставата: а) образовни, б) практични, в) воспитни.
2. Наброј ги специфичните цели на наставата по математика и особеностите на секоја од нив.
3. Прочитај го делот „Побуѓивање и подржавање интереса, за математику" (стр. 76 - 90) од книгата на Ч. Батлер и Ф. Л. Врен: „Настава математике у средњој школи". Кои од наведените (образложени) можности таму би ги искористил во наставата?

4. Разгледај некоја од брошурите „Програмски документи за воспитно-образовната дејност во средното образование" и запознај се со наставниот план и програми (по математика). Потоа насочи го вниманието кон деловите:

а) Цел и задачи (на наставата по математика) и

б) Оперативни задачи (за секој клас одделно).

Какви сличности и разлики има меѓу а) и б)?

4. ЗА РАЗВИТОКОТ НА МАТЕМАТИКАТА КАКО НАУКА

4.1. ПЕРИОДИЗАЦИЈА НА РАЗВИТОКОТ

„Кој сака добро да ја разбере сегашноста, треба да го познава минатото" е (парафразирана) мисла на *Лајбниц*. Таа укажува на потребата активниот математичар да се запознае со историјата на математиката.

Можно е да се издвојат повеќе периоди во развитокот на математиката, според разни критериуми. Широко е прифатена периодизацијата што ја има предложено *А. Н. Колмогоров* (1903 - 19). Според неа, историјата на развитокот на математиката се дели на четири периоди.

I *период*: **Раѓање на математиката.** Почетокот на овој период се губи во длабочините на историјата на првобитното општество, а траел до 6 - 5 век до н.е. Најголем расцут е постигнат за време на големите цивилизации на: Вавилон, Феникија и Египет. Математичките знаења од тој период не претставувале посебна, „математичка наука", туку биле само дел од општото човеково искуство, т.е. дел од општата, неразделена наука. Тој период е сврзан со практични пресметувања и мерења. Во него се почетоците на аритметиката и геометријата, коишто се јавуваат во вид на емпириски установени правила за решавање практични задачи. („Прави така како што се прави, а се прави вака"... тоа биле првите зборови во математичките трактати од тоа време.)

II *период*: **Математика на постојани величини (или елементарна математика).** Почнува од 6 - 5 век до н.е. и трае до крајот на 16 век (*од Талес до Декарт*). Се карактеризира со тоа што математиката се издвојува како самостојна наука, со свој предмет на изучување (број и фигура), како и со појавата на дедуктивниот метод што постигна висок дострел во работите на *Евклид* (околу 330 - 275 г. до н.е.), *Архимед* (287 - 212 г. до н.е.) и *Аполониј* (262 - 190 г. до н.е.). Овој период завршува кога главен предмет (што ќе го изучува математиката) стануваат процеси и движења, кога почнува развитокот на аналитичната геометрија и анализата на бескрајно малите величини.

(Терминот „ елементарна математика" често доведува до недоразбирања, зашто долго време (а и денес) се употребувал и за други нешта. Сепак, тој е сосем оправдан како име за овој период, во согласност со карактерот на материјалот во тогашната математика.)

III *период*: **Математика на променливи величини** (т.е. **класична виша математика**). Започнува од 17 век, со воведување на поимот променлива величина во аналитичната геометрија од *Рене Декарт* (1597 - 1650), продолжува со создавањето на диференцијалното и интегралното сметање од *Исак Њутн* (1642 - 1727) и *Готфрид Вилхелм Лајбниц* ((1646 - 1716), а преку *Леонард Ојлер* (1707 - 1783) се протега до Гаус (*Карл Фридрих Гаус*, 1777 - 1855). Завршува во средината на XIX век, кога во математиката се направени суштински промени, меѓу другото и во развитокот на аксиоматскиот метод од: *Николај Лобачевски* (1792 - 1856), *Јанош Болјаи* (1802 - 1860), *Бернард Риман* (1826 - 1866). Во текот на овој бурен и плодотворен период се поставени основите на сите научни дисциплини што се изучуваат сега во универзитетите како „ класични основи на современата математика".

IV *период*: **Период на математички структури и нивни модели** (т.е. **современа математика**). Овој период, којшто започнува од средината на 19 век, се карактеризира со: зголемена улога на апстрактните математички конструкции, длабок развиток на аксиоматскиот метод и, како резултат на тоа, појавата на нов, фундаментален поим - поимот математичка структура, којшто овозможи да се воспостави единство во разновидноста на многу математички факти и објекти, на прв поглед со сосем различна природа.

4.2. ДОСТИГНУВАЊА ВО ЧЕТВРТИОТ ПЕРИОД

Четвртиот период, иако релативно краток по траење, по содржина е побогат од сите претходни. Во овој период, предмет на изучување станаа нови, некласични форми и односи на реалниот свет, како што се: *поимот простор* земен во поширока смисла, *нови средства* за проучување и *разновидни методи*. Сега можат да се набројат неколку десетици различни области на математиката, од кои секоја има своја посебна содржина, свои методи и области на примена.

Ќе ги спомeнеме главните достигнувања на математиката од овој период.

1) *Огромниот развиток на алгебрата*, преку теоријата на групите (*Еварист Галоа*, 1811 - 1832; *Августин Коши*, 1789 - 1857; *Артур Кели*, 1821 - 1895), прстените и другите алгебарски структури, создаде можности за разгледување операции на произволни (не мора бројни) множества, а поимите, методите и резултатите на современата алгебра наоѓаат суштинска примена

во анализата, геометријата, физиката, кристалографијата и др.

2) Направен е *голем напредок во анализата:* уточнети се нејзините основи, изградена е строга теорија на реалните броеви (*Карл Вајерштрас*, 1815 - 1897; *Јулиус Рихард Вилхелм Дедекинд,* 1831 - 1916; *Георг Кантор*, 1845 - 1918), оформени се посебни области (теоријата на функциите од реална односно комплексна променлива, квалитативната теорија на диференцијалните и интегралните равенки, функционалната анализа сврзана со новите идеи на геометријата и алгебрата и др.).

3) Новиот пристап за изучување на геометриските фигури овозможува да се прошири *сфаќањето за геометријата.* Така, според *Феликс Клајн* (1849 - 1925), геометријата на едно множество *S* е наука, којашто ги изучува оние својства на множеството *S* што остануваат неизменети кога елементите на *S* се подложени на дејството на елементите на некоја група трансформации на *S*. Во таа смисла имаме: изометрична геометрија (со групата движења), еквиформна геометрија (со групата сличности) и проективна геометрија (со проективната група).

4) Појавата на *метаматиката* (= теорија на доказот, т.е. теоријата за општи и формални својства на разни дедуктивни системи во математиката) во работите на *Давид Хилберт* (1862 - 1943), претставуваше поттик за широк развиток на математичката логика.

5) Во поново време, појавата и развитокот на *електронските сметачки машини* даде стимул за развитокот на *кибернетиката* (научен правец што се занимава со проблемите на управувањето и врските). Кибернетиката, во која најдоа широка примена теоријата на веројатноста и математичката логика, го обуслови развитокот на *теоријата на игрите* и *теоријата на информациите,* а *конечната* („*дискретна*") *математика* стана посодржајна и поважна по своите примени.

Паралелно со брзиот развиток на таканаречената чиста или теориска математика, којашто не е наменета за непосредна практична примена во другите области на човековата дејност, бурно се развива применетата математика.

4.3. ДВЕ СФАЌАЊА

Од филозофски аспект, во III период доаѓа до строго разграничување на двете главни сфаќања во математиката: материјалистичко и идеалистичко.

Според **материјалистичкото сфаќање**, математиката ги одразува законите и процесите на реалниот свет. За ова сфаќање, карактеристична е следнава мисла на *Фридрих Енгелс* (1820 - 1895): „Чистата математика ги има за свој објект просторните форми и количествените односи на реалниот свет ..."

Според **идеалистичкото сфаќање** математиката е одраз и чист производ на човековото мислење (а не на реалниот свет). Ова сфаќање може да се илустрира со мислата на *Бертран Расел* (1872 - 1970): „математиката - тоа е наука во која ние никогаш не знаеме за што зборуваме, ниту пак дали е точно она што го кажуваме".

Мислата на Енгелс, цитирана погоре, сосема добро го определува предметот на математиката до третиот период заклучно. Меѓутоа, со појавата на големиот број математички дисциплини во IV период, со своја специфична проблематика, таа дефиниција станува неадекватна. Имено, во овој период,со тоа започна еден процес на разединување на математиката,кој отиде дотаму што веќе тешко може да се зборува за некоја „ единствена математика", а се повеќе се употребува терминот „ математички науки".

Од друга страна, паралелно со процесот на диференцијација се јавува обратниот процес - обединување и заемни врски („ мостови") меѓу различните области во однос на методите и основните идеи, којшто постигна голем развиток кон крајот на XIX и во почетокот на XX век. Тогаш беа разработени општите логички основи на математиката. Многу математички области, навидум сосем различни, без ништо заедничко, можеа да се изградат врз основа на општи обединувачки идеи при што, теоријата на множествата има улога на поврзувач. Како основа на таквата изградба служат „ фундаменталните структури": подредени, релациски, алгебарски и тополошки (а сите други математички структури се јавуваат како нивни комбинации). Главен предмет на нивното изучување се јавуваат операциите и релациите, а современата математика се дефинира како *„наука за математичките структури и нивните модели"*.

4.4. ВЕЖБИ

Во сите задачи подолу, повикувањето се однесува на книгата „Велики математичари" од Е. Т. Бел, Загреб, 1972.

1. Прочитај ги првите две поглавја (1. Увод, 2. Модерни мисли во старите тела,стр. 19-47). Забележи ги проблемите за кои се расправа тука, а што ти направиле најсилен впечаток.
2. Прочитај го поглавјето за Декарт (3. Џентлмен, војник и математичар, стр. 48-65). Врз основа на тоа опиши го придонесот на Декарт за почнувањето на новиот (трет) период на математиката.
3. Кои моменти од поглавјето за Ојлер (стр. 140-152) ви направија најсилен впечаток? Што е карактеристично за III период?
4. Прочитај го поглавјето за Кантор („Изгубениот рај", стр. 522-544). Опиши го најважниот придонес на Кантор за современата математика.

5. МАТЕМАТИКАТА КАКО НАСТАВЕН ПРЕДМЕТ

5.1. ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА - УЧИЛИШНА МАТЕМАТИКА

Терминот *математика* доаѓа од грчкиот збор $\mu\alpha\theta\varepsilon\mu\alpha$ којшто може да се преведе како „знаење, наука",а означува: 1) *определена мисловна дејност* (*математичка дејност*) или 2) *теорија што е резултат на таа дејност*. Изразот, пак, *настава по математика* може да се сфати било во првата било во втората смисла.

Во секојдневниот живот, терминот *математика* се употребува од една страна за *науката математика*, а од друга - за *наставниот предмет математика*, т.е. за групата математички предмети што се изучуваат во основното и средното образование. За да ја разликуваат од науката математика, математиката што се изучува во основното и средното образование ја викаат обично „ елементарна математика". Овој назив секако е сугериран од основните значења на зборот „ елементарен": а) почетен (што се однесува на основите на нешто) и б) упростен (ограничен, површен).

Називот „елементарна математика" сосема одговара за науката математика од II историски период, зашто се работи за „математика на постојани величини". Меѓутоа, како назив за соодветните предмети во основното и средното образование не е адекватен и нема оправдание. Имено, наставниот предмет математика од една страна содржи многу елементи од класичната и современата математичка наука, а од друга страна во него не наоѓа место мошне обемен материјал, обично тежок и комплицикуван, од елементарната математика.

За да се избегнат недоразбирањата што ги предизвикува терминот „елементарна математика", во некои книги се употребува терминот „современа елементарна математика, а за науката математика до 17 век - „традиционална елементарна математика" (на пр. [36]), но тоа е малку изнасилено и не претставува задоволително решение.

Во други книги (на пр. [23]) овој терминолошки проблем се решава така, што за предметите по математика во основното и средното образование се употребува името *училишна математика* или „ школска математика", а попрецизно, *училиштен курс по математика*. Сметаме дека ова е подобро решение.

5.2. СЛИЧНОСТИ И РАЗЛИКИ СО НАУКАТА МАТЕМАТИКА

Училишната математика, секако, има сличности и разлики со науката математика. Пред сѐ, јасно е дека наставниот предмет не ја произведува науката математика, туку ги изучува нејзините „ елементарни основи". Тоа значи дека училлишната математика е почетна, т.е. ги содржи основите на современата математичка наука и е доволно едноставна, достапна за учениците од соодветната возраст.

Да забележиме дека тие „елементарни основи", неопходни за практична дејност и продолжување на образованието, не се определени еднаш за секогаш, туку повремено се менуваат во зависност од развитокот на науката и од потребите на општеството.

Сличности меѓу науката математика и училишната математика има повеќе, а најважни се тие што се однесуваат на процесот на сознавањето. Имено:

а) *Нема принципиелна разлика меѓу патот на сознавање вистини* во науката и патот на стекнување научни знаења во наставата. Ученикот, во однос на она што го сознава, се наоѓа во слична положба како научникот во однос на откривањето нови научни вистини (т.е. субјективно, меѓу нив нема суштинска разлика).

б) И во науката и во наставата, *мислењето секогаш се потпира на перципирање*, некогаш со посредство на претставите од сеќавањето и фантазијата, како и на претходното искуство.

в) *Практиката во наставата* има повеќе функции, но, како и во науката, најважен е *критериумот* за *веродостојност на сознавањето*. (Се разбира, во наставата, со примена во практиката се проверуваат само некои од стекнатите знаења, а не сите.)

Сепак, сознајниот процес во наставата во однос на тој во науката, има и одредени специфичности: сознајните активности на учениците се раководени од наставник, а со тоа тие се упростени и забрзани.

Во таа смисла, меѓу училишната математика и науката математика се јавуваат **разлики**, не само квантитативни, туку и квалитативни. Ќе наведеме неколку поважни од нив.

1) Науката математика *се стреми да установи колку што е можно подлабоки математички закони, не водејќи сметка за нивната сложеност* и за развојното ниво на лицата што ќе ги изучуваат или што ќе ги применуваат.

Напротив, училишната математика има за цел да им ги соопшти на учениците основните сознанија што се добиени во науката, во доволно општа форма, но на доволно едноставен (честопати упростен) начин, строго водејќи сметка за психофизичките способности на учениците.

2) Во науката математика не е секогаш битно *како открил научникот некоја математичка вистина*, важно е само дека таа може да се потврди со доказ.

Во наставата, пак, начинот на воведување нов поим или начинот на излагањето на некое математичко тврдење има огромно значење.

3) Науката математика во современата етапа на развиток, не ги изучува објектите во нивниот конкретен вид, туку ја изучува структурата на нивните врски (релации); со други збо-

рови, таа *ги изучува објектите со точност до изоморфизам.* (На пример, не станува збор за изучување на групата S_3 на пермутации од три елементи или за групата елементарни матрици од трет ред - тие се изоморфни - туку: „групи со такви и такви својства".)

Според тоа, можеме да кажеме дека методот на истражување во науката се карактеризира со *апстрактност и општост*.

Во училишната математика пак, ни апстрактноста ни општоста не може да достигнат таков степен каков што достигнуваат во науката.

4) Науката математика *е способна да се развива речиси неограничено* - тоа го потврдува нејзината историја.

Наставниот предмет, пак, има речиси *строги граници*, поставени со наставната програма и со ограниченото времетраење на образованието (на поединецот).

5) Науката математика се изградува *и се развива во определен дедуктивен систем*, изнесувајќи ги откриените факти во строга последователност.

Училишната математика, водејќи сметка за психофизичките способности на учениците, некои поставки ги предава како готови, само врз основа на „здрав разум", кога не е можно да се докажат на одредено ниво. Сепак, таа не смее премногу да ги упростува и да го нарушува прифатениот дедуктивен систем на математичката наука. (Во таа смисла, ова е повеќе нивна сличност отколку разлика.)

Да заклучиме: науката и наставниот предмет математика во многу нешта се разликуваат, но сепак тие се тесно сврзани меѓу себе. Таа врска треба да се истакнува низ наставата во секоја згодна прилика.

5.3* КРАТОК ОСВРТ НА СОДРЖИНАТА НА УЧИЛИШНАТА МАТЕМАТИКА

Содржината и структурата на училишниот курс по математика се определени со наставната програма по математика за основно и средно образование. Реализирањето на целата пропишана програма е задолжително. Обемот на информациите и барањата попрецизно се определени со учебниците (особено за основното образование).

Ќе фрлиме еден брз површен поглед на содржината на училишната математика.

Предметот математика од I-IV одделение претставува модернизиран пропедевтичен курс по аритметика на целите ненегативни броеви и значиелни почетни елементи од алгебра и геометрија. Учениците се среќаваат со почетните поими од множествата, почнуваат да решаваат едноставни равенки за наоѓање непознати компоненти на аритметичките операции, составуваат такви равенки, решаваат најпрости неравенства, користат буквена симболика за изразување на својствата на аритметичките операции, се запознаваат со наjпростите геометриски фигури и др.

Во V одделение се прошируваат сознанијата за множествата, се воведуваат релациите и поимот пресликување како специјална релација, се изучуваат дропките и децималните броеви и операциите со нив, како и нивни едноставни примени. Паралелно со изучувањето на курсот по аритметика, продолжува натамошното запознавање со елементите од алгебрата и геометријата, со појавување формули и поимот бројна (полу) оска. Се изучуваат аглите, централната и осната симетрија и ротацијата.

Во VI одделение се воведуваат негативните и ирационалните броеви, бројната оска и процентната сметка. Тогаш започнува изучувањето на систематски курс по геометрија (а завршува во II клас, со елементи од стереометрија), тргнувајќи од основните поими и изведени тврдења, преку изучувaeто на поимот триаголник (со централна тема: складност на триаголниците), паралелни прави и агли во триаголникот, едноставни конструкции на триаголник, а потоа темите четирираголник и плоштина на четириаглник и триаголник.

Во VII одделение се даваат почетните поими за векторите, а потоа се изучува геометриската трансформација транслација, темата кружница и круг (со правилни многуаголници), како и почетно запознавање со Питагоровата теорема. Курсот по алгебра се збогатува со: степен со показател природен број и операции со степени, цели и дробни рационални изрази (мономи и полиноми), правоаголен декартов координатен систем, функција и график, функциите $y = k/x$,пропорционалност.

Во VIII одделение продожува изучувањето на алгебрата со: рационални изрази, линеарни равенки со една променлива со буквени коефициенти, линеарни неравенки со една променлива и системи линеарни равенки со две променливи. Во геометријата: пропорционални отсечки, слични триаголници и Питагоровата теорема; точки, прави и рамнини во просторот, паралелно и косо проектирње на фигурите; призма, пирамида, цилиндар, конус и топка (вклучувајќи пресметување плоштини и волумени).

За средното образование е малку потешко да се даде преглед на изучуваните содржини по математика, поради фактот што постои прилично голем број струки, а повеќето од нив имаат различен неделен фонд часови или различни потреби за математика. Сепак, во поголемиот број струки, особено во I и II клас[1], се изучуваат речиси истите наставни содржини (но, во некои струки, со различен обем).

---

[1] Во службените документи за средно образование се вели: I и II *година* (итн.), но ние овде ќе го употребуваме зборот *клас*.

Голем дел од материјалот во I клас претставува заокружување и дополнување на дел од изучениот материјал во претходното школување, со многу повторување. Тоа се однесува особено на: прегледот на основните бројни множества (природни, цели, рационални и реални) и операциите во нив, со уочување на некои важни алгебарски структури (групоид, група, прстен), алгебарски рационални изрази, линеарни равенки и неравенки, плоштини на рамнински фигури. Но, тука се прошируваат сознанијата за поимот степен со негативен цел показател и со показател рационален број, вклучувајќи го и коренувањето. Исто така, како сосема нов материјал, предвидена е темата тригонометриски функции од остар агол. Во овој курс се воведени и елементи од математичката логика со цел да се подобри квалитетот на математичкиот јазик и да му помогнат на ученикот да ја насети суштината на изведувањето заклучоци во математиката.

И во курсот за II клас има извесни повторувања со дополнувања, особено во врска со системите линеарни равенки и неравенки, елементите од планиметрија и елементите од стереометрија, но поголемиот дел е сосема нов материјал. Тука се завршува прегледот на броевите со изучување на темата комплексни броеви, а се продолжува со функции и равенки,преку квадратната равенка и квадратната функција. Во програмата за техничките струки, вклучена е и темата експоненцијална и логаритамска функција, во која се завршува проширувањето на поимот степен со реален показател, се разгледуваат графиците на тие функции, логаритмирањето и поедноставните експоненцијални и логаритамски равенки.

Во III клас, наставните програми по математика на разните струки имаат прилично големи разлики. Овде ќе се осврнеме само на содржините од програмата за техничките струки. Програмата содржи две главни теми: тригонометриски функции од произволен агол (придружена со адиционите теореми, тригонометриските равенки и задачите за решавање на косоаголен триаголник) и аналитчна геометрија (правата во рамнина и кривите од втор ред).

Во наставната програма за IV клас на техничките струки се предвидуваат елементи од: комбинаториката, веројатноста, статистиката, аритметичката и геометриската прогресија, како и елементи од математичката анализа (функции, изводи и нивни промени, неопределен интеграл).

Во наставните програми на дугите струки се вклучени и други делови од математиката - според потребите на соодветните струки.

5.4. ВЕЖБИ

1. Запознај се подробно со содржината на училишната математика. Проучи ја наставната програма за а) V одделение, б) VI одделение, в) VII одделение, г) VIII одделение, д) I клас, ѓ) II клас на средното образование.
Наведи ги централните теми и основните карактеристики на наставната програма на секое одделение/клас.

6. МОДЕРНИЗАЦИЈА (РЕФОРМИ) НА МАТЕМАТИЧКОТО ОБРАЗОВАНИЕ

6.1. ПОЧЕТОК НА РЕФОРМИТЕ ВО СВЕТОТ

Во почетокот на 19 век математиката достигнува високо ниво на развиток, паралелно со големите достигнувања на другите науки, во техниката и речиси во сите области на животот. Во тој период, во многу европски и други земји, беше согледана несовршеноста на училишните наставни методи и заостанувањето на содржината на образованието зад барањата на науката и животот. Тој проблем можеше да се реши само со реформа на образованието, а посебно со модернизација на математичкото образование.

Тие *тенденции за реформи* на образованието почнаа да се реализираат во почетокот на 20 век. Тогаш започна едно широко меѓународно движење за реформа на математичката настава, коешто ги опфати сите поразвиени земји во светот.

Така, првата реформа во Франција беше спроведена во 1902 година под влијанието на знаменитиот математичар *Гастон Дарбу* (1842-1917) и со појавата на многу добрите реформистички учебници на *Емил Борел* (1871-1956). Во Англија, движењето за реформа на наставата по геометрија започнало во 1899 година со предавањата на професорот *Џ.Пери*. Во Германија, од 1900 година, почнал да се залага за реформа професорот *Феликс Клајн* (1849-1925). Во 1905 година била изготвена т.н. Меранска програма по математика за средните училишта, која што содржела многу идеи на реформата, а во 1907/1908 учебна година, во Гетингенскиот универзитет Клајн ги прочитал своите знаменити предавања под наслов „*Елементарната математика од гледна точка на вишата*". Реформата во Русија започнала во 1905 година со разработката на нова програма по математика. Такви движења за реформа имале и во САД, Јапонија, и други земји.

Како резултат на тие национални реформски зафати, на IV Меѓународен конгрес на математичарите (МКМ) во Рим во 1908 година била формирана меѓународна комисија за изучување на наставата по математика во средните училишта, во развиените земји, за да се предложи соодветна реформа. За раководител на Централниот комитет на таа комисија бил избран Ф.Клајн. Комисијата одржала неколку конференции на кои бил презентиран и издаден опширен и значаен материјал за предметот.

Работата на комисијата продолжила во периодот меѓу двете светски војни, а и по Втората светска војна, на меѓународните конгреси на математичарите: Единбург 1958, Стокхолм 1962, Москва 1966, Ница 1970, Ванкувер 1974, Хелсинки 1978, Варшава 1983, Беркли 1986. Првиот МКМ се одржал во Цирих 1897, II во Париз 1900, на кој *Давид Хилберт* (1862-1943) ја прочитал својата знаменита статија „Математички проблеми", (подоцна позната како „ *Проблемите на Хилберт*"), III во Хајделберг 1904 итн.

6.2. ОСНОВНИ ИДЕИ НА РЕФОРМИТЕ ОД ПОЧЕТОКОТ НА 20 ВЕК

Модернизација или осовременување на наставата значи нејзино доведување во согласност со современите идеи и методи на науката математика, т.е. идејно приближување на образованието кон современата математика како и потребите на општеството, а се врши одвреме навреме, со скокови, по пат на реформи. Притоа, *суштината на една реформа не е толку во предавањето нови содржини од современата математика колку современо предавање математика, т.е. примена на современи методи за целокупниот материјал, вклучувајќи го и традиционалниот.*

Основните идеи на реформите од почетокот на овој век во Русија, Англија и други земји се:

- врска на наставата по математика со потребите на животот (посветување поголемо внимание на прашањата од примената на математиката);
- зближување на школската математика со математичката наука;
- воведување елементи од вишата математика во училишниот курс (основи на аналитичната геометрија и елементи од диференцијалното и интегралното сметање);
- воведување елементи од теоријата на веројатноста со примени во статистиката;
- широка примена на лабораторискиот, генетскиот и други нови методи во наставата по математика;
- методско усовршување и упростување на почетниот курс по аритметика;
- воведување приближни и скратени пресметувања;
- користење графици и графичкиот метод;
- и друго.

И повеќето проекти за реформа од поново време предвидуваат вклучување на нови содржини од современата математика и тоа:

1) елементи од теоријата на множествата;
2) увод во математичката логика;
3) поими од современата алгебра (групи, прстени, поли-

ња);

4) увод во теоријата на веројатноста со примени во статистиката.

Во некои проекти се предвидуваат и: векторски простори и линеарна алгебра, релации на еквивалентност и подредувања, елементи од топологијата и од неевклидските геометрии и др. (се разбира, во еден училиштен курс не може да влезе сето тоа, а неопходен е внимателен, оптимален избор меѓу сите тие области.)

Напорите за модернизација на наставата по математика се мошне значајни особено во реформите од последните неколку децении. Тие го опфатија не само средното, туку и основното образование. Во СССР, САД, Франција и други земји беа вршени содржајни експерименти, по кои се дојде до мошне важни сознанија. На пример:

- почетното образование треба и може да биде идејно посодржајно и побогато;
- сметањето останува главна, но не и единствена задача;
- логичкото образование, заради своето општообразовно и воспитно значење, би требало да почне уште од прво одделение (се разбира, според специјална методика, а особено преку игри, коишто се прифатлива форма за учење на децата).

Многу познати математичари работеле на проблемите од осовременувањето на основното и средното образование во периодот по војната, како на пример: П.Денеш, Ж.Папи, Х.Фројдентал и др.

6.3. ЗАБЕЛЕШКА ЗА РЕФОРМИТЕ КАЈ НАС

По ослободувањето, и во нашата земја беа извршени неколку содржајни реформи, во кои беше извршено значително осовременување на наставата по математика, како во средното, така и во основното образование.

Последната од тие реформи на средното образование започна во 1977 год. во сите републики на СФР Југославија (во Р Македонија почна подоцна во 1982 г.), а се однесува не само на наставата во тесна смисла, туку на целокупниот школски систем. Основната идеја на оваа реформа беше да се добие систем на средно „*насочено*" образование што максимално ќе им одговара на потребите од стопанството и на достигнатиот развиток на општествената заедница.

Меѓутоа, таа замисла почна да се реализира (во различни републики посебно, како и во различно време). Пред да биде разработена до крај, т.е. пред да се обезбедат неопходните материјални услови (простор, опрема, кадри, учебници и др.), дури и пред да се оформат комплетно наставните планови и програми за големиот број предвидени струки и занимања. Предметот математика излезе од оваа реформа мошне посиромашен, наместо обратното - да биде збогатен во согласност со зголемените потреби на современата наука и напредокот на техниката.

Со таа реформа беа укинати старите добри гимназии и некои афирмирани средни стручни училишта, а наместо нив беа воведени „училишта за средно *насочено* образование" со голем број струки, занимања и профили. Во нив беа воведени нови предмети со сомнителен квалитет, а во наставните програми на повеќе предмети беа воведени содржини, оптоварени со идеологизирани елементи. Сето тоа придонесе да се размислува за нова реформа.

Само шест години по започнувањето на таа реформа во Р Македонија беше јасно дека таа не само што не ги даде очекуваните резултати, туку се покажа погрешна во многу насоки. Поради тоа, во 1987/88 година се пристапи кон нова реформа, наречена „ усовршен концепт на средното образование",којшто почна да се применува од учебната 1989/90 година. Само една година подоцна, веќе започнаа размислувања за нова реформа: воведување на гимназиско образование и други измени.

6.4. ВЕЖБИ

1. Запознај се со „концепциските основи на усовршениот концепт на средното образование" од брошурата: „Програмски документи за воспитно-образовната дејност во средното образование - Природно-математичка струка", Скопје 1988, како и со соодветните документи од претходниот образовен концепт за т.н. „насочено образование" (1982). Какви промени уочи во „содржинскиот дел"?

II. НАУЧНИ МЕТОДИ ВО МАТЕМАТИКАТА И ВО НЕЈЗИНОТО ПРЕДАВАЊЕ

---

1. НАУЧНИ МЕТОДИ

За проучување на природните појави и другите односи во реалниот свет, научникот (математичар, физичар, биолог итн.) се служи со посебни средства на иследување, наречени научни методи. **Научен метод** претставува начин на согледување такви факти што ќе му овозможат на набљудувачот, т.е. на истражувачот, да открие општи законитости за разгледуваните објекти или појави.

При изучувањето на математиката, ученикот се поставува во слична ситуација како научникот: тој за прв пат ги „открива" за себе математичките вистини, сам или со помош на наставникот. Затоа научните методи на математичките истражувања служат и како методи за изучување (предавање) математика, т.е. како наставни методи.

Во процесот на учењето математика, учениците имаат можности да овладеат со најважните мисловни операции: анализа и синтеза, споредба и обопштување, апстракција и конкретизација, индукција и дедукција, коишто претставуваат основа на научното сознавање; тие и се наречени *научни методи.*

Основните научни методи се: 1) набљудување и обид, 2) споредба, 3) анализа и синтеза, 4) обопштување и специјализација, 5) систематизација и класификација, 6) апстракција и конкретизација, 7) индукција, 8) аналогија и 9) дедукција.

Овде ќе се задржиме кратко на секој од горенаброените методи, истакнувајќи го неговото место и значење во наставата по математика. Да забележиме дека тие се применуваат најчесто по неколку заедно, потпомогнати еден од друг, а речиси нема ситуација во која се јавуваат изолирано. Нивното изолирано разгледување подолу е направено само за да можеме подобро да ги запознаеме.

2. НАБЉУДУВАЊЕ И ОБИД. СПОРЕДБА

2.1. НАБЉУДУВАЊЕ И ОБИД

Откривањето на една научна вистина минува обично низ три фази:

- согледување на некои значајни факти,
- доаѓање до хипотеза, којашто, ако е точна, би била применлива на тие факти,
- изведување на последици од таа хипотеза, коишто можат да бидат проверени со: набљудување, обид, споредба или со друг научен метод.

Набљудувањето е научен метод што се спроведува по однапред определен план, со цел да се открие, утврди и изучи некое својство на одредени објекти или врските со други објекти; притоа, објектите или појавите се разгледуваат, обично, во нивните природни услови.

(Се разбира, треба да се прави разлика меѓу „набљудување" и обична „перцепција": *перцепцијата* претставува само непосреден одраз на одреден објект врз свеста во моментот на неговото дејство на сетилните органи; *набљудувањето*, пак, е планско, организирано и раководено перципирање што се врши со одредена цел.)

Под **обид** се подразбира таков метод на изучување на објектите или појавите, при кој ние се замешуваме во нивната природна состојба и развиток, создавајќи вештачки услови, разложувајќи ги на делови или соединувајќи ги со други објекти односно појави. Притоа, секој објект (или појава) е подложен на набљудување. Според тоа, методот на обид се применува нераздвојно од методот на набљудување и, во таа смисла, тие се сметаат за единствен метод.

Методот на набљудување и обид е карактеристичен за експерименталните науки. Математиката не е експериментална наука, но примената на овој метод во нејзиното предавање зазема мошне важно место, посебно во наставата во основното училиште.

Методот на набљудување и обид е тесно сврзан со т.н. *лабораториска работа* по математика, користена особено во наставата по геометрија. Набљудувањето и обидот треба да бидат насочени кон создавање на специјални ситуации што ќе им овозможат на учениците да извлечат од нив очигледни законитости, геометриски факти, идеи на докази и сл. Резултатите на еден обид, т.е. на лабораториската работа, најчесто служат како појдовна основа за индуктивни заклучоци, со чија помош се остварува некое откритие.

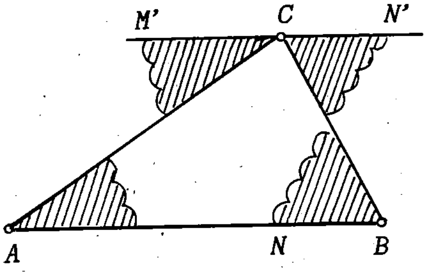
Да разгледаме еден пример кога обидот помага да се открие едно геометриско својство, а го укажува и патот на неговиот логички доказ.

Пример 1. Во VI одделение се изучува *теоремата за збирот на внатрешните агли во триаголник.*

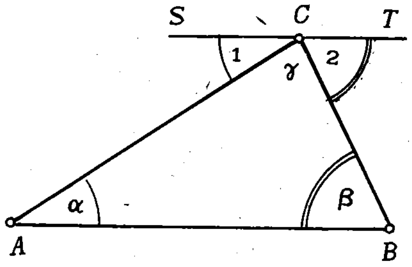
Прво, на учениците им се задава задача да нацртаат триаголник во тетратките, да ги измерат неговите агли и да го најдат збирот. Некои ќе најдат дека збирот е помал од 180°, а други дека е поголем од 180°, а трети, можеби и 180°! Учениците нагаѓаат дека треба да се добие 180°, а другиот резултат се објаснува со грешките во мерењето. Така тие „откриваат" дека: „збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180°.

Друг обид ќе го потврди ова тврдење и ќе даде можност да се насети идејата на еден доказ.

Секој ученик има приготвено триаголник, изрежан од хартија. На учениците им се предлага да откинат два агла од триаголникот и да ги наместат на третиот агол, како на цртежот 1.



Црт. 1



Црт. 2

Учениците забележуваат дека трите агли, со заедничко теме C, образуваат рамен агол, што значи дека нивниот збир е 180°.

Но, дали е сигурно дека отсечките $M'C$ и CN' на црт. 1 лежат на иста права? Не може ли таа да биде искршена линија што многу малку отстапува од права линија - толку колку што не можеме да забележиме? Во тој случај збирот на аглите веќе не ќе биде 180°!

И така, спроведениот обид не претставува доказ. Меѓутоа, анализирајќи го црт. 2, можеме да согледаме една потврда на горната хипотеза, како и пат за еден доказ. Наместо да ги откинуваме двата агла и да ги поставуваме до третиот, ние ќе ја нацртаме полуправата CS, така што $\sphericalangle SCA = \alpha$ и полуправата CT, така што $\sphericalangle TCB = \beta$. (Натаму учениците лесно ќе откријат дека полуправите SC, CT образуваат права, откако ќе согледаат дека $ST \parallel AB$ - поради тоа што $\sphericalangle 1 = \alpha$ и $\sphericalangle 2 = \beta$, како наизменични агли.)

Набљудувањето и обидот многу често можат да му помогнат на ученикот сознателно да усвои определени поими. Еве еден пример.

Пример 2. При изучувањето на *поимите прост и сложен број*, ученикот полесно ќе навлезе во нивната суштина, ако претходно го набљудува разложувањето на множители на неколку природни броеви и, потоа, ако спроведе такви разложувања за повеќе броеви. На пример, имаме:

$$3 = 1\cdot3;\quad 6 = 1\cdot2\cdot3 = 1\cdot6;\quad 11 = 1\cdot11;\quad 18 = 1\cdot2\cdot3\cdot3 = 1\cdot3\cdot6 = 1\cdot2\cdot9.$$

Со набљудување, ученикот забележува дека броевите 3 и 1 имаат точно по два множитела, а 6 и 18 - по три или повеќе множители.

Како стои работата во тој поглед со другите природни броеви? Од учениците се бара сега да спроведат такви разложувања и на други природни броеви, т.е. „да направат обид" и да вршат „планско набљудување":

$$1=1;\ 2=1\cdot2;\ 4=1\cdot2\cdot2=1\cdot4;\ 5=1\cdot5;\ 7=1\cdot7;\ 8=1\cdot2\cdot2\cdot2=\ldots$$

Во овој случај, набљудувањето и обидот му овозможуваат на ученикот сознателно да ја усвои дефиницијата на прост број и на сложен број (**прост број** е таков природен број што има точно два различни делители, а **сложен број** - тоа е природен број што има три или повеќе различни множители).

И така, набљудувањето и обидот се мошне важни во онаа етапа од образованието, кога обидот за учениците е поубедлив отколку логичкиот доказ. Набљудувањето и обидот треба да бидат насочени кон создавање специјални ситуации што ќе им овозможат на учениците сами да извлечат очигледни законитости, геометриски факти, идеи на докази итн. Резултатите од обидот најчесто служат како појдовни основи за индуктивни заклучоци, со чија помош се остварува определено откритие.

Да забележиме дека набљудувањето и обидот не се водечки методи на математичките иследувања, но во наставата тие имаат важна улога. Меѓутоа, наставникот треба на соодветен начин да им предочува на учениците дека резултатите од набљудувањето и обидот не смее да се прифаќаат за строго образложение на некој факт, туку само како средство или помош да се открие тој факт.

2.2. СПОРЕДБА

Споредбата е мисловна операција при која се врши мисловно откривање на сличности и разлики меѓу објектите што се испитуваат. Неговата важност како научен метод е содржана во познатиот афоризам: „Сѐ се сознава со споредба".

При користењето на овој метод неопходно е да се уважуваат следниве барања, наречени *принципи на споредба*:

1) споредбата треба *да има смисла*, т.е. треба да се спо-

редуваат објекти што имаат определена врска,

2) споредбата *да се спроведува плански*, т.е. треба јасно да се издвојат оние својства врз кои ќе се врши споредбата,

3) споредбата треба *да биде комплетна*, т.е. до крај изведена.

Методот на споредба се среќава на секој чекор. Така, при откривањето на теоремата за збирот на внатрешните агли на триаголникот (пример 1), со извршувањето на обидите и набљудувањата, паралелно се вршат споредувања на резултатите со претходно добиените (или добиени од други лица). И при усвојувањето на поимите прост и сложен број во примерот 2, со набљудувањата е присутна и споредбата.

Општо земено, методот на споредба е присутен при откривањето и усвојувањето на многу поими; притоа, често е неопходно да се вршат споредби меѓу објектите што му припаѓаат на обемот на разгледуваниот поим, како и со објекти што не му припаѓаат.

Така, методот на споредба е корисно средство за изучување на складноста и сличноста на триаголниците, за многуаголниците, аритметичката и геометриската прогресија и друго, при што се вршат обиди и набљудувања, а заедно со тоа и - споредби. Всушност, речиси секоја примена на методот на обид и набљудување е придружена со споредба.

Да забележиме дека методот на споредба е мошне корисен при решавањето задачи од одреден тип, а е присутен и при откривањето на разни научни закони (при што, се разбира, доаѓаат до израз и другите научни методи: индукција, аналогија, анализа и синтеза и друго).

2.3. ВЕЖБИ

1. Набљудувај ја дадената низа и установи го правилото според кое таа се формира:

   а) 2,5,8,11,14, ... б) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, ...

   в) 3,13,23,43,53,73, ... г) 11,31,41,61,71,101, ...

2. Разгледај ги вредностите на последователните збирови:

   а) 1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, ...

   б) 1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, ...

   Има ли едноставно правило?

3. Како подготовка за изучување на признакот САС за складност на триаголници (во VI одделение), за домашна работа во претходниот час, на учениците обично им се задава задача како следнава: „Нацртај $\triangle ABC$, а потоа, нацртај $\triangle A_1B_1C_1$ на кој $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$, $\overline{A_1C_1} = \overline{AC}$ и $\alpha_1 = \alpha$. Потоа измери ги и спореди ги другите основни елементи β и β_1, γ и γ_1, $\overline{BC}$ и

$\overline{B_1C_1}$.Запиши што ќе забележиш".

Кои методи ќе ги примени ученикот при решавањето на оваа задача за да дојде до залучокот што му се сугерира?

4. Формулирај задача, аналогно на задачата 3, во која ученикот ќе го користи методот на обид и набљудување и методот на споредба:
   а) за откривање на признакот АСА за складност на триаголници,
   б) за откривање на првиот признак (агол - агол) за сличност на триаголници.
5. При воведување на поимот аритметичка прогресија, на учениците може да им се предложи да споредат меѓу себе неколку дадени низи што се формирани со помош на едно исто, заедничко за нив својство. Направи го тоа со конкретни примери и уочи кои научни методи се применуваат.
6. Установи во која етапа при откривањето на формулата за општиот член на аритметичка прогресија се јавува методот на споредба.
7. Разгледај ја таблицата: 1 = 0+1; 2+3+4 = 1+8; 5+6+7+8+9 = = 8+ 27; 10+11+12+13+14+15+16 = 27+64 и уочи ја општата законитост; изрази ја таа законитост со соодветни математички ознаки и докажи ја.
8. Разгледај го учебникот по геометрија за VI или VIII одделение и пронајди неколку места (примери, задачи) во кои се применуваат: обид, набљудување, споредба.

3. АНАЛИЗА И СИНТЕЗА

3.1. ШТО Е АНАЛИЗА, А ШТО СИНТЕЗА?

Анализата и синтезата, како научни методи и како начини на мислење, се извонредно важни за развитокот на науките, а посебно за математиката. Во наставата по математика тие се јавуваат во разни форми: како методи за решавање задачи, како начини за воведување математички поими и за изучување на нивните својства, како методи за докажување теореми итн.

Анализата означува раставување на еден објект или појава на карактеристичните елементи, со цел да се испитаат поединечно, како составни делови на една целина. **Синтезата** пак означува составување на деловите или својствата на изучуваниот објект во единствена целина. (Со ова значење тие се среќаваат и сега во некои експериментални науки, како на пример во хемијата: реакции на разлагањето, реакции на соединувањето на хемиските супстанции.)

Како мисловна операција, *анализата означува*: *тргнување од последиците и одење кон причините што довеле до тие по-*

следици, а *синтезата означува: тргнување од причините и преминување на последицата, предизвикана од тие причини.*

Анализата и синтезата, како методи на научното истражување, нагледно ги илустрирал и *Рене Декарт* (1596 - 1650) во својата „Логика" со следниов пример:

„Да си го поставиме прашањето: дали јас сум му роднина на Карло Велики? До одговорот може да се дојде на два начина: може да се оди по родословното дрво:

а) кон минатото, т.е. од мене до Карло Велики, или

б) од минатото, т.е. од Карло Велики до мене.

Ако излезе дека сме на истото родословно дрво, тогаш ние сме роднини", пишува Декарт.

Првиот начин на решавањето на таа задача укажува што е тоа анализа, а вториот - што е тоа синтеза.

3.2. АНАЛИТИЧНО-СИНТЕТИЧЕН МЕТОД

Анализата и синтезата се најважните психолошки карактеристики на мислењето; процесот на мислењето, пред сè е анализирање, а потоа синтетизирање на анализираното; потоа доаѓаат обопштувањето, систематизирањето и апстракцијата како нивни продукти.

Во мисловните процеси, анализата непрекинато преминува во синтеза и обратно. Општо, во сознавањето нема два изолирани патишта од кои едниот би претставувал синтеза, а другиот анализа. Анализата и синтезата како методи, практично се нераздвојни еден од друг. Тие заедно се применуваат, се дополнуваат и сочинуваат единствен аналитично-синтетичен метод.

Така, со помош на анализа, дадена задача се расчленува на неколку попрости задачи, а потоа со помош на синтеза, се врши обединување на решенијата во една целина. Тоа посебно јасно се покажува при решавањето на конструктивни задачи. Исто така, при докажувањето на сличноста на два дадени триаголници, ние отпрво ги расчленуваме соодветните елементи на дадените триаголници, т.е. ги разгледуваме нивните агли и страни, што значи дека спроведуваме анализа, а потоа правиме заклучок за складноста на соодветните агли и пропорционалноста на соодветните страни, што значи дека правиме синтеза. Врз основа на добиените заклучоци правиме извод за тоа дали тие триаголници се слични или не се, т.е. спроведуваме нова синтеза.

Со примената на анализата и синтезата ќе се сретнеме подоцна (Гл. IV, V и VII: за воведување математички поими и за изучување нивни својства, за докажување теореми и за решавање задачи).

3.3. ВЕЖБИ

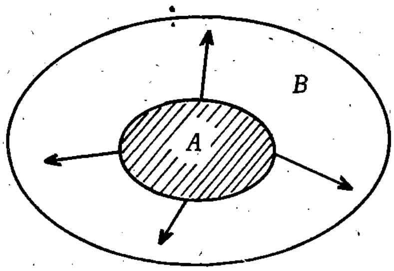
Реши ги наведените задачи и, во секоја од нив, укажи ги деловите на решението во кои се врши анализа и деловите во кои се врши синтеза (1 - 3).

1. Конструирај триаголник со страни a,b и тежишна линија t_a.
2. КОнструирај кружница со даден радиус, ако е дадена една нејзина точка и тангента во таа точка.
3. Една цевка полни еден базен за 15 минути, друга - за 20, а трета го испразнува за 30 минути. За кое време ќе се наполни базенот ако се отворени трите цевки?
4. Докажи ја теоремата: „Симетралите на аглите при основата на рамнокрак триаголник се еднакви меѓу себе".Потоа, укажи на моментите во доказот кога вршеше анализа, а кога синтеза.
5. Истите барања како во задача 4 за теоремата: „Ако збирот на два надворешни агли во еден триаголник е 270°, тогаш тој триаголник е правоаголен".

4. ОБОПШТУВАЊЕ. СИСТЕМАТИЗАЦИЈА. АПСТРАКЦИЈА

4.1. ОБОПШТУВАЊЕ

Обопштувањето е процес или резултат на мисловно обединување на издвоени општи својства што се суштински за дадена класа објекти или појави. Може да се каже дека обопштувањето претставува премин од дадено множество објекти (A) кон разгледување пошироко множество (B) што го содржи даденото (црт. 1).



Црт. 1

На пример, ние *вршиме обопштување* кога преминуваме:

а) од разгледување триаголници кон разгледување многуаголници со произволно многу страни;

б) од разгледување тригонометриски функции од остар агол кон тригонометриски функции од произволен агол;

в) од разгледување степени со природен показател кон разгледување степени со цел показател итн.

Во примерите а) и б) обопштувањето се остварува во две суштинско различни насоки. Во примерот а) при преминот од триаголници кон многуаголници со n страни, ние *заменуваме* *константа со променлива*, т.е. *фиксираниот број 3 со произволен број n* (ограничен само со условот $n \geq 3$). Во примерот б) пак, при преминот од остри агли кон произволни агли α, ние *отфрламе ограничување*, имено ограничувањето $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Во некои случаи вршиме обопштување преминувајќи само од еден предмет кон цела класа, којашто го содржи тој предмет, или *од дадено множество кон пошироко множество*, како во в).

Еве уште еден пример на обопштување.

Пример 1. *При откривањето на формулата за n-от член на аритметичка прогресија* може да се почне од некој конкретен пример, како

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \dots$$

и да се изразат разни нејзини членови со помош на првиот член ($a_1=3$) и разликата ($d=4$). Потоа може да се разгледа таа задача поопшто, за произволна аритметичка прогресија

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

со прв член a_1 и разлика d. Имаме:

$$a_2 = a_1+d,\ a_3 = a_1+d = (a_1+d)+d = a_1+2d,$$

$$a_4 = a_3+d = (a_1+2d)+d = a_1+3d \text{ итн.}$$

Секако, корисно е тие равенства да се обопштат во една формула

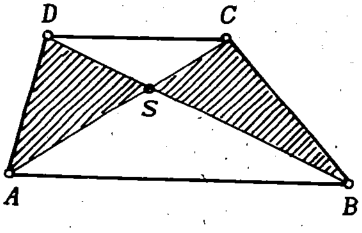
$$a_n = a_1+(n-1)d.$$

Оваа формула, пак, добива натамошно обопштување како линеарна функција од природен аргумент:

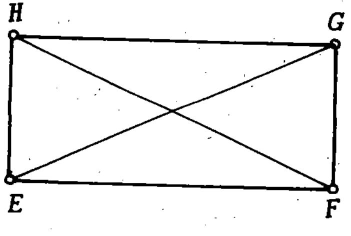
$$y = ax+b,\ x\in\mathbb{N}.$$

Во некои случаи, а често при решавање задачи, може да се примени обопштување со анализа. Еве еден таков пример.

Пример 2. Да се докаже дека во *трапезот *ABCD* триаголниците *ASD*, *BSC* се со еднакви плоштини* (црт. 2).



Црт. 2



Црт. 3

Учениците лесно ќе ја решат оваа задача ако претходно ја решат следнава помошна задача:

„Дијагоналите на правоаголникот се еднакви меѓу себе".

Помошната задача се решава веднаш откако ќе се увиди дека $\triangle EFG \cong \triangle EFH$ (црт. 3).

Учениците што ќе согледаат како мисловно да го остварат преносот на решавањето од помошната на основната задача, брзо ќе ја решат и основната. Притоа, анализата на решението на помошната задача покажува дека клучен момент е користењето на заедничката основа EF на двата триаголника EFG и EFH.

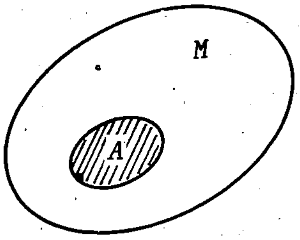
Очигледно, плоштините на тие два триаголника се еднакви, т.е. $P_{\mathrm{EFG}}=P_{\mathrm{EFH}}$, бидејќи имаат иста основа и еднакви висини.

Од истите причини, обопштувајќи го тоа, за основната задача имаме:

$$P_{\mathrm{ASD}} = P_{\mathrm{ABD}} - P_{\mathrm{ABS}} = P_{\mathrm{ABC}} - P_{\mathrm{ABS}} = P_{\mathrm{BSC}}.$$

4.2. СПЕЦИЈАЛИЗАЦИЈА

Специјализацијата како мисловен процес е спротивна на обопштувањето: со неа се издвојува само некое својство од множеството својства на изучуваниот објект. Може да се каже дека и специјализацијата претставува премин од дадено множество M кон некое негово подмножество A (црт. 4).



Црт. 4

На пример, ние *вршиме специјализација* кога од разгледување многуаголници преминуваме кон разгледување правилни многуаголници, а специјализираме и натаму кога преминуваме од правилни многуаголници со n страни кон правилен четириаголник, т.е. кон квадрат.

Тие два премина се остваруваат во две суштинско различни насоки. Во првиот премин, од многуаголници кон правилни многуаголници, ние правиме *ограничување*, т.е. воведување барање сите страни и сите агли на многуаголникот да се еднакви.

При вториот премин ние вршиме *замена на променлива со константа*, т.е ставаме 4 наместо „променливиот природен број" n ($n \geq 3$).

Пример 3. Плоштината P на правоаголник со страни a,b се пресметува со формулата $P=ab$. Специјално, ако $b=a$, т.е. ако се работи за квадрат, тогаш ја добиваме формулата $P=a^2$ (тука вршиме специјализација со ограничување).

Значи, *специјализација вршиме кога:*

а) воведуваме ограничување (правоаголник → квадрат),

б) вршиме замена на променлива со константа ($n \to 4$),

в) од дадено множество, преминуваме на негово подмножество ($\mathbb{R} \to \mathbb{N}$).

Во последниот случај, како крајност, ние вршиме специјализација и кога преминуваме од цела класа објекти кон еден единствен објект што се содржи во таа класа. На пример, кога сакаме да провериме некое општо тврдење за простите броеви (да речеме: секој прост број различен од 2, може да се претстави во обликот $4n-1$ или $4n+1$, $n\in\mathbb{N}$), ние избираме некој прост број, да речеме 19, и проверуваме дали тоа општо тврдење важи или не важи имено за бројот 19.

4.3. СИСТЕМАТИЗАЦИЈА И КЛАСИФИКАЦИЈА

Систематизацијата е мисловна дејност при која изучуваните објекти се организираат во определен систем, врз основа на избран принцип.

На пример, при изучувањето на *поимот триаголник,* обично се бара од учениците да цртаат разни триаголници при што им се насочува вниманието на аглите односно на страните од секој нацртан триаголник одделно. По извршените набљудувања, споредување и анализирање се врши систематизирање: учениците согледуваат дека при некои триаголници сите три агли се остри, при други - има еден агол што е прав, при трети - има еден агол што е тап, кај некој триаголник сите три страни се еднакви меѓу себе итн.

На систематизацијата ѝ претходат: анализа, синтеза, обопштување и споредба, чии резултати се користат и се резимираат во систематизацијата. Како резултат на систематизацијата се добиваат системи поими, коишто се составен дел на една дедуктивна теорија. Систематизацијата зазема важно место во наставата, во развитокот на мислењето и помнењето.

Најважниот вид систематизација е *класификацијата*, а тоа значи распоредување на објектите по групи врз основа на утврдување сличности и разлики меѓу нив. Да забележиме дека систематизацијата не се сведува на класификација. Подоцна (во Гл. IV) ќе се задржиме посебно на проблемот за класификација на поими.

4.4. АПСТРАКЦИЈА И КОНКРЕТИЗАЦИЈА

Во процесот на сознавањето на реалниот свет, кај човекот се одразуваат објектите и појавите на два начина: нагледно, како „сетилни одрази" и мисловно, т.е. во форма на поими, коишто претставуваат само „приближни слики" на тие реални објекти или појави. Притоа, поимите се формираат во свеста на човекот со оттргнување на несуштинското во изучуваниот објект, а исто така со обопштување, коешто го упростува изучувањето на дадениот објект, претставен во реалноста обично многу разновидно.

Мисловната операција со која се врши одделување на својствата на изучуваниот објект - запоставување на несуштинските, а нагласување на неговите суштински својства, се вика **апстрахирање** или **апстракција**. И самиот резултат на таа мисловна операција често се вика апстракција.

Така, разгледувајќи некој предмет (на пример станбена зграда) како геометриско тело, ние обраќаме внимание само на неговата форма, големина и положба во просторот, а се „апстрахираме" од другите негови својства: хемискиот состав, густината на материјалот, тврдоста, функционалноста и друго, т.е. вршиме апстракција.

Пример 4. Да разгледаме една реална апстракција: *задачата за поставување топловод меѓу две места*, да речеме A и B. Самиот топловод е реален објект којшто има разновидни, за практиката важни својства: тежина на одделните цевки, квалитет на металот, димензии, форма, должина, квалитет на изолационата облога, пропусна моќ итн.

Почнувајќи со проектирањето, инжинерот-конструктор прво е заинтересиран за *должината на топловодот* и неговата траса, оградувајќи се од другите својства на објектот. Така се јавува првиот апстрактен модел на топловодот: *геометриска линија* (од точката A до точката B). Потоа, конструкторот го проучува прашањето за најсоодветната *форма и димензии на топловодот*, без да води сега сметка за трасата. Со тоа се јавува втор апстрактен модел на истиот објект: претставување на топловодот како *геометриско тело*. Во одредена етапа на констрруирањето, инженерот го насочува вниманието само на облогата (на пример бојата што ќе го штити металот од корозија или на слојот за изолација), па топловодот се разгледува сега како *геометриска површина*.

Од реченото во почетокот произлегува дека апстракцијата може да биде *нагледна* (или *сетилна*) и *мисловна*. Мисловната апстракција со помош на мисли или со зборови, а по пат на обопштување, создава нов идеален предмет, наречен **поим**. Специјално на овој начин се формираат сите математички поими. Бидејќи мисловното одделување на суштинските од несуштинските (за даденото разгледување) својства се остварува со помош на обопштување, излегува дека апстракцијата не може да се реализира без обопштување. Обопштувањето и апстракцијата постојано се применуваат во процесот на формирањето на поими.

Методот на апстракција е многу важен за математичкото сознавање, а според тоа и за наставата по математика. За да можат учениците да ја почувствуваат важноста на овој метод, наставникот треба често, во згодни моменти, да им го посочува неговото појавување или користење.

Пример 5. (Наставникот:) Што означува, т.е. каква конкретна содржина може да има равенството:

$$4\cdot 5 = 20?$$

Можни одговори (на учениците): а) плоштина на правоаголник со страни $a=4$ и $b=5$; б) вредноста на 4 предмети (на пример моливи) по 5 денари; в) патот изминат за 4 часа со брзина од 5 km/h; г) вкупен број прсти од 4 раце итн.

Значи, равенството $4\cdot 5=20$ претставува апстрактен модел за секоја од наброените ситуации. Но, можеме да кажеме и обратно; секој од наведените одговори претставува конкретизација на равенството $4\cdot 5=20$.

Конкретизацијата е мисловен процес спротивен на апстракцијата. Таа ја открива содржината на научните апстракции со вклучување на конкретни факти/ или врски.

На пример, ако на функцијата $y=ax+b$ ѝ го дадеме следново толкување: y е патот (s), x е времето (t), a е брзината (v) и b е почетниот пат (s_o) при рамномерно движење, тогаш добиваме една конкретизација ($s = vt+s_o$) на апстрактниот модел $y = ax+b$. Конкретизацијата може да настапи како: а) илустрација, б) потврдување на некоја апстрактна ситуација, в) примена на некое својство во конкретни услови.

Пример 6. а) За собирањето на рационални броеви важи, апстрактно, равенството $x+y = y+x$; тоа својство може да се илустрира конкретно, со равенството: $5+4 = 4+5$.

б) Утврдувајќи дека броевите од обликот $n\cdot(n^2+5)$ (n е природен број) се деливи со 6, ние можеме да го провериме тоа својство со конкретни примери: $1\cdot(1^2+5)$(за $n=1$), $2\cdot(2^2+5)$ (за $n=2$) итн. (Се разбира, тие примери не ја докажуваат претпоставката, но можат да ја поткрепат или пак да ја побијат.)

в) Откако ќе биде изучена формулата $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$, таа може да се примени во конкретни пресметувања:

$$\sqrt{73^2-48^2} = \sqrt{(73+48)(73-48)} = \sqrt{121\cdot 25} = 11\cdot 5 = 55.$$

4.5. ЗАБЕЛЕШКА

Во процесот на научното иследување, а исто така и во процесот на наставата, обопштувањето и специјализацијата, апстракцијата и конкретизацијата, анализата и синтезата, споредувањето и набљудувањето и обидот, дејствуваат заемно и се јавуваат испреплетено. Нивното одвоено разгледување како што рековме во параграфот 1, има смисла само во процесот на нивното изучување.

4.6. ВЕЖБИ

1. Увери се дека 13|512 512. Дали е точно и тврдењето 13|734 734? Да? Какво обопштување се наметнува? Дали тоа е точно?
2. Тргнувајќи од формулата за плоштина на правоаголник, направи обопштување за пресметување плоштина од паралелограм.
3. Познато ти е дека во правоаголен триаголник плоштината на квадратот над хипотенузата е еднаква со збирот на плоштините на квадратите над катетите (Питагорова теорема). Ако „квадрат" се замени со „рамностран триаголник", ќе се добие пак точно тврдење (провери). Направи и други обопштувања на Питагоровата теорема.
4. Од формулата за плоштина на триаголник со страни a, b, c и радиус на опишаната кружница, изведи формула за плоштина на рамностран триаголник. Каков вид специјализација направи?
5. Направи една специјализација на косинусната теорема.
6. Запиши една конкретизација на апстрактниот модел $y = ax+b$ (линеарна функција) во врска со аритметичката прогресија.
7. Еден селанец имал кокошки и зајаци. Кај тие кокошки и зајаци вкупно имало 50 глави и 140 нозе. Колку кокошки и колку зајаци имал селанецот? Направи генерализација.
8. Докажи дека средната линија на тангентен рамнокрак трапез е еднаква со кракот. Кои мисловни процеси (анализа, синтеза, обопштување, ...) и каде во текот на решавањето на задачата се користат?
9. Илустрирај го процесот на апстракција за комутативниот закон на собирањето.

5. ИНДУКЦИЈА. ДЕДУКЦИЈА. АНАЛОГИЈА

5.1. Во процесот на сознавањето неопходен инструмент е т.н. логичко заклучување. Тоа се применува кога треба да се спроведе некое иследување, како на пример, да се изведе некоја последица, да се реализира доказ, да се систематизира знаење, да се провери хипотеза и друго.

Логичкото заклучување или, просто, **изведувањето заклучок**, претсавува мисловна операција со која се добива нов извод од неколку тврдења. Неговата исклучителна вредност за процесот на сознавањето се состои во тоа што, со негова помош, се добива ново знаење без обраќање кон обид или практична проверка, а со тоа значително се прошируваат можностите за научното сознавање.

Логичкото заклучување се состои од два дела: претпоставки и заклучок. Тврдењата од кои се гради изводот се **претпоставки**, а тврдењето што се добива како резултат на таа операција, т.е. новото знаење, е **заклучок**.

Постојат неколку форми на логичко заклучување: дедуктивно, индуктивно и по аналогија.

5.2. ИНДУКЦИЈА

Индуктивно заклучување или **индукција** е логичко заклучување при кое, врз основа на некој факт, добиен за неколку одделни предмети од дадена класа, се прави општ извод што содржи некое знаење за сите предмети од таа класа.

Пример 1. Знаејќи дека $1 = 1^2$, $1+3 = 2^2$, $1+3+5 = 3^2$, $1+3+5+7 = 4^2$ (провери!), изведуваме заклучок дека

$$1+3+5+...+(2n-1) = n^2 \qquad (1)$$

за секој $n\in\mathbb{N}$. Со други зборови, ние знаеме дека формулата (1) е точна за $n\in\{1,2,3,4\}$, а правиме заклучок дека (1) важи за секој природен број (иако тука немаме некое цврсто оправдание за тоа).

Пример 2. Изразот n^2-n+11, за $n\in\{1,2,3,4\}$,како што лесно можеш да се увериш, претставува прост број.Од точноста на тие неколку одделни случаи,заклучуваме дека изразот n^2-n+11, за ској $n\in\mathbb{N}$, претставува прост број.

Се разбира, за ниеден од двата примера немаме основа да сметаме дека направениот заклучок е сигурно точен. Неколкуте посебни случаи за кои установивме дека тврдењето е точно, ни даваат само надеж дека тоа ќе биде точно и во „општиот случај". Со другизборови, направениот извод е само веројатно (но не сигурно) точно тврдење.

Во вакви случаи кога индуктивниот извод се прави врз основа само на неколку, честопати далеку од сите посебни случаи, тогаш за индукцијата велиме дека е **непотполна** и добиениот заклучок ќе биде секогаш вистинит. Во тој случај, заклучокот е само хипотеза, којашто ќе се претвори во сигурно, веродостојно знаење само откако ќе се извршат проверки, образложенија или докази.

При сознавањето, човекот оди од посебни случаи кон општо правило, од факти кон обопштување. Во почетниот период на образованието, кога учениците сè уште не владеат со методите на строги докази, непотполната индукција има улога на средство за мотивирање на тврдењата. Ако пак индуктивниот заклучок се прави врз основа на разгледувањето на сите можни случаи, тогаш велиме дека изводот е направен со **потполна индукција** и, во тој случај, добиениот заклучок е веродостоен, т.е. вистинит.

Пример 3. 1) Права и кружница имаат најмногу две заеднички точки. 2) Права и елипса имаат најмногу две заеднички точки.3) Права и хипербола имаат најмногу две заеднички точки. 4) Права и парабола имаат најмногу две заеднички точки.

Заклучок: Права и конусен пресек имаат најмногу две заеднички точки. (Индукцијата е потполна и добиениот заклучок е точен.)

5.3. ДЕДУКЦИЈА

За сознавањето се многу важни и дедуктивните изводи. **Дедукцијата** е логичко заклучување при кое некоја општа ситуација се применува на посебен случај. Заклучокот што се добива со дедуктивен извод е (секогаш!) точно, т.е. веродостојно тврдење. Дедуктивните заклучувања често се употребуваат при решавањето на задачи или при докажувањето на теореми.

Пример 4. Познато ни е дека: сите истоимени правилни многуаголници се слични (општа ситуација). Нека се дадени два правилни петаголници (посебен случај). Тогаш тие два петаголника се слични.

Значи, овде се оди од општо кон посебно, па во таа смисла дедукцијата е спротивна на индукцијата. Сепак, индукцијата и дедукцијата се тесно сврзани: индуктивните изводи се проверуваат, односно се докажуваат со помош на дедуктивни методи, а овие понекогаш се потпираат на претходни индуктивни заклучоци, коишто се користат како претпоставки.

Индукцијата и дедукцијата се најважните методи на научното сознавање. Поради тоа тие широко се применуваат во училишниот курс по математика и таму добиваат своја интерпретација.

5.4. АНАЛОГИЈА

Аналогијата се јавува како извор на хипотези и досетки паралелно со непотполната индукција. Терминот **аналогија** потекнува од грчкиот збор *αναλογια* (*соодветност, сличност, сродност*) и означува согласување во односите меѓу две, квалитативно различни целини или системи. **Заклучувањето по аналогија** пак е мисловна постапка при која, од согледувањето дека два објекта се согласуваат во одредени својства или односи, се изведува заклучок дека тие се согласуваат и во други својства или односи што не биле претходно согледани непосредно.

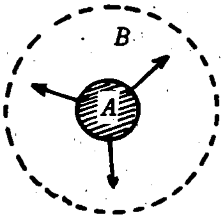
Пример 5. Паралелограмот и паралелопипедот можеме да ги сметаме за аналогни фигури (паралелограмот може да се добие со поместување на дадена отсечка во даден правец, а и паралелопипедот може да се добие со паралелно поместување на паралелограм во даден правец). Знаеме дека во паралелограмот дијагоналите заемно се преполовуваат; по аналогија можеме да заклучиме дека просторните дијагонали на паралелопипедот (веројатно) заемно се преполовуваат.

Заклучоците по аналогија се само веројатно точни (*т.е. не се сигурно точни*) и затоа тие, како и заклучоците по непотполна индукција подлежат на проверка, на доказ со некој дедуктивен метод. Вредноста на заклучокот по аналогија зависи од тоа колку е суштинска таа сличност на објектите, врз која е заснован тој заклучок. Заклучувањето по аналогија, како и заклучувањето по индукција, широко се применува во наставата по математика.

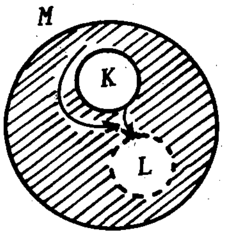
5.5. РЕЗИМЕ

Суштината на индуктивните и дедуктивните изводи како и на заклучувањето по аналогија, можеме да си ја претставиме на следниов начин.

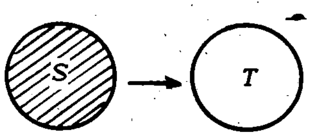
(А) Кога правиме индуктивен извод, ние всушност разгле-



Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3

дуваме едно множество *A* од објекти, а заклучуваме за објектите на некое пошироко множество *B*, што го содржи *A* (црт. 1); притоа заклучокот што го правиме е само веројатно точен.

(Б) При дедуктивните изводи, всушност, разгледуваме едно множество *M* и некое негово подмножество *K*, а добиваме заклучок за тоа или за друго подмножество *L* (црт. 2); притоа, заклучокот е сигурно точен.

(В) При заклучувањето по аналогија зборуваме за објектите на едно множество *S*, а правиме заклучок за објектите најчесто од друго множество *T* (црт. 3); притоа, заклучокот е само веројатно вистинит.

Сите овие мисловни операции и начини на барање нови вистини се доминантни во математичките науки. Затоа е сосем разбирливо што тие играат голема улога и во наставата по математика. Овде ќе се задоволиме со овие забелешки за индукцијата, дедукцијата и аналогијата, но поради нивната важност во наставата по математика, на нив ќе се навратиме подоцна пак (Гл. VI).

5.6. ВЕЖБИ

1. Трите први членови од низата 5, 15, 25, ... (броеви што завршуваат на 5) се деливи со 5. Дали се деливи со 5 и другите членови? Трите први членови од низата 3,13,23,... (броеви што завршуваат на 3) се прости броеви. Дали се прости и другите членови? Образложи!
2. Уочи дека: $1 = 1$; $1-4 = -(1+2)$; $1-4+9 = 1+2+3$; $1-4+9-16 = -(1+2+3+4)$. Досети се кон кој општ закон водат овие примери, изрази го со помош на соодветни математички ознаки и докажи го.
3. Направи дедуктивен извод во врска со сличноста на триаголниците. (Упат. Земи го првиот признак и разгледај: а) два правоаголни триаголници што имаат по еден еднаков остар агол или б) два рамнокраки триаголници чиишто агли при врвовите меѓусебно се еднакви.)
4. Четирите дијагонали на паралелопипед имаат заедничка точка, којашто е средина на секоја од нив. Дали постои попроста аналогна теорема?
5. Ако две прави во просторот се пресечат со три паралелни рамнини, тогаш соодветните отсечки се пропорционални. Докажи! (За да најдеш доказ, еве едно прашање: дали постои попроста аналогна теорема?)
6. (Задача - досетка) Од 6 кибритчиња направи 4 рамнострани (складни) триаголници. Формулирај аналогна задача за (складни) квадрати.
7. Како размислуваат логичар, математичар, физичар и инженер (од книгата „Математика и правдоподобные рассуждения" од Д. Пойа, американски математичар - педагог).

„Погледни го оној *математичар* - вели логичарот. Тој забележува дека првите деведесет и девет броеви се помали од сто и, оттука, со помош на тоа што го вика индукција, заклучува дека сите броеви се помали од сто."

„*Физичарот* верува, - вели математичарот, - дека бројот 60 е делив со сите броеви. Тој забележува дека 60 е делив со 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тој проверува неколку други броеви, на пример 10, 20 и 30, земени на среќа, како што вели тој. Бидејќи 60 е делив и со секој од нив, тој смета дека експерименталните податоци се доволни за заклучокот."

„Да, но погледни го *инженерот*, - одвраќа физичарот. - *Инженерот* си мисли дека сите непарни броеви се прости. Секако, 1 може да се смета за прост број, докажува тој. Потоа доаѓаат 3, 5 и 7, без дискусија, сите се прости. Потоа доаѓа 9 - досаден случај; 9 очигледно не е прост број. Но, 11 и 13 секако се прости. Да се вратиме на 9, - вели тој, јас заклучувам дека 9 мора да е грешка на експериментот!"

8. *Во врска со значењето на аналогијата*, забележлива е мислата на полскиот математичар *Стефан Банах* (1892 - 1945): „Математичар е оној (човек) што умее да наоѓа аналогии меѓу тврдења; подобар математичар е тој што установува аналогии на докази; посилен математичар е оној што забележува аналогии на теории; но, можете да си замислите и таков што меѓу аналогии согледува аналогии." Банах слободно може да се вброи во последната, највисока категорија. (Од книгата на А. Эмпахер: „Сила аналогий", Москва 1965, превод од полски.)

III. ПРИНЦИПИ, МЕТОДИ И ФОРМИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА

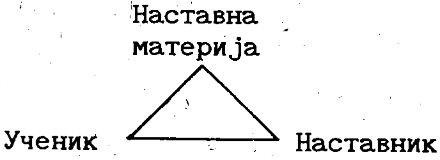
1. НАСТАВЕН ПРОЦЕС

1.1. СТРУКТУРА НА НАСТАВНИОТ ПРОЦЕС

Во I.1.3 наведовме едно кусо објаснение за поимот настава; овде ќе се задржиме подолго на тој поим.

Под **наставен процес** или, покусо, **настава** се подразбира организирана, систематска и усогласена дејност на наставникот и учениците, при која учениците, активно и според определен систем: 1) се здобиваат со знаења, вештини и навики, 2) ги развиваат своите психички и физички способности, 3) изградуваат научен поглед кон светот, 4) ја совладуваат вештината на учењето и културата на работата, 5) се оспособуваат за самообразование и практична работа, 6) се воспитуваат како сестрано развиени личности.

Основни фактори во наставниот процес се: наставната материја, ученикот и наставникот (шематски прикажани на црт. 1).



Црт. 1

Наставата е мошне сложен процес. Тој има повеќе етапи, од кои најважни се: *подготовка* на ученикот за настава, *обработка* на нови наставни содржини, *вежбање, повторување* и *проверување*. Со нив е определена основната структура или основниот тек на наставниот процес, па затоа тие се наречени **основни етапи**.

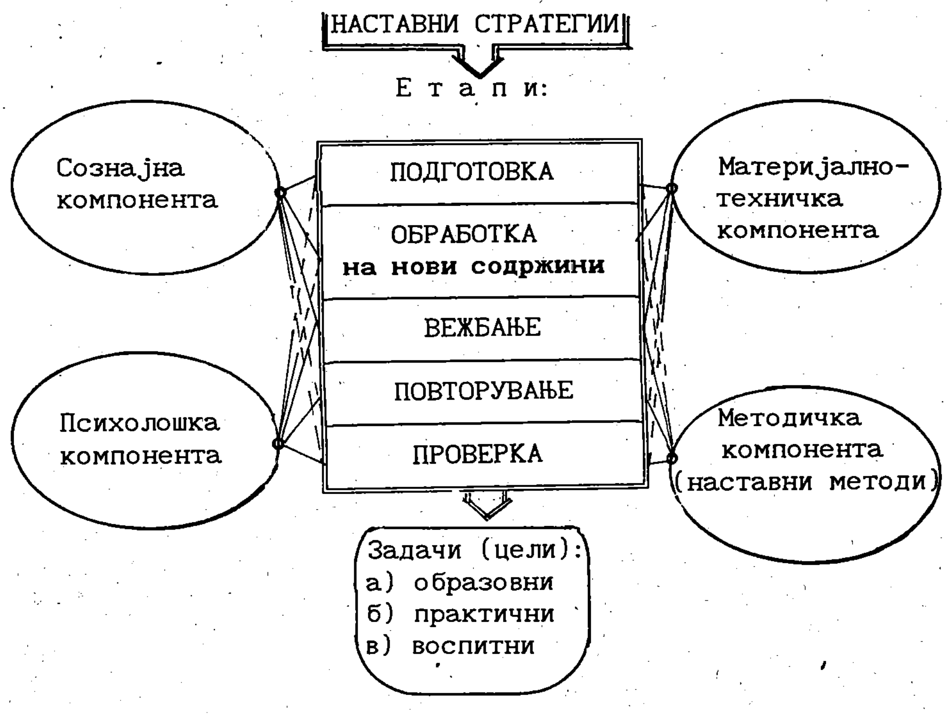
Наставниот процес како целина, а и секоја негова поединечна етапа има свои **компоненти**: *сознајна, психолошка, материјално-техничка* и *методичка компонента*. Секоја компонента пак има повеќе елементи што се преплетуваат меѓусебно и истовремено се интегрираат во одделна етапа како нејзини микроелементи, така што секоја етапа на работата има своја *микроструктура*. (Нешто повеќе за нив ќе биде кажано натаму, во 1.2, 1.3 и 3.1.)

Врз база на основните етапи на наставниот процес и начинот на нивното изведување се изградуваат општи пристапи кон реализацијата на наставата, наречени **наставни стратегии** (но и: **дидактички или наставни системи**). Низ историјата на школата се создавани повеќе такви системи, а во современото (основно и средно) образование најмногу се применуваат: евристичната, програмираната, проблемската, егземпларната и менторската настава. (Нешто повеќе за нив ќе биде кажано подоцна, во 4.3.)

Задачите, т.е. општите цели што се реализираат со наставниот процес (како што рековме во I.3.1) се: а) *образовни* (стекнување знаења, вештини и навики), б) *практични* или *функционални* (оспособување за примена на матаматиката, за користење матаматички инструменти и сметачки прибори, како и за служење со учебна и научно-популарна литература) и в) *воспитни*.

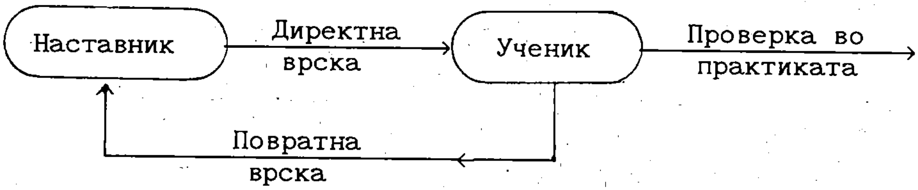
Шематски, структурата на наставниот процес може да се прикаже како на црт.2.

Шематски приказ на структурата на нставниот процес



Црт. 2

┌***Наставата може да се спореди со процесите на управувањето* во кибернетиката:прием, преработка, складирање и предавање на информацијата. Имено, наставникот црпе информација за материјалот (од наставната програма, научната, учебната и методичката литература), го согледува и оценува степенот и можностите на мисловната дејност на ученикот, ја преработува таа информација и, користејќи соодветни средства и методи, му ја предава на ученикот („директна врска"). Ученикот, од своја страна, ја прима информацијата, ја преработува и ја складира, а по потреба тој ја предава во вид на одговори, решенија на задачи („повратна врска") или пак ја проверува во практиката. Тој процес шематски е прикажан на црт.3.



Црт. 3

Да забележиме дека врската ученик→наставник („повратната врска") е суштински дел од наставата. Со таа врска се овозможува наствникот да се вмешува ефективно и навреме во учењето на ученикот, во текот на наставниот час. **┘

1.2. СОЗНАЈНА КОМПОНЕНТА НА НАСТАВНИОТ ПРОЦЕС

Сознавањето, т.е. процесот на стекнување знаења, е највалната компонента на наставата. Тоа ѝ претходи на секоја од основните етапи, а и воспитните процеси се градат врз негови основи и во зависност од него. (Имено, не може да стане збор за некакво стекнување вештини или навики за вежбање, повторување или проверување, за развивање на мислењето, помнењето или која било друга интелектуална способност, без претходно да е стекнато соодветно знаење.)

Сознавањето има три степени (т.е. има три сознајни функции): (а) набљудување, (б) мислење и (в) практика.

(а) **Набљудувањето** претставува планско, организирано и раководено перципирање (како што рековме и во II.1.1).Тоа претставува активност на непосредно сознавање на предметите или појавите со помош на сетилата, па затоа се вика и **сетилно сознавање**. Со него учениците сознаваат факти, т.е. насобираат во својата свест фактографски материјал, неопходен за изведување заклучоци и обопштувања. Затоа е важно учениците да са поттикнуваат на набљудување,т.е. низ наставата да ја развиваат способноста за набљудување и споредување.

Набљудувањето е најнискиот степен на сознавање - со него не се објаснуваат законитостите на стварноста, па затоа не треба да се преценува. Но, исто така, не треба да се потценува, зашто тоа е основа на целокупното сознавање.

(б) Стекнувањето знаења често започнува со набљудување на објектот (предметот, процесот, појавата или на некои нивни модели, слики и сл.) и, како резултат на тоа, се создаваат претстави во сеќавањето на ученикот. Така стекнатите сетилни искуства „мисловно се обработуваат", со што се постигнува повисок степен на сознавање, наречено **мисловно сознавање** или **мислење.**

„Мисловната обработка" на сетилните искуства се врши со помош на *мисловни операции:* анализирање, асоцирање, дедуцирање, индуцирање, обопштување, планирање, преместување, заменување, систематизирање и уште многу други. Во таа смисла, *да се мисли значи мисловно да се оперира.* Може да се каже дека *мислењето е психички процес на воспоставување врски и односи меѓу содржините на објективната стварност и откривање на нејзините законитости, т.е. сознавање на нејзината суштина.*

(в) **Практиката**, како трет степен на сознајната компонента во наставата, означува проверување на резултатите од сознавањето, добиени со претходните сознајни функции - набљудувањето и мислењето. Општо, практиката претставува активен однос на човекот кон природата и општеството. Како сознајна функција, практиката треба да биде присутна во сите етапи на наставниот процес.

Ќе направиме уште неколку забелешки за процесот на сознавањето.

Сознајните функции се реализираат најчесто во меѓусебна поврзаност и зависност (било во науката било во наставата). Но, во некои случаи, тие не мора да се непосредно сврзани, т.е. може да бидат во временско растојание.

Сознајниот процес во наставата, во однос на сознајниот процес во науката, има одредени специфичности. *Основната специфичност е раководната улога на наставникот*: со процесот на стекнувањето на знаења во наставата раководи лице, коешто го знае она што учениците допрва треба да го сознаат и е оспособено да ги води до тие сознанија на упростен и забрзан начин (види I.5.2). На учениците, со помош на наставникот, честопати им е овозможено да ги соберат во неколку наставни часови резултатите од научното сознавање, стекнувано со години, децении па и векови.

Сознајниот процес може да се прикаже шематски како на црт. 4 (в. [29], стр. 68).

Црт. 4

Со набљудувањето се зафаќа надворешниот изглед на проучуваниот објект X.

Со мислењето се опфаќаат односите меѓу поединостите на објектот заради запознавање на неговата суштина.

Со практиката, објектот X се трансформира и се менува со цел да се запознае неговата конкретна внатрешна структура.

Во наставата, како што рековме погоре, патот од набљудувањето кон мислењето и од мислењето кон практиката мошне е забрзан и скратен, благодарение на раководната улога на наставникот.

1.3. МАТЕРИЈАЛНО-ТЕХНИЧКА И ПСИХОЛОШКА КОМПОНЕНТА

Материјално-техничката основа на наставата ја сочинува соодветно избран (конкретен и духовен) материјал, којшто ќе претставува мотивација, извор или помагало за стекнување знаења и развивање способности на учениците. Тој материјал е распореден (за разгледување) во неколку групи.

1) **Изворната стварност** е најширокиот и најточен извор за стекнување знаења и развивање способности, а и најсилен фактор за мотивирање. Во математиката најчесто се користат модели од непосредната или подалечната околина, во врска со воведувањето на поими или тврдења.

2) **Наставните средства**, како важен извор на знаења и база за развивање способности, најчесто се „дидактички обликувани", „ визуелни" (можно: текстуални) модели од изворната стварност. Затоа се нарекуваат уште **дидактички** или **нагледни средства**.

3) Групата **технички помагала** ја сочинуваат разни помошни средства во наставата, како: линијар, шестар, агломер, графоскоп, дијапроектор, епипроектор, кинопроектор и др.

4) **Современите технички уреди** сочинуваат посебна група во материјално техничката компонента на наставата по математика; притоа, обично се мисли на компјутерската опрема, приспособена за реализирање на разните етапи од наставниот процес.

Вкупноста од сите материјално-технички средства, интегрирани или функционално поврзани, се вика **наставна технологија**.

Психолошката компонента е сврзана со прашањето: како ученикот (а и наставникот) ја доживува работата во наставата? Одговорот е: интелектуално и емоционално.

Учејќи одреден наставен материјал, ученикот ги ангажира своите *интелектуални функции*: перципирање, предочување, фантазија, интуиција, мислење, помнење, т.е. сè што е сврзано со стекнување знаења и развивање способности. Со други зборови, тој ги става во функција интелектуалните процеси, без чие впрегнување нема знаења ни способности. Ангажирањето на тие функции претставува **интелектуално доживување** на ученикот во однос на тој материјал. Сознајната страна на наставата, во психолошка смисла, се однесува токму на интелектуалните доживувања.

Емоционалните доживувања се мошне важни за рационално постигнување на целите на наставата; со нив се регулира односот на ученикот кон наставата и степенот на неговата активност.

Се разбира, учениците ја доживуваат работата во наставата субјективно, секој на свој начин. Во таа смисла, се поставува важно барање: во наставата да се создаваат поволни ситуации за интензивно интелектуално и емоционално доживување на секој ученик. Значи, како што рековме во 1.1, психолошките доживувања (т.е. психолошката компонента) треба да бидат присутни во секоја етапа на наставниот процес.

1.4. ВЕЖБИ

1. Избери некоја книга по (општа) дидактика и прочитај ги деловите што се посветени на поимот, суштината и структурата на наставниот процес. Потоа направи споредба со текстот „Наставен процес" во оваа книга.

2. ДИДАКТИЧКИ ПРИНЦИПИ

За успешно одвивање на наставниот процес (по кој било предмет) неопходно е да се обезбеди принципиелно единство меѓу:

- приодот кон учениците,
- изборот на наставните средства,
- изборот на наставните методи.

Ова и други такви барања се посебно третирани во општата дидактика. Тие се формулирани во вид на општи ставови и се наречени дидактички принципи. Значи, **дидактичките принципи** се општи барања што треба да ги задоволи наставата по кој и да било предмет, посебно по матаматика, за успешно постигнување на нејзините цели.

Основни дидактички принципи се: 1) научност, 2) сознајност, 3) активност, 4) нагледност, 5) трјност на знаењата, 6) индивидуален пристап и 7) воспитување низ наставата.

(Во некои учебници се наведуваат и други принципи или некои од горните се разгрануваат на повеќе, на пример: принцип на систематичност, принцип на последователност и др.)

Сите наведени основни дидактички принципи ќе ги разгледаме накусо, подолу.

2.1. ПРИНЦИП НА НАУЧНОСТ

Принципот на научност претставува катагорично барање да им се соопштуваат на учениците само такви факти и, во нивната свест да се формираат само такви поими, коишто се признати како научни.

Тоа значи наставниот материјал треба да ги одразува тенденциите на современата наука, а на учениците тој треба да им се предава во определен **дидактички систем,** којшто се карактеризира со следново:

(а) наставниот материјал го одразува (но не го произведува) научниот систем, разоткривајќи ја врската меѓу научните поими и законитости, како и врската со други наставни предмети;

(б) материјалот се излага последователно, а тоа значи дека наставата оди: од познато кон непознато, од просто кон сложено, од претстави кон поими, од знаења кон вештини;

(в) наставниот материјал се излага систематично (според правилото: „следното се потпира на претходното"), т.е наставата по математика претставува верига од последователни чекори, од кои секој го дополнува претходниот чекор со разумна доза нови знаења; притоа, последователниот распоред на материјалот е неопходен услов за систематичност;

(г) нивото на наставата одговара на психофизичките можности на учениците.

Принципот на научност се вика и *принцип на научност, последователност и систематичност.*

Овој принцип се јавува на секој чекор во наставата по матаматика. *Наставникот се држи до тој принцип ако, на пример:* ја следи коректноста на дефинициите на математичките поими и формулациите на математичките тврдења, ги учи учениците на критички однос кон тврдењата - да не се прифаќа за докажано нешто што не е обосновано. Исто така, наставникот го следи принципот на научност, на пример: кога го прецизира прашањето на кое множество се разгледуваат равенките од видот $x^2+1=0$, кога укажува на тоа дека изразот $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ или $a^0 = 1$ ($a\neq0$, $n\in\mathbb{N}$) е дефиниција, а „доказот" е само разумен мотив за нејзиното прифаќање; итн.

До нарушување на принципот на научност доаѓа најчесто поради невнимателност или незнаење. *На пример, принципот на научност е нарушен:*

1) кога се прави заклучок дека „секоја равенка имо решение", врз основа на фактот дека „секој неконстантен полином има барем еден корен" (навистина, на пример равенката $|x|=-1$ нема решение);

2) ако се докаже дека некој четириаголник има еднакви дијагонали, па од тоа (користејќи го фактот дека во правоаголник дијагоналите се еднакви) се изведе заклучокот дека тој четириаголник е правоаголник (т.е. потребниот услов се замени со доволен); итн.

Но, дали наставникот го нарушува принципот на научност кога ја „премолчува" општата дефиниција или некој општ резултат? - Обично, не! На пример, наставникот не го нарушува тој принцип кога во V одделение дефинира степен a^n само за $n\geq 2$ ($n\in\mathbb{N}$), а премолчува што е тоа 5^{-2} или 5^0. Важно е во таквите случаи наставникот да не воведува нешто од кое учениците би морале да се откажат подоцна, при продлабочени изучувања на тој материјал.

2.2. ПРИНЦИП НА СОЗНАЈНОСТ

Принципот на сознајност претставува барање за слободно владеење со знаењата, т.е. барање за длабоко сфаќање на усвоениот материјал и вештина да се применува во конкретни ситуации.

Тешкотиите, сврзани со реализацијата на овој принцип се обусловени во голема мера од тоа што досега не е доволно проучен механизмот на сфаќањето. Ние, во суштина, не знаеме точно што значи тоа „сфати". Сепак, интуитивно подразбираме дека *ученикот „сфатил" некој материјал,* кога во врска со тој материјал може да одговори на некои прашања, да реши некакви задачи. Оттука е јасно што значи *„несфаќање"*: ако ученикот не може да се снаоѓа низ тие прашања и задачи, тогаш тој не го разбрал односниот материјал. Меѓутоа, ако ученикот успева да се „носи" со нив, тоа уште не значи дека тој „сфатил"; ние можеме само со некоја веројатност да тврдиме дека материјалот е „сфатен". Заклучокот за тоа дека ученикот го сфатил (а не само дека го научил) материјалот е само веројатно, но не и сигурно точен.

Во процесот на наставата е неопходно наставникот да добива повратна информација за квалитетот на усвојувањето на знаењата: *дали материјалот е сознајно усвоен или е само приучен.* Тоа може да се постигне со прашања, поставени правилно (т.е. целисходно) во педагошка смисла.

Прашањето е поставено **педагошки правилно**, ако предизвикува активна мисловна дејност кај ученикот, не допушта одговор што го копира учебникот и содржи оптимална (ни преголема ни премала) доза на неопределеност.

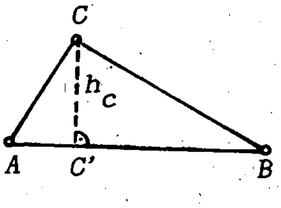
Така, на пример, прашањето: *„Колку кружници може да се повлечат низ три точки што не лежат на иста права?"* (на кое ученикот без тешкотија одговара: „Една") е падагошки неправилно поставено. Ако се постави прашањето: *„Колку кружници може да се повлечат низ три точки?"*, ученикот нема да најде готов одговор во учебникот. Тој мора самиот да го комбинира одговорот, да ги разгледа можните случаи: точките да лежат или да не лежат на иста права.

Во наставата по математика, многу повеќе отколку во другите предмети, се јавува формализам во знаењата, како спротивност на сознајното усвојување. Причината за тоа е специфичноста на математиката и нејзините методи, а посебно користењето на формализиран јазик, при кој постои можност во наставата да дојде до раскин меѓу формата и содржината. Формални знаења се јавуваат особено при т.н. догматско предавање.

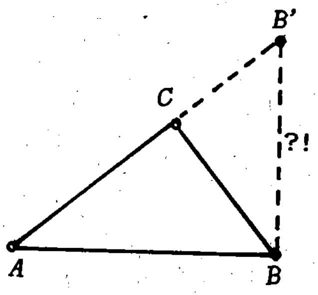
Формалните знаења се карактеризираат со тоа што ученикот го учи и го запомнува надворешниот, формален, симболички израз на еден математички факт, а самиот тој факт или отсуствува од неговото сознание или, пак, е присутен без некоја врска со формалниот израз.

Еве неколку примери на формални знаења.

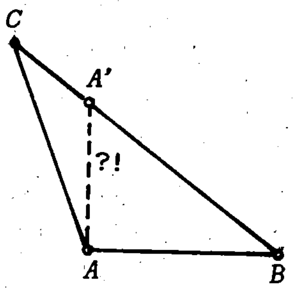
1) Ученикот знае да ја повлече висината h_c во ΔABC (црт. 1), но има тешкотии за висината h_b (црт. 2) или, пак, за висината h_a при тапоаголен триаголник (црт. 3) (сметајќи дека висината мора да стои „вертикално").



Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3

2) Ученикот знае да решава системи равенки кога променливите се означени со x, y, но има тешкотии кога се означени со a, b.

3) Ученикот го нацртал графикот на функцијата $y=\frac{1}{x}$, но не е во состојба да го нацрта графикот на функцијата, дадена со равенството $xy=1$.

4) Ученикот ја знае дефиницијата на апсолутна вредност, но не може да ја реши равенката $|x|=2$ или неравенката $|x|<2$.

Секако, важно е да не дојде до формализам и, ако дојде, да се отстрани, но уште поважно е да се гради настава што не раѓа формални знаења кај учениците.

2.3. ПРИНЦИП НА АКТИВНОСТ

Овој принцип означува барање да се применуваат такви методи во наставата што пробудуваат желба и способност за активна дејност на учениците, т.е. такви методи што им овозможуваат на учениците сами да „откриваат".

Општо, методиката на математиката треба да ја гради наставата задолжително како активна настава.

Основни претпоставки за реализирање на ова барање се:

(а) секоја нова тема почнува со т.н. „*поставување на задачата*": увод во темата, врска на новиот материјал со поранешниот, местото и значењето на темата во општиот систем знаења, основните патишта за нејзиното изучување и можната област на практични примени;

(б) изучувањето на темата се потпира *на животното искуство на учениците, на интуицијата*, на организирањето обиди и набљудувања, на соодветни примери и задачи;

(в) наставникот применува методи што пробудуваат *желба и способност за активна дејност* на учениците;

(г) кај учениците се воспитува *творечки дух* преку самостојно решавање задачи и одговори на нестандардни прашања;

(д) кај учениците се воспитува *критички дух* за оценување на резултатите од нивната работа;

(ѓ) *правилно организирана домашна работа.*

2.4. ПРИНЦИП НА НАГЛЕДНОСТ

Овој принцип претставува барање за примена на нагледни средства во наставата. Нагледноста е мошне важна за постигнување висок степен на апстракција при формирањето на математичките поими.

Нагледноста може да биде симболичка или предметна.

1) *Симболичка нагледност* се постигнува со: цртежи, таблици, графици, шеми, дијаграми.

Притоа е потребно да се научи како се „читаат" графици на функции, формирајќи „речник" (нули, монотоност, минимум, максимум, позитивност, непрекинатост).

2) *Предметна нагледност:* разни модели на геометриски тела, просторни ситуации, рамнински фигури, плочки и др.

3) *Нови средства,* што имаат квалитети на нагледност се: графовите на бинарните релации и логичко-математичкиот јазик.

Но, не треба, пак, да се претерува со нагледноста, зашто тоа може да го уназади создавањето претстави за апстрактни ситуации (без модели).

2.5. ТРАЈНОСТ НА ЗНАЕЊАТА

Ова барање означува задржување во паметта на најважните поими, факти и методи („суштественото"), како трајна сопственост на ученикот.

За реализирање на ова барање е неопходно: научност во наставата, длабоко сфаќање (т.е. сознајно и активно усвојување) на наставниот материјал, добро помнење и добра организација на наставата.

Успешното спроведување на овој принцип зависи и од исполнувањето на следниве барања:

А) *Барања од наставникот:*

1) успешно организирање на повторувањето,
2) благовремена контрола на знаењата,
3) обраќање посебно внимание на систематскиот карактер на зададените задачи и вежби.

Б) *Барања од учениците:*

а) кратко и јасно да го излагаат материјалот, поткрепувајќи го со примери за практично остварливи модели,
б) успешно да извршуваат самостојна работа од разни видови,
в) брзо и точно да ги „повикуваат" дефинициите на важните поими, теоремите, формулите,
г) да умеат да ја применуваат теоријата за едноставни задачи.

2.6. ИНДИВИДУАЛЕН ПРИСТАП

Наставата општо, а секако и наставата по математика, можеме да ја сметаме како процес на управување, во кој „управуван објект" е ученикот. За да се оствари висока ефикасност во тој процес, *неопходно е да се уважуваат индивидуалните особености на ученикот:* неговиот начин на мислење, својствата на неговата памет, способноста за уочување (гледање и слушање), карактерот и волјата. Ова барање е прифатено како дидактички принцип, наречен **индивидуален пристап** (или **диференциран приод**) кон ученикот.

Умствените способности, механизмот на мислењето и сите други горенаброени особености, не се еднакви дури и кај ученици од иста возраст. Така, еден ист материјал, едни ученици го сфаќаат побрзо, а други го сфаќаат побавно; на другите додека да го сфатат им е неопходно подолго време отколку на првите, повеќе разновидни „поткрепувања" во вид на примери или проби. Поради тоа е јасно дека без уважување на принципот за индивидуален пристап не може да се достигне висока ефикасност во наставата.

⌈** Практичната реализација на овој дидактички принцип при вообичаената организација на наставата се судира со сериозни тешкотии. Имено, учејќи по 35 ученици во паралелка, наставникот не е во состојба да ги уважи индивидуалните „брзини" на усвојување на знаењата, поради што тој се ориентира на некаков „*просечен ученик*". Но, тоа доведува до негативни последици, изразени во ниската ефективност на усвојувањата на знаењата. Од една страна, *слабите ученици*, т.е. тие што се под нивото на „просечниот", брзо стануваат неуспешни. (Поради тоа, за нив обично се формира мислење дека „тие не се создадени за математика" или дека „математиката не е за нив". Се разбира, таквиот пристап кон тие ученици е сосема погрешен.) Од друга страна, *силните ученици*, наоѓајќи се на повисоко рамниште од „просечниот", брзо почнуваат да се досадуваат на часовите и го губат интересот за предметот. Таквите негативни последици, ако не се отстрануваат наполно, барем се ублажуваат со усвојување на принципот за индивидуален пристап. **⌋

Реализацијата на овој дидактички принцип е сврзана со применување на соодветни наставни методи, пред сè методот на програмирана настава и методот на самостојна работа на учениците, како и други современи методи на активна настава.

За остварување на овој принцип би било најидеално, секако, кога секој ученик би имал свој наставник (или кога наставникот би работел со секој ученик посебно). Но, се разбира, таа помисла е нереална и неостварлива. Во постојната ситуација може реално да се очекува дека наставникот ќе ги запознае индивидуалните карактеристики на секој ученик посебно, во секоја паралелка, и врз основа на тоа ќе врши подготовка за наставните часови. Тоа е посебно важно за подготовката на часовите за увежбување и утврдување на одреден материјал, кога е згодно и пожелно да се примени методот на самостојна работа на учениците. За таквите часови, наставникот треба да подготви систем задачи со различни степени на тежина, обично со три. Така, реализирајќи со цел клас еден систем задачи со „среден степен" на тежина, наставникот треба да има две-три задачи со зголемена тежина (за силните), а во неопходни случаи, една од „средните задачи" да ја замени со неколку полесни, подготвителни задачи - за послабите.

Така, уважувањето на овој дидактички принцип помага да се одржува интересот на силните ученици за математиката, а дава подобри резултати во работата со послабите. Наставникот треба да го има предвид индивидуалниот пристап кон учениците и при спроведувањето на контролните работи, домашните задачи, како и при вонкласната работа.

2.7. ПРИНЦИП НА ВОСПИТУВАЊЕ НИЗ НАСТАВАТА

Принципот на воспитување низ наставата значи барање за формирање кај учениците: определени погледи кон светот и животот, интелектуални и морални квалитети, цврста волја и готовност за дејство итн. Тој, исто така, значи кај учениците да се воспитува:

- интерес кон математиката,
- стремеж кон нови знаења и нивно трајно усвојување,
- вештина за користење на стекнатите знаења и нивно проширување, односно продлабочување преку самостојно изучување,
- развивање на мислењето и вниманието,
- способност за творечка фантазија,
- навики да се цени, да се негува и да се создава убавото (а тоа ги облагородува чувствата и ја јакне волјата).

За реализирање на овој принцип, неопходно е воспитувањето да биде:

а) *планско и непрекинато;*

б) *ненаметливо,* да има скриен карактер, за учениците да го примаат како внатрешно, самостојно убедување, како норма на поведението, т.е. тоа *да прерасне во самовоспитување;*

в) *резултат на личниот пример на наставникот,* на неговите погледи на светот и на општочовечките квалитети.

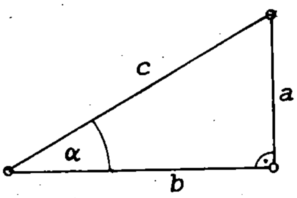
Успехот во наставата по математика во голема мера зависи од *развивањето постојан интерес кај учениците за предметот.* Интересот кон математиката пак се одржува кога на ученикот му е јасно она што го зборува наставникот, кога задачите му се интересни по содржина или по методите на нивното решавање, кога му се овозможува да промисли и сам да направи заклучок, обопштување и сл., кога е уверен во своите сознајни способности и кога пред него се открива широка перспектива за полезноста од изучувањето на одделните прашања.

Притоа е особено важно *на ученикот да му се даде прилика, каде што е тоа можно, да ја почувствува радоста на творештвото, откритието и победата.* Иако во почетокот тоа негово „творештво" ќе биде откривање на одамна откриени факти, а победите ќе доаѓаат во вид на успешно решени едноставни задачи, сепак ученикот го чувствува истото она што го чувствува и вистински научник што работи на сериозен проблем. Поради тоа, колку повеќе наставникот им овозможува на учениците да ја почувствуваат таа радост, толку подлабок и потраен ќе биде нивниот интерес кон математиката.

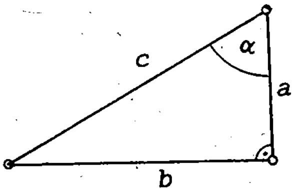
Да напомниме, на крајот, дека самата природа на математиката дава извонредно богати можности за реализација на принципот на воспитување низ наставата, особено воспитување на чувството за убавина во најширока смисла (естетско воспитување).

1.8. ВЕЖБИ

1. Наведи (барем два) примери во кои се нарушува принципот на научност.
2. При правоаголниот ΔABC на црт. 1, $\sin\alpha = a/c$. На што е еднаков $\sin\alpha$ при црт. 2? Каква грешка може да се очекува при формално усвоени знаења?



Црт. 1



Црт. 2

3. Наведи неколку примери за формално усвоени знаења.
4. Реши ги равенките односно неравенките:

а) $\sqrt{5X+4} + \sqrt{2X-1} = \sqrt{3X+1}$;

б) $log_3(X^2-4X-5) = log_3(7-3X)$;

в) $\dfrac{lg(2X-5)}{lg(X^2-8)} = \dfrac{1}{2}$;   г) $log_2\dfrac{4X-11}{2X^2-4X-6} \le -1$.

Какви грешки очекуваш да направат учениците што формално го усвоиле начинот на решавање вакви равенки?

5. Наведи примери (барем два) на педагошки неправилно поставени прашања.
6. Во врска со принципот на активност, направи скица на „поставување на задачата" за новата тема „Коренување" (во I клас).
7. Наведи неколку примери од кои ќе се види дека: а) логичко-математичките симболи и б) графовите за бинарни релации, имаат и квалитет на нагледност.
8. Реши ја задачата: „Да се најде правоаголник чиишто страни се изразуваат со цели броеви, а плоштината да му е еднаква со периметарот". Можеш ли да најдеш решение што ќе го искористиш за естетско воспитување на учениците?
9. (Тривијална задача, што може да биде мачен проблем.) Една точка M од дадена хипербола е сврзана со фокусите F_1 и F_2. Повлечени се симетралите s_1 и s_2 на отсечките F_1M и F_2M соодветно. Да се најде геометриското место на пресечната точка $P=s_1\cap s_2$ кога M се движи по хиперболата.

(Уп. а) Со планиметриски средства; б) со аналитичка геометрија.)

3. НАСТАВНИ МЕТОДИ

3.1. НАСТАВЕН МЕТОД И НАСТАВНА ФОРМА

Под **метод на изучување на математиката** се подразбира начин на остварување на математичка дејност од страна на учениците, сознајно и активно, самостојно или под раководство на наставник. Според тоа, меѓу тие методи можеме да ги наредиме мисловните операции и методите на истражување (т.е. научните методи) за кои зборувавме порано (во гл. II и во III.1.2). Но, за изучување на математиката низ настава се користат и методи што се создадени во дидактиката специјално за таа цел; тие се наречени *наставни методи.*

Наставните методи ја сочинуваат методичката компонента-еден од структурните елементи на наставниот процес (в. 1.1). Нивната важност се гледа од фактот што тие имаат централно место во микроструктурата на секоја етапа во наставата.

Наставен метод претставува начин на организирање на наставниот материјал и начин на извршување на сознајната и практичната дејност на учениците во текот на наставниот час за ефикасно остварување на целите на наставата.

Најважните наставни методи се: метод на разговор (или дијалошки метод), метод на програмирана настава, метод на проблемска настава, метод на самостојна работа, метод на усно излагање (или монолошки метод), метод на демонстрација (или настава со модели), метод на користење технички средства и метод на лабораториско-практична работа и екскурзии.

Да забележиме дека содржината на наставниот час горе-долу е определена со наставната програма (а попрецизно, со планот на соодветната тематска целина). Во врска со наставните методи, пак, не е пропишано кој метод за која наставна содржина да се примени (освен некои општи препораки во методичката литература). Тоа значи дека наставникот има полна слобода во изборот на наставните методи за обработка на одредени содржини, но, се разбира, и целосна одговорност за нивната ефективност.

Поради тоа, мошне важно е наставникот да ги познава добро најраспространетите, а тоа значи најважните наставни методи, да ги знае нивните квалитети и нивните недостатоци за конкретни ситуации, за да може, за дадено наставно прашање и за одреден аудиториум да примени најадекватен наставен метод. Затоа, натаму во овој параграф, ќе ги разгледаме одликите на секој од наброените наставни методи.

Начинот пак на кој е организирана работата со класот за време на часот, а за усвојување на предвидениот наставен материјал, се вика форма на работа во наставата или, кусо, **наставна форма**. Наставната форма може да биде: фронтална, индивидуална, групна и, специјално, во парови.

Фронталната форма на работа наставникот ја применува кога работи со сите ученици заедно, т.е. со класот како целина. Наставниот час, речиси од секој вид, започнува и завршува со фронтална работа, а таа се применува и во текот на часот, со повеќекратни замени со другите наставни форми. При фронталната работа, наставникот разговара со учениците, објаснува или покажува, ги проверува или освежува нивните знаења, ги наведува на изведување заеднички заклучоци и др. Оваа наставна форма се применува во разни етапи на часот, по неколку минути, во зависност од возраста на учениците и од карактерот на наставниот материјал, а во согласност со изборот на наставните методи.

Индивидуалната форма означува начин на организирање на работата со класот така што секој ученик работи сам за себе. Таа доаѓа до израз при оние видови наставни часови во кои се организира самостојна работа на учениците поради утврдување, проширување или проверување на наставниот материјал, а особено при изработка на писмени работи, писмени вежби, тестови и други активности при кои ученикот „е оставен сам на себе". Индивидуалната форма се манифестира и при другите форми на работа, зашто и во случаите на „заеднички активности", ученикот мора да изврши самостојно барем дел од мисловната дејност што ќе доведе до бараниот заклучок.

Работата на класот може да се организира така што учениците да се поделат *по групи* (според местата на седење или според други карактеристики) и да извршуваат исти или различни активности. Тој начин на организирање на работата се вика **групна форма**. Специјално, ако сите групи се составени од по двајца ученици, тогаш таа организација се вика работа **во парови**.

Групната форма на работа се практикува обично во одделенската настава, во почетните одделенија, со цел да се создаде натпреварувачки дух меѓу групите и дух на заедништво кај учениците. Тоа ги мотивира учениците да бидат поактивни на часот и да го совладаат подобро наставниот материјал.

Наставните методи и наставните форми во наставата се јавуваат во меѓусебна зависност. Нивното правилно комбинирање во текот на наставниот час е важен услов за обезбедување активен и творечки однос на ученикот кон изучуваниот материјал. (За ова прашање ќе биде речено нешто повеќе во 4.2.)

3.2. МЕТОД НА РАЗГОВОР. ЕВРИСТИЧНА БЕСЕДА

Методот на разговор се јавува во повеќе варијанти. Заедничка карактеристика за сите нив е следнава: *наставниот материјал, предвиден за даден наставен час, се расчленува на прашања и одговори* (за да можат учениците полесно да ја усвојат или да ја запомнат таа содржина). *Прашањата обично ги поставува наставникот, а одговорите ги даваат учениците,* така што таа етапа од часот изгледа како разговор, дијалог, беседа. Поради тоа, методот на разговор се вика уште и: **дијалошки метод или наставна беседа.**

За да изложи дадена содржина со методот на разговор, наставникот треба добро да се подготви. Покрај општата подготовка за наставен час (внимателно проучување на лекцијата, оценување на нејзините особености, методите и материјално-техничките средства што ќе се применат итн.), неопходни се и *специјални подготовки,* коишто се состојат во утврдувањето на:

- делот од лекцијата што ќе се изучува со методот на разговор,
- времето и местото на разговорот во структурата на часот,
- нагледните средства што, евентуално, ќе бидат користени во текот на беседата,
- содржината и обемот на материјалот што им е познат на учениците, а што ќе се користи за реализација на новото низ разговорот.

При составувањето на конкретниот план за наставниот час за содржината што ќе биде изучувана со методот на разговор, наставникот треба добро да го обмисли дијалогот што ќе го води со учениците: да ги формулира точно и да ги запише сите основни и дополнителни прашања што има намера да им ги постави на учениците (на наставниците-почетници им се препорачува да ги запишат и очекуваните одговори), а прашањата да ги распореди последователно така што нивната целина наполно да ја разоткрива изучуваната содржина. (Кусо речено, наставникот треба да се постави како „режисер" и претходно да го „изрежира" целиот тек на дијалогот до подробности, така што да се добие една „драматуршка целина" на сцената.) Со таквата постапка, наставниот материјал „се одмотува" постапно, па во таа смисла овој метод е познат и како **развоен разговор.**

Прашањата треба да бидат кратки по форма, јасни по содржина, јазично и стилски правилно искажани, да обезбедуваат еднозначен одговор, да бидат педагошки правилни (т.е. да не го наведуваат ученикот да одговори со „да" или со „не") и да не наведуваат намерно на погрешни одговори. Притоа, тие треба да се поставуваат јасно и гласно за сите ученици, да побудуваат интерес и активна мисловна дејност кај нив и да одговараат на обемот на изучуваниот материјал. (Во некои случаи, прашањето може да се замени со барање, т.е. со заповедна реченица.)

Во врска со одговорите на учениците, наставникот треба да настојува тие да бидат искажани: со цели реченици, правилно (содржински и јазично), со сите потребни податоци и што е можно посамостојно. Одговорите што се бараат од учениците, секако, не се однапред научени (па сега треба само да ги репродуцираат), туку до нив доаѓаат со логички расудувања, со што им се овозможува самостојно да го откријат новото.

При методот на разговор секогаш се тргнува од предзнаењата на учениците, а новиот материјал се надоградува на претходниот, функционално се поврзува и поимите се прошируваат, „се развиваат". Со тоа, наполно се уважува дидактичкиот принцип на последователност и систематичност (што претставува особен квалитет). Недостаток на методот пак е тоа што се создаваат ситуации на „ активни" и „ пасивни" ученици, поради различната „брзина" на нивното мислење.

Паралелно со обичниот метод на разговор, во современата наставна практика по математика сè повеќе се шири примената на една негова варијанта, наречена **евристична беседа**. При оваа варијанта, *наставникот не им соопштува готови знаења на учениците,* дури не ја објавува крајната цел на лекцијата, *туку организира поставување на соодветни проблеми и, со вешто поставувани прашања, ги поттикнува и наведува учениците самостојно да ги откриваат резултатите.*

За разлика од обичниот метод на разговор, во системот прашања кај евристичкиот метод централно место зафаќаат „*проблемските прашања*" за кои учениците немаат готови одговори. (Прашањата, пак, што бараат репродуцирање на порано усвоени знаења, имаат помошна улога - само колку да се решат проблемските прашања.) Притоа, ако некој ученик даде неточен одговор на проблемско прашање, наставникот не го отфрла одговорот догматски и не брза да го поправи сам, туку повикувајќи ги другите ученици, му помага на класот да го открие несогласувањето со веродостојниот одговор.

Евристичната беседа е еден од основните методи што им овозможува на учениците *творечка активност* во процесот на учењето математика и им разбудува „вкус на самостојно откривање". Интересот на учениците кон тие видови работа, каде што се раѓаат почетоците на творечка дејност, значително нараснува. Овој метод дава одлични резултати за нестандардни проблеми (се разбира ако се во рамките на интелектуалните можности на учениците), а тоа го покажуваат досегашните експерименти. За жал, овој метод бара многу повеќе учебно време отколку, на пример, при усното излагање на наставникот. (Но, ... потрошеното време не е загубено!).

[** Ќе направиме овде уште неколку забелешки.

1. *Методот на разговор* настанал уште во древноста, во првите почетоци на школата, а се применувал во сите епохи до ден-денес, само во разни видови. Во античко време, тој се развил во специфичен вид, наречен *сократовски разговор* (за пример, в. Рени: „Диалоги о математике", [31]), во средновековната школа бил познат како *катехетичен разговор* (*катехетика:* вештина на усно поучување во верата, во облик на прашања и одговори), а во периодот на рационализмот во 18 век се јавува во вид на т.н. *евристичен* (*„откривачки"*) *разговор* (тогаш се сметало дека секој може да дојде до нови знаења со

помош на сопствениот разум, само ако биде поттикнат на соодветен начин). Во современата настава се заговара користење на *развојно-евристичен разговор.* Разговорот може да биде раководен од наставникот (тогаш тој е *диригиран* разговор), но може да биде: *слободен,* дебатен (дискусионен) или со поставување на спонтани прашања на учениците (последниве три варијанти се поретки во наставата по математика).

2. *Евристиката* е млада научна дисциплина, којашто настанала како резултат на допирните проблеми на филозофијата, кибернетиката, психологијата и педагогијата. Кибернетичарите сметаат дека евристиката претставува множество методи и начини за зголемување на ефективноста на системот (човек или машина) што го решава проблемот; психолозите ја сметаат за дел од психологијата што го изучува творечкото мислење; педагозите сметаат дека тоа е наука за методите и средствата на решавање задачи, а филозофите - дека е тоа систем правила коишто доведуваат до откривање на нови знаења.

3. *Евристичниот метод* многу често се применува *при решавањето на нестандардни задачи,* т.н. „проблеми". Неговата улога во оваа област подробно и на многу привлечен начин се осветлува во книгите на американскиот математичар - педагог Џорџ Поја (George Polya): „Како да се решава задача?", „Математичко откритие" и др. ([26], [28]).

Многу интересна книга од гледна точка на евристичниот метод е делото „Прелудиум кон математиката" [35], Гл. II, од англискиот математичар В. Соер (W.W.Sawyer).

„За сите математичари,- пишува Соер,- карактеристична е дрскоста на умот. Математичарот не сака за нешто да му раскажуваат, тој сака сам да дојде до сето тоа...

Дрскоста на умот е одлика и на децата. На пример, при изучувањето на делењето на агол на два еднакви дела само со шестар и линијар, наставникот ќе им соопшти на учениците дека не е можно аголот, на тој начин, да се подели на три еднакви делови (не е можна „трисекција"); сепак, повеќе од децата ќе пробаат - „можеби јас ќе успеам?!"**

3.3. МЕТОД НА ПРОГРАМИРАНА НАСТАВА

Учењето и усвојувањето на учебна информација е крајно индивидуален мисловен процес: некои ученици „фаќаат"побрзо, а други побавно. За да може наставникот успешно да управува со тој процес, неопходно е информацијата во текот на учењето да стигнува од ученикот до наставникот правилно, веродостојно и навремено. На тој начин наставникот ќе може навреме и ефективно да се вмешува во учењето на секој ученик посебно и да му обезбеди сопствено темпо на усвојување. Тие потреби во наставата довеле до создавање на т.н. програмирана настава.

Методот на **програмирана настава** се состои во следното. *Секој ученик работи самостојно по специјална програма што е* *содржана во учебник, прилагоден за таа цел („програмиран учебник") или пак е сместена во комјутер.* Учебниот материјал во учебникот е раздробен на помали дози, наречени *порции*. Секоја порција е составена од неколку *кадри:*

1) *информационен кадар,* којшто содржи минимум нова информација, т.е. основни податоци од теоријата,

2) *операционен кадар,* во кој се формулира соодветно прашање, вежба или друг вид барање,

3) *кадар за обратна врска,* којшто содржи упатство или одговор на поставеното прашање. (Со тоа ученикот сам си ја контролира својата работа реализирајќи „внатрешна обратна врска".)

По неколку порции следува *контролен кадар* (т.е. кадар за проверување на изученото).

Со тоа на секој ученик му се овозможува да работи на наставниот час со свое, оптимално темпо.

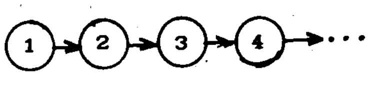
Разработени се два система на програмирана настава:

- **линеарен**, според кој за сите ученици е предвидена една „линија" на усвојување (*линеарна програма*),

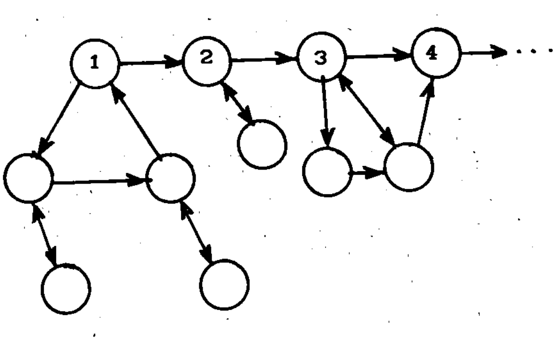
- **разгранет**, според „патот" на усвојување на секој ученик одделно зависи од неговите одговори (*разгранета програма*).

Во разгранета програма, за прашањето во секој кадар, обично се понудени неколку одговори, од кои само еден е точен. Ако ученикот го избере точниот одговор, тогаш „оди натаму". Но, ако избере неправилен одговор, тогаш програмата „го враќа" на друг кадар којшто ја содржи информацијата што не ја знаел, т.е. поради која направил погрешен избор. При совладувањето на овој „друг" кадар може да се случи (ако и тука нешто не знае) ученикот да биде вратен уште поназад, на „трет" кадар; итн. Според тоа, во случај на разгранета програма, различни ученици го усвојуваат материјалот не само со различно темпо, туку и по различни патишта.

На црт. 1 и црт. 2 шематски се прикажани линеарна и разгранета програма.



Црт. 1



Црт.2

** Методот на програмирана настава се појавил во 50-те години на овој век прво во САД и добил широк замав и во други земји, така што во последниве децении се публикувани многу книги и статии за него, од теориски и практичен аспект. Изработени се учебници по математика според тој метод (и се наречени *програмирани учебници*) за одделни видови училишта (в. [32]).

Кај нас сѐ уште нема такви (комплетно изработени) учебници и тоа е главната причина што овој наставен метод не е доволно застапен во наставната практика на нашите училишта.

Да забележиме дека во сегашните учебници по математика за основно образование се вградени елементи од програмирана настава во некои делови од некои лекции, а некои наставници сами подготвуваат *програмирани материјали*, најчесто т.н. *наставни ливчиња*. Методот на програмирана настава е сврзан обично со користење текст (програмиран учебник, наставни ливчиња или друг напишан материјал за учениците), па затоа кај нас за него често се користи името **текстуален метод**.

Во математиката има големи можности за примена на методот на програмирана настава ѝ за изготвување програмирани учебни помагала, поради големото богатство на вежби и задачи што учениците треба самостојно да ги решаваат. Досегашното светско искуство покажува дека овој метод е многу ефективен и затоа е мошне перспективен. Во основата на овој метод лежи алгоритамски начин на мислење (в. VIII.3) и затоа тој е тесно сврзан со проблемот за алгоритмизација на наставниот процес по математика.

Како што споменавме погоре, програмираната настава може да биде спроведена и машински, со компјутер, па методот на програмирана настава е во тесна врска со методите на користење (нови) технички средства.

Покрај непосредната важност како наставен метод, програмираната настава е значајна по тоа што врши големо влијание за подобрување на други наставни методи (во смисла на зголемување на активната мисловна дејност на ученикот), а развива и способност кај ученикот да користи литература и самостојно да се здобива со знаења.**

3.4. МЕТОД НА ПРОБЛЕМСКА НАСТАВА

Идејата за проблемска настава потекнува од средината на 18 век, од Жан-Жак Русо (во врска со неговата девиза: враќање на човекот кон природата), но теориска разработка и извесна потврда во наставната практика постигна дури во последниве децении. Таа сѐ уште не е доволно афирмирана во практиката, но заедно со методот на програмирана настава има големи изгледи во иднина да стане основен наставен метод.

Современиот живот постојано наметнува разни *проблемски ситуации,* коишто човекот мора *да знае, да умее* и *да сака* да ги решава. Во сите човекови дејности, секојдневно никнуваат *нови проблеми,* па неопходно е, уште во текот на школувањето, младата генерација да се оспособува за нивното решавање. Во тоа е и основната смисла на проблемската настава.

Методот на проблемската настава *се карактеризира со следниве етапи: 1) се создава проблемска ситуација, 2) се формулира проблем, 3) се разрешува проблемот, 4) се врши проверка.*

Во теоријата на проблемската настава основни поими се: проблемска ситуација и проблем.

Поимот **проблемска ситуација** може да се опише како посебен вид мисловна дејност на субјектот (ученикот) насочена кон објектот (проблемот), така што кај субјектот се предизвикува потреба од сознавање, го побудува да открие односно да усвои нови знаења или начини на дејство. Притоа, неопходно е објектот на сознавањето да се наоѓа во границите на интелектуалните способности на субјектот, но истовремено да предизвикува психичка состојба на некој интелектуален напор.

Да го појасниме и поимот проблем. **Проблемот**, во најширока смисла, претставува *субјективно доживување,* специфично за секој човек посебно. Тој предизвикува некоја *спротивност меѓу субјектот и објектот* како некаква противречност, нерамнотежа, несогласност, недоразбирање, конфликт, нелогичност, нејаснотија итн. Спротивноста, пак, содржана во проблемот, изразува дијалектичка биполарност: познато-непознато, откриено - неоткриено, постигнато - непостигнато итн. Таа спротивност меѓу субјектот и објектот во проблемската ситуација се искажува на штета на субјектот, а тоа го условува психолошкото возбудување на субјектот, сознајно и емоционално. Секако, субјектот настојува да ја совлада таа спротивност со решавање на проблемот и со тоа да го елиминира постојниот „недостаток", т.е. да постигне „рамнотежа".

Во математиката, под **проблем** се подразбира задача што треба да се реши, да се испитува. Учебните проблеми за своето решавање бараат нови знаења и вештини. Тие знаења му се познати на човештвото, на науката, но не му се познати на поединецот или на учениците од определен клас.

Една задача, независно од нејзината сложеност, може да му создаде тешкотии (да му биде „проблем") на оној што не умее да ја реши, но нема да е „проблемска задача" за тој што умее да ја реши. *Учебен проблем е оној елемент од проблемската ситуација, којшто во текот на анализата предизвикал тешкотија.* За поставување на проблемот треба да се определи суштината на тешкотијата, а тоа е првиот чекор на творечкото мислење (в. VIII.3). Според тоа, *во основата на овој метод лежи творечкото, евристично мислење,* па во таа смисла и проблемската настава претставува евристичен метод.

Во литературата најчесто се издвојуваат три вида проблемска настава: 1) проблемско излагање на материјалот, 2) привлекување на учениците кон трагање во одделни етапи на излагањето, 3) иследувачки метод на настава.

Проблемската настава е најефективна тогаш кога обезбедува подолго самостојно, индивидуално решавање на учебниот проблем од секој ученик. Тоа се овозможува особено кога проблемската настава се комбинира со програмираната. Инаку, создавање на проблемска ситуација и решавање на соодветниот проблем се јавува во разни комбинации со други наставни методи, па во широка смисла, проблемската настава се претвора од метод во дидактички систем, т.е. во наставна стратегија.

┌** Проблемот на комбинирање на проблемската со програмираната настава се разработува од истакнати научници-методичари во светот, но тој е мошне сложен дидактички проблем. Неговото успешно решение би овозможило да се создаде еден од најсовршените наставни методи што се досега познати. (Секако, за практиката ќе бидат потребни соодветни учебници и други наставни помагала.)**┘

3.5. МЕТОД НА САМОСТОЈНА РАБОТА

Во називот „самостојна работа" е содржана главната одлика на овој метод: *ученикот самостојно ги исполнува поставените барања и самостојно доаѓа до нови знаења или пак ги утврдува стекнатите.*

Самостојната работа на ученикот е основен метод за работа над учебниот материјал дома, но исто така е важен за наставните часови, зашто од успехот на самостојната работа на ученикот многу зависи успехот на целокупната настава.

Самостојната работа на ученикот за време на часот се манифестира во неговото самостојно мислење и самостојно доаѓање до заклучоци преку примената на повеќето наставни методи. Но, на часот, таа се спроведува и одделно, без користење посебна програма, проблемска ситуација или евристичен разговор. Во тој случај, таа се организира многу едноставно и од наставникот не бара специјални усилби за да го подготви и да го спроведе наставниот час.

┌** Наставните часови за утврдување на материјалот преку задачи (т.е. часовите за вежбање) се најподобни за организирање самостојна работа; но, таа може да се примени и на часови за нови знаења, кога материјалот од лекцијата им е познатна учениците во значителна мера и нема да им предизвика тешкотии. Во тој случај, лекцијата може да се подели на неколку делови (во основното образование), при што секој дел ќе се проверува одделно, а може да се зададе целата лекција одеднаш (во средното образование). Проверката треба да се

врши со неколку ученици, а другите ученици да следат, да ги забележат неточностите, непотполностите при одговорите и да дадат исправки; по потреба, тоа ќе го направи наставникот. (Повеќе за организацијата на самостојната работа в. А.5.)**

Самостојната работа на учениците во наставните часови за увежбување, утврдување и повторување, при решавањето на стандардни и полустандардни задачи, треба да стане основна форма на учебната работа. (Без широка примена на самостојната работа на наставниот час не е можно да се постигне саканата цел: сите ученици да научат да решаваат задачи.) Самостојната работа дава помали резултати при решавањето на нестандардни задачи, но и во тој случај наставникот не треба однапред да се откаже од неа.

За да се избегнат формализмите во знаењата и навиките на учениците, наставникот бара од нив да го образложат секој чекор при самостојното решавање задачи, врз основа на изучениот теориски материјал и периодично тоа да го проверува.

(Некои наставници ретко применуваат смостојна работа на час зашто класот не е подготвен за неа. Во замена за тоа, тие го практикуваат фронталното решавање на задачи на табла; тоа создава впечаток на успешност и го скрива ниското ниво на математичката подготовка на учениците.)

Самостојната работа на ученикот се применува, секако, и при писмени работи и вежби, при лабораториско-практичните активности, при излагањето на нов материјал од страна на ученик, при програмираната настава и др. Посебно, методот на работа со учебник и други текстови развива навика кај ученикот за самостојно користење на математичка литература и способност за самообразование.

3.6. МЕТОД НА УСНО ИЗЛАГАЊЕ

Овој метод е еден од најстарите методи, којшто бил доминантен долг период во историјата на школата, а се задржал до денешни дни, но во наставата по математика има само помошно, маргинално значење.

Основната карактеристика на **методот на усно излагање** е: *догматско усно соопштување на материјалот, т.е. предавање готови знаења од страна на наставникот, а слушање и настојување да се запомни чуеното од страна на учениците.* Поради тоа, овој метод се вика и **монолошки метод.**

Кај методот на усно излагање сѐ се сведува на запомнување, со што се развива само помнењето и репродуктивното мислење. Тука доаѓа до израз пасивноста на учениците, т.е. игнорирање на основните идеи на современата дидактика за активно учење, поради што може да се каже дека овој метод е чиста спротивност на претходно разгледаните четири современи методи, во чија основа е поставено творечкото мислење.

Реформските движења од времето на Коменски, Русо, Песталоци и подоцна, го потиснале овој метод на втор план како *„метод на пасивно примање готови информаций"*, оспорувајќи му каква било вредност во наставата. (Се смета дека никакво излагање или објаснување на готови знаења, колку и убаво да е изведено, не може да го надомести отсуството на активно учење и самостојно трагачко мислење.)

Методот на усно излагање во современата настава е обновен со внесување на елементите раскажување и објаснување, а суштински се подобрува кога се комбинира со методот на нагледна настава, т.е. настава со модели.

Овој метод се јавува во следниве три основни варијанти: *раскажување, објаснување и предавање.*

а) **Раскажувањето** како наставен метод во математиката има помошна улога. Со него *само се соопштуваат информации* за значењето на изучуваното прашање во науката и животот, за историското потекло на одделни важни факти и слично. Според тоа, тој се применува ретко и фрагментарно - само во куси етапи на наставниот час, а никако за целата лекција.

б) **Објаснувањето** е вид усно излагање при кое *се толкуваат одредени делови од материјалот,* како: воведување поими, докажување теореми, изведување формули и сл. Притоа, објаснувањето често успешно се комбинира со други методи, особено со методот на нагледна настава и демонстрација.

в) **Предавањето** како наставен метод е вид усно излагање со основна карактеристика: *догматско соопштување готови знаења.* Методот на предавање е широко применуван на факултетите и вишите школи, а може да се применува во наставата и на средните училишта (но само за мали, соодветни делови од лекцијата), а не доаѓа предвид во основното образование.

Кога станува збор за примена на методот на усно излагање во математиката, најчесто се мисли на методот на објаснување, комбиниран со методот на нагледна настава (настава со модели и демонстрација).

┌** За ефективноста на раскажувањето и објаснувањето, особено се важни техниката на говорот и јазикот на наставникот. Тој треба да употребува кратки и едноставни реченици, лесни за разбирање и запомнување, а неговиот говор треба да биде пример за учениците: граматички правилен, одмерен по тонот, достапен по содржината,изразит и по можност сликовит. (Секој наставник треба да го усовршува својот јазик и говор, така што да биде наставник донекаде и по мајчин јазик.) Живиот збор на наставникот, добро обмислен, употребен на вистинско место и во вистинско време може да ги заинтересира, заинтригира и да „ги понесе" учениците, т.е. да предизвика интензивна мисловна дејност кај нив. **┘

3.7. МЕТОД НА НАГЛЕДНА НАСТАВА

За зголемување на активноста, наставникот често им предлага на учениците разни обиди и набљудувања по конкретна наставна содржина. Тие набљудувања се реализираат со предмети, материјали или средства, наречени нагледни или дидактички помагала. Тоа се: модели од непосредната околина, модели што се изготвени прирачно (од наставникот или од учениците) и нагледни средства од фабрично производство.

Начинот на организирање на наставниот материјал со помош на користење на нагледни средства се вика **метод на нагледна настава** *или* **метод на настава со модели.**

Притоа, многу често се работи за покажување на нагледни средства (проследено со објаснување), па во тој случај имаме **метод на демонстрација**. Во некои случаи пак учениците учествуваат во совладувањето на некој дел од материјалот со изработка на графици, скици или табели; таквата нагледна настава се вика **метод на графички работи.**

Методот на нагледна настава го добил своето место и значење во наставата паралелно со афирмирањето на дидактичкиот принцип на нагледност (од Коменски); тој (и сега) е значително застапен во основното, а поумерено и во средното образование.

Со овој метод се остваруваат следниве цели: запознавање на објектот преку дадено нагледно средство (најчесто модел), организирање обиди, оспособување за набљудување и споредување, како и активирање на мисловната дејност на ученикот. Тој може да се применува во разни етапи на наставниот час,а особено плодна е неговата употреба во геометријата, при формирањето на поими и изучувањето на нивните својства.

При овој метод може да се демонстрираат: геометриски модели, шеми, дијаграми, таблици, графици, слики, цртежи, а и подвижни слики (филм).

Предметот што им се покажува на учениците треба да биде доволно голем, видлив за сите ученици во класот. (Ако предметот е мал, наставникот треба да обезбеди набљудување по групи или да го покажува одејќи од клупа до клупа.) За време на покажувањето на предметот, наставникот им поставува соодветни прашања на учениците, со кои се поттикнува нивната активност или се обезбедува објаснување.

Г**. Во врска со методот на настава со модели, овде ќе наведеме неколку специјални современи дидактички средства.

1) **Логички плочки на Денеш**. Тоа се геометриски фигурички од дрво или пластика, 48 во еден комплет, коишто се разликуваат по боја, форма, големина и дебелина. Со нив може да се спроведуваат разни вежби, отпрво во вид на игри, насочени кон усвојување на наједноставните логички поими и поими од множествата и релациите. Наменети се за предучилишната возраст и за првите одделенија. (Овој дидактички материјал се

користи и кај нас.)

2) **Стапчиња на Кизенер**. Тоа е множество од мали блокчиња во вид на паралелопипеди со различна должина (од 1 cm до 10 cm), со напречен пречник од 1 cm^2, во повеќе бои и нијанси. Овој дидактички материјал се користи за изучување на аритметичките операции, релации, дропки и операции со нив, па дури и: прогресии, плоштина, волумен и др.

3) **Геоплан на Гатенјо-Карасев**. Тоа е дрвена табла со забодени клинци, распоредени во вид на квадрати или други многуаголници. На клинците се растегнуваат конци во разни бои и се добиваат модели на разни геометриски ситуации.(Употребата на геопланот е препорачлива за вонкласна работа, но не и за во клас.)

4) **Динамички модели на Еми Кастелнуово**. Тоа се посебно изработени дидактички средства за активна, самостојна работа на учениците, слични на геопланот, но со еластични конци. Во основата на нивното користење е „подвижноста", така што со нив вниманието на учениците се насочува не на самиот објект (на изучување), туку на неговите трансформации и дејства со него (со што,на природен начин се доаѓа до саканите апстракции) **)

3.8. МЕТОД НА ЛАБОРАТОРИСКА И ПРАКТИЧНА РАБОТА. ЕКСКУРЗИЈА

Овој метод се покажува мошне корисен во наставата и по математика, главно во основното образование, макар што математиката не е експериментална наука.

Методот на лабораториска и практична работа се карактеризира со следново: *учениците прво прават обиди или извршуваат некоја практична работа, сврзана со мерења или пресметувања, а потоа набљудуваат, уочуваат, наоѓаат, формулираат хипотези и прават заклучоци и обопштувања.* (На крајот тоа се проверува или се докажува, обично со други методи.)

Така, овој метод може да послужи за насетување и откривање на нови математички факти, за создавање проблемски ситуации, за потврдување на откриеното и за негова примена.

Лабораториската работа ја извршуваат учениците во класот (или дома) на: модели, цртежи, планови, карти и друго, обично со сознајна цел: да откријат некој математички факт. (Пример за тоа може да послужи опишаниот обид за збирот на аглите во триаголник во II.2, за периметарот на кружница и други.)

Практичните работи се изведуваат дома, или во стопански организации (фабрики, фарми, продавници и др.) со цел да се добијат податоци за составување и решавање конкретни задачи од производно или друго животно-практично значење. Таквите работи може да се комбинираат со *математичка екскурзија* или со „општа" екскурзија, наменета за неколку предмети истовремено.

При методот на практична работа, типични се три фази: 1) учениците го избираат проблемот (со помош на наставникот или самостојно), 2) прават план на работата и 3) ја извршуваат работата (самостојно). Така формулираните „производни проблеми" ги решаваат обично дома и, во вид на писмени проекти, му ги предаваат на наставникот, којшто е должен да ги прегледа и да ги оцени.

Кон практичните работи се вбројуваат и работите на учениците во природа, сврзани со *теренски мерења* (што се извршуваат со соодветни мерни инструменти: ленти, екери и др.). Тие работи се предвидени за изучување теми од геометријата (периметар, плоштина, складност, сличност, цртање план на парцели во даден размер и др.) и за тригонометриско решавање на триаголници (пресметување растојанија до недостапни точки, висина на предмет и сл.). Работите се одвиваат во групи од по 5-6 ученици, со раководител на групата, а пресметувањата се вршат на теренот или дома. Притоа, работата може да биде истовидна (една задача за сите групи) или разновидна (секоја група или секој ученик добива своја задача).

Улогата на наставникот при примената на методот на лабораториска и практична работа може да биде различна:

- да раководи со секоја етапа од работата (тогаш резултатите се најсигурни, но самостојноста на учениците е мала);
- да ја определи постапката, а учениците да ја извршат работата самостојно;
- да им препушти на учениците самостојно да ги определат и постапките и да ја извршат работата.

Притоа, наставникот може да даде упатства еднаш, однапред (предност: работата на учениците ќе биде посамостојна, недостаток: некои ученици ќе завршат порано и ќе им пречат на другите) или повеќепати (тогаш ќе има контрола над работата и учениците ќе завршат приближно во исто време, но во тој случај вештите ученици ќе бидат сопирани).

Г** Примената на методот на практична работа се појавила во наставната практика по математика во XIX век, особено во САД, прво во земјоделските, а потоа и во општообразовните училишта, повеќе познат под името „метод на проекти". Потоа, таму е создаден нов наставен систем, наречен **Далтонов план**, според кој заедничката одделенска работа се заменила со оставање слобода на децата, како во изборот на задачите, така и во исполнувањето на своето учебно време. Имено, учениците ги избирале проблемите самостојно, слободно, според своите афинитети, можности и прилики во кои живеат: фарма, фабрика, трговија и сл. Работата ја извршувале дома во писмена форма, а наставникот ја прегледувал, коментирал и давал оценка.

Методот се користи и сега, особено во училишта за производни занимања. Во таа смисла, овој метод е познат како

„учење преку работа" или како **продуктивен метод.**

Овој метод дава мошне добри резултати. Причината е психолошка: ученикот, ослободен од тесните рамки на училницата, замислува дека точно практичните проблеми имаат вистинска вредност и затоа тој е заинтересиран за нив и е мотивиран активно да учествува во нивното разрешување. **

3.9. МЕТОД НА КОРИСТЕЊЕ ТЕХНИЧКИ ПОМАГАЛА

Наставниот материјал за одреден наставен час честопати може успешно да *се организира така што да се изучува со помош на разни технички средства*; во тој случај се вели дека се применува **метод на користење технички помагала.**

Улогата на техничките помагала во наставата сè повеќе се зголемува, особено со развитокот на програмираната настава. Најчесто употребувани технички средства во современата настава се: графоскоп, епипроектор, дијапроектор, компјутер, телевизија.

Поголема употреба во наставата по математика кај нас има *графоскопот*, особено во врска со графици на права, парабола, експоненцијални криви и графици на тригонометриски функции. Тој може да се користи и за математички излагања, нанесени на прозрачна фолија, слично како што може да послужи дијапроекторот кога соодветниот наставен материјал е нанесен на слајдови.

Учењето со компјутер има голема иднина. Идниот развој на програмираната настава битно ќе придонесе и за посодржајна употреба на методот на учење со компјутер. При работата со програмиран учебник (со разгранета програма), ученикот може сам да ја наруши наредбата за редоследот на читање на наставниот материјал што е пропишан во зависност од избраните одговори. Сега се создаваат програми на компјутер што обезбедуваат автоматско исполнување на наредбата: го откриваат одговорот само откако ученикот ќе го соопшти својот одговор и го принудува натаму да се држи кон редоследот.

Во некои училишта (кај нас - сè уште во мал број) се создадени „автоматизирани училници" (со компјутер за секој ученик од класот и „раководен пулт" за наставникот). Наставникот има можност да добие информација за состојбата на работата на секој ученик, во секоја етапа од наставниот час.

Кинопроекторите и телевизијата, со користењето на специјални учебни кинофилмови во наставата по математика, значително ги прошируваат можностите за нагледно претставување на разни математички поими, сврзани со процесите на движење и менување.

3.10. ВЕЖБИ

1. Обмисли го разговорот што треба да се води со учениците за откривање и докажување на својството на точките од симетралата на еден агол (VI одд.). Потоа,со соодветни прашања или барања, организирај утврдување и примена на тоа својство (висината од врвот на рамнокрак триаголник, впишана кружница и др.)
2.* Со методот на програмирана настава, изготви фрагмент на а) линеарна, б) разгранета програма за изучување на наставната содржина:
   1) Својства на корените на квадратната равенка (Виетови формули).
   2) Проширување и скратување на корени.
3. Разгледај ја можноста за воведување и примена на признаците за слични триаголници,преку создавање проблемска ситуација и формулирање на појавениот проблем (VIII одд.).
4. Наведи неколку наставни содржини, каде што методот на нагледна настава има предност во однос на другите наставни методи (наброј ги елементите на таа предност).
5. Наведи неколку наставни содржини од а) основното, б)средното образование што може да се изложат со методот на користење технички средства (поопределено:со графоскоп) поуспешно отколку со други методи. Во што се состои таа „поголема успешност"?

4. ИЗБОР И КОМБИНИРАЊЕ НА НАСТАВНИТЕ МЕТОДИ

4.1. ИЗБОР НА НАСТАВЕН МЕТОД

Во текот на подготовката за наставен час, наставникот мора да реши, меѓу другото, кое наставно прашање со кој наставен метод ќе го обработува. Притоа, тој треба да се раководи од фактот дека ниеден од наброените методи не е универзален, единствен, сеопфатен и дека наставниот процес по својата природа бара разнообразност на наставните методи. За секое наставно прашање постои соодветен наставен метод, а може - и повеќе; наставникот треба да изврши избор на методот и да расчисти во себе зошто тој, а не некој друг.

Наставникот го избира „главниот" наставен метод (т.е. методот за решавање на основната дидактичка задача) на даден наставен час *во зависност од:* а) карактерот, содржината и обемот на учебниот материјал, б) возраста на учениците, степенот на нивната математичка подготовка, способноста за самостојност во мислењето и нивните работни навики, в) познавањето на методите (од страна на наставникот) и умешноста за нивното применување и др. Истите фактори влијаат врз изборот и на „помошните" наставни методи што ќе се применуваат на наставниот час, паралелно со главниот.

Изборот на главниот наставен метод наставникот треба да го изврши во согласност со основниот критериум: да се обезбеди *максимална активност на учениците и самостојност на мислењето* во текот на наставниот час (т.е. кратко: „активност и креативност на учениците").

За успешно применување на одреден наставен метод битно е *наставникот совршено да владее со него.* Тоа значи:

1) да ја разбира суштината на методот и да умее да го применува во разни ситуации;

2) да ги знае најчестите варијанти во кои се јавува методот, јавно или скриено;

3) да ги знае позитивните и негативните страни на неговата примена и да умее да ја оценува неговата ефективност;

4) да ги знае прашањата од училишниот курс чиешто изучување е најзгодно токму со тој метод;

5) да ги навикне учениците да работат имено со тој метод во разни учебни ситуации.

4.2. КОМБИНИРАЊЕ НА НАСТАВНИТЕ МЕТОДИ

Наставните методи не се јавуваат така изолирани, во „во чиста форма:, како што ги прикажавме во претходниот параграф. Нивното издвоено разгледување има оправдание само затоа што тоа се прави со цел да се запознаат нивните најважни одлики.

Во наставната практика обично се применуваат по неколку наставни методи на ист наставен час, се комбинираат едни со други, се преплетуваат, се дополнуваат и заедно содејствуваат. Притоа, без *правилен избор на наставните методи,* без нивно *успешно меѓусебно комбинирање и комбинирање со наставните форми* на соодветен начин, не може да се очекува некоја поголема ефективност во наставата.

Г** Може да се смета дека секој од наброените наставни методи (во III.3), со своите „варијанти" претставува, всушност, група методи што се разликуваат само во нијанси,а посматран од различни аспекти, може да се третира и како „варијанта" на друг метод.

Така на пример, проблемниот метод содржи карактеристики на творечко мислење, па по својата природа е евристичен, а евристичниот метод содржи одлики на проблемски ситуации, па може да се смета за „варијанта" на проблемскиот метод. (Така стои работата и со други методи: лабораториски, практичен и др.). Тоа, всушност, значи „согледување" и можност за успешно комбинирање на тие методи.

Слично, евристичниот метод природно и успешно се комбинира со аналитичните методи на докажување теореми и решавање задачи,а потешко со синтетичниот. (За жал; синтетичниот метод доминира во учебниците и многу наставници во практиката, следејќи го излагањето во учебникот, применуваат наставни методи што не се доволно ефективни.) **

Секако, би било погрешно во наставната работа да доминира само еден наставен метод. Разновидниот избор и правилното комбинирање на наставните методи овозможуваат да се спојат дејството на поучување (улогата на наставникот) со актот на учењето (активноста на учениците) како две алки од ист процес. Инаку, еден наставен метод е добар, ако се избере според наставната ситуација, ако успешно се применува и ако вешто се поврзува и се комбинира со други методи.

Наставните методи и форми што ќе бидат применувани во текот на наставниот час, наставникот треба да ги приспособува и да ги комбинира така што ученикот, по најприроден пат:

- да ги согледува и да ги формулира учебните проблеми,
- да ја издвојува, да ја оценува и да ја искористува информацијата, сврзана со разгледуваниот проблем,
- да согледува и да формулира веројатни хипотези, да ги оценува и да им дава основа на добиените заклучоци и можните обопштувања,
- да ја планира својата дејност и да ја остварува во согласност со тој план.

Кусо речено, наставните методи и сите општи или посебни постапки во наставната работа на современо методски образован наставник треба да бидат приспособени, комбинирани и насочени кон *активна и креативна дејност на ученикот.*

Тоа значи дека од наставникот не се бара да ги „научува" учениците, туку да ги мотивира, да ги поттикнува и да ги наведува сами да доаѓаат до одредени хипотези и заклучоци. Ова барање е содржано на убав начин во една стара мудрост: *„Ученикот не е лонец што треба да се полни, туку факел што треба да се запали".*

4.3. НАСТАВНИ СТРАТЕГИИ

Во дидактичката теорија и практика се изградувани *општи пристапи* за реализација на наставниот процес. Тие пристапи се наречени **дидактички** или **наставни системи**,а во поново време - **наставни стратегии** (в. и 1.1).

За да биде комплетна и ефикасна, наставната стратегија треба да ги содржи сите компоненти на наставниот процес. При изградувањето на современи дидактички системи се води сметка за тој критериум. Во минатото биле применувани и наставни стратегии што се покажале еднострани и неефикасни. Такви се, на пример: диктирањето, предавањето „од катедра" и разните варијанти на катехетична настава. Сите тие се избегнуваат во современата наставна практика.

Затоа пак се препорачува примена на такви наставни стратегии што го поттикнуваат активниот однос на ученикот во наставата. Во разделот 1.1 наведовме пет такви современи стратегии. Нивните основни карактеристики се совпаѓаат со одликите на повеќето од современите наставни методи што ги разгледавме во параграфот III.3, па оттаму некои од нив имаат исти имиња.

Ќе дадеме кус коментар за секоја од тие пет наставни стратегии што се препорачуваат во современата наставна практика.

1) **Евристичната настава** како наставна стратегија е од поново време, иако соодветниот наставен метод има корени во антиката. Основните карактеристики на оваа стратегија се содржани во коментарот за методот на разговор и евристичната беседа (в. 3.2): наставникот организира поставување соодветни проблеми и прашања, а учениците, соодветно поттикнувани и насочувани, доаѓаат до соодветните откритија.

Називот „евристична настава" е сврзан со извикот на Архимед: „Heureka!", што значи: „Открив!" или „Пронајдов!" (а доаѓа од грчкиот збор „хеуриско" - откривам, пронаоѓам). *Евристиката,* како научна дисциплина, ја проучува творечката дејност, т.е. методите на правилното управување со умот поради откривање нови знаења, како и во наставата.

┌**Особен интерес за истражување на евристичните методи се јавил во врска со можностите да се решаваат редица задачи, во кои човекот не може да даде точен алгоритам за решавање со помош на технички уреди. Притоа, целта е со тие методи да се изградат *модели на процесот на решавање* некоја нова задача, како на пример: **модел на слепо пребарување**, којшто се потпира на т.н. метод на проби и грешки; **лабораториски модел**, во кој решаваната задача се разгледува како лавиринт, а процесот на решавање - како талкање по лавиринтот; **структурно-семантички модел**, којшто ги одразува семантичките односи меѓу објектите.**┘

2) **Програмираната настава** како дидактички систем е изградена кон средината на овој век со цел наставната работа да се индивидуализира и интензивира.

Основните карактеристики на овој систем се содржани во разделот 3.4. Имено, најважно за оваа наставна стратегија е претходно да се изработи програмиран материјал. (Тоа е најтешкиот и најделикатниот дел од работата, за што треба да се ангажира екипа стручњаци од повеќе профили: математичари, методичари, психолози, а и информатичари, ако се користат компјутери.)Потоа се обликуваат порциите со соодветните кадри: соопштување и усвојување на информацијата; формулирање и решавање на задачата; повратна информација.

3) **Егземпларната настава** како наставна стратегија означува „концентрирање врз битното" или „земање на суштинското од целината", а пoслободно: работа по урнек, по образец". Таа се јавува исто така по Втората светска војна како потреба за брзо и ефикасно оспособување на научно-технички кадри, во земјите што доживуваа интензивна научно-техничка револуција. Името доаѓа од латинскиот збор *exemplum*, што значи: пример, образец, урнек, но и: модел, срж, мостра.

Стратегијата на работа при оваа настава е следнава.

Прв чекор. Наставникот внимателно ги проучува наставните содржини од наставната програма и ги издвојува оние што се меѓусебно слични. Од нив, по определен критериум, го издвојува она што е важно, суштинско, претставително и го распоредува во две групи: *егземпларни* (потесни) и *аналогни* (пошироки) содржини.

Втор чекор. Издвоените егземпларни содржини се обработуваат на примерен, квалитетен, т.е. „егземпларен" начин. Тој дел од наставната работа треба да биде извршен виртуозно, со квалитетна програмирана настава, така што учениците *наполно да ја сфатат и да усвојат модел* за обработуваната егземларна содржина.

Трет чекор. Учениците преминуваат на самостојно обработување на аналогните содржини (што не се опфатени во егземпларниот дел).

Четврти чекор. Се организира завршно, продуктивно повторување на сите обработувани содржини (и егземпларни и аналогни), а на крајот се врши и проверување.

Егземпларната настава го вклучува и поучувањето на наставникот и самостојната работа на учениците. Од сето тоа е јасно дека оваа наставна стратегија е комплетна.

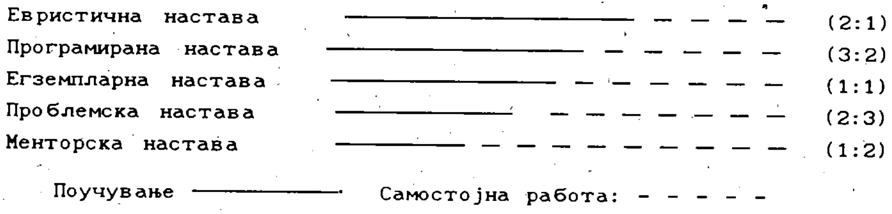
4) **Проблемската настава** како наставна стратегија се јавува многу природно. Нејзините карактеристики ги разгледавме во разделот 3.4. Ќе повториме само дека стратегијата на работа е следнава: се создава проблемска ситуација, се формулира проблем, се разрешува проблемот и се врши дискусија, т.е. проверка.

5) **Менторска настава**. Самото име кажува дека стратегијата се реализира преку ментор (т.е. раководител, тутор). При оваа настава поучувањето од наставникот значително се намалува и се сведува на повремени консултации за време на работата, а самостојната работа на ученикот во голема мера се зголемува, и тоа почнувајќи од изборот на проблемот, па сè до неговото решение.

Значи, тежиштето на менторската настава е самостојната работа на ученикот - студентот, па овој систем претпоставува висок степен на самодисциплина и способност, како и совладана техника на интелектуалната работа. Оваа настава е погодна за работа при подготвување на семинарски и матурски теми, самостојни проекти, дипломски работи и др.

На крајот - уште две забелешки.

Забелешка 1. Секоја од наброените наставни стратегии опфаќа *поучување* (од наставникот) и *самостојна работа* (на ученикот). Разликата е само во *односот* меѓу поучувањето и самостојната работа. Подолу, тој е прикажан графички.



Забелешка 2. За *разликата меѓу наставна стратегија и наставен метод* може да се каже кусо дека: наставната стратегија е глобален пристап или општа определба за реализација на наставата како целина, а наставниот метод е начин на организирање на наставниот материјал во еден наставен час или во некој негов дел.

4.4. ЗА ПРОТИВРЕЧНОСТИТЕ ВО НАСТАВНИОТ ПРОЦЕС

Наставата по кој било предмет, а посебно по предметот математика е мошне сложен процес: во него треба да се обезбеди единство меѓу приодот кон учениците и изборот на наставните средства, методи и форми. И тогаш кога тој процес е добро организиран, кога наставните методи и форми се правилно користени и комбинирани, кога дидактичките принципи се максимално уважувани, сепак во практичната настава, наставникот е соочен со редица *противречности* што се јавуваат меѓу: целите, задачите и содржината на наставата, суштината на наставниот процес, принципите, методите и формите на наставата.

Еве неколку примери на такви противречности.

1) Од една страна, наставата има за цел „сестран, општ развиток на сите ученици", а од друга страна има за цел „продлабочен развиток на математичките знаења и способности на учениците"; меѓутоа, „ширината" е во спротивност со „длабочината". (Значи, тука се јавува *противречност меѓу целите на наставата.*)

2) Од една страна го имаме бурниот растеж на новите научни информации и барањето за нивното вклучување во наставниот предмет, а од друга страна е невозможноста тоа да се оствари, поради повеќе причини, од кои најважна е ограниченото времетраење на „организираното" образование. (Според тоа, тука се работи за *противречност меѓу содржината на нас-*

тавата и нејзиното осовременување.)

3) Во процесот на формирање нови поими, од една страна се поставува прашањето за „доволно" *конкретни елементи*, а од друга страна се бара „ослободување од конкретното", и постигнување висок степен на *апстракција*. (Слични противречности се јавуваат и при откривањето нови факти – теореми, закони, формули.)

4) Противречности се јавуваат и при примената на наставните форми: од една страна се препорачува *фронталната форма*, т.е. работа со целиот клас одеднаш, а од друга страна се форсира *индивидуалната форма*.

5) Од една страна се уважува *раководната улога на наставникот* во наставата, а од друга страна се инсистира на *активната, самостојна дејност на ученикот*. (Значи – противречности при примената на наставните методи и форми.).

За да се согледаат таквите противречност и да се испреварат, треба да се познава нивната суштина и да се оценува нивното влијание врз наставата. Секоја од нив се решава непосредно во практичната работа, а успешното решение зависи од умешноста на наставникот.

4.5.* ЗА ПРОБЛЕМОТ НА КЛАСИФИКАЦИЈА НА НАСТАВНИТЕ МЕТОДИ

Изучувањето на наставните методи, нивниот развиток и споредбени оценки, го наметнуваат прашањето за нивната научна класификација. На ова прашање му е посветено посебно внимание во последниве неколку децении. Направени се многу обиди да се класифицираат основните наставни методи, земајќи разни критериуми сврзани со организацијата на наставниот процес, но не е добиено задоволително решение. Општо земено, проблемот на класификација на наставните методи во современата дидактика, вклучувајќи ја и дидактиката на математиката, не е успешно решен.

Класификација на наставните методи може да се прави по *разни критериуми*: по целите на наставата, по средствата (или начините), по редоследот на применувањето на одделни елементи од наставата и др. Така, на пример, наставните методи може да се групираат:

1) *по воспитните цели:* а) пасивно-репродуктивни методи, насочени кон воспитување кај децата послушност, внимателен прием и репродуцирање на материјалот и б) активно-творечки, насочени кон воспитување кај децата иницијатива, љубопитност, творечка претприемчивост, трагачки дух и др.;

2) *по средствата што ги користи ученикот:* а) метод на учење по книги и дидактички материјали и б) метод на природно учење врз материјали и задачи од реалниот живот;

3) *по средствата што ги применува наставникот:* а) збо-

ровен метод (со зборот како средство), б) предметен (т.е. нагледна предметна форма на соопштување знаења) и в) **моторен** (со мускулна активност на ученикот или негови движечки акции за добивање знаења);

4) *по просторно-временски признак:* а) класно-лекциски и б) лабораториско-кабинетски;

5) *според карактерот на работата на наставникот и учениците: а) методи на готови знаења* или методи на предавање (со чија помош наставникот им предава на учениците готови изводи и обопштувања и наставата се сведува, главно, на запомнување на материјалот од страна на учениците) и б) *методи на активно учење* (при кои, ученикот, поттикнуван од наставникот, сам трага и добива неопходни податоци, поставува прашања, експериментира, истражува и самостојно доаѓа до потребните заклучоци).

Во методичката литература по математика, мошне распространето е групирањето на наставните методи како „современи" и „традиционални". Притоа, меѓу *современите методи* се вбројуваат: евристичниот разговор, проблемската и програмираната настава, самостојната работа, т.е. оние методи што се одликуваат со активен однос на ученикот кон наставата, интензивирање на неговата мисловна дејност и развивање на неговата креативност. (Може да се каже дека современите методи - тоа се методите на активно учење, споменато погоре, во 5).)

За *традиционални наставни методи* пак се сметаат разните варијанти на монолошкиот метод (соопштување, објаснување, раскажување), коишто обично се комбинираат меѓу себе, а и со други методи, како, на пример, со методот на нагледна настава и, специјално, со методот на демонстрација; значи, меѓу нив се вбројуваат наставните методи чијашто одлика е догматското излагање и објаснување на готови знаења.

Да забележиме дека методот на нагледна настава и лабораториско-практичниот метод, според нивната појава во историјата на школата, се „традиционални" методи, но според нивниот начин на применување и комбинирање со другите, „активни" методи, може да се вбројат и во „современите".

Во некои југословенски методички прирачници се прави обид за *класификација на наставните методи врз основа на изворот* според кој ученикот може да се здобие со некое знаење (в. Пенавин, [25], стр. 15). Според таа класификација, наставните методи се делат на: а) *вербално-текстуален,* б) *илустративно-демонстративен* и в) *лабораториско-експериментален.* Секој наставен метод се дели на т.н. „*методски облици*", секој методски облик на „*методски поединости*", а низ секоја методска поединост се проткаени т.н. *наставни логички постапки* (индукција, аналогија, анализа, синтеза итн.).

На пример, вербално-текстуалниот метод ги има следниве методски облици: усно излагање, разговор, работа со учебник, писмени работи и решавање задачи. Методскиот облик „усно излагање" пак ги има овие методски поединости: раскажување, објаснување, предавање. (Според тоа, „методски облик" може да се сфати како „наставен метод" од прегледот во III.3, а „методска поединост" како „варијанта" на даден наставен метод. „Наставни логички постапки" пак се сметаат научните методи, наведени во гл. II.)

Во педагогијата не се решени и други основни прашања во врска со наставните методи. Така, покрај нерешениот проблем на класификацијата, нема единствен став за „бројот" на наставните методи, како и за нивниот *однос со наставните форми*. (Дали наставните форми им се „потчинети" на наставните методи или обратно? Дали самостојната работа на учениците е наставен метод или е наставна форма?). Причината за овие тешкотии е отсуството на дефиниции (во математичка смисла) на поимите наставен метод, наставна постапка, наставна форма; без такви, прецизни дефиниции не е можно да се прават строги разграничувања.

Во врска со прашањето дали има „многу" или „малку" наставни методи, во педагогијата се издвојувале три правци: монометодизам, панметодизам и аметодизам.

1) **Монометодизмот** е правец што признава (во наставата по кој било предмет) *само еден наставен метод*. Но,за тоа кој е тој метод, нема согласување. Така, на пример: Коменски го признавал само методот на нагледна настава и индукција; Песталоци - само „природниот метод" на Жан-Жак Русо; Б. Ото - само методот на разговор; Ф. Карсен - само методот на практична работа (т.е. методот на проекти); Монтесори (за воспитувањето) - само содржини на смислено уредена околина и др.

2) **Панметодизмот** е сфаќање дека наставен метод е *сè она што дејствува на учениците*. Едно од тие панметодистички сфаќања оди до крајност: наставникот се идентификува со наставниот метод, т.е. секој наставник „има свој" наставен метод (или: „колку наставници, толку наставни методи").

3) **Аметодизмот** е сфаќање во педагогијата,блиско до панметодизмот, но оди во друга крајност: тоа сфаќање *негира дека постои некој посебен наставен метод* или посебни наставни методи.

IV. МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ И МЕТОДИКА НА НИВНОТО ИЗУЧУВАЊЕ

1. ГЛАВНИ ФОРМИ НА МИСЛЕЊЕТО

1.1. Во III.1.2 рековме дека сознавањето има три степени: сетилен (набљудување), мисловен (мислење) и практика.

Сетилното сознавање се остварува со помош на органите за осет, преку отсликување одделни својства и примање на предметот или појавата како целина во свеста на човекот. Тоа може да се достигне и преку **претстави**, т.е. со репродуцирање во свеста на порано примен објект или појава што во тој момент отсуствува. На тој начин се стекнуваат знаења само за непосредно примени својства на објекти.

При **мисловното сознавање** се достигнува знаење за суштински својства на објектите или појавите без непосреден прием, а преку мисловен процес, чиишто резултати се утврдуваат, се обопштуваат и им се предаваат на други луѓе со помош на зборови. При овој степен сознавањето се движи од појавата кон нејзината суштина, од сетилно конкретни факти кон научни закони, од конкретно кон апстрактно. За овој степен на сознавање обично се употребува терминот *мислење*.

Мислењето е, значи, активен процес при кој реалниот свет се одразува во свеста на човекот. Тоа е главното оружје на научното сознавање. Поради тоа, една од најважните задачи на современата настава е развивањето на мислењето кај учениците. Наставата по математика има посебно место во остварувањето на таа задача.

1.2. Мислите може да имаат *различна структура*. Градбата на одделни мисли и нивните посебни комбинации се викаат **фор-**

ми на мислењето. Главни форми се: поими, тврдења и расудувања. Во математиката нив ги викаме и: а) математички поими, б) математички тврдења, в) математички расудувања.

Да разгледаме неколку примери.

$а_1$) Трактор е машина што служи за орање.

$а_2$) Остров е копно опкружено со вода од сите страни.

$а_3$) Дијаметар на кружница е тетива што минува низ центарот на таа кружница.

$а_4$) Правата можеме да си ја замислиме како добро оптегнат конец.

Во секоја од овие четири реченици е содржан *договор за значењето на даден термин* (трактор, остров, дијаметар, права - соодветно), т.е. со секоја од нив е *опишан* по еден *поим*. Општо, поимите се искажуваат со реченици во кои е содржана некоја осмислена договореност во врска со некои објекти или појави. Тие реченици одговараат на прашањето: „што е тоа?". Може да се рече дека **поимот** е мисловно репродуцирање, т.е. мисловна копија на објектите.

Друга форма имаат следниве мисли:

$б_1$) Денес небото е ведро.

$б_2$) Скопје е најголем град на светот.

$б_3$) Дијагоналите на правоаголникот се еднакви меѓу себе.

Во секоја од последните три реченици е искажано некое *својство, врска или однос на објектите* за кои станува збор. Со други зборови, во секоја од нив е искажано некое **тврдење**, чијашто точност (вистинитост) треба да се установи, т.е. да се потврди или да се побие.

Трета форма, различна од претходните две, имаат следниве мисли:

$в_1$) Сите слонови имаат сурла. Бимбо е слон. Значи, Бимбо има сурла.

$в_2$) Ако небото е ведро, тогаш не паѓа дожд. Вчера над Охрид немало облаци. Значи, вчера во Охрид не врнело.

$в_3$) Ако последната цифра на еден број е нула или 5, тогаш тој број е делив со 5. Бројот 2135 завршува со цифрата 5. Следствено, тој е делив со 5.

$в_4$) $a \| b \wedge b \| c \Rightarrow a \| c$.

$в_5$) $a \in A \wedge a \notin B \Rightarrow A \subseteq B$.

Речениците $в_1$) - $в_5$) се *сложени мисли*. Во нив, според дадените услови и прифатени правила, *се прават одредени изводи или заклучоци*, т.е. тие мисли имаат структура на **расудување**.

1.3. ВЕЖБИ

1. Наведи неколку (барем три) термини, а потоа за секој од нив искажи реченица што претставува договор за неговото значење. (Земи ги, на пример: хоризонт, роман, кружница).
2. Наведи неколку (барем три) тврдења и образложи ја нивната вистинитост (земи на пример, тврдење во врска со: паралелограм, пресликување, пари).
3. Наведи неколку мисли што имаат структура на расудување.

2. СОДРЖИНА И ОБЕМ НА ПОИМ

2.1. ФОРМИРАЊЕ НА ПОИМИ

Како што споменавме, **поимот** претставува мисловно репродуцирање, т.е. мисловна копија на дадена класа објекти и се искажува со реченица што содржи одредена *договореност* во врска со таа класа објекти. Секој математички поим се означува со **термин** којшто се состои обично, од еден збор или од неколку збора, а може да биде претставен и со некој знак (симбол). Поимот, како форма на мислењето, претставува специфична човекова дејност: тој е производ на високоорганизирана материја и одраз на реалниот свет во свеста на човекот, а се формира по пат на обопштување и апстракција.

Формирањето на еден поим е бавен процес. Обично, тој процес започнува со *восприемање* или *перцепција* (тука доаѓа до израз методот на набљудување) потоа продолжува со *запомнување* на дадени својства и создавање *претстава* за класата објекти (тука доаѓа до израз методот на обопштување) и завршува со формирање во сознанието на некоја **апстрактна карактеристика** за таа класа објекти (до израз доаѓа методот на апстракција).

2.2. ОБЕМ И СОДРЖИНА

Секој математички поим во себе обединува:

- множество објекти или релации; тоа множество се вика **обем на поимот**;
- карактеристично својство што го имаат сите елементи на тоа множество и само тие; тоа својство се вика **содржина на поимот**.

Пример 1. Дијаметар на кружница е тетива што минува низ центарот на кружницата.

Обемот на поимот дијаметар на кружница е множеството од оние тетиви на кружницата што минуваат низ нејзиниот центар.

Содржината, пак, ја претставува својството: „тетива што минува низ центарот на кружницата".

Пример 2. *Сложен* број се вика природен број што има барем три природни делители.

Обемот на поимот сложен број е множеството {4,6,8,9,10, 12,14,...}, а содржината е претставена со својството: „број што има барем три природни делители".

Јасно е дека меѓу содржината и обемот на еден поим постои цврста врска: содржината строго го определува неговиот обем и обратно – обемот на поимот наполно ја определува неговата содржина. Зависноста меѓу нив е, во извесна смисла, обратна: *ако се прошири (т.е. ако се збогати) содржината, тогаш обемот ќе се смали, а ако се зголеми обемот, тогаш содржината ќе се стесни (т.е. ќе осиромаши).*

Пример 3. Ако се прошири содржината на поимот *сложен број* „има барем три природни делители" со: „и е помал од 10", тогаш обемот се стеснува – се добива множеството {4,6,8,9}.

Пример 4. Да ја разгледаме класата: „паралелограми, такви што, во кој било од нив, сите страни, како и сите агли се еднакви меѓу себе". (Очигледно се работи за поимот *квадрат*, т.е. за класата квадрати).

Ако содржината „сите страни како и сите агли се еднакви меѓу себе" се стесни (т.е. се осиромаши) со отфрлање на делот „како и сите агли", тогаш ќе се добие класата: паралелограми, такви што, во кој било од нив, „сите страни се еднакви меѓу себе", т.е. класата ромбови.

Значи, со стеснување на содржината, се проширува обемот.

Да забележиме дека *при обопштување на некој поим содржината му се стеснува, а обемот се проширува.* Во процесот на специјализација пак се случува обратното: содржината се зголемува, а обемот се смалува.

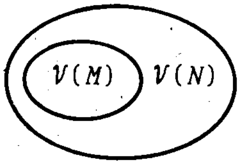
2.3. РОДОВ ПОИМ И ВИДОВА ОДЛИКА

Како што спомнавме во примерот 1, множеството дијаметри на една кружница е подмножество од множеството тетиви на таа кружница. Со други зборови, обемот на поимот дијаметар е содржан во обемот на поимот тетива. Аналогно, обемот на поимот сложен број се содржи во обемот на поимот природен број (пример 2).

Да го означиме со $V(M)$ обемот на поимот M, а со $V(N)$ обемот на поимот N. Ако обемот на поимот M се содржи во обемот на поимот N, т.е.

$$V(M) \subset V(N), \qquad (*)$$

тогаш M се вика **видов поим** во однос на N, а N – **родов поим** во однос на M. (Односот (*) е прикажан со *ојлеров дијаграм* на црт. 1).



Црт. 1

Црт. 2

Црт. 3

Така, дијаметар е видов поим во однос на поимот тетива (т.е. дијаметар е вид тетива), а тетива е родов поим во однос на дијаметар. Земајќи дека „тетива е отсечка чии крајни точки лежат на кружницата", имаме

$$V(\text{дијаметар}) \subset V(\text{тетива}) \subset V(\text{отсечка})$$

(црт. 2), па отсечка е родов поим во однос на тетива, а и во однос на дијаметар. Значи, и отсечка е род за дијаметар, но за дијаметар поимот тетива е *најблискиот род*. Да разгледаме уште еден пример.

Пример 5. *Паралелограм* е четириаголник при кој спротивните страни, пар по пар, се паралелни, а четириаголник е многуаголник со четири страни.

Значи, паралелограмот е вид четириаголник, а четириаголникот е вид многуаголник. Според тоа, поимот многуаголник е род во однос на поимот паралелограм; меѓутоа, најблискиот род на поимот паралелограм е поимот четириаголник. (На црт. 3, тој однос е претставен со ојлеров дијаграм.)

Да се вратиме на примерот 1. Од множеството тетиви на една кружница ние издвојуваме едно подмножество со помош на својството: „(тетиви што) минуваат низ центарот на кружницата" (и елементите на тоа подмножество ги нарекуваме дијаметри). Со тоа својство наполно се определени дијаметрите на кружница, т.е. тоа е нивно **карактеристично својство**. Значи, со него се издвојува еден вид тетива, наречен дијаметар, па затоа ова својство се вика **видова одлика** (или видов признак) за поимот дијаметар.

Аналогно, видова одлика за поимот паралелограм е „(четириаголник при кој) спротивните страни пар по пар се паралелни", а за поимот сложен број: „(природен број којшто) има барем три природни делители".

На крајот да забележиме дека поимите, обично, се наоѓаат во *родо-видов однос;* тој е и најзгодниот општ начин за дефинирање поими.

2.4. ВЕЖБИ

1. Опиши го процесот на формирање на поимот
   а) паралелни прави;
   б) прост број
   кај учениците од основното образование.
2. Одреди го обемот и содржината на следниве поими:
   а) паралелограм; б) ромбоид; в) ромб; г) трапез; д) рамнокрак триаголник; ѓ) средна линија на триаголник; е) инјективно пресликување; ж) прост број.
3. За секој од поимите во задачата 2 наведи го неговиот најблизок род. За кои од тие поими можеш да укажеш на „род" што не е „најблизок"? Наведи и по еден вид (ако има) за а) - ж) од зад. 2.
4. Наведи ја видовата одлика (или: видовите признаци) на секој од поимите од зад. 2.
5. Определи ги видовите одлики на поимот квадрат, ако тој се смета за: а) вид паралелограм (пример 4); б) вид ромб; в) вид правоаголник.

3. ДЕФИНИРАЊЕ НА ПОИМИ

3.1. ДЕФИНИЦИЈА

Реченицата со која се открива содржината на еден поим, т.е. се набројуваат неговите суштински својства со чија помош се издвојуваат сите објекти што ги имаат споменатите својства и само тие објекти, се вика **дефиниција** на тој поим.

Реченицата од примерот 1 во разделот 2.2 претставува дефиниција на поимот дијаметар. Таа се состои од:

- дефиниран поим, т.е. поимот што се дефинира, да го наречеме *дефиниенд*; во примерот, тоа е: дијаметар на кружница;

- *логичка врска* (во примерот: „се вика", а може и: „се наречува", „е", „го викаме" и сл.);

- *дефинирачки поим*, т.е. родовиот поим со видовите одлики - признаци, да го наречеме *дефинирач;* во примерот, тоа е: „тетива што минува низ центарот на кружницата".

Како што споменавме на крајот од разделот 2.3, поимите обично се наоѓаат во родово - видов однос. Тоа го користевме во 2.2 за да ги дефинираме поимите дијаметар, сложен број и паралелограм (примерите 1, 2 и 5). И општо, *дефиниција според најблискиот род и видови одлики* е најзгоден и затоа најраспространет начин на дефинирање поими.

Дефиницијата може да се даде преку род што не е најблизок до дефинираниот поим (како во примерот 4 од 2.2 за поимот квадрат), но во такви случаи видовите признаци ќе бидат повеќе на број. Тргнувајќи од фактот дека пократка дефиниција обично е позгодна, треба да се настојува да се изнајде најблиските род, зашто тоа ќе придонесе бројот на видовите пизнаци да се намали. (Проследи ја уште еднаш важбата 5 од 2.4.).

Дефиницијата ќе биде логички правилна, ако дефиничкиот поим (т.е. родовиот поим со видовите одлики) не е ни поширок ни потесен од дефинираниот поим, т.е. ако меѓу нив постои еквивалентност („еднаквост"):

Дефиниенд = Дефинирач.

Според тоа, секоја реченица што претставува дефиниција на некој поим мора да се сфати во смисла на горната еднаквост, т.е. мора да се подразбере во смисла на „**ако и само ако**", дури и тогаш кога е искажана само со условот „**ако**".

Пример 1: Реченицата: „Множеството A се вика подмножество на едно множество M, *ако* секој елемент на A е елемент и на M" (којашто е дефиниција на поимот подмножество), мора да се сфати вака:

„Множеството A се вика подмножество на едно множество M, *ако и само ако* секој елемент од A е елемент и од M".

Првата реченица, запишана симболички, би изгледала вака:

$$(x\in A \Rightarrow x\in M) \Rightarrow A\subseteq M,$$

а треба да ја толкуваме како втората:

$$(A\subseteq M) \Leftrightarrow (x\in A \Rightarrow x\in M).$$

3.2. ПРАВИЛА ЗА ДЕФИНИРАЊЕ ПОИМИ

При изградувањето дефиниции треба да се уважуваат најважните правила за дефинирање. Имено, дефиницијата треба:

1° **да биде потполна**, јасна и без излишни додатоци;

2° **да биде усогласена, сразмерна** (т.е. обемот на дефиниендот да се софпаѓа со обемот на дефинирачот); на пример, дефиницијата: „ромб е паралелограм со заемно нармални дијагонали" е усогласена, зашто V(ромб) = V(паралелограм со заемно нормални дијагонали);

2° **да не влегува во логички бесмислен круг** (circulus vitiosus - расипан круг), т.е. не смее M да се дефинира со N, а N со M. (На пример: „Две прави се викаат заемно нормални, ако се сечат под прав агол", а веднаш потоа: „Еден агол се вика прав агол ако неговите краци се заемно нормални");

4° **да не отсуствува родовиот поим** што е дел од дефинирачкиот поим (т.е. родовиот поим да не биде изоставен, како во примерот: „дијаметар е она што минува низ центарот на кружницата");

5° по можност, **да не е негативна** (на пример: „Сложен број се вика оној број што не е прост").

Покрај наведените правила, за дефиницијата се поставува и следново барање:

6° **дефиницијата треба да биде „минимална"**, т.е. карактеристичното својство, по својата логичка структура, да биде наједноставно. Да разгледаме еден пример.

Пример 2. Да ги споредиме следниве две дефиниции на правоаголник:

1) „Правоаголник е паралелограм со прав агол".

2) „Правоаголник е четириаголник што има прав агол и два пара паралелни страни".

За споредување на структурата на овие две дефиниции, згодно е да ги претставиме симболички, со јазикот на множествата.

Нека A е множеството правоаголници, B - множеството паралелограми, C - множеството четириаголници, P_2 - својството „*има два пара паралелни страни*", P_1 - својството „*има прав агол*". При тие ознаки, дадените дефиниции можеме да ги запишеме вака:

1') $x\in A \overset{\mathrm{Df}}{\Longleftrightarrow} x\in B \wedge P_1(x)$,[1] т.е. $A = \{x \mid x\in B \wedge P_1(x)\}$;

2') $x\in A \overset{\mathrm{Df}}{\Longleftrightarrow} x\in C \wedge P_1(x) \wedge P_2(x)$, т.е.

$A = \{x \mid x\in C \wedge P_1(x) \wedge P_2(x)\}$.

Како што гледаме дефиницијата 1) е покуса, зашто нејзиното карактеристично својство има попроста логичка структура: $P_1(x)$. Дефиницијата 2) е погломазна поради посложената логичка структура: $P_1(x) \wedge P_2(x)$. Ако се земе дефиницијата на паралелограм:

$$x\in B \overset{\mathrm{Df}}{\Longleftrightarrow} x\in C \wedge P_2(x)$$

и B се замени во 2'), тогаш се добива дефиницијата 1').

Овој пример укажува дека, во општ случај, *најпростата куса дефиниција содржи најпросто (по својата логичка структура) карактеристично својство*. Тоа се постигнува ако множеството објекти што го дефинираме го изразиме како подмножество од *минимално множество* објекти што е порано дефинирано (или, со други зборови, по *најблискиот род*).

Дефиницијата што е дадена со помош на најблискиот род, т.е. со помош на минимално множество се вика **минимална**. Та-

---

[1] Df е кратенка за изразот „по дефиниција".

ка, дефиницијата 1) е минимална, а 2) не е минимална.

Во процесот на наставата треба да се стремиме кон изградба на минимални дефиниции. Само таквите дефиниции се сметаат за беспрекорни и од логичко и од методичко гледиште (се разбира, ако немаат некои други дефекти).

При дефинирањето на еден поим секогаш се поставува прашањето за егзистенција на дефинираните објекти. Ако ниеден елемент од множеството M не го поседува својството P, тогаш дефиницијата на множеството A:

$$x\in A \overset{\mathrm{Df}}{\Longleftrightarrow} X\in M \wedge P(x)$$

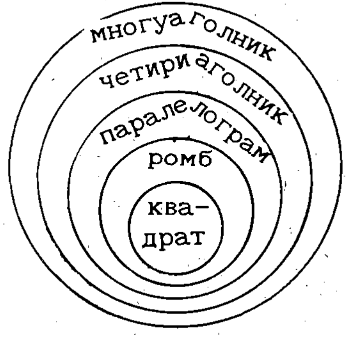
не дефинира ништо, освен празното множество, т.е. $A = \emptyset$. Таквата дефиниција се вика **противречна**.

На пример, дефиницијата: „Триаголник со два тапи агли се вика битапоаголен триаголник" е противречна, зашто не постои ниеден триаголник со тоа својство. Поради тоа, при дефинирањето (од ваков тип) се наложува и задачата за докажување на *постоењето барем на еден објект* со даденото својство, т.е. дека множеството објекти што го дефинираме не е празно. На пример, дефинирајќи правоаголен триаголник, ние го докажуваме неговото постоење со непосредна конструкција на таков триаголник.

3.3. ОСНОВНИ И ИЗВЕДЕНИ ПОИМИ

Да го разгледаме сега поимот квадрат („*Квадрат* е ромб со прав агол"). Тој е дефиниран со помош на родовиот поим ромб. Поимот ромб, пак, можеме да го дефинираме со помош на родовиот поим паралелограм (и соодветна видова одлика). За дефинирање на поимот паралелограм го употребивме поимот четириаголник, а последниов го дефинираме со некој друг поим; итн.

Овој процес на изградување поими (за конкретниов случај прикажан со ојлеров дијаграм на црт. 1) неизоставно доведува до една од следниве можности:



Црт. 1

а) *или даден поим M ќе се дефинира со поим N за чие дефинирање веќе е употребен поимот M, т.е. или ќе допуштиме логички бесмислен круг во дефиницијата,*

б) *или некои од поимите ќе ги прифатиме без да ги дефинираме.*

Во математиката се прифаќа втората можност.

Поимите што не ги дефинираме, т.е. ги прифаќаме без дефиниција, ги викаме **првични поими**.

Математичките науки обично почнуваат со своите првични поими. Тие се викаат уште: **основни, првобитни, недефинирани поими,** зашто влегуваат во основата, т.е. почетоците на дадената наука и не е можно тие да се изразат со други поими од таа наука.

Една математичка наука обично се гради врз основа на неколку првични поими и врски меѓу нив. Тие овозможуваат да се дефинираат сите други поими од таа наука; тие се наречени: **изведени или дефинирани поими.**

На пример, во геометријата, за првични се земаат поимите: *точка, права, рамнина, растојание.* Првични поими се и: *множество, елемент, број* и др. (во рамките на целата математика). Изведени се, на пример поимите: *кружница, дијаметар, квадрат, прост број, дропка* и др.

3.5. ВЕЖБИ

1. Учениците отпрво доаѓаат до следнава дефиниција на правоаголник: „Правоаголник е паралелограм, при кој сите агли се прави".

   Откако ќе ја решиш задачата: „Даден е паралелограм со еден прав агол; да се најдат другите агли на паралелограмот", усоврши ја горната дефиниција на правоаголник.

   (*Одговор:* Правоаголник е паралелограм со прав агол.)

2. Да се усоврши следнава дефиниција на ромб: „Ромб е паралелограм при кој сите страни се еднакви".

3. Поимот квадрат е дефиниран со зборови на следниве два начина:

   а) Квадрат е ромб со прав агол.

   б) Квадрат е паралелограм со прав агол и еднакви соседни страни.

   Да се запишат двете дефиниции со симболи (на јазикот од теоријата на множествата), да се изврши споредба на нивните логички структури и да се уочи поекономичната од нив.

   Помош: M, A и B = множеството: паралелограми,квадарати, ромбови соодветно; P_1 = има прав агол, P_2 = има еднакви соседни страни; $x \in A \Leftrightarrow x \in B \wedge P_1(x)$; итн.

4. Искажи ја дефиницијата на поимот ромбоид со јазикот од теоријата на множествата, користејќи го упатството од предходната задача.

5. Дадена е дефиницијата: „Паралелограм е четириаголник при кој спротивните страни пар по пар се паралелни и еднакви". Запиши ја со симболи (од јазикот на множествата), направи анализа и избери минимална дефиниција.

6. Поимот паралелограм сакаме да го дефинираме со реченицата:

„Паралелограм е четириаголник,

а) чиишто спротивни страни пар по пар се паралелни и еднакви;

б) со дијагонали што заемно се преполовуваат;

в) со паралелни страни;

г) со два пара еднакви страни;

д) чиишто спротивни страни пар по пар се паралелни;

ѓ) чиишто спротивни агли пар по пар се еднакви".

Која од овие реченици може да се прифати како дефиниција за паралелограм? Која од нив се препорачува и зошто? Запиши ја логичката структура на секоја од нив.

7. Искажи ја дефиницијата на поимот трапез. Дали,според неа, паралелограмите се трапези?

8. Тргнувајќи од дефиницијата на поимот:

а) дијаметар, б) квадрат,

наведи ги последователно дефинициите на дефинирачките поими се додека не стигнеш до некои првични поими.

9. Разгледај ја дефиницијата:

а) Триаголник со два прави агли се вика *двоправоаголен*.

б) Трапез при кој сите четири страни се еднакви се вика *рамностран трапез*.

в) Кружница чиј периметар е еднаков на должината на нејзиниот дијаметар се вика *изопердиска* кружница.

За каква дефиниција се работи? Запиши ја со симболи нејзината логичка структура.

10. Два прости броја p и q се викаат *близнаци*, ако $|p-q| = 2$. Такви се на пример, 11 и 13, 17 и 19 итн.). По аналогија, можеме да дефинираме: „Три прости p, q и r се викаат *тризнаци*, ако $|p-q| = |q-r| = 2$". Дали оваа дефиниција е противречна? Запиши ја со симболи нејзината логичка структура.

4. ВИДОВИ ДЕФИНИЦИИ

4.1. Поимите во математиката може да се дефинираат правилно на повеќе начини. Инаку речено, има повеќе видови дефиниции. Ќе наведеме неколку од нив.

1°. Дефиниција преку најблискиот род и видова одлика. За овој начин на дефинирање веќе зборувавме во 3.2 (како и во IV.2 - примерите 1, 2, 5).

Суштината на овој метод е во следното. Ако M е множество, а P е својство што го имаат некои елементи $x\in M$ - пишуваме $P(x)$, а некои елемент x од M го немаат - пишуваме $\overline{P}(x)$, тогаш M се распаѓа на две непразни дисјунктни множества:

$$A = \{x | x\in M \wedge P(x)\},\ \overline{A} = \{x | x\in M \wedge \overline{P}(x)\},$$

т.е.

$$M = A \cup \overline{A},\ A \neq \emptyset,\ \overline{A} \neq \emptyset,\ A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Овде, M е множеството објекти што му припаѓаат на родовиот поим, а P е видовата одлика.

Пример 1. Во дефиницијата „ Квадрат е ромб што има прав агол":

- M е множеството ромбови,
- P е својството (видовата одлика) има „прав агол",
- A е множеството квадрати,
- $\overline{A}$ е множеството ромбови што не се квадрати.

Како што спомнавме, дефиницијата преку најблискиот род и видова одлика е најраспространета во математиката. Сепак, паралелно со неа, се користат и други видови дефиниции, од кои многу можат да се сведат на родово-видова форма на дефинирање.

2°. Генетичка дефиниција е дефиниција во која се опишува процесот на формирањето на објектот, т.е. на поимот што се дефинира. Најчесто оваа дефиниција се користи за објекти што се добиваат со транслација, ротација и општо, со некакво движење на точки, прави, линии, површини. Да разгледаме еден пример.

Пример 2. *Топката* е геометриско тело, кое се добива со ротација на круг околу некој негов дијаметар. Така може да се дефинира и: сфера, кружен конус, цилиндар, топкин сектор и др.

Да забележиме дека поимот топка обично се дефинира на следниов начин:

„*Топка* се вика множеството на сите точки од просторот чиешто растојание до една фиксирана точка O не е поголемо од еден даден позитивен број r."

Да уочиме дека описот на процесот во првата дефиниција, всушност го заменува карактеристичното својство што е употребено во втората дефиниција на топка.

3°. Рекурзивна дефиниција е дефиниција при која се задаваат:

(*i*) почетните елементи на класата објекти што се дефинираат;

(*ii*) правилата за формирање нови објекти од веќе формираните (тоа се, обично, некои рекурзивни врски) и

(*iii*) ограничувањето - дека со (*i*) и (*ii*) се исцрпуваат сите објекти од таа класа.

Пример 3. Аритметичка прогресија може да се дефинира вака:

(а) даден е број a_1;

(б) дадена е врската (правилото): $a_n = a_{n-1} + d$, каде што d е фиксиран број;

(в) членови на аритметичката прогресија се a_1 и секој a_n што е добиен од (а) и (б), и никои други.

Пример 4. Изрази (терми) во азбуката $\mathcal{A}=\{a,b,c;+,\cdot;(,)\}$ се:

(а) a, b, c;

(б) ако $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ се изрази, тогаш $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})$ се изрази;

(в) нема други изрази во $\mathcal{A}$ освен тие што се добиваат со конечен број примени на (а) и (б).

4°. Дефиниции искажани со симболички јазик, во вид на равенства, често се среќаваат во математиката. На пример:

1) $a^0 = 1$ $(a\neq 0)$;

2) $a^{-k} = \dfrac{1}{a^k}$ $(a\neq 0$, k - природен број);

3) $\operatorname{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(x\neq(2k-1)\frac{\pi}{2}$, k - цел број);

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$;

5) $\operatorname{ch}x = \dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

6) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

5°. Опис на поим. Постојат логички форми (реченици) што не се дефиниции, но се „блиски" до дефиниција. Во некои случаи тие ја заменуваат или ја дополнуваат дефиницијата на некој поим. Поради тоа, за нив може да се сретне терминот *описна дефиниција,* но тоа е погрешно - поправилно е да се нарече **опис на поимот.**

Кон опис на поимот обично се прибегнува кога не е можно да се даде дефиниција на тој поим. Таков е случајот со првичните поими: точка, права, рамнина, број, и др. Нив најчесто ги објаснуваме со некој модел. На пример:

1) *точката се претставува* со допир на молив до хартија, креда до табла и сл.;

2) *правата се замислува* како бескраен добро оптегнат конец.

Описот на поимот во некои случаи не само што ја заменува дефиницијата туку ја дополнува со информација што го конкретизира поимот или ги проширува врските со други поими. На пример:

3) *сличните фигури* имаат иста форма, а *складноста* на фигури може да се разгледува како специјален случај на сличноста.

Описното воведување на еден поим некои автори го викаат *дефиниција преку апстракција*. На пример: 4) „Величина се вика сè она што може да се дели, да се споредува и да се мери".

Меѓутоа, оваа реченица не може да се нарече дефиниција. (Зошто?) Но, и да може, нема основа да се издвојува посебен вид „дефиниција преку апстракција", зашто дефинирањето на математичките поими се врши во суштина со апстракција.

6°. Во училишната математика ја среќаваме т.н. **индиректна дефиниција** - *дефинирање на поими со помош на аксиоми*. Така, во систематскиот курс по геометрија, аксиомите ги откриваат својствата и врските меѓу прввичните поими: точка, права, рамнина и растојание, без да се даде директен опис на тие поими.

Дефинирање на поими со помош на аксиоми често се применува во науката математика. Во таквата дефиниција, наречена **аксиоматска дефиниција**, се вклучува систем аксиоми без секаков дополнителен опис на тој поим. Таква е, на пример, дефиницијата на поимот *природен број* со Пеановите аксиоми, дефиницијата на *полето на реалните броеви* и др.

7°. Дефиницијата може да биде зададена во општиот текст (т.е. „во контекст"), а не засебно; во тој случај велиме дека таа е **контекстна дефиниција**.

Да забележиме дека некои дефиниции имаат **конструктивна форма**. На пример: унијата на множеството цели броеви и множеството дробни броеви се вика *множество на рационалните броеви*.

4.2. ВЕЖБИ

1. Дефинирај ги или опиши ги следниве поими:
   а) парен број; б) дијагонала на многуаголник; в) круг; г) кружен цилиндар; д) растојание; ѓ) исказна формула; е) рамнина.
2. Поимот а) сфера; б) кружен конус; в) топкин исечок, да се дефинира генетично. Наведи и друга дефиниција.
3. Дефинирај генетички: а) триаголник (Помош: Земи отсечка AB и точка C што не лежи на правата AB.);
   б) пирамида (Помош: Земи многуаголник AB...E и точка T.);
   в) паралелограм (Помош: Транслација на отсечка.);
   г) призма.
4. Низата 1,2,3,5,8,13,21,34,... е позната како *низа на Фибоначи*. Дефинирај ја оваа низа рекурзивно.
5. Искажи ги со зборови дефинициите на следниве поими:
   а) инјективно пресликување; б) функцијата котангенс;
   в) хиперболичен косинус; г) конвергентна низа;
   д) подмножество; ѓ) дисјунктни множества.

Потоа, секоја од нив, запиши ја со симболички јазик.

6. Наведи ги дефинициите на следниве поими:

а) релација за еквивалентност; б) полугрупа; в) комутативна група; г) природен број (Пеанови аксиоми). Од кој вид е употребената дефиниција?

7. Покрај конструктивната дефиниција на поимот рационален број (дадена во текстот), може да се дадат и други дефиниции, еквивалентни со неа. Дефинирај „рационален број" со помош на:

а) идејата за подреден пар од цели броеви,

б) обопштување на поимот на десетична дропка.

8. Приведи ја конструктивната дефиниција на поимот реален број (Помош: Види 5.2).

5. КЛАСИФИКАЦИЈА НА ПОИМИ

5.1. ДЕФИНИЦИЈА И ПРИМЕРИ

Содржината на еден поим, како што рековме во IV.2, *се открива со неговата дефиниција, а обемот – со неговата класификација.*

Под **класификација** на еден поим ќе подразбираме *поделба* на неговиот обем на подмножества (т.е. класи), така што:

а) делењето се спроведува по еден ист, суштински признак (наречен *основа на поделбата),*

б) сите така добиени подмножества се непразни и дисјунктни,

в) унијата на тие подмножества е еднаква со целото множество (т.е. со обемот на поимот),

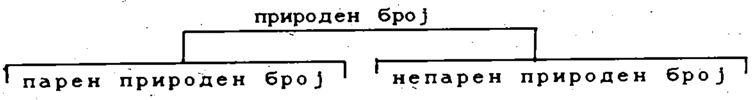
г) за тие подмножества, наречени *видови,* множеството треба да биде најблизок родов поим.

Најпростата класификација се добива со делење на множеството (т.е. обемот на поимот) на по две класи; таа се вика **двочлена класификација** или **дихотомија**, како во следниов пример.

Пример 1. Класификацијата на поимот природен број, според признакот P: *„е парен број"* се врши вака: обемот $\mathbb{N}$ се разбива на две подмножества

$$A = \{x\in\mathbb{N} \mid P(x)\}, \quad \overline{A} = \{x\in\mathbb{N} \mid \overline{P}(x)\};$$

тие ги задоволуваат условите а) – г), па според тоа, тие подмножества определуваат една (дихотомна) класификација на поимот природен број. Шематски, таа може да биде претставена вака:



Во некои случаи се врши натамошна поделба на едното од подмножествата, со избирање на некој признак, и со тоа се добива *втор степен на класификацијата.* Еве како изгледа тоа во општ случај.

Нека е дадено множеството M и нека е P_1 својство за елементите од M, при што некои од нив го имаат, а некои - го немаат. Да ставиме:

$$M_1=\{x\in M|P_1(x)\}, \quad \overline{M}_1=\{x\in M|\overline{P}_1(x)\}, \qquad (1)$$

каде што $P_1(x)$ означува дека елементот x го има својството P_1", а $\overline{P}_1(x)$ - го нема тоа својство (исто како во примерот 1). Тогаш добиваме разбивање на множеството M на две класи, M_1 и $\overline{M}_1$, такви што

$$M_1,\overline{M}_1\neq\varnothing, \quad M_1\cap\overline{M}_1=\varnothing, \quad M_1\cup\overline{M}_1=M. \qquad (2)$$

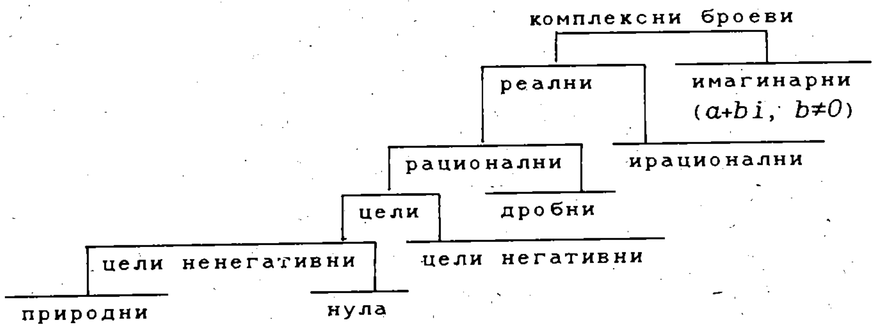
Ако сите елементи од множеството M_1, во однос на некое својство P_2, може да се разделат на две поткласи M_2 и $\overline{M}_2$:

$$M_2=\{x\in M_1|P_2(x)\}, \quad \overline{M}_2=\{x\in M_1|\overline{P}_2(x)\},$$

такви што да ги задоволуваат условите аналогни на (2), тогаш добиваме втор степен на класификација (на дадениот поим).

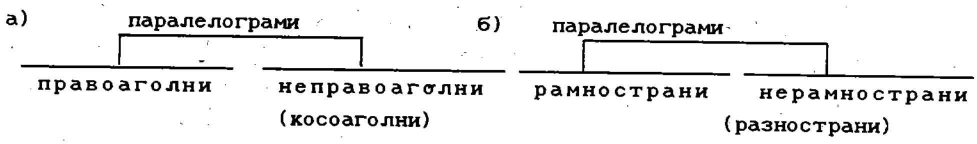
Аналогно се разбива множеството M_2, со помош на некое својство P_3, на две класи: M_3 и $\overline{M}_3$. Продолжувајќи го тој процес, добиваме *повеќестепена класификација* на поимот; таа низа од разбивања завршува со некое множество M_k, за кое натамошно разбивање веќе не се разгледува.

Пример 2. За поимот број може да се направи повеќестепена класификација (подолу се направени пет степени).



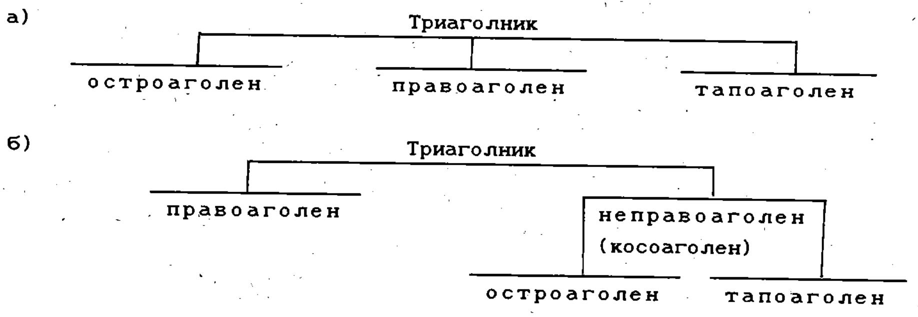
Класификации на: многуаголници, полиедри, броеви, функции, алгебарски изрази и др., според разни признаци, треба да прават учениците, сами или под раководство на наставникот.

Пример 3. Класификација на паралелограмите според признакот: а) „има прав агол", б) „сите страни му се еднакви".



Во некои случаи се разгледува разбивање на обемот на поимот на по три класи; таквата класификација се вика **тричлена поделба** или **трихотомија**. Еве еден пример.

Пример 4. Класификацијата на поимот триаголник по еден ист признак, „според аглите", можеме да ја спроведеме на два начина:



Класификацијата под а) е трихотомија и има еден степен, а класификацијата под б) е дихотомија и има два степена, со натамошна поделба на косоаголните триаголници. (Последната се користи при решавањето на триаголник со помош на тригонометриските функции.)

Друга класификација на поимот триаголник - според страните може да се направи аналогно.

Во дефиницијата на даден поим секогаш експлицитно се одразува неговата содржина, зад која стои обемот на поимот. При класификацијата пак на прв план доаѓа обемот, којшто се подлага на поделба со уважување на содржината на поимот.

При класификацијата, термините можеме да ги пишуваме: *во множина* (како во примерите 2 и 3) при што го истакнуваме множеството објекти, или, пак, *во еднина* (како во примерите 1 и 4), при што го потцртуваме самиот поим, неговиот општ и апстрактен карактер. И тогаш кога се употребува еднината, многу е важно ученикот јасно да си го претставува целиот обем на поимот.

Со класификацијата се постигнува кај ученикот да се зачува точноста и јасноста на математичките поими и во неговото сознание тие да се формираат како хармоничен систем.

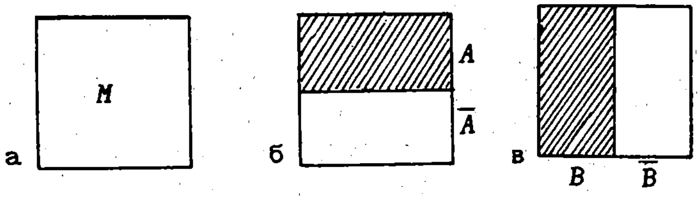
Со најпрости случаи на класифицирање учениците може и треба да се запознаат уште во IV и V одделение. Можностите за класификации значително се зголемуваат со зголемувањето на бројот на изучените поими. Особено корисни се класификациите на поими при повторувањето. Со нив се внесуваат творечки елементи, се побудува интересот на учениците, се постигнува подобра систематизација на изучениот материјал, а со тоа се зголемува ефективноста на повторувањето и квалитетот на знаењата.

5.2. НЕКОЛКУ ЗАДАЧИ

- Задачите за разбивање дадено множество на класи со помош на едно, две или повеќе својства ја помагаат и ја развиваат вештината за класифицирање. Затоа тие се мошне корисни за учениците, особено во основното образование. Ќе разгледаме неколку такви задачи.

Задача 1. Да го означиме со:

- M: множеството паралелограми (црт. 1),
- A: множеството правоаголни паралелограми,
- $\overline{A}$: множеството неправоаголни паралелограми,
- B: множеството рамнострани паралелограми,
- $\overline{B}$: множеството нерамнострани паралелограми (црт. 1 а, б, в).



Црт. 1

Тргнувајќи од претставувањето на множествата A и B на црт. 1, да се определи какви подмножества паралелограми се претставени со исшрафираните делови од квадратите на црт. 2, а-3, запишувајќи ги:

1) со A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$, $\cap$ или $\cup$; 2) со зборови.

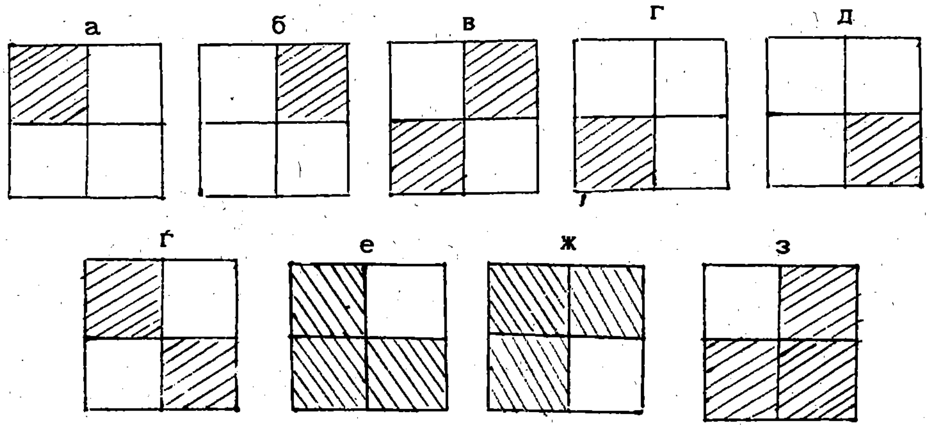
(На пример, за а) имаме: $A\cap B$, а тоа е множеството рамнострани правоаголни паралелограми, т.е. квадрати; за з) имаме: $\overline{A}\cup\overline{B} = M\setminus(A\cap B)$, а тоа се паралелограмите што не се квадрати.)

Задача 2. Нека се A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$ како во зад. 1 (црт.1). Да се определат со дијаграми (како тие од црт. 2) следниве множества:

$$A\cup B,\ \overline{A}\cup B,\ A\cap\overline{B},\ \overline{A}\cap\overline{B},\ (A\cup B)\cap\overline{B}.$$

Потоа да се именуваат овие множества, користејќи ги термините: „правоаголен паралелограм" (или „правоаголник"), „рамностран паралелограм" (или „ромб"), итн.

(На пример, $A\cup B$ е претставено со дијаграмот ж) на црт. 2 и може да се прочита: „множеството од правоаголни или рамнострани паралелограми" или, поради $A\cup B = M\setminus(\overline{A}\cap\overline{B})$: „множеството паралелограми што не се ромбоиди".)

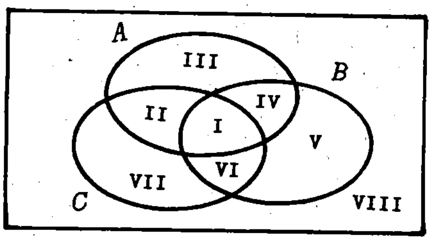


Црт. 2

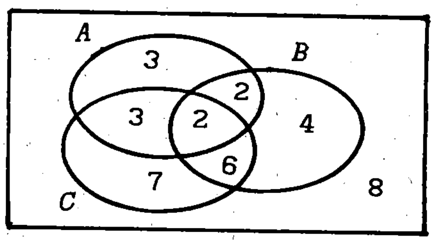
Претходните две задачи може корисно да послужат во VI одделение, при изучувањето на темата „Паралелограми", а наредните две - во V одделение.

Задача 3. На црт. 3 е претставено множеството M и три негови подмножества, A, B и C, со кои M е разделено на осум области (нумерирани со I - VIII).

а) Запиши ги со помош на A, B, C и со нивните комплементи $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, како и со знаците $\cup$ и $\cap$ следните области: I, II, III, IV, VIII. (Одг. I: $A\cap B\cap C$, II: $A\cap C\cap\overline{B}$,итн.)



Црт. 3



Црт. 4

б) Која област е претставена со:

$$A\cap B\cap\overline{C};\quad \overline{A}\cap B\cap C;\quad (A\cup B)\cap\overline{C}?$$

Вновиот дијаграм на црт. 3 може да послужи за решавање на некои аритметички задачи - од типот на наредната задача.

Задача 4. Во одделението има 33 ученици. Од нив одлични се: 10 по математика, 14 по мајчин јазик и 16 по географија, при што 4 ученици се одлични по математика и мајчин јазик, 5 по математика и географија, 8 по мајчин јазик и географија, а 12 - по сите три предмети. Колку ученици во одделението немаат одлична оценка по ниеден од тие предмети?

Задачите од овој тип им задаваат тешкотии на учениците (и не само ним), ако се решаваат на обичен аритметички начин. Меѓутоа, со пополнување на соодветен венов дијаграм, може брзо да се дојде до решението.

(Решението на зад. 4 е дадено на црт. 4), при што A, B, C се множествата ученици што се одлични по: математика, мајчин јазик и географија, соодветно; се почнува од $|A\cap B\cap C|=2$; итн.)

5.3. СИСТЕМ ОД ПОИМИ

Во наставата по математика е мошне важно да се усвојуваат не само одделни поими, туку и целиот систем од поими од одредена тема, па и од математичка дисциплина во целина. За усвојувањето на еден систем од поими многу помага откривањето на заемната врска меѓу поимите, преку дефинициите и класификацијата.

Како што споменавме порано, дефинирањето на еден поим е процес на сведување на тој поим кон втор поим со поширок обем, вториот кон трет со уште поширок обем итн. Така се формира една (конечна) низа од дефиниции, којашто ќе заврши кога ќе стигне до некои првични поими; на тој начин се добива еден **систем од поими**.

За таа цел треба да се користи различен конкретен материјал, како во следниов пример.

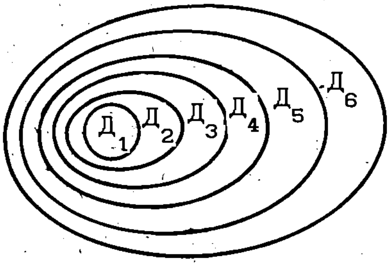
Пример 5. Ќе направиме една низа дефиниции тргнувајќи од поимот квадрат

Д1. Квадрат - ромб со прав агол.

Д2. Ромб - паралелограм со еднакви соседни страни.

Д3. Паралелограм - четириаголник при кој спротивните страни пар по пар се паралелни.

Д4. Четириаголник - многуаголник со 4 страни.



Црт. 5

Д5. Многуаголник - рамнинска геометриска фигура (= дел од рамнината) ограничена со проста затворена искршена линија.

Д6. Геометриска фигура - множество точки.

Така, значи, на крајот од низата се доаѓа до некои првични поими.

Да забележиме дека првичните поими не се дефинираат со други поими од таа теорија. Но, тоа не значи дека тие никако не се дефинираат; во математичката теорија, изградена како формален аксиоматски систем, првичните поими добиваат индиректна дефиниција преку аксиомите.

Меѓутоа, училишниот курс се изградува не како строго *формална теорија*, туку како *содржинска теорија*, т.е. во некој конкретен модел (на пример: „права линија се замислува како добро затегнат конец" и др.).

5.4. ВЕЖБИ

1. Направи класификација на поимот природен број:
   а) двочлена, според признакот „е прост број",
   б) тричлена, според признакот „е прост број" или „е сложен број".
2. Направи повеќестепена класификација на поимот конвексен многуаголник по признаците (последователно): 1) е „четириаголник", 2) „има барем еден пар паралелни страни", 3) „има два пара паралелни страни", 4) „има прав агол", 5) „има еднакви соседни страни".
3. Направи класификација на поимот функција според признакот: а) алгебричност, б) парност, в) инверзност, г) монотоност за инверзибилните функции.
4. Направи трихотомна класификација на поимот четириаголник според паралелноста на спротивните страни.
   (Помош: два пара паралелни страни, само еден пар, ниеден пар.)
5. Нека M е множеството на реалните броеви, A - множеството на рационалните, а B - множеството на позитивните броеви. Формулирај по две задачи аналогни на: а) зад. 1, б) зад. 2 од 5.2.
6. Во класот има 36 ученици. Од нив се: 10 одлични, 15 спортисти и 14 хористи, при што 4 се одлични и спортисти, 5 се спортисти и хористи, а 1 е и одличен, и спортист, и хорист.
   а) Колку ученици не се ни одлични, ни спортисти, ни хористи?
   б) Формулирај уште неколку барања на кои може да се одговори истовремено со одговорот на поставеното прашање.
7. Формирај систем поими, тргнувајќи од: а) рамностран триаголник; б) делтоид; в) складност на фигури; г) пермутација (на множество); д) монотона функција. Претстави ги тие односи со помош на заемната положба на кругови или други затворени кругови.

6. МЕТОДИКА НА ВОВЕДУВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ

6.1. ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОИМИ ВО ПОЧЕТНИОТ КУРС

Математичките поими претставуваат една од најважните составки на науката математика; а и на наставниот предмет математика. Затоа е разбирливо што во наставата по математика се посветува посебно внимание за нивното *воведување* (од страна на наставникот) и *усвојување* (од страна на учениците).

Да погледаме, прво, како се воведуваат математичките поими во почетниот курс по математика.

Во прво одделение, учениците се вежбаат во набројување конкретни предмети, согледани во средината што ги опкружува или нацртани на таблата, во учебникот или во тетратката, да издвојуваат множества елементи и да согледуваат соодноси меѓу нив. На тој начин тие се подготвуваат за сознавање на поимот број (поточно: природен број), запознавајќи се патем со најпростите геометриски фигури - триаголници (три темиња, три страни, ...), четириаголници, квадрати, кругови - притоа, без какви било дефиниции, па дури и без описи. Преку лекциите: „Колку? - повеќе; помалку; исто толку, еднакво", тие се учат да споредуваат величини, а малку подоцна се запознаваат и со соодветните знаци: >, <, =.

Откако ќе ја изучат нумерацијата на броевите од првата десетка, се преминува на собирање и одземање. Тука учениците учат за: собирок, збир, разменување на собироците („збирот нема да се промени со разменување на местата на собироците") како да се најде непознатиот собирок (на пример, од $4+x=7$), равенка, намаленик, намалител, разлика и уште за многу други нешта.

Еден брз, бегол поглед врз наставната програма (или учебниците) по математика за првите одделенија ќе нè убеди колку набиен со математички поими е почетниот курс по математика и колку многу се важни тие поими за натамошното образование, општо. Секој поим сè воведува нагледно, преку конкретни предмети или преку практично оперирање со нив. Притоа, наставникот се потпира на искуствата и знаењата од учениците што ги стекнале во предучилишната возраст, во нивниот контакт со средината околу нив.

Така, значи, *првото запознавање со даден математички поим во почетните одделенија е нагледно и обично се затврдува со термин или симбол, без каков било опис или дефиниција на тој поим.* Еве еден пример.

Пример 1. а) Кога учениците се запознаваат со поимот прав агол, се упатуваат на цртеж (од учебникот или од таблата), на кој се претставени агли и им се покажува: „Овие агли се прави агли", „Овие агли не се прави", а слично и за поимот правоаголник": „Овој четириаголник е правоаголник, а овој - не е".

б) Како подготовка за запознавање, пак, со поимот квадрат, учениците обично добиваат задача од видот: „На дадениот цртеж, најди ги правоаголниците со еднакви страни. Тие се квадрати". (Во овој текст, всушност, може да се наѕре дефиницијата на поимот квадрат.)

в) Со помош на соодветни задачи се воведуваат поимите множење и делење. Така, множењето се дефинира преку најблискиот род и видова одлика: „Собирањето на еднакви собироци се вика множење". На тој начин се воведуваат и неколку други поими, особено во III и IV одделение (како, на пример: „квадрат со страна 1 cm се вика квадратен сантиметар"; квадратен дециметар; рамнокрак триаголник и др.).

Да резимираме. Во почетните одделенија на основното образование, некои поими се воведуваат само со помош на *термин* (на пример, единиците за време: година, месец, час, минута), некои *описно* (нумерацијата на броевите до 100, деловите на единицата, мерките за должина), некои *се дефинираат генетички* (кружница), а некои *преку најблискиот род* и видова одлика (множење).

Наставникот по математика во горните одделенија на основното образование, а и во средното образование, треба да биде добро запознат со почетниот курс по математика: со неговата содржина, со наставните методи, а особено треба да знае кои математички поими се изучуваат од I до IV одделение и како се воведуваат. Само на тој начин ќе се обезбеди континуитет во наставата по математика.

6.2. ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОИМИ ВО СИСТЕМАТСКИ КУРСЕВИ

Систематските курсеви по математичките дисциплини почнуваат во горните одделенија на основното образование. За прв таков курс можеме да го сметаме курсот по аритметика во V одделение, а потоа геометрија во VI одделение и алгебра во VII и VIII одделение. Во овие курсеви, како и подоцна - во средното образование, *дефиницијата станува основен начин за воведување математички поими.*

Во V одделение, првичен поим на аритметиката е *поимот број*. Тој е воведен уште во прво одделение како поим-термин и широко се користи во сите четири одделенија. И во систематскиот курс по аритметика се јавува како поим-термин, без секаков опис.

Обемот на поимот број се проширува постепено, од одделение во одделение, па терминот „број" веќе не може да ги задоволи потребите. Со воведувањето на поимот дропка (во IV одделение), а особено поимот децимален број (десетична дропка), станува сосема целисходно воведувањето на терминот *природен број*. На учениците во IV одделение веќе им се познати множеството (всушност: прстенот) на целите броеви и множеството (всушност: полето) на рационалните броеви, па тогаш под терминот „број" тие подразбираат *рационален број*.

Натамошното проширување на поимот број продолжува со воведувањето на ирационалните броеви (во VI одделение), коешто се заокружува во прва година на средното образование со темата „*поле на реалните броеви*". Реалните броеви тука се воведуваат со користење на обопштениот поим за бесконечен децимален број. Тоа може да се резимира вака:

„Периодичните бесконечни децимални броеви се викаат **рационални броеви**. Непериодичните бесконечни децимални броеви се викаат **ирационални броеви**. Бесконечните децимални броеви (и периодични и непериодични заедно)се викаат **реални броеви**".

Да забележиме дека проширувањето на поимот број завршува во II година на средното образование, со воведувањето на поимот *имагинарен* и *комплексен број*. Поимот број" е најважниот математички поим. Последователното проширување на тој поим е една од основните идеи и насоки на развитокот на училишниот курс по математика.

Во врска со броевите и операциите со нив се воведуваат многу други поими, како на пример: прости и сложени броеви, делители, НЗД, НЗС, проширување и скратување на дропки, реципрочна вредност на број, степенување, коренување, квадратна равенка и др. Тие се изведени или дефинирани поими. И во систематскиот курс по геометрија во VI одделение, тргнувајќи од првичните поими точка, права, рамнина и растојание, се дефинира голем број поими: отсечка, паралелни прави, многуаголник, складни триаголници, паралелограм, трапез и други, а се продолжува со круг, кружните делови и правилни многуаголници (во VII одделение). Во VIII одделение, покрај поимот слични триаголници, се воведуваат многу поими од стереометријата (чиешто изучување завршува во II година на средното образование), а во I година започнува изучувањето на тригонометријата и воведувањето на многу поими во врска со тригонометриските функции од остар агол. (Инаку, изучувањето на тригонометријата завршува во III година на средното образование.)

6.3. НАЧИНИ НА ВОВЕДУВАЊЕ ПОИМИ

Поимите што се дефинираат во училишниот курс по математика се воведуваат, главно, на два начина: *конкретно-индуктивен* и *апстрактно-дедуктивен*. Апстрактно-дедуктивниот метод на воведување поими доминира при строгото излагање на математичките дисциплини (присутно, на пример, во универзитетските курсеви), а конкретно-индуктивниот метод преовладува во училишниот курс по математиак, особено во основното образование.

При **конкретно-индуктивниот метод** на воведување математички поим се започнува со разгледување конкретни примери и со помош на мисловните операции (анализа, споредување, обопштување, апстракција и синтеза) се наведуваат учениците кон формирање на новиот поим.

Пример 2. Да го разгледаме воведувањето на поимот „степен со показател негативен цел број" во учебникот по математика за I година (Математика за I година на ПМС, од Н.Целакоски и Ж.Мадевски).

„Во една од претходните лекции се потсетивме дека за кој било реален број $a \neq 0$ и кои било природни броеви m, n, такви што $m > n$, важи равенството:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{. ...\"} \qquad (1)$$

Натаму наставникот (Н) може да продолжи во вид на расказ (како во учебникот) или, пак, во вид на разговор со учениците (У), преку соодветни прашања. Да го прифатиме, на пример, второто.

Н. „Дали левата страна на равенството (1) има смисла и за $m = n$ и за $m < n$?"

(У. „Да, ако го толкуваме како количник, a^m/a^n".)

Н. „Пресметајте ги изразите: 1) $2^3 : 2^3$, 2) $b^5 : b^5$, 3) $c^n : c^n$ (при $b, c \neq 0$), а потоа: 4) $a^2 : a^3$ (= a^2/a^3) и 5) $a^3 : a^5$ (при $a \neq 0$). Колку добивте?"

У. „Во 1) - 3) одговорот е 1, во 4) $1/a$, а во 5) $1/a^2$".

Н. „Десната страна на (1) нема смисла кога $m = n$ или $m < n$. Но, да го примениме равенството (1), формално, за количниците од примерите 1) - 5); што ќе добиеме?"

У. „1) $2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$; 2) $b^5 : b^5 = b^{5-5} = b^0$;

3) $c^n : c^n = c^{n-n} = c^0$; 4) $a^2 : a^3 = a^{2-3} = a^{-1}$;

5) $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$."

Н. „Ако ги споредите т.е. изедначите овие резултати со соодветните резултати од претходната постапка, што ќе добиете?"

У. „1) $2^0 = 1$; 2) $b^0 = 1$; 3) $c^0 = 1$;

4) $a^{-1} = \frac{1}{a}$; 5) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$."

Н. „Ако примениме аналогна постапка како погоре, што би добиле за: a^{-3}, a^{-4}, ... , a^{-n}?"

У. $a^{-3} = 1/a^3$; $a^{-4} = 1/a^4$, ... , $a^{-n} = 1/a^n$".

Н. „За да важи равенството (1) и во случаите $m \leq n$, како би требало да го дефинираме поимот степен со показател нула или негативен цел број?"

У. „$a^0 = 1$ и $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (при $a \neq 0$)".

При вешто, промислено водење на тој процес (на воведување на поимот), учениците скоро секогаш ќе бидат способни сами да ја формулираат дефиницијата на новиот поим. Во случај на потреба, наставникот ја доведува дефиницијата до логички правилна форма, укажува на потеклото на терминот, укажува (евентуално) на неговото значење во натамошната настава и примени, и организира повторување и утврдување на дефиницијата.

Со конкретно-индуктивниот метод се воведуваат поими особено во пропедевтичните циклуси по алгебра и геометрија во основното образование. Притоа, таму се воведуваат описно, без дефиниција некои поими што не се првични, а во систематските курсеви, почнувајќи од VI одделение, тие поими се користат како познати.

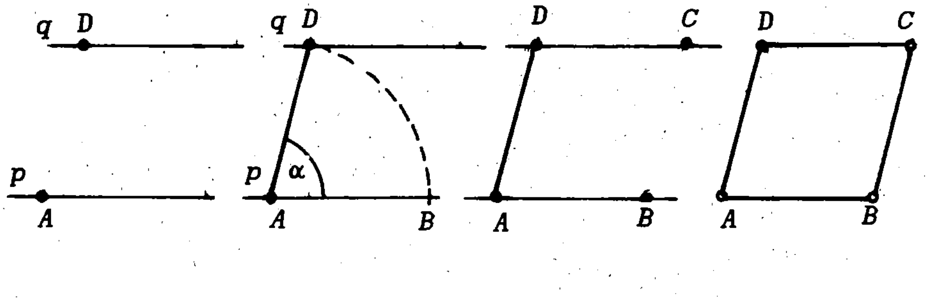
Апстрактно-дедуктивниот начин на воведување поими, како што рековме, преовладува во факултетските курсеви. Таму, на новиот поим веднаш му се дава неговата *логичка дефиниција*, без некоја претходна подготовка. Притоа *се докажува дека воведниот поим постои и е единствен*, т.е. е еднозначно определен, со точност до изоморфизам.

Овој метод на воведување поими се применува и во училишниот курс, но само тогаш кога новиот поим е наполно подготвен за воведување: кога се изучени добро претходните поими со кои ќе се дефинира новиот поим, а видовата одлика е доволно едноставна и разбирлива за учениците. Понекогаш и во училишниот курс се дава доказ за постоењето на воведениот поим и неговата единственост; во геометријата, тоа често се прави со конструирање барем на еден објект што ги има укажаните својства во дефиницијата.

Пример 3. Поимот ромб (во VI одделение) може да се дефинира на апстрактно-дедуктивниот начин откако е воведен (и добро изучен) поимот паралелограм, на следниов начин:

„*Ромб е паралелограм со еднакви соседни страни.*"

Егзистенцијата на паралелограм со еднакви соседни страни" може да се утврди едноставно со следнава конструкција (на црт. 1):



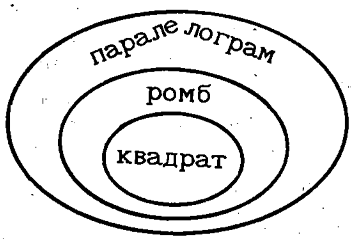
Црт. 1

а) избираме прави $p \parallel q$ и точки $A \in p$, $D \in q$ - произволно;

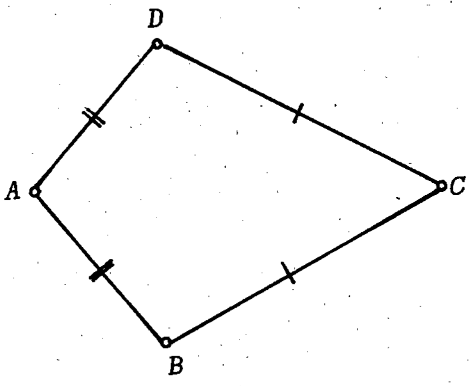
б) ја определуваме отсечката AB (на правата p), така што $\overline{AB} = \overline{AD}$;

в) ја определуваме точката $C \in q$, така што $\overline{BC} = \overline{AB}$. Добиениот четириаголник $ABCD$ е ромб (Зошто? - Утврди дека $\Delta ABD \cong \cong \Delta CDB$ на црт. 1 в)) и заклучи дека $AD \parallel BC$).

Потоа, се разгледува специјалниот случај кога $\alpha = \sphericalangle BAD = 90^\circ$ (- тогаш се добива квадрат) и се врши класификација (црт. 2).



Црт. 2



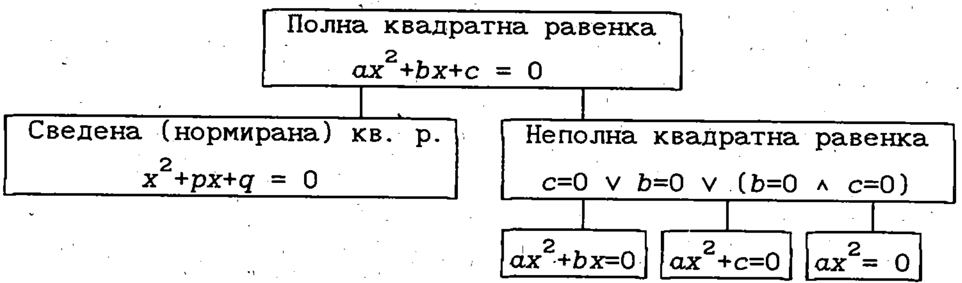
Црт. 3

На крајот се наведуваат контрапараметри на тој поим (прашање за учениците: „На црт. 3 е претставен четириаголникот $ABCD$ на кој $\overline{AB} = \overline{AD}$ и $\overline{BC} = \overline{CD}$. Дали тој четириаголник е ромб? Зошто?").

Пример 4. Поимот *квадратна равенка* (во II клас) може да се воведе со апстрактно-дедуктивниот метод на следниов начин:

1° *Се дава дефиниција на новиот поим*: „Равенката од видот $ax^2+bx+c = 0$, каде што a, b, c се дадени реални броеви и $a \neq 0$, се вика квадратна равенка". Притоа, терминот „квадратна" се мотивира со тоа што најголемиот показател на степените од променливата (т.е. непознатата) е два.

2° *Се разгледуваат специјалните случаи* на тој поим: $x^2+px+q = 0$, $ax^2+bx = 0$, $ax^2+c = 0$, $ax^2 = 0$, споредувајќи соодветна класификација:



3°. *Се илустрира воведениот поим* со конкретни примери

($5x^2-3x-2 = 0$, $2x^2-18 = 0$ итн.), проверувајќи дали ја задоволува дефиницијата секоја од тие равенки, а потоа се наведуваат контрапримери (наставникот може да ги праша учениците: а) дали равенката $x^2 - \frac{4}{x} +3 = 0$ е сведена квадратна равенка? б) Дали равенката од видот $bx+c = 0$ е неполна? и др.).

4°. *Се наведуваат конкретни примери за примена* на тој поим; на пример, познатата формула $s = gt^2/2$ може да се разгледува како квадратна равенка $gt^2-2s = 0$ по непознатата t. Многу текстуални задачи („проблеми") се сведуваат на квадратна равенка.

Гледаме дека со апстрактно-дедуктивниот метод веднаш, уште на почетокот, се открива новиот поим. Ако, притоа, се изостават наредните чекори (разгледување специјални случаи и класификација, конкретни примери за илустрација и укажување на примени), како што често се прави во универзитетски курсеви, тогаш со тој метод се троши помалку учебно време отколку со конкретно-индуктивниот.

Независно од методот што ќе го примениме за воведување на поимот, корисно е да ги уважуваме следниве *препораки*:

1) *Поимот да се воведува по најприроден пат.*

2) *Новиот поим да се доведе во врска со порано изучени поими* - тие да се повторат.

3) *Новиот, апстрактен поим детално да се конкретизира,* т.е. да не се воведува само формално.

4) *Поимот, терминот и дефиницијата - да се мотивираат.*

5) *Да се повтори (од ученик) дефиницијата на новиот поим,* при што треба внимателно да се следи искажувањето на ученикот и да се бара: јасност, краткост и строгост на формулацијата.

6.4. ВЕЖБИ

1. Разгледај ги учебниците по математика од I до IV одделение и запознај се со воведувањето на неколку поими, како на пример: а) права (линија), б) множење, в) агол, г) дропка.
2. Разгледај ги учебниците за V и VI одделение. Најди по два примера за поими што се воведени: а) како поим-термин, б) описно, в) генетички, г) преку најблискиот род и видова одлика.
3. Направи скица за воведување на поимот:
   а) исказна формула,
   б) група,
   в) периодичен децимален број,
   г) степен со показател рационален број,
   со конкретно - индуктиниот начин.

(*Помош.* Види го учебникот по математика за I година.)

4. Направи скица за воведување на поимот степен со показател негативен цел број, со апстрактно-дедуктивниот метод.

5. Направи скица за воведување на поимот квадратна равенка, со конкретно-индуктивниот метод.

6. Направи скица за воведување на поимот:

   а) паралелни прави,

   б) биквадратна равенка,

   в) растојание меѓу две паралелни прави,

   со: *i*) конкретно-индуктивноиот, *ii*) апстрактно-дедуктивниот метод.

7. УСВОЈУВАЊЕ НА МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ

7.1. НЕОПХОДНОСТ: СОЗНАЈНО УСВОЈУВАЊЕ НА ПОИМИТЕ

Основната задача на наставникот во врска со поимите е да обезбеди: секој нов поим да биде *правилно разбран* од сите ученици и *точно усвоен* за време на часот, уште во текот на неговото воведување. Поимот треба да се *повтори* уште на истиот час, а секако со повторување треба да се *затврди* во наредните часови, преку искажување на неговата дефиниција или опис.

За усвојувањето на еден поим пожелно е:

1) да се наведат *илустративни примери* што го конкретизираат тој поим,

2) да се направи *логичка анализа на дефиницијата* (и друга творечка работа),

3) да се види *употребата на поимот* во разни тврдења и расудувања.

Притоа, препорачливо е проверката за степенот на усвоеноста на поимот да се спроведува преку *сопствени примери* (т.е. примери што не го копираат учебникот).

Наставникот треба да бара од секој ученик да ги знае дефинициите на изучените поими. Меѓутоа, не треба да се бара „учење напамет", зашто тоа може лесно да доведе до формално усвојување на поимите. Наставникот треба да ги насочува учениците на смисловно, логичко запомнување на дефиницијата. Поради тоа, неопходно е пред учениците постепено: да се открива логичката структура на дефиницијата, да се одделат родовиот поим и видовите признаци, и да се наведат, по можност, разнообразни примери на кои ќе се изврши проверка дали се задоволени сите барања од дефиницијата.

Таа *творечка мисловна работа* го развива мислењето на ученикот општо, а помага за сознајно, длабоко и трајно усвојување на суштината, содржината и обемот на поимот;

со тоа се исклучува формалното усвојување на поимот и механичкото запомнување на дефиницијата.

Во случаи кога се усвојуваат поими формално, површно, доаѓа до нивно побркување, неточно сфаќање и неправилно користење. Други поими, воведени преку недоволно осмислени поими ќе бидат уште позамаглени, па нивното правилно користење во расудувањата, за некои ученици, станува невозможно. Таквите поими се осудени на *брзо заборавање* од учениците и речиси *исчезнување* без трага од нивното сознание. Краен резултат: умствениот развиток на ученикот од таквата настава е незначителен.

Според тоа, влијанието на формализмот при усвојувањето на поимите е мошне штетно и тоа треба да се предупреди со обезбедување сознајно усвојување на поимите, нивните дефиниции и својства.

Неоспорно е дека учениците треба да ја знаат *дословната формулација* на дефиницијата што е дадена во учебникот. Меѓутоа, наставникот треба да ги навикнува дека тие можат да отстапат од таа форма, т.е. може да ја искажат делумно *со свои зборови*, при што мора да ја зачуваат точно целата содржина на книжната формулација. Притоа, пожелно е да ги поттикнува учениците и сами да доаѓаат до *сопствени формулации*, коишто ќе бидат, во некоја смисла, подобри од дадените.

Кога ученикот ја искажува дефиницијата со свои зборови, можни се *грешки*. Наставникот треба да го обезбеди нивното уочување и (*задолжително*) *отстранување*. Тоа помага за точното усвојување на поимот од страна на другите ученици. Притоа, мошне значајно е тие исправки да ги прават самите ученици (под раководство или контрола на наставникот).

Кога ученикот ја *репродуцира* дословно книжната формулација, потребно е да се провери дали тој ја разбира правилно, дали ја усвоил сознајно, преку барање да наведе *сопствени примери* за илустрација.

Има и такви формулации, при кои не може да се испушти ниеден збор. Укажувајќи на тоа, наставникот им влева на учениците вкус за *висока логичка култура* на мислењето и изразувањето, ги учи да се искажуваат лаконски и точно.

7.2. ТЕМПО И ШИРИНА ПРИ УСВОЈУВАЊЕТО НА ПОИМИ

При воведувањето на нови поими не треба учениците да се побрзуваат непотребно. Тоа е особено непожелно кога поимот е сложен, апстрактен или тежок за учениците (како на пример: пресликување (во V одделение), складни триаголници, плоштина на многуаголник и ирационален број (во VI одделение), вектори и транслација (во VII одделение), сличност (во VIII одделение),корен, функција, низа, лимес, извод, интеграл и др.). *Прекумерното брзање при изучувањето на нов поим подоцна ќе* *предизвика тешкотии и снижување на нивото на знаењата.*

Праксата покажува дека времето потрошено за сестрано, длабоко изучување и сознајно усвојување на еден поим подоцна ќе се исплати повеќекратно при усвојувањето на натамошниот материјал.

Работата врз натамошното усвојување на математичките поими продолжува при сите видови повторувања. Притоа, главно внимание треба да му се посвети не на просто декламирање на дефинициите, туку на *разни видови творечка работа на учениците со поимите.*

На пример, при *повторување и систематизирање* на материјалот, корисни се вежби за *класификација* на поимите и согледување на *системите од поими.* Тука може да се објасни дека дефинициите претставуваат договори, спогодби, коишто ја одразуваат објективната стварност, но можна е извесна слобода на дејствување, којашто не ја искажува таа стварност наполно.

Како пример може да послужи *поимот трапез*: ако содржината на овој поим се стесни, т.е. ако се земе видовиот признак „две страни се паралелни" (без зборчето „само"), тогаш обемот на вообичаениот поим трапез ќе се зголеми и во него ќе влезат и паралелограмите. Во тој случај, најблискиот род за поимот паралелограм ќе биде поимот трапез, а не четириаголник.

Аналогна дискусија може да се направи за поимите: правоаголник и квадрат, ромб и квадрат, рамнокрак и рамностран триаголни и др.

Ваквите примери се двојно полезни: од една страна се потцртуваат суштинските елементи на дефиницијата прифатена во училишниот курс, а од друга страна го прошируваат видикот на учениците и ја развиваат еластичноста на мислењето.

Во таа смисла, при дефинирањето на нови поими, коишто порано не се употребувале, нема смисла да се праша: *„Дали дефиницијата е точна?"* туку може да се праша само: *„Дали таа е разумно избрана?"*

На крајот треба да си го поставиме прашањето: кога можеме да сметаме дека ученикот *го совладал предметниот математички поим*? Одговорот би бил:

1) *кога ученикот ќе умее да ја искаже дефиницијата* (макар приближно, со свои зборови),

2) *кога без грешка ќе ги одделува* дефинираниот и дефинирачкиот поим,

3) *кога ќе нема тешкотии во распознавањето на поимот* според неговата дефиниција и низ тврдењата.

7.3. ВЕЖБИ

1. Прошири ја, на соодветен начин, содржината на поимот:

   а) правоаголник, б) ромб, в) рамнокрак триаголник,

   г) прост број (како во примерот со поимот трапез во текстот) и направи споредба со дефинициите на овие поими што се прифатени во училишниот курс.

   Што ќе биде, во тој случај, со најблискиот род и видова одлика на: квадрат; рамностран триаголник?

2. Многу поими во училишниот курс по математика може да се дефинираат на различни начини, при што тие различни дефиниции, од логичка гледна точка, се еквивалентни и затоа се рамноправно допустливи. Сепак, логички еквивалентните дефиниции не се секогаш методски еквивалентни, т.е. не им се во иста мера достапни на учениците. Поради тоа, изникнува *методската задача за споредбена анализа на логички еквивалентни дефиниции на ист поим,* од гледна точка на нивната прилагоденост за училишниот курс.

   Во таа смисла, спроведи споредбена логичка анализа на различните дефиниции на поимот:

   а) лимес на бројна низа,

   б) лимес на функција (според Коши; според Хајне).

   Како ќе им се објасни на учениците дека се еквивалентни следниве две дефиниции (зад. 3 и зад. 4)? Зошто првата од нив обично се прифаќа во учлишниот курс?

3. 1) Правоаголник е паралелограм со прав агол.

   2) Правоаголник е паралелограм со еднакви дијагонали.

4. 1) Паралелограм е четириаголник кај кој спротивните страни, пар по пар се паралелни.

   2) Паралелограм е четириаголник кај кој дијагоналите се преполовуваат со пресечната точка.

8. ТИПИЧНИ ГРЕШКИ ВО ДЕФИНИЦИИТЕ. КОНТРАПРИМЕРИ

8.1. ТИПИЧНИ ГРЕШКИ

Учениците прават грешки при усвојувањето на поимите, од една страна поради тоа што не ги помнат добро својствата што се вклучени во дефиницијата на даден поим, а од друга страна поради нарушувањето на некои од основните правила за дефинирање поими (1°-6° во IV.3). Ќе наведеме некои такви типични грешки.

1°. Нарушување на сразмерноста. Обемот на дефинираниот поим треба да се совпаѓа со обемот на дефинирачкиот поим (при уважување на видовата одлика).

Нарушувањето на правилото за сразмерноста доведува главно до два вида грешки: 1) *обемот* на дефиниргачкиот поим *е поширок* од обемот на поимот што се дефинира, 2) *обемот* на дефиниргачкиот поим *е потесен* од обемот на дефинираниот.

(Тоа значи дека во „дефиницијата" не се зема она множество објекти од кое треба да се издвои обемот на дефинираниот поим, туку некое друго множество, фактички пошироко, односно потесно.)

Пример 1. Дијаметар на кружница е отсечка што минува низ центарот на кружницата (прешироко!).

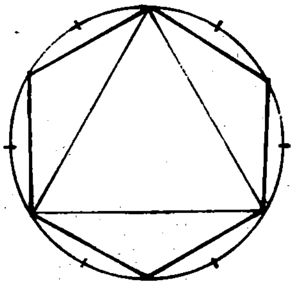
Пример 2. Ромб е правоаголник со две еднакви соседни страни (претесно!).

2°. Логички бесмислен круг. Влегувањето во бесмислен круг (за кој се вели уште: расипан, маѓепсан, ѓаволски круг) означува дека дефинираниот поим се дефинира фактички сам со себе, т.е. тој се карактеризира со дефиниргачки поим што се објаснува со помош на поимот што се дефинира.

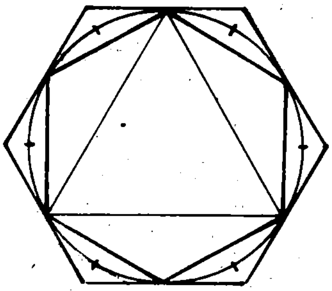
Пример 3. „Дејството на наоѓање збир на два броја се вика собирање", а: „Резултатот од собирањето на два броја се вика збир на тие броеви."

Позамаскиран „маѓепсан круг" се јавува во следниов пример.

Пример 4. При воведувањето на поимот *периметар на кружница*, прво се докажува егзистенцијата на лимесот L од низата (L_n) на периметрите од впишаните правилни многуаголници во кружницата (црт. 1), а потоа тој лимес се зема за периметар на кружницата.



Црт. 1



Црт. 2

Меѓутоа, при доказот дека L постои, учениците се „уверуваат" во ограниченоста на низата (L_n), укажувајќи на „должината на кружницата" како мајорант.

(Ова може да послужи и како пример за негативната улога на цртежот при формално-логичките заклучоци. Се разбира, погоре би било коректно за мајорант на (L_n) да се земе периметарот на некој опишан многуаголник, како на црт. 2.)

3°. Тавтологија во дефиниција. При дефинирањето на поим не се допушта тавтологија: објектот да се дефинира сам со себе, иако се искажува со други зборови.

Пример 5. „Дејството при кое еден број се дели со друг се вика делење" или „Два многуаголника се викаат *слични* многуаголници, ако тие се слични меѓу себе". Јасно е дека ваквата „дефиниција" ништо не дефинира.

4°. Отсуство на дефинирачкиот поим. Во дефинициите што ги искажуваат некои ученици, понекогаш отсуствува дефинирачкиот поим. Во такви случаи, него обично го заменуваат со зборовите: „она", „ако", „кога" и др.

Пример 6. а) „Величина се вика сè она што може да се споредува, да се мери или да се дели". (Што е „она"?!).

Или: б) „Сè она што ја сочинува природата се вика материја" (од учебникот „Физика за VII одделение").

в) на прашањето од наставникот: „Кои триаголници се слични?" ученикот одговара: „Тоа е, кога соодветните агли им се еднакви."

5°. „Негативна" дефиниција. Како што спомнавме порано (3.2), дефиницијата, по можност, не треба да биде „негативна". Тоа значи дека треба да се избегнуваат дефиниции при кои видовата одлика се јавува како негативен поим. И покрај тоа, во математиката понекогаш се користат „негативни" дефиниции.

Пример 7. а) „Број што не може да се претстави во обликот a/b, каде што a,b се цели броеви и $b\neq 0$, се вика ирационален број".

(Или: *„Број што не е рационален, се вика ирационален број".*)

б) „Прави што не се сечат и не се паралелни, се викаат разминувачки прави".

6°. Логички несовршена дефиниција. Ваква дефиниција се добива кога во неа се вклучуваат својства што се логички зависни едно од друго.

Пример 8. „Четириаголник при кој спротивните страни пар по пар се паралелни и еднакви се вика паралелограм."

(Во дефиницијата е вклучено својството за еднаквост на спротивните страни, а тоа е логичка последица од својството „спротивните страни пар по пар се паралелни").

8.2. МЕТОДИКА НА ОТСТРАНУВАЊЕ НА ГРЕШКИТЕ ВО ДЕФИНИЦИИТЕ

Поголемиот број од приведените примери на „типични грешки..." се среќаваат во училишната практика. Сериозен *недостаток на наставата по математика е неправилната методика на исправањето на погрешните дефиниции.* На часовите често се среќава следнава ситуација: наставникот прашува еден ученик - ученикот дава погрешна дефиниција на поимот; прашува друг, трет ... додека некој не даде правилен одговор; во краен случај, ако никој не одговори правилно, самиот наставник ја формулира дефиницијата. Притоа, не објаснува во што е *суштината на грешките* што ги направиле учениците во дефиницијата, а со тоа не го предупредува повторувањето на слични грешки.

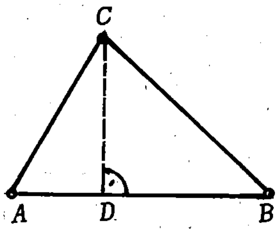
Најдобар начин за откривање на суштината на грешките при дефинициите е наведувањето на соодветни **контрапримери.** Еве еден пример.

Пример 9. Кон дефиницијата, дадена од ученик: „Квадратна равенка се вика таква равенка, којашто го содржи вториот степен на променливата", наставникот предлага контрапример: $X^2+4X+X^3=0$ и објаснува дека квадратната равенка не смее да содржи степени на променливата повисоки од 2. Потоа, може да предложи и други контрапримери од видот:

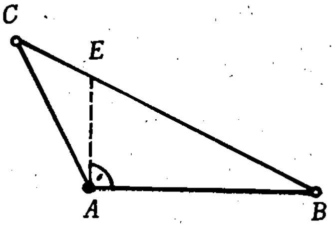
$$x^2+\frac{1}{x}-3 = 0,\ x^2-5y = 0 \text{ и др.}$$

Во некои случаи, грешките што ги прават учениците се последица на *недоволното задржување врз поимот.* Тоа често се случува кога наставникот им го илустрира поимот само со еден единствен пример. Еве еден таков случај.

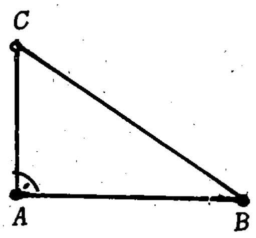
Настаникот им ја искажува дефиницијата на поимот висина на триаголник и на таблата им го илустрира со модел како на црт. 1, со објаснување: „Така, на пример, отсечката CD е висина на ΔABC". Откако некој ученик ќе ја повтори дефиницијата, наставникот преминува на друго, сметајќи дека овој поим е едноставен и не ќе има тешкотии за неговото усвојување.



Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3

Меѓутоа, по ваквото воведување, може да има ученици што не ќе се во состојба да ја решат домашната задача: „Нацртај ја висината на триаголникот ABC, претставен на црт. 2 (тапоаголен) односно на црт. 3 (правоаголен), спуштена од темето A". (Некои ќе ја нацртаат отсечката AE на црт. 2, нормална на AB, поведени од моделот на црт. 1. Види и III.2.2.)

Отстранувањето на грешките може да се спроведува со усни прашања, правилно насочени. Во секој случај треба да се открие *суштината на грешките,* ако е неопходно – *преку спроведување соодветна логичка анализа на поимот и,* по можност, наведување *соодветни контрапримери.*

8.3. ВЕЖБИ

Со наведените реченици 1.-15 се дефинираат соодветни поими.

а) Установи дали е направена грешка.

б) Направи исправки.

в) Објасни ја суштината на грешката.

1. Паралелограм е многуаголник при кој спротивните страни пар по пар се паралелни.
2. Квадрат со неправи агли се вика ромб.
3. Правоаголник е четириаголник со еднакви дијагонали.
4. Паралелограм со еднакви страни се вика ромб.
5. Четириаголник со прави агли се вика правоаголник.
6. Две прави што немаат заедничка точка се викаат паралелни прави.
7. Тангента на крива е права којашто со кривата има само една заедничка точка.
8. За една пирамида се вели дека е правилна, ако нејзината основа е правилен многуаголник.
9. Средна линија на триаголник се вика права, што ги сврзува средините на две страни на триаголникот.
10. Апсолутна вредност на број се вика самиот тој број без знак.
11. $|x| = \begin{cases} X, & \text{ако } X>0 \\ -X, & \text{ако } X<0. \end{cases}$
12. Ирационални броеви се реални броеви што не се рационални; рационалните и ирационалните броеви се викаат реални броеви.
13. Агол што е поголем од правиот се вика тап агол.
14. Паралелограм е четириаголник со два пара еднакви агли.
15. Два триаголника се викаат слични триаголници, ако:
    i) соодветните агли им се еднакви,
    ii) соодветните страни им се пропорционални.

V. МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА И МЕТОДИКА НА НИВНОТО ИЗУЧУВАЊЕ

1. ТВРДЕЊА

1.1. Тврдење е логичка форма на мислењето, со која се потврдуваат или се одречуваат некои својства на дадени објекти, појави или на некои релации меѓу нив.

Тврдењата се искажуваат со зборови или со симболи и одразуваат врска меѓу некои поими. На пример:

1) Дијаметарот на кружница е најдолгата тетива на таа кружница (вистинито тврдење).

2) $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^n > n^2$ (невистинито тврдење).

Во составот на едно тврдење влегуваат три главни елементи:

(*i*) логички **подмет** (или **субјект**) на мислата (S) - тоа е оној поим или објект за кој се искажува нешто во тврдењето;

(*ii*) логички **прирок** (или **предикат**) на мислата (P)- тоа што се искажува за субјектот;

(*iii*) логички **сврзник** (*е*, *има* и сл.).

Така, за просто категорично тврдење, можеме да ја употребиме следнава формула:

S *е* P или: S *не е* P,

каде што S и P се променливи, а сврзникот „*е*" е константа.

Во примерот 1), S (субјект) е: „Дијаметарот на кружница", сврзникот е „*е*", а P (предикат) е: „најдолгата тетива"; во 2): S е „Бројот 2^n", сврзник е „*е*", а P е „поголем од бројот n^2".

Ако со V_X го означиме обемот на поимот X, тогаш во случајот „S *е* P" имаме $V_S \leq V_P$, а во случајот „S *не е* P" имаме $V_s \nsubseteq V_p$, т.е. ако нешто се тврди за субјектот, тогаш неговиот обем V_S се вклучува во обемот на предикатот, а ако во тврдењето нешто се одречува за субјектот, тогаш неговиот обем не влегува во обемот на предикатот.

Содржините на субјектот и предикатот се однесуваат обратно од нивните обеми. Во примерот:

3) „2^x е растечка функција", обемот на субјектот (2^x) е вклучен во обемот на предикатот (растечка функција), а содржината на предикатот влегува во содржината на субјектот (имено, сè што им е својствено на растечките функции општо, својствено ѝ е и на функцијата 2^x).

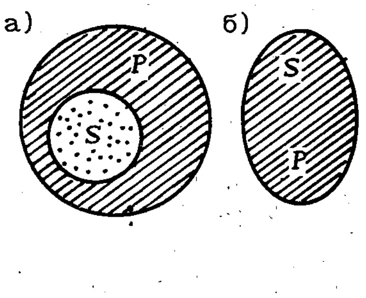
Во зависност од тоа дали едно тврдење важи за сите објекти од дадена класа или само за некои, тоа се вика, соодветно: **општо или делумно тврдење.** Ако, пак, им се припишува односно им се одречува некое својство на сите (или на некои) објекти од дадена класа, тогаш тоа тврдење се вика **потврдно** односно **одречно.**

Комбинирајќи ги горните две поделби, добиваме четири видови тврдења.

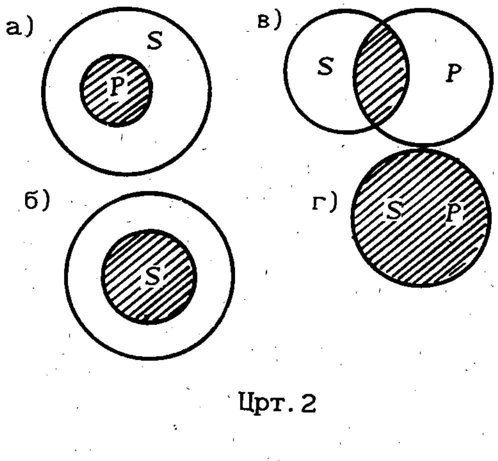
1°. Општо потврдно тврдење; тоа може графички да се претстави со ојлерови кругови (т.е. со венови дијаграми) како на црт. 1 или да се запише симболички:

$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x)).$$

што значи: „за кој било објект x, ако x го има својството S, тогаш x го има и својството P".



Црт. 1



Црт. 2

Пример 1. Во секој паралелограм спротивните страни се еднакви.

2°. Делумно потврдно тврдење; тоа може да се искаже со формулата „*Некои S се P*" и се запишува симболички:

$$(\exists x)(S(x) \wedge P(x)),$$

т.е. „постои таков објект x, којшто го има својството S, а и својството P"; тоа е претставено со ојлерови кругови на црт. 2.

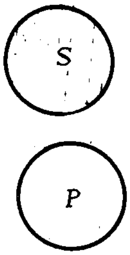
Пример 2. Некои правоаголници имаат заемно нормални дијагонали.

3°. Општо одречно тврдење; тоа се искажува со формулата „*Ниедно S не е P*" (црт. 3) и симболички се запишува:

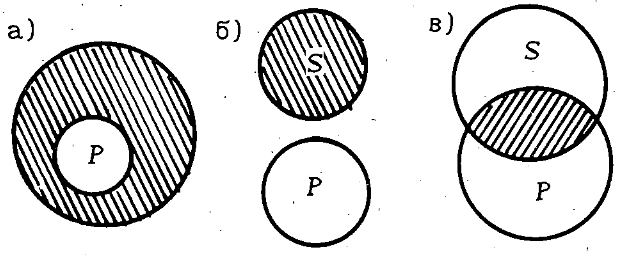
$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow \overline{P}(x)),$$

т.е. „ниеден објект x, којшто го има својството S, го нема својството P".

Пример 3. Ниеден ромбоид не е ромб.



Црт. 3



Црт. 4

4°. Делумно одречно тврдење; тоа се изразува со формулата „*Некои S не се P*" (црт. 4) и се запишува симболички:

$$(\exists x)(S(x) \wedge \overline{P}(x)),$$

т.е. „постои објект x што го има својството S, а го нема својството P".

Пример 4. Некои трапези немаат еднакви дијагонали.

1.2. ВЕЖБИ

1. Наведи две прости категорични тврдења и за секое од нив укажи кој е субјектот и кој е предикатот.
2. Наведи едно просто а) потврдно, б) одречно категорично тврдење и утврди го односот меѓу обемите, односно меѓу содржините на субјектот и предикатот.
3. Тврдењата од 1-4 погоре, а) запиши ги симболички, б) претстави ги со ојлерови кругови.
4. Наведи по два примера за секој вид тврдење 1°-4°.

2. ИСКАЗИ. ИСКАЗНИ ФОРМУЛИ. ИСКАЗНИ ФУНКЦИИ

2.1. ОПЕРАЦИИ СО ИСКАЗИ

Поимот исказ е првичен. Под **исказ** во логиката се подразбира декларативна (т.е. расказна) осмислена реченица што е или вистинита или невистинита, но не е истовремено вистинита и невистинита.

На пример, речениците: „$1<2$" (т.е. „Бројот еден е помал од бројот 2"), „3|15" („Три е делител на петнаесет"), „2·2=5", „9 е прост број" се искази и тоа: првите две се вистинити, а вторите две - невистинити.

Прашалните и извичните реченици не се искази. И дефинициите не се искази. На пример, дефиницијата „природен број што има три или повеќе делители се вика сложен број" не е исказ.

Исказите ги означуваме кратко со букви, обично со малите букви на латиницата. За да означиме дека еден исказ *p* е *вистинит* (т.е. *точен*) пишуваме $\tau(p)=т$, а *невистинит* (т.е. *неточен*) - со $\tau(p)=\perp$. Зборовите „точен" (т) и „неточен" (⊥) ги викаме **вистинитосни вредности** на исказите.

Со помош на логичките операции: ¬, ∧, ∨, ⇒, ⇔ можеме да формираме нови, посложени искази. Вистинитосната вредност на сложениот исказ зависи од вистинитосните вредности на исказите што го сочинуваат, а се установува со соодветната дефиниција (т.е. со соодветна вистинитосна таблица).

Нека *p* и *q* се произволни искази, за кои не претпоставуваме дека се познати нивните вистинитосни вредности.

Негација на исказот *p* се вика нов исказ којшто е вистинит ако и само ако *p* е невистинит. Негацијата на *p* се означува со $\neg p$ и се чита: „не *p*" или „не е точно дека *p*". Операцијата *негација* наполно е определена со вистинитосната таблица:

p	$\neg p$
т	⊥
⊥	т

Конјункција на два исказа *p*, *q* се вика исказот, означен со $p \wedge q$ (читаме: *p* и *q*), којшто е вистинит ако и само ако се вистинити обата исказа *p*, *q*. Според тоа, исказот $p \wedge q$ не е вистинит кога барем едниот од исказите *p*, *q* е невистинит. Операцијата *конјункција* (∧) е наполно определена со вистинитосната таблица што е наведена подолу (Табл. 1).

Дисјункција на два исказа *p*, *q* е исказ, означен со $p \vee q$, којшто е вистинит ако и само ако барем едниот од исказите *p*, *q* е вистинит.

На пример, исказот „$\frac{1}{3} \geq 0{,}3$" е дисјункција од исказите „$\frac{1}{3} > 0{,}3$"; „$\frac{1}{3} = 0{,}3$". Тој е точен исказ, зашто е точен исказот „$\frac{1}{3} > 0{,}3$". (Во примери како овој, учениците понекогаш грешат сметајќи дека исказот „$\frac{1}{3} \geq 0{,}3$" не е точен зашто не е точен исказот „$\frac{1}{3} = 0{,}3$". Причината за тоа е неправилното сфаќање на знакот ≥ како: „е поголем и еднаков", наместо: „е поголем или еднаков".)

Исказот „Ако *p*, тогаш *q*" (со симболи: $p \Rightarrow q$), невистинит ако и само ако *p* е вистинит и *q* невистинит, се вика **имплика-**

ција со **претпоставка** p и **заклучок** q. Исказот $p\Rightarrow q$ се чита и како: *„p го повлекува q", „од p следува q".*

Да забележиме дека меѓу претпоставката и заклучокот може да отсуствуваат *„причинско-последични врски"*, но тоа не може да повлијае на вистинитоста или невистинитоста на импликацијата.

На пример, исказот: „Ако 8 е парен број, тогаш квадратот има четири оски на симетрија" е точен, макар што во обичното сфаќање, второто не следува од првото. Вистинит ќе биде и исказот „Ако 1+1=3, тогаш 2·2=4", зашто е вистинит заклучокот. Исто така исказот: „Ако 6 е прост број, тогаш дијагоналата на квадратот е еднаква со страната" е точен.

Значи, при дадената дефиниција, ако заклучокот е вистинит, импликацијата ќе биде вистинита независно од вистинитоста на претпоставката. Во случаите кога претпоставката е неточна, импликацијата ќе биде вистинита независно од вистинитосната вредност на заклучокот. Таа ситуација кратко се формулира вака: *„вистина следува од што и да е", „од невистина следува сè што сакате".*

Исказот *„p ако и само ако q"* (со симболи: $p\Leftrightarrow q$), којшто е вистинит ако и само ако p и q имаат иста вистинитосна вредност, се вика **еквиваленција**. Исказот $p\Leftrightarrow q$ се чита: *„ p ако и само ако q", „p е еквивалентно со q", „p е потребно и доволно за q".*

На пример, исказот 1>2 ако и само ако 2+2=5" е вистинит како еквиваленција на два невистинити искази.

Зависноста на вистинитосните вредности на конјункцијата, дисјункцијата, импликацијата и еквиваленцијата може да се видат прегледно во соодветните вистинитосни таблици:

Табл. 1

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	⊥	⊥
⊥	T	⊥	T	T	⊥
⊥	⊥	⊥	⊥	T	T

Постои врска меѓу операциите со искази и операциите со множества. На пример, за дадено универзално множество M:

а) операцијата *негација* на исказ одговара на операцијата *комплемент на подмножество* ($p{:}\,x\in A$; $\neg p{:}\,x\notin A$, па $\neg p{:}\,x\in \overline{A}_M$);

б) *конјункцијата на искази* одговара на *пресек на множества* ($p{:}\,x\in A$ и $q{:}\,x\in B$; $p\wedge q{:}\ x\in A\cap B$);

в) *дисјункцијата на искази* одговара на *унија на множества* ($p{:}\,x\in A$ или $q{:}\,x\in B$; $p\vee q{:}\ x\in A\cup B$);

г) *импликацијата на искази* е сврзана со поимот *подмножество* (за $p{:}x\in A$ и $q{:}x\in B$, импликацијата „$p\Rightarrow q$: ако x му припаѓа на A, тогаш x му припаѓа на B" е вистинита, т.е. $A\subseteq B$).

2.2. ИСКАЗНИ ФОРМУЛИ

За означување на искази, како што споменавме, обично се користат малите букви од крајот на латиницата (можно – со индекси):

$$p, q, r, \ldots, p_1, q_1, r_1, \ldots$$

Притоа, каков исказ (вистинит или невистинит) означува оваа или онаа буква, се претпоставува дека не е познато.

Всушност, буквите $p, q, r, \ldots$ имаат улога на променливи што ги примаат вистинитосните вредности $\top, \bot$. Затоа се викаат **исказни променливи**, а исто така: **елементарни формули** или **атоми.**

За градење исказни формули, покрај симболите $p, q, r, \ldots,$ се користат знаците на логичките операции: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, а исто така левата и десната заграда: (,), со кои се обезбедува еднозначно читање на формулите.

Поимот исказна формула се дефинира на следниов начин:

i) Елементарните формули (т.е. атомите) и константите $\top, \bot$ се исказни формули.

ii) Ако A и B се исказни формули, тогаш и

$$(\neg A),\ (A \wedge B),\ (A \vee B),\ A \Rightarrow B),\ A \Leftrightarrow B)$$

се исказни формули.

iii) Исказни формули се само тие изрази што се добиени од *i*) и конечна примена на *ii*).

На пример, изразите:

$$p,\ (\neg p),\ ((P\vee q) \Rightarrow r),\ ((p\vee(\neg p)) \Leftrightarrow (p\Rightarrow q)),$$

се исказни формули, а не се исказни формули изразите:

$$(p\vee),\ (p\Rightarrow)\wedge q,\ (pq\Leftrightarrow r) \text{ и др.}$$

Натаму ќе велиме „*формула*" наместо „*исказна формула*". Бројот на заградите во формулите може да се намали со помош на следниов договор:

а) да се испуштат надворешните загради во формулата (на пример, да стои $A\vee B$ наместо $(A\vee B)$);

б) да се подредат логичките операции **по ранг** на следниов начин: $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$; тоа значи дека најголема „област на дејство" има знакот $\Leftrightarrow$, а најмала – знакот $\neg$.

При поставувањето на загради во формула, запишана без нив, прво се поставуваат сите загради што се однесуваат кон сите влегувања на знакот $\neg$, потоа – кон знакот $\wedge$ итн., одејќи одлево-надесно.

Пример 1. Во формулата

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

заградите се воведуваат во следниве чекори:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow (\neg A) \vee B; \qquad A \Rightarrow B \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B),$$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B), \qquad ((A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)).$$

Се разбира, не секоја формула може да биде запишана без загради. На пример, во формулите $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $\neg(A \Rightarrow B)$ натамошното бришење на заградите не е можно.

Постојат формули, коишто добиваат вредност $\top$ независно од тоа какви вредности примаат исказните букви (атомите) што ја сочинуваат. Такви се, на пример, формулите:

$$p \vee \neg p, \quad (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A) \text{ и др.}$$

Таквите формули имаат посебна улога во логиката.

Исказна формула што добива вредност $\top$ при која било распределба на вредностите на атомите што влегуваат во неа, се вика **идентично вистинита формула** или **тавтологија** или **логички закон**. Инаку речено: исказната формула F е *логички закон* (односно *тавтологија*) ако и само ако при која било замена на исказните букви што фигурираат во F со конкретни искази (односно со $\top$ и $\bot$) се добива вистинит исказ.

Пример 2. Да покажеме дека е тавтологија следнава формула:

$$F\colon\ p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p.$$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Има формули што добиваат вредност $\bot$ при која било комбинација од вредностите на атомите што влегуваат во формулата; таквата формула се вика **контрадикција**. На пример, формулите $p \wedge \neg p$, $(p \vee \neg p) \Rightarrow (p \wedge \neg p)$ се контрадикции.

Формулата пак што добива вредност $\top$ при некоја комбинација на вредностите од атомите, а $\bot$ – при друга комбинација, се вика **неутрална формула**.

Дали една формула е тавтологија, контрадикција или неутрална може да се провери со методот што е употребен во примерот 2 (наречен **метод на вистинитосни таблици**) или поинаку.

2.4. ЛОГИЧКО СЛЕДСТВО

Една исказна формула F се вика **логичко следство** од исказните формули F_1, F_2, ..., F_k, ако импликацијата:

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_k \Rightarrow F$$

е тавтологија. (Притоа, формулите F_1, F_2, ..., F_k се викаат **претпоставки** на формулата F.) Ознака:

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_k \models F.$$

(Се вели и: формулата F **логички следува** од формулите $F_1, F_2, \ldots, F_k$, или: формулите $F_1, F_2, \ldots, F_k$ **логички ја повлекуваат** F, како и: F е **семантичка последица** од $F_1, F_2, \ldots, F_k$.)

Пример 3. Формулата F: $p \Leftrightarrow q$ е логичко следство од формулите (претпоставките) F_1: $p \Rightarrow q$ и F_2: $\neg q$, т.е. $F_1, F_2 \models F$. Навистина, исказната формула:

$$F_1 \wedge F_2 \Rightarrow F,\ \text{т.е.}\ (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q),$$

е тавтологија, како што може да се види од следнава вистинитосна таблица:

p	q	F_1	F_2	$F_1 \wedge F_2$	F	$F_1 \wedge F_2 \Rightarrow F$
⊤	⊤	⊤	⊥	⊥	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥	⊤	⊥	⊥	⊤
⊥	⊤	⊤	⊥	⊥	⊥	⊤
⊥	⊥	⊤	⊤	⊤	⊤	⊤

Користејќи ги вистинитосните таблици, може да се каже дека: ако формулата F е логичко следство од претпоставките $F_1, F_2, \ldots, F_k$, тогаш таа е вистинита секогаш кога се вистинити сите претпоставки. Со други зборови:

Множеството комбинации од вредностите на атомите за кои се вистинити сите формули $F_1, F_2, \ldots, F_k$, се содржи во множеството комбинации од вредностите на атомите за кои е вистинита формулата F.

(За илустрација, види го примерот 3.) Притоа, редоследот на атомите $p_1, p_2, \ldots, p_n$ што влегуваат во формулите F_1, $F_2, \ldots, F_k$ не е битен.

Од дефиницијата на логичкото следство произлегува дека: *тавтологијата логички следува од која било исказна формула, а од контрадикцијата логички следува која било исказна формула.*

За две формули A и B се вели дека се **логички еквивалентни** (или, само: **еквивалентни**), ако добиваат еднакви вистинитосни вредности при кој било избор на вистинитосните вредности на атомите што влегуваат во A и B. Запис: $A \equiv B$.

Според тоа, кои било две тавтологии се логички еквивалентни, а истото важи и за кои било контрадикции. Јасно е и дека:

а) $A \equiv B$ акко[1] $A \models B$ и $B \models A$.
б) $A \equiv B$ акко $A \Leftrightarrow B$ е тавтологија.

2.4. ИСКАЗНИ ФУНКЦИИ. КВАНТОРИ

Во математиката на секој чекор срекаваме реченици со променливи. Да ја разгледаме, на пример, реченицата

1) $x+1 < 5$,

каде што x е *природна променлива* (т.е. x е ознака за кој било природен број или: елементите од множеството $\mathbb{N}$ на природните броеви се *„допуштени вредности"* за x).

Оваа реченица не е исказ, зашто за неа не може да се каже дали е вистинита или не е. Други примери на реченици со променливи:

2) x е содржател на 3.
3) x е помал од y.
4) $x + 2y = 5$.
5) x е заеднички делител на y, z.

Притоа ќе сметаме дека допуштени вредности на променливите x, y, z се природните броеви.

Ако во речениците 1)-5) променливите се заменат со кои било нивни допуштени вредности, ќе се добијат искази - некои вистинити, а некои невистинити. На пример:

1′) $1+1 < 5$; $2+1 < 5$; $5+1 < 5$; $6+1 < 5$.
2′) 1 е содржател на 3; 2 е содржател на 3.
3′) $1+2\cdot 1 = 5$; $1+2\cdot 2 = 5$; $3+2\cdot 4 = 5$.
4′) 4 е заеднички делител на 8 и 12.

Реченица со променливи којашто станува исказ за кои било допуштени вредности на променливите, се вика **исказна функција** или **предикат**.

За исказната функција се вели дека е *едномесна*, *двомесна* итн. ако содржи соодветно: една, две итн. променливи. Исказните функции се означуваат обично со големи букви од латиницата, со назначување на променливите во загради: $P(x)$, $Q(x,y)$ итн.

---

[1] Зборот „акко" е замена за изразот „ако и само ако".

Една исказна функција $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ се вика **идентично вистинита** (или, само, **вистинита**), ако за која било n-ка допуштени вредности на променливите што влегуваат во неа, нејзината вистинитосна вредност е т.

Со други зборови, $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ е **вистинита** акко е вистинит секој конкретен исказ што може да се добие од неа.

На пример, исказната функција $P(x,y,z)$: $(x+y)^2+z^2 \geq 0$ е идентично вистинита, а $Q(x,y)$: $x^2-y^2 > 0$ не е (притоа: x, y, z се реални променливи).

Во математиката најчесто се разгледуваат исказни функции зададени со равенки, неравенства, системи равенки или неравенки.

Нека $P(x)$ е исказна функција со една променлива чиешто множество допуштени вредности е означено со D. Секоја вредност на променливата за која исказната функција станува вистинит исказ, се вика **решение на исказната функција.** Множеството пак $M\subseteq D$, од сите такви вредности се вика **множество решенија** на таа исказна функција. Така, за исказната функција $P(x)$: $x+1 < 5$, бројот 3 е решение (зашто исказот $P(3)$: $3+1<5$ е вистинит), а множеството решенија е $M = \{1,2,3\}$.

Овие поими се пренесуваат на соодветен начин и за повеќемесни исказни функции.

Исказните функции ги примаат вредностите т и ⊥, исто како исказите, па затоа над нив може да се изведуваат логички операции, аналогни со операциите над исказите. Така, од две исказни функции $P(x)$ и $Q(y)$ можеме да формираме нова: $P(x)\wedge Q(y)$. Тоа е исказна функција од две слободни променливи x и y, а нејзината вистинитосна вредност за кој било пар (a,b) од допустливи вредности на променливите се дефинира како вистинитосната вредност на исказот $P(a)\wedge Q(b)$. Аналогно се дефинираат исказните функции:

$$P(x)\vee Q(y),\ \neg P(x),\ P(x) \Rightarrow Q(y),\ P(x) \Leftrightarrow Q(y),$$

како и операциите $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ над повеќемесни исказни функции.

Исказната функција $B(y_1,\ldots,y_n)$ се вика **логичко следство** од исказната функција $A(x_1,\ldots,x_m)$, акко исказната функција

$$A(x_1,\ldots,x_m) \Rightarrow B(y_1,\ldots,y_n)$$

е идентично вистинита. Записот:

$$A(x_1,\ldots,x_m) \models B(y_1,\ldots,y_n)$$

означува дека предикатот B е логичко следство од предикатот A.

Пример 4. Нека x е природна променлива, а $P(x)$: „x е декадна единица" и $Q(x)$: „x е содржател на 5". Тогаш $Q(x)$ логички следува од $P(x)$, т.е. $P(x) \models Q(x)$. ||

Поопшто кажано, предикатот $F(z_1,\dots,z_n)$ се вика **логичко следство** од предикатот $F_1(x_1,\dots,x_m),\dots,F_k(y_1,\dots,y_s)$, ако предикатот

$$F_1(x_1,\dots,x_m)\wedge\dots\wedge F_k(y_1,\dots,y_s) \Rightarrow F(z_1,\dots,z_n)$$

е идентично вистинит. (Притоа се претпоставува дека сите слободни променливи имаат исти допуштени вредности.) Ознака:

$$F_1(x_1,\dots,x_m),\dots,F_k(y_1,\dots,y_s) \models F(z_1,\dots,z_n).$$

Пример 5. Нека $P(x)$: „x е парен број", $Q(x)$: „x е содржател на 3", $R(x)$: „$6|x$" при што x е природна променлива. Тогаш $P(x)$, $Q(x) \models R(x)$.

Нека е дадена исказната функција $P(x)$: $x+1 > 5$. при што x е природна променлива. Таа станува исказ за одредени вредности на x, како на пример: $P(2)$: $2+1 > 5$, $P(6)$: $6+1 > 5$. Но, дадената исказна функција може да стане исказ и со употребата на зборовите „секој" и „некој". На пример, искази се:

а) За секој природен број x, $x+1 > 5$.

б) За некој природен број x, $x+1 > 5$.

Зборовите *секој* (*за кој било, сите*) и *некој* (*барем за еден, постои ... за кој*) се викаат **квантори**. Кванторот „секој" се вика **универзален квантор** (и се означува со симболот $\forall$), а „некој" се вика **егзистенцијален квантор** (и се означува со симболот $\exists$). Така, горните искази а) и б) можеме да ги запишеме:

а′) $(\forall x\in\mathbb{N})\ (x+1 > 5)$.

б′) $(\exists x\in\mathbb{N})\ (x+1 > 5)$.

Да се потсетиме дека тавтологии се исказните формули:

1°. $\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$.

2°. $\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$.

2.5. ВЕЖБИ

1. Врз основа на рангот на операциите, изостави ги излишните загради во формулата:

   а) $(p\vee q) \Rightarrow ((\neg p)\wedge q)$; б) $(q \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (r\wedge p)))$.

2. Состави вистинитосна таблица за формулата:

   а) $(p\wedge(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$; б) $\neg(p\wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$.

3. Докажи дека се тавтологии формулите:

   1) $p \wedge (p\Rightarrow q) \Rightarrow q$ - *закон за одделување, modus ponens*

   2) $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ - *закон за двојна негација,*

3) $p \wedge q \Rightarrow p$ - *закон за отстранување на конјункцијата*
4) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ - *закон на силогизам,*
5) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ - *комутативен закон за* $\vee$,
6) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ - *дистрибутивен закон на* $\wedge$ *спрема* $\vee$,
7) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ - *закон за негирање на конјункцијата (Де Морганов закон).*

4. Докажи дека формулата:

а) F: $\neg p \vee q$ е логичко следство од формулата F_1: $p \Leftrightarrow q$.

б) F: $p \Leftrightarrow q$ - следство од F_1: $p \Rightarrow q$ и F_2: p.

5. Провери дали формулата F е логичко следство од наведените претпоставки:

а) F: $\neg q$ - следство од: $p \wedge q$ и $\neg p \vee q$;

б) F: $\neg r \Rightarrow \neg p$ следство од: $p \Rightarrow q$, $\neg r \Rightarrow \neg q$, $p \wedge q$.

6. Наведи пример на предикати $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ каде што x, y се природни променливи, така што едниот да е логичко следство од другиот.

7. Користејќи логички знаци (за операции, квантори, ...) запиши со симболи три искази. (На пример, $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})$, $[x=2y \vee x=2y+1]$).

8. Дали е вистинит исказот: „Ако $n=n-1$, тогаш $n+1=n$", каде што n е даден цел број? Дали е вистинит исказот „$n+1=n$"?

9. Да се установи вистинитоска на исказот:

а) $(\forall x \in \mathbb{R})\ [x=-x \Rightarrow x^2=(-x)^2]$; б) $(\forall x \in \mathbb{R})\ [x^2=(-x)^2]$;

в) $(\forall x \in \mathbb{R})\ [x^2=(-x)^2 \Rightarrow x=-x]$.

3. ТЕОРЕМИ И АКСИОМИ

3.1. ТЕОРЕМА; УСЛОВНА И КАТЕГОРИЧНА ФОРМА

Реченица што искажува некакво тврдење за математички објекти се вика **математичка реченица** или **математичко тврдење.** Такви се речениците:

1) Ако еден четириаголник е правоаголник, тогаш тој има две оски на симетрија.

2) Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.

Овие две реченици се примери на математички тврдења. Со помош на расудувања, користејќи други точни тврдења, може да се докаже дека тврдењата 1) и 2) се точни (вистинити).

Математичко тврдење што е вистинито, а неговата вистинитост е установена со доказ, се вика **теорема.** Така, тврдењата 1) и 2) сѐ теореми. („Теорема" доаѓа од грчкиот збор „*theorema*" што значи *разгледување, обмислување.)*

Секоја теорема содржи во себе услов и заклучок. Во теоремата 1), условот е: „еден четириаголник е правоаголник", а заклучокот е: „тој има две оски на симетрија". Во 2), пак, условот е „Четириаголникот е ромб", а заклучокот „дијагоналите му се заемно нормални".

Теоремата 1) е искажана со *условна реченица*, па затоа велиме дека таа е зададена во **условна** (или **силогистична**) **форма**. За ова искажување е карактеристична формата:

„Ако..., тогаш...", (1)

т.е. формата на импликација

$$p \Rightarrow q. \qquad (1')$$

Условната формулација на една теорема ја има таа предност што во неа јасно се разграничуваат **условот** - она што е дадено во теоремата (почнува со зборот „ако") и **заклучокот** - она што треба да се докаже (почнува со зборот „тогаш"). Кратко, ако теоремата е запишана во формата (1'), тогаш реченицата „p" *е условот*, а реченицата „q" *е заклучокот* на теоремата.

Една теорема може да биде искажана и со *„категорична" реченица* (т.е. безусловно, без да се користат зборови како „ако, ...тогаш"), во таков случај велиме дека теоремата е формулирана во **категорична форма**.

Така, теоремата 2): „Дијагоналите на ромбот се заемно нормални" е искажана во категорична форма. Вака може да се искаже и теоремата од примерот 1): „Правоаголникот има две оски на симетрија". Теоремата 2) пак искажана во условна форма гласи: 2') Ако еден четириаголник е ромб, тогаш дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални.

Главна одлика на категоричната формулација на една теорема е нејзината краткост, поради што таа мошне широко се применува. Од друга страна, таа има и еден мал недостаток: претпоставката може да не се распознава веднаш, да е „скриена" (за разлика од условната формулација, при која определувањето на претпоставката е сосема едноставно). Затоа, мошне важно е учениците да се оспособат да ги издвојуваат претпоставките од заклучокот, т.е. *да се оспособат за преминување од категорична кон условна формулација и обратно.*

3.2. ДИРЕКТНА И ОБРАТНА ТЕОРЕМА

Како што споменавме погоре, во која било теорема, од условот следува заклучокот, т.е. *меѓу условот и заклучокот на теоремата постои причинско-последична врска* во вид на импликација. Така, ако p е условот, а q е заклучокот на една теорема, тогаш таа симболички се запишува вака:

$$p \Rightarrow q.$$

Ако $p \Rightarrow q$ е теорема, тогаш импликацијата

$$q \Rightarrow p$$

се вика **обратно тврдење** во однос на теоремата $p \Rightarrow q$. Во таа смисла, теоремата $p \Rightarrow q$ се вика **директно** (или **првобитно**) **тврдење**. Тврдењата $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow p$ се викаат **заемно обратни** (што значи дека кое било од нив може да се смета за директно тврдење, а другото - за обратно на првото).

Да разгледаме неколку примери.

3) За теоремата „Накрсните агли се еднакви" обратното тврдење е „Еднаквите агли се накрсни"; тоа не е точно (пример што го побива тврдењето: аглите при основата на рамнокрак триаголник се еднакви, но не се накрсни).

4) Тврдењето „Во делтоидот дијагоналите се заемно нормални" е точно, а обратното тврдење: „Четириаголник со заемно нормални дијагонали е делтоид" не е точно.

5) „Ако еден трапез е рамнокрак, тогаш неговите дијагонали се еднакви меѓу себе" е точно, а точно е и обратното: „Ако во еден трапез дијагоналите се еднакви, тогаш тој е рамнокрак".

Значи, обратното тврдење од вистинито тврдење во некои случаи е точно, а во некои е неточно. Според тоа, секое обратно тврдење бара свој доказ или побивање.

Ако обратното тврдење на една теорема е точно, тогаш тоа се вика **обратна теорема** на дадената.

На пример, за теоремата: „Дијагоналите во паралелограмот заемно се преполовуваат", и обратното тврдење „Четириаголник во кој дијагоналите заемно се преполовуваат е паралелограм" е точно, т.е. е теорема, обратна на првобитната.

Да резимираме. Ако е дадена некоја теорема запишана во вид на импликација:

1°. $p \Rightarrow q$ *(- директно, првобитно тврдење),*

тогаш можеме да ги формираме следниве тврдења:

2°. $q \Rightarrow p$ *(- обратно тврдење на првобитното),*

3°. $\neg p \Rightarrow \neg q$ *(- спротивно тврдење на првобитното),*

4°. $\neg q \Rightarrow \neg p$ *(- обратно на спротивното, т.е. спротивно на обратното).*

На пример:

6) За теоремата $1'$: „Напоредните агли се суплементни", обратното тврдење е $2'$: „Суплементните агли се напоредни" (неточно), спротивното е $3'$: „Агли што не се напоредни не се суплементни" (неточно), а обратното на спротивното е $4'$: „Агли што не се суплементни не се напоредни" (точно).

Имајќи го предвид правилото на контрапозиција, имаме:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p), \quad (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$$

т.е. тврдењето **4°** е еквивалентно со **1°** (па и тоа е точно, зашто 1° е теорема) а тврдењето 3° е еквивалентно со 2° (па тоа е точно ако и само ако е точно 2°). Поради тоа, во практиката се употребуваат, главно, 1° и 2°, а само понекогаш, ретко, формулите 3° и 4°.

Ако обратното тврдење од некоја теорема $p \Rightarrow q$ е исто така теорема, тогаш двете теореми можеме да ги запишеме заедно, во вид на еквиваленција: $p \Leftrightarrow q$.

Така, теоремата од примерот 5) и нејзината обратна, можеме да ги запишеме заедно на следниов начин: „Еден трапез е рамнокрак ако и само ако неговите дијагонали се еднакви".

Да забележиме дека претпоставката на една теорема може да биде конјункција или дисјункција од повеќе услови. Аналогно важи за заклучокот. Според тоа, теоремата може да има вид, на пример:

$$p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q; \quad p_1 \vee p_2 \Rightarrow q;$$

$$p \Rightarrow q_1 \wedge q_2; \quad p \Rightarrow q_1 \vee q_2 \text{ и сл.}$$

3.3. АКСИОМИ

Рековме дека теоремата е математичко тврдење, чијашто вистинитост е установена со доказ. Установувањето на нејзината вистинитост е направена со помош на други тврдења, чијашто вистинитост е утврдена порано. Аналогно како кај математичките поими, ќе дојдеме до алтернативата:

или ќе навлеземе во „маѓепсан круг" (т.е. едно тврдење ќе го докажуваме со помош на друго, чијашто вистинитост е утврдувана со помош на првото),

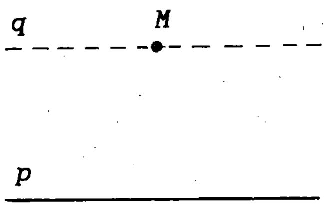
- или некои тврдења ќе ги прифатиме за точни, без никаков доказ.

Во математиката се прифаќа втората алтернатива.

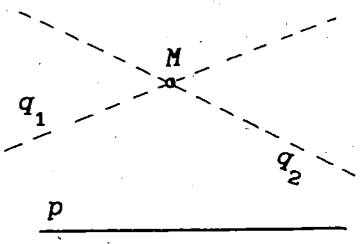
Математичките тврдења што се прифаќаат за точни без доказ се викаат **аксиоми**. (*Аксиома* доаѓа од зборот *axioma* што значи *углед, достоен за почит, авторитет сам по себе.*)

Аксиомите се викаат уште: **првични** или **основни** тврдења. (Во таа смисла, теоремите се викаат и **изведени тврдења**.)

** Тврдењето: „Низ две точки минува една и само една права" е аксиома во геометријата. И тврдењето: „На секоја рамнина лежат бесконечно многу точки, но има и точки што не лежат во таа рамнина" е аксиома. Поедини ученици сметаат дека: „*аксиомите не се докажуваат затоа што нивната точност е очигледна*". Се разбира, тоа сфаќање е погрешно. Во некои такви случаи може да е згодно и поучно наставникот да им ја коментира на учениците аксиомата за паралелност: „Низ дадена точка, надвор од дадена права, минува една и само една права што е паралелна со дадената" (наречена уште: *петти Евклидов постулат*), (црт. 1), за која Лобачевски го заменува заклучокот со: „...минуваат две прави што се паралелни на дадената" (црт. 2), а тоа доведе до нова, неевклидска геометрија. **⌋



Црт. 1



Црт. 2

Научната вредност на аксиомите, нивната важност е мошне голема. Аксиомите се применуваат во најстрогите и најточните науки, коишто се наречени *дедуктивни науки*. Пред сè, такви се математичките науки, коишто ги користат аксиомите паралелно со дедуктивните методи.

Еден **систем аксиоми** *овозможува да се даде чисто логичка, сосема строга изградба на некоја наука, ако тој систем е:*

а) **непротивречен**(т.е. конзистентен, постојан): не смеат да се противречни меѓу себе не само аксиомите од дадениот систем туку и сите последици што можат да се добијат од аксиомите;

б) **потполн** (т.е. комплетен): секои две интерпретации на тој систем аксиоми мора да се изоморфни;

в) **независен:** сите аксиоми мора да се заемно независни, т.е. ни една од аксиомите да не е последица од другите.

(Последново барање е само пожелно и го одразува природниот стремеж кон логичко совршенство и упростување на системот аксиоми со исклучување на „излишните".)

Во математичките дисциплини е присутен стремежот: од конечен број аксиоми, логички да се изведат другите тврдења на таа дисциплина. (Таква реализација е постигната во геометријата, аритметиката, теоријата на веројатноста и други области на математиката.)

Таквиот метод на научно изградување на теорија, т.е. од конечен број аксиоми логички да се изведуваат другите тврдења на таа теорија, се вика **аксиоматски метод**, а самата теорија - **аксиоматска теорија.**

Училишниот курс не се изградува како аксиоматска теорија. Во него треба да се даде само претстава за аксиоматскиот метод, зашто неговата (строга) примена, на пример, во геометријата би го направила училишниот курс премногу гломазен и тежок за учениците.

3.4. ВЕЖБИ

1. Формулирај ја во категорична форма следнава теорема:
   а) Ако еден четириаголник е паралелограм, тогаш спротивните агли пар по пар се еднакви.
   б) Ако два (цели) броја a и b се деливи со ист број d, тогаш и нивниот збир $a+b$ е делив со d.
2. Одреди го условот, како и заклучокот, на следнава теорема:
   а) Цел број чијашто последна цифра е 0 е делив со 5.
   б) Еднаквите тетиви во една кружница се на исти растојанија од центарот на кружницата.
   в) Дијагоналите на квадратот се еднакви меѓу себе.
3. Избери една теорема и искажи ја прво во условна форма, а потоа во категорична форма.

Во задачите 4-8, за дадената теорема, запиши го: обратното, спротивното и обратното на спротивното тврдење и утврди кое од нив е точно.

4. Ако еден четириаголник е паралелограм, тогаш неговите дијагонали се преполовуваат со пресечната точка.
5. Во тетивен четириаголник спротивните агли пар по пар се суплементни.
6. Ромбот има две оски на симетрија.
7. Природен број чијашто последна цифра е 0 е парен број.
8. Дијагоналите на делтоидот се заемно нормални.

4. ПОТРЕБЕН УСЛОВ, ДОВОЛЕН УСЛОВ

4.1. ЗА ЛОГИЧКАТА СТРУКТУРА НА ТЕОРЕМИТЕ

Како што споменавме порано, импликацијата $p \Rightarrow q$ („Ако p, тогаш q") може да биде составена од произволни искази p и q, меѓу нив и такви што по содржина воопшто не се сврзани (на пример: „Ако 2+2=4, тогаш Земјата е тркалезна" или: „Ако $2|3$, тогаш ромбоидот има прав агол".

Секако, од посебно значење се оние импликации $p \Rightarrow q$, при кои p и q се сврзани меѓу себе со содржинска, т.е. причинско-последична врска (на пример: „ Ако два агла се напоредни, тогаш тие се суплементни"). Ваквите импликации се викаат **содржинско условни искази** или само **условни искази**. За нив, секако, важи истата вистинитосна таблица како и за секоја импликација.

Секоја математичка теорема, по својата логичка структура е условен исказ: „Ако A, тогаш B" (A ⇒ B), чијашто вистинитост е докажана за целото множество објекти за кои таа теорема е формулирана.

За случајот на една променлива x, условот A и заклучокот B на теоремата претставуваат едномесни предикати, да ги означиме со $A(x)$ и $B(x)$ соодветно, чијашто импликација $A(x) \Rightarrow B(x)$ е вистинита за која било вредност на променливата x, т.е.

$$(\forall x)\ [A(x) \Rightarrow B(x)] \tag{1}$$

е точен исказ. Аналогно за две (или повеќе) променливи:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ [A(x,y) \Rightarrow B(x,y)]. \tag{1'}$$

Пример 1. Теоремата „Ако еден четириаголник е делтоид, тогаш тој четириаголник има заемно нормални дијагонали" е условен исказ $A \Rightarrow B$, којшто е вистинит. Тоа значи дека предикатот

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

е вистинит за секој x, каде што:

- X е произволен (конвексен) четириаголник,
- $A(X)$ е предикатот: „X е делтоид",
- $B(X)$ е предикатот: „X има заемно нормални дијагонали".

Тоа може да се запише во облик на (1): исказот
$(\forall X)$ [X е делтоид $\Rightarrow$ X има заемно нормални дијагонали], т.е.

$$(\forall X)\ [A(X) \Rightarrow B(X)]$$

е вистинит .

Да забележиме дека *во формулациите на теоремите универзалниот квантор обично не се издвојува експлицитно (т.е. се изоставa, а се подразбира)*. Така, наместо „Секој правоаголник е осносиметрична фигура" се вели: „ Правоаголникот е осносиметрична фигура".

Како што рековме порано (V.2), во случајот кога импликацијата $A(x) \Rightarrow B(x)$ е вистинита за целата предметна област на променливата, тогаш $B(x)$ *логички следува* од $A(x)$. Според тоа, *заклучокот B на теоремата $A \Rightarrow B$ е логичко следство од условот A* или: *$B(x)$ е семантичка последица од $A(x)$*. Релацијата логичко следство „*Од A логички следува B*" е врска меѓу A и B што се состои во следново: штом е вистинито A, задолжително е вистинито и B. Тоа значи дека заклучокот B на теоремата $A \Rightarrow B$ е *неопходно следство* (или *потребен услов*) на условот A, а условот A на истата теорема е *доволна основа* (или *доволен услов*) за нејзиниот заклучок B.

Пример 2. За теоремата „Ако еден број е делив со 6, тогаш тој број е парен", условот „бројот е делив со 6" е доволна основа за „тој број е парен". Од друга страна, заклучокот „ бројот е парен" е неопходно следство од условот „ бројот е делив со 6".

4.2. ПОТРЕБЕН, ДОВОЛЕН, ПОТРЕБЕН И ДОВОЛЕН УСЛОВ

Поимите потребен услов и доволен услов се мошне важни во математиката поради нивната тесна врска со поимот теорема. (Имено, секоја теорема може да се искаже со помош на овие термини.) Затоа, овде, ќе се задржиме уште малку на нив.

Потребен услов (или неопходно следство) на некое тврдење *е таков услов без чие исполнување не може да биде точно даденото тврдење.* Ако пак потребниот услов е исполнет, даденото тврдење може да биде вистинито, но не мора.

Пример 3. Да ја разгледаме теоремата: „Ако четириаголникот е правоаголник, тогаш дијагоналите на четириаголникот се еднакви меѓу себе". Заклучокот „дијагоналите на четириаголникот се еднакви меѓу себе" е потребен услов за тврдењето „Четириаголникот е правоаголник", зошто за четириаголник чиишто дијагонали не се еднакви, тврдењето „четириаголникот е правоаголник" сигурно не е точно, т.е. ниеден четириаголник со нееднакви дијагонали не е правоаголник.

Од друга страна, потребниот услов може да биде исполнет (на пример: „Четириаголникот има еднакви дијагонали"), а да не е последица од нашата претпоставка („Четириаголникот е правоаголник"; имено, четириаголникот може да биде и рамнокрак трапез).

Теоремата од примерот 3, со помош на терминот „потребен услов", може да се искаже и на следниов начин:

„Потребен услов за еден четириаголник да биде правоаголник е тој четириаголник да има еднакви дијагонали".

Доволен услов *на некое тврдење се вика таков услов, при чие исполнување даденото тврдење задолжително е вистинито.*

Пример 4. Условот A: „Бројот n завршува со цифрата 0" е доволен услов за тврдењето B: „Бројот n е делив со 5". Притоа, условот A, во овој случај, не е неопходен за B, зашто има и други броеви што се деливи со 5, а не завршуваат со 0.

Со помош на терминот „доволен услов", теоремата: „Ако бројот n завршува со цифрата 0, тогаш тој број е делив со 5" може да се искаже вака:

„Доволен услов за бројот n да биде делив со 5 е тој број да завршува со цифрата 5".

Да забележиме дека во примерот 3 потребниот услов („четириаголникот има еднакви дијагонали") не е доволен за вистинитоста на тврдењето: „Четириаголникот е правоаголник" (на пример, како што спомнавме погоре, и рамнокракиот трапез има еднакви дијагонали).

Општо, за теоремата претставена во условна форма,

$$A \Rightarrow B \qquad (*)$$

- делот A е **доволен услов** за B, а
- делот B е **потребен услов** за A.

Притоа, во некои случаи (како што споменавме погоре), потребниот услов не е доволен, а доволниот услов не е потребен.

За теореми од обликот $A \Rightarrow B$, значи, A е доволен услов за B, а B е потребен услов за A. Според тоа, една иста теорема што е искажана со помош на „потребен услов" (за еден поим), може да се искаже со помош на„ доволен услов" (за друг поим). За пример, ќе ја земеме теоремата од примерот 3.

Пример 5. а) „Ако еден четириаголник е правоаголник, тогаш тој четириаголник има еднакви дијагонали".

б) „Потребен услов за еден четириаголник да биде правоаголник е тој четириаголник да има еднакви дијагонали".

в) „Доволен услов за еден четириаголник да има еднакви дијагонали е тој четириаголник да е правоаголник".

Во случаите кога делот B во (*) е и доволен услов за A, тогаш велиме дека B е **потребен и доволен услов** за A (или A е потребен и доволен услов за B), што значи дека „A е **еквивалентно** со B".

Така, **потребен и доволен услов** *на некое тврдење се вика таков услов, без чие исполнување тврдењето не е исполнето, а при неговото исполнување тврдењето задолжително е вистинито.*

Пример 6. Условот B: „Во четириаголникот дијагоналите се преполовуваат (со пресечната точка)" е потребен и доволен услов за тврдењето A: „Четириаголникот е паралелограм".

Теоремата: а) „Ако еден четириаголник е паралелограм, тогаш неговите дијагонали заемно се преполовуваат и обратно", може да се искаже и на следниве два начина:

б) „Потребен и доволен услов за еден четириаголник да биде паралелограм е неговите дијагонали да се преполовуваат".

в) „Потребен и доволен услов за дијагоналите на еден четириаголник заемно да се преполовуваат е тој четириаголник да биде паралелограм".

4.3. УШТЕ ЕДНА ПОДЕЛБА НА ТЕОРЕМИТЕ

Врз основа на поимите: потребен услов, доволен услов, потребен и доволен услов може да се направи уште една поделба на теоремите.

Имено, теоремите што се искажуваат потребни услови за егзистенцијата на еден поим може да се наречат **теореми-својства** или, кусо, **својства** на тој поим. Теоремите пак што искажуваат доволни услови за егзистенцијата на еден поим се **теореми признаци** или накусо **признаци** (т.е. критериуми) за тој поим. Теоремата што искажува потребни и доволни услови за егзистенцијата на даден поим се вика **теорема-карактеристично својство** или само **карактеристично својство** на поимот.

Да разгледаме неколку примери.

Пример 7. Следниве тврдења се последици од тврдењето „Четириаголникот $ABCD$ е ромб":

1) $\overline{AB} = \overline{CD}$.   2) $\sphericalangle A = C$.   3) $AC \perp BD$.

4) AC е симетрала на $\sphericalangle A$.   5) BD е симетрала на $\sphericalangle B$.

Секое од овие пет тврдења е потребен услов за четириаголникот $ABCD$ да биде ромб, т.е. претставува својство на поимот ромб. Тие може да се формулираат како теореми-својства за ромбот; на пример, 1) и 3) би се формулирале (во категорична форма) вака:

а) Во ромбот ($ABCD$) спротивните страни (AB и CD) се еднакви меѓу себе.

б) Во ромбот ($ABCD$) дијагоналите (AC и BD) се заемно нормални.

Кога својството е формулирано во условна форма, на пример:

б') „Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш дијагоналите AC и BD се заемно нормални",

тогаш тоа треба да се подразбере вака:

б") „За четириаголникот $ABCD$ да биде ромб потребно е неговите дијагонали AC и BD да се заемно нормални".

Пример 8. Точноста на тврдењето: „Изводот на функцијата $f(x)$ во интервалот (a,b) е позитивен" е доволен услов за точноста на тврдењето: „Функцијата $f(x)$ расте во интервалот (a,b)"

Така, тврдењето: „Ако изводот на функцијата $f(x)$ во интервалот (a,b) е позитивен, тогаш $f(x)$ расте во интервалот (a,b)" (подразбрано во смисла: „Позитивноста на изводот $f'(x)$ во интервалот (a,b) е доволен услов за растење на функцијата $f(x)$ во тој интервал") е теорема-признак или критериум за растење на една функција во интервал.

пример 9. Точноста на тврдењето: „Триаголникот ABC има два еднакви агли" е потребен и доволен услов за точноста на тврдењето: „Триаголникот ABC е рамнокрак". Затоа можеме да кажеме:

„Еден триаголник е рамнокрак ако и само ако тој триаголник има два еднакви агли".

Оваа теорема содржи карактеристично својство за поимот рамнокрак триаголник (тоа е: „триаголникот ABC има два еднакви агли".

Забелешка 1. Едно *карактеристично својсто* наполно го определува дадениот поим, па тоа *може да ја замени дефиницијата* на тој поим. Притоа, треба да се има предвид дека дефиницијата на еден математички поим не е исказ (т.е. не може да се праша дали дефиницијата е вистинита или лажна, туку само дали е „разумно" избрана). Меѓутоа, секоја дефиниција може да се формулира во вид на условен исказ, при што поимот е одразен со потребен и доволен услов за дадениот објект да му припаѓа на обемот од соодветниот поим. Поради тоа, *во дефинициите* често се употребуваат изразите: *„ако и само ако"*, *„во тој и само во тој случај"*, *„потребно и доволно е"*, *„е еквивалентно"* и др.

Забелешка 2. Услов што е само потребен за некое тврдење има премногу тесна содржина, во себе вклучува малку барања за исполнување на даденото тврдење. Проширувајќи го тој услов со приклучување на други потребни услови, може да се добие потребен и доволен услов за даденото тврдење.

На пример, за тврдењето: „Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм", секое од наредните тврдења е потребен услов, а ниедно посебно не е доволен услов:

$1)\ AB \parallel CD;\quad 2)\ \overline{AB} = \overline{CD};\quad 3)\ \sphericalangle A = \sphericalangle C;\quad 4)\ \sphericalangle A + \sphericalangle B = 180^\circ;$

$5)\ \overline{AS} = \overline{SC}\ (S = AC \cap BD).$

Меѓутоа, конјункцијата на потребните услови 1) и 2) е потребен и доволен услов четириаголникот $ABCD$ да биде паралелограм. Потребен и доволен услов за паралелограм можеме да добиеме комбинирајќи и други од потребните услови, како на пример:

а) $\overline{AB} = \overline{CD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$; б) $\overline{AS} = \overline{CS}$ и $\overline{BS} = \overline{SD}$;

в) $AB \parallel CD$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle C$ и др.

Секој од условите а) – в) може да се земе за дефиниција на поимот паралелограм. Но, бидејќи дефиницијата е една, секој услов што е потребен и доволен се докажува како теорема-директна (за својствата на паралелограмот) и обратна. (Обратните теореми, во тој случај, се викаат *признаци за паралелограмот.)*

Забелешка 3. Услов што е доволен за некое тврдење, но не е неопходен, содржи премногу барања за исполнување на даденото тврдење.

Пример 10. За два конуса да имаат еднакви волумени $V_1 = V_2$, доволно е да имаат еднакви висини и еднаквоплошни основи: $H_1 = H_2$ и $B_1 = B_2$. Но, тоа барање е преголемо и може да се ослаби со барањето да им се еднакви не нивните висини и плоштините на основите, туку само нивните производи:

$$B_1H_1 = B_2H_2.$$

Така, тргнувајќи од доволен услов, доаѓаме до потребен и доволен услов за еднаквост на волумените на конусите:

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow B_1H_1 = B_2H_2.$$

4.4. РАЗНИ ВАРИЈАНТИ НА ЕДНА ИСТА ТЕОРЕМА

За една иста теорема $A \Rightarrow B$ можни се различни варијанти на зборовната формулација, коишто имаат иста логичка смисла. Да ги наведеме.

1°. *„Ако A, тогаш B".*

2°. *„Од A логички следува B"*

(кратко: *„Од A следува B")*.

3°. *„A е доволен услов за B"*
„(кратко: A е доволно за B").

4°. *„B е неопходно следство од A"* или: *„B е потребен услов за A"* (кратко: *„B е неопходно за A")*.

5°. *„Секогаш кога A, тогаш B"* (кратко: *„B тогаш кога A") (има иста смисла како 3°)*.

Иста смисла како реченицата *„B е неопходно за A"* имаат речениците:

6°. *„Ако не е B, тогаш не е A".*

7°. *„Без B, нема A".*

8°. *„A само тогаш кога B".*

Поради тоа што исказот:

$$(\forall x)\ [A(x) \Rightarrow B(x)]$$

има иста смисла како *„Секој A е B"*, теоремата $A \Rightarrow B$ може да се формулира и на тој начин:

9°. *„Секој A е B".*

Имајќи предвид дека B логички следува од A ако и само ако областа на вистинитост на предикатот A се вклучува во областа на вистинитост на предикатот B, теоремата $A \Rightarrow B$ може да се формулира и вака:

10°. *„Множеството $\mathcal{A}$ објекти, за кое е точно тврдењето A, се содржи во множеството $\mathcal{B}$ објекти за кои е точно тврдењето B"* (кратко: *„$\mathcal{A}$ се содржи во $\mathcal{B}$")*.

Секоја од горните варијанти (на формулации) карактеризира определена особеност на теоремата $A \Rightarrow B$:

- нејзиниот условен карактер (варијанта 1°);
- релацијата логичко следува меѓу условот и заклучокот (варијанта 2°);
- доволност на условот за заклучокот (3° и 5°);
- неопходност на заклучокот за условот ($4^\circ, 6^\circ, 7^\circ$ и 8°);
- општопотврдниот карактер на теоремата (9°);
- односите на областите на вистинитост на предикатите A

и B (т.е. на обемите на поимите A и B) (варијанта 10°).

Во секоја од тие формулации се содржи еден од логичките термини: *„ако,... тогаш", „логички следува", „доволно", „неопходно" (*или *„потребно"), „тогаш", „само тогаш", „секој", „се содржи"*. (Меѓутоа, теоремите честопати се формулираат без овие логички термини (особено во категорична форма) за да бидат што покуси.)

Пример 11. Ќе ги наведеме разните логички варијанти на формулирање на теоремата:

„Дијагоналите на ромбот се заемно нормални".

1) *Ако* четириаголникот е ромб, *тогаш* неговите дијагонали се заемно нормални.

2) Од тоа што четириаголникот е ромб, *следува* дека неговите дијагонали се заемно нормални.

3) На четириаголникот му е *доволно* да биде ромб за да има заемно нормални дијагонали.

4) Заемната нормалност на дијагоналите е *неопходна* (т.е. е *потребен услов*) за четириаголникот да биде ромб.

5) *Секогаш кога* четириаголникот е ромб, дијагоналите му се заемно нормални. (Дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални *секогаш кога* тој е ромб.)

6) *Ако* дијагоналите на четириаголникот *не се* заемно нормални, *тогаш тој не е* ромб.

7) *Без* заемна нормалност на дијагоналите на четириаголникот *нема* ромб.

8) Четириаголникот е ромб *само тогаш кога* дијагоналите му се заемно нормални.

9) *Секој* четириаголник што е ромб има заемно нормални дијагонали.

10) Множеството ромбови *се содржи* во множеството четириаголници со заемно нормални дијагонали.

4.5. ВЕЖБИ

1. Наведи два примера на содржинско-условни искази и два примера на искази што не се такви.
2. Дадената теорема да се претстави како условен исказ, а потоа како исказ со квантор (како во пр. 1).
   а) Рамнокракиот трапез е оскосиметрична фигура.
   б) Производот од два непарни цели броеви е непарен број.
   в) Функцијата f што има позитивен извод во даден интервал, расте во тој интервал.
   г) Низа што не опаѓа и е мајорирана е конвергентна.
3. Секоја од теоремите а) - г) во задачата 2 да се искаже со помош на терминот:
   1) „Потребен услов ...", 2) „Доволен услов ...". Потоа да се согледа: а) дали потребниот услов е доволен,

б) дали доволниот услов е потребен.

Во задачите 4 - 9, наместо буквата „Z" стави еден од изразите: „потребно и доволно е", „потребно е", „доволно е",така што добиената реченица да биде вистинито тврдење.

4. За да биде еден природен број делив со 5, „Z" природниот број да завршува на 5".

5. За еден четириаголник да биде ромб, „Z" четириаголникот да има заемно нормални дијагонали.

6. За еден четириаголник да биде рамнокрак трапез, „Z" четириаголникот да има еднакви дијагонали.

7. За да биде $\ln x > e$, „Z" да биде $X > 1$.

8. За да биде полиномот $P(X)$ делив со биномот $X-a$, „Z" a да биде корен на полиномот $P(X)$.

9. За да биде $X^2-1 > 0$, „Z" да е $X > 1$.

10. Дали ќе стане точно тврдење реченицата:

а) За да биде $f'(X) \geq o$, „Z" $f(X) \geq o$";

б) За да биде $X^2+1 < 0$, „Z" $X < -1$",

ако наместо променливата „Z" се стави некој од изразите „потребно и доволно е", „потребно е", „доволно е"?

11. Нека условниот исказ „Ако A, тогаш B" е невистинит (наведи еден таков пример). Дали: 1) A е доволно за B, 2) B е неопходно за A?

12. За два триаголника да имаат еднакви плоштини, доволно е да имаат еднакви основи и еднакви висини. Последниов услов не е неопходен. Направи „ослабувања" за дадениот доволен услов да стане и неопходен услов.

13. Дадени се тврдењата: A - „Пирамидата е правилна"; B - „Сите бочни рабови на пирамидата се еднакви меѓу себе"; C - „Висините на сите бочни ѕидови на пирамидата се еднакви меѓу себе"; D - „Ортогоналната проекција на секој од бочните рабови на пирамидата е симетрала на соодветниот агол на основата"; E - „Врвот на пирамидата (ортогонално) се проектира во центарот на кружницата, впишана во нејзината основа".

1) Кои од наброените тврдења следуваат од други наброени? Состави ги од нив сите можни вистинити условни искази.

2) Кои од тврдењата A - E се доволни: (основи) за E? потребни услови (т.е. последици) на E? потребни и доволни услови за E?

14. Формулирај задача, аналогна на 13), во врска со рамнокракиот триаголник.

15. Теоремата: „Ромбот има две оски на симетрија", да се формулира со користење на зборовите:

1) „секој", 2) „ако..., тогаш", 3) „само ако", 4) „потребно е", 5) „доволно е", 6) „тие, коишто", 7) „само тие што", 8) „тогаш, кога", 9) „ако не е..., тогаш не е ...", 10) „без..., нема...", 11) „се содржи".

16. За секоја од теоремите во вежбата 2 искажи ги разните варијанти 1^o-10^o (слично како во вежбата 15).

17. Наведи примери на теореми-признаци за: 1) правоаголник, 2) рамностран триаголник.

18. Наведи пример на: а) теорема-својство, б) теорема-признак (што не е карактеристично својство) за:

1) ромб, 2) рамнокрак триаголник, 3) рамнокрак трапез.

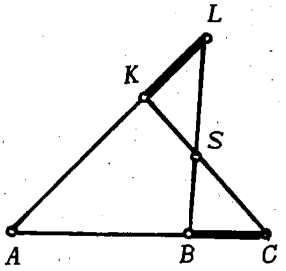
19. Најди потребни услови (т.е. последици) од дадените услови. (Притоа a,b,c,α,β се реални броеви.)

1) Дадено: $\dfrac{|a|=|b|}{?}$; 2) Дадено: $\dfrac{abc>0}{?}$;

3) Дадено: $\dfrac{\cos\alpha=\cos\beta}{?}$; 4) Дадено: $\dfrac{\sin\alpha=\sin\beta}{?}$;

5) Дадено: $\overline{AC}=\overline{AL}$, $\overline{BC}=\overline{KL}$ (црт. 1).

Најди барем осум последици.



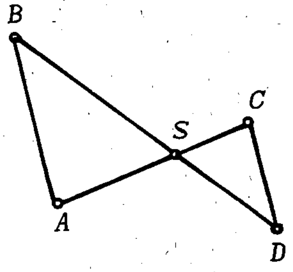
Црт. 1

20. Најди доволни услови за дадените заклучоци. (Притоа: a, b, c, α, β се реални броеви.)

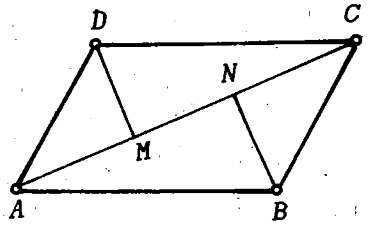
1) $\dfrac{\text{Дадено: ?}}{ab=c^2}$; 2) $\dfrac{\text{Дадено: ?}}{abc<0}$;

3) $\dfrac{\text{Дадено: ?}}{tg\alpha=tg\beta}$; 4) $\dfrac{\text{Дадено: ?}}{|a+b|=|a|+|b|}$;

5) $\dfrac{\text{Дадено: ? (црт. 2)}}{\overline{AS}\cdot\overline{SC}=\overline{BS}\cdot\overline{SD}}$.



Црт. 2



Црт. 3

6) Дадено:

а) $ABCD$ е паралелограм (црт. 3);

б) $$\frac{?}{\overline{BN} = \overline{DM}}.$$

5. МЕТОДИКА НА ВОВЕДУВАЊЕ И ИЗУЧУВАЊЕ ТЕОРЕМИ

5.1. НАЧИНИ НА ВОВЕДУВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

Математичките тврдења во наставата по математика се воведуваат и се усвојуваат главно на два начина: *генетски* и *догматски*.

При **догматскиот начин**, математичкото тврдење им се соопштува на учениците директно, т.е. им се дава „готово знаење", а потоа веднаш им се докажува или им се образложува неговата вистинитост. Поради тоа, овој начин се вика и **апстрактно-дедуктивен метод** на воведување математички тврдења.

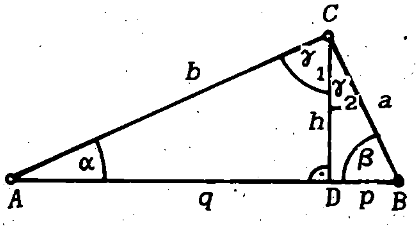
Воведувањето на едно математичко тврдење на **генетски начин**, за разлика од догматскиот, означува дека учениците активно учествуваат во неговото откривање. Имено, при генетскиот метод, под вештото раководство на наставникот, учениците извршуваат редица активности (присетување за порано изучени поими и тврдења што се во врска со изучуваното тврдење, тргнување од конкретни или поединечни случаи и вршење проверки за нивната вистинитост и сл.) и, со нивна помош, најчесто сами, го насетуваат потеклото на тврдењето, неговата точна формулација и патот за неговото докажување. Поради овие карактеристики, генетскиот начин се вика и **конкретно-индуктивен метод** на воведување теореми.

Пример 1. За илустрација, да видиме како може да се воведат Евклидовите теореми (во VII одд.) со секој од споменатите два метода.

а) Со генетскиот метод, една можност е следната. Откако ќе го направи соодветниот вовед (сам - со една-две реченици или со учениците - преку две-три прашања), наставникот почнува „да го подготвува теренот" за откривање на споменатите теореми. Тој организира активности на учениците, приспособени на поставената цел, преку соодветни прашања и задачи, на пример, како следните:

1. Колку е геометриската средина на две отсечки со должини 3 cm и 12 cm? А на отсечки со a=6 cm и c=18 cm?

2. Нацртај правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето C, спушти ја висината CD (кон хипотенузата AB) и означи ги аглите $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2$ како на црт. 1.



Црт. 1

3. Каква заемна положба имаат краците на аглите ${}_2\alpha$ и γ ? (Очекуван одговор: Краците им се заемно нормални.)

4. Кои парови агли на црт. 1 имаат заемно нормални краци? (Одг. α и γ , β_2 и γ_1).

5. Кои од означените агли се еднакви меѓу себе? (Одг. $\alpha=\gamma_2$, $\beta=\gamma_1$.)

6. Именувај ги правоаголните триаголници на црт. 1 и назначи кои од нив се слични меѓу себе. (Одг. ΔABC, ΔACD и ΔCBD; сите се слични меѓу себе.)

7. Разгледај ги сличните триаголници: $\Delta ABC \sim \Delta BCD$ и состави пропорција од страните a, c и $p=\overline{DB}$ (p се вика **проекција** на катетата BC врз хипотенузата AB). Потоа, изрази ја a со помош на c и p. (одг. $c:a=a:p$; $a=\sqrt{pc}$.)

8. Искажи го со зборови равенството $a=\sqrt{pc}$, што го доби од претходната задача. (Одг. Катетата a е геометриска средина од својата проекција p и хипотенузата c.)

9. Разгледај ја сличноста: $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ и направи соодветен заклучок како во зад. 7 и 8. (Одг. $b=\sqrt{qc}$.)

10. Разгледај ја сличноста: $\Delta ACD \sim \Delta CBD$, состави пропорција од висината $h=\overline{CD}$ и проекциите p, q. Изрази ја висината h преку p и q и искажи го со зборови добиеното равенство. (Одг. $h=\sqrt{pq}$.)

По извршувањето на горните задачи, наставникот објавува дека добиените врски во зад. 8, 9 и 10 ($a^2=pc$, $b^2=qc$, $h^2=pq$) ги докажал старогрчкиот математичар Евклид и поради тоа тие се викаат **Евклидови теореми.**

Со тоа, Евклидовите теореми се воведени. Останува уште наставникот да организира точно формулирање, утврдување и примена на тие теореми.

б) Со догматскиот метод, воведувањето на Евклидовите теореми би било директно, со готово соопштување, на пример, како што следува:

Сличноста на триаголници во правоаголен триаголник доведува до неколку интересни врски меѓу страните, проекциите на катетите врз хипотенузата и висината, спуштени од темето на правиот агол. Тие врски, наречени **Евклидови теореми,** се следниве:

1°. Секоја од катетите во еден правоаголен триаголник е геометриска средина од хипотенузата и проекцијата на таа катета врз хипотенузата.

2°. Висината во еден правоаголен триаголник спуштена кон хипотенузата е геометриска средина на проекциите од катетите врз хипотенузата.

Притоа, за објаснување и поткрепување се прави цртеж (како црт. 1), а потоа следува доказ на теоремите, за кој, секако, може да се користи направениот цртеж.

Овие два приода, како што можеме да забележиме од нивните карактеристики и од горниот пример, се сосема различни, дури спротивни еден на друг.

Генетскиот метод бара повеќе наставно време отколку догматскиот, но затоа пак има повеќе други квалитети од него. Имено, со генетскиот метод:

- *се создава поголем интерес* кај учениците за изучуваната информација,
- *се мотивира изучувањето* на даденото тврдење,
- *се открива внатрешната логика* на развојот на наставниот предмет,
- *се активира сознајната дејност* на учениците во процесот на наставата,
- *се стимулира самостојната работа* на учениците.

Догматскиот метод е згоден при строго излагање на една математичка теорија врз основа на аксиоми и дедуктивни методи, зашто *излагањето е пократко и поекономично.* Таа економичност е причина што тој често се среќава и во учебниците по математика во средното училиште (при што авторот на учебникот им ја препушта на наставниците и методичарите задачата за пополнување на методските празнини што го придружуваат догматскиот метод). Но, горенаброените квалитети на генетскиот метод се недостатоци на догматскиот, па иако со догматскиот метод се заштедува наставно време, се препорачува тој да се применува во наставата поретко, а во основното образование - само по исклучок.

Примената на генетскиот метод честопати може згодно и ефектно да се комбинира *со лабораторискиот метод* (со: мерење, пресметување, сечење, лепење). Еден таков пример, во врска со откривањето на теоремата за збирот на внатрешните агли во триаголникот наведовме во II.2, а слично може да се постапи при изучувањето на својствата за: аглите на трансверзалата од две паралелни прави, складните триаголници, паралелограмите и др. (в. вежба 1 и 2).

Генетскиот метод може да се применува и без мерења. Воведувањето на одредена теорема може да започне со поставување на *соодветни задачи од практична природа,* така што, со нивното решавање, наставникот ги наведува учениците самостојно да дојдат до хипотеза, односно до откривање на теоремата (в. вежба 3 и 4). За истата цел може да послужат и *задачи (или прашања) од „апстрактна природа"* (в. вежба 5). Познавањето на *историјата на математиката,* особено за оние прашања што се изучуваат во училишниот курс, на наставникот може да му помогне за пошироко применување на генетскиот метод и воопшто за зголемување на ефективноста на наставниот процес.

Воведувањето и изучувањето на теореми и аксиоми во основното образование се врши најчесто со конкретно-индуктивниот метод, а таа тенденција продолжува и во средното образование, но тука е доволно присутен и апстрактно-дедуктивниот метод. Кој од тие два метода ќе биде применет зависи од: значењето, содржината и местото на теоремата во изучуваниот курс, а секако и од можностите на учениците самостојно да ги откријат и обосноват фактите што се вградени во неа.

5.2. ЗАБЕЛЕШКИ ЗА УСВОЈУВАЊЕ НА ТЕОРЕМИТЕ

Природно е да се очекува учениците да прават грешки при усвојувањето на теоремите, но наставникот треба да го открие изворот на тие грешки и да настојува тие да се отстранат. Најраспространети се следниве видови грешки:

а) *недоволно владеење со основните теореми* од соодветната област (планиметрија, равенки, функции и сл.);

б) *грешки од логички карактер,* сврзани со неразбирањето на дедуктивната градба на курсот по математика (на пример: неточна смисла на поимите, неразбирање на структурата на расудувањето и општоста на доказот);

в) *неправилна употреба на цртежот.*

Пример 2. 1) „Симетралите на аглите на рамнокрак триаголник, со нивната пресечна точка, се делат во однос 1:2". (?!). („Оправдание": па нели симетралата на аголот при врвот е и тежишна линија?). Тука имаме грешка од видот а).

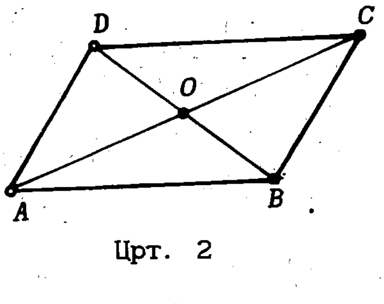
2) „Една низа е конвергентна, ако таа е ограничена" (?!). („Па нели ако низата е ограничена, тогаш таа има граница, а ако има граница, тогаш таа е конвергентна?"). Во овој случај се работи за грешка поради погрешно сфатените поими.

3) „... Така, добивме дека две соседни страни на дадениот четириаголник се еднакви, па заклучуваме дека тој е ромб" (?!). Тука ученикот не разбира дека претпоставката не е доволна за тој заклучок.

4) „Ако функцијата f е непрекината и диференцијабилна во сегментот $[a,b]$, тогаш таа има и најголема и најмала вредност во тој сегмент". Тука, од една страна претпоставката е пресилна (излишен е условот за диференцијабилност), а од друга страна непрекинатоста следува од диференцијабилноста.

5) Ако четириаголникот $ABCD$ е паралелограм, тогаш за произволна точка O важи: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Докажи.

„Доказ". Бидејќи точката O е произволна, да земаме таа да биде како на црт. 2: $O=AC\cap BD$. Тогаш $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$, па даденото равенство е очигледно точно, $\vec{0} = \vec{0}$. (?!).



Црт. 2

Во секој конкретен случај кога ќе се направи грешка од таков вид од страна на учениците, наставникот треба да укаже на неа, да ја анализира заедно со нив и да ја исправи. Тоа е важна задача во процесот на усвојување на математички тврдења.

Можеме да сметаме дека **ученикот усвоил** (т.е. „добро научил") **дадена теорема**, ако:

- *правилно ја формулира теоремата,*
- *умее да ги издвои објектите и врските меѓу нив и ја знае содржината на секој од нив,*
- *без грешка ги одредува претпоставките и заклучокот,*
- *умее на теоремата да ѝ даде и друга форма,*
- *умее да ја примени во соодветни едноставни случаи.*

Ќе направиме уште неколку забелешки.

Почетното изучување на нов материјал е сврзано со задачата за неговото *усвојување на самиот час*. Таа задача, во значителна мера, се решава со примена на генетскиот метод, како и на други методи што ја зголемуваат активноста и самостојната работа на учениците, со што се овозможува поголемо внимание за творечка работа.

Од друга страна, за да се заштеди стекнатото знаење од заборав, наставникот треба да организира *периодични повторувања на формулациите* на сите порано изучени теореми и други математички тврдења. Тие повторувања ќе им помогнат на учениците да ги сознаат подобро и да ги разберат подлабоко врските на изучените теореми со нови математички тврдења. Притоа, наставникот треба да настојува: секој ученик, на секој час, да биде готов да даде формулација на кое било порано изучено математичко тврдење (теорема, аксиома, последица), како и дефиниција на поимите што се јавуваат во него. (Формулацијата не мора да биде од книгата, „буквална", таа може да биде искажана со свои зборови, но содржината мора да е точна.)

Повторувањето ќе биде висококвалитетно, ако наставникот организира и *успешно спроведе творечка работа на учениците* во врска со математичките тврдења, пред сѐ: анализа на нивната логичка структура, трансформација во други видови тврдења (по форма или по содржина) и др.

5.3. ВЕЖБИ

Во задачите 1-6 да се илустрира воведувањето на укажаната теорема по генетски пат.

1. Преполовување на дијагоналите во паралелограмот со нивната пресечна точка (со помош на мерење и споредување).
2. Прв признак за сличните триаголници (користејќи: аналогија со складност, цртање, мерење и споредување).
3. Формула за радиусот на кружница, впишана во триаголник.
4. Виетовата теорема: $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$, каде што x_1,x_2 се корените на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, а $b=p/a$, $q=c/a$, да се воведе со помош на конкретни задачи.

(На пример: Реши ја равенката $X^2-7X+12=0$ и пресметај ги изразите X_1+X_2 и $X_1\cdot X_2$. Што согледуваш?)

5. Формулата за плоштина на ромб, изразена со неговите дијагонали, преку задачи од апстрактна природа.
Помош: 1) Каков е заемниот однос на дијагоналите? 2) Каков четириаголник се добива со повлекувањето на прави низ темињата на ромбот, паралелни со дијагоналите? 3) Каков е меѓусебниот однос на плоштината од ромбот и плоштината на четириаголникот, добиен во 2)?

6. Синусна теорема.

7. Ако две пресечки се повлечени од иста точка P кон дадена кружница (к) и нивните пресечни точки со (к) се A и B, односно C и D, тогаш $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$.

8. На основата AB од произволен рамнокрак ΔABC е избрана точка P и се повлечени нормалите од P кон страните AC и BC: $PM\perp AC$ и $PN\perp BC$. Докажи дека $\overline{PM}+\overline{PN} = \overline{AD}$, каде што AD е висината на ΔABC, спуштена од темето A.

9. Да се спроведе постапката за воведување на математичките тврдења од вежбите: 4, 5, 7 и 8 со догматскиот метод. Кој метод, за кое тврдење е позгоден?

10. Во случаи кога нема можност да се наведат учениците самостојно да ја формулираат теоремата, генетскиот пристап може да дојде до израз со поставување на проблем од практичен или теориски карактер, така што одговорот да доведува до нова теорема, до откривање на нејзиното по-теколо или на нејзиното значење (за науката, практиката или за одредена област). На пример:

а) Како да се провери дали даден четириаголник е правоаголник? (Дефиницијата за тоа е неудобна; дали може да се искористи некое својства на дијагоналите? ...)

б) Во врска со основните својства на равенките („еквивалентност на равенки"), да се укаже на проблемот: како да се решава дадена равенка, а да не се изгуби ниедно нејзино решение и да не се добијат излишни?
$(17(X+2)\cdot(X-4)= 17(X+2)$; $12X:3X=4$; $\sqrt{X-1}=3-X$; итн.).

VI. МЕТОДИ НА РАСУДУВАЊЕ И ИЗВЕДУВАЊЕ ЗАКЛУЧОЦИ

1. ВИДОВИ РАСУДУВАЊА И ЗАКЛУЧУВАЊА

1.1. РАСУДУВАЊЕ И ИЗВЕДУВАЊЕ ЗАКЛУЧОК

Во IV.1 рековме дека расудувањето е една од главните форми на мислењето. Тоа е мисловен процес, насочен кон потврдување или побивање на некое тврдење или пак кон добивање нов извод од едно или неколку тврдења.

Процесот на расудување има сложена структура: прво, се утврдува целта на расудувањето, потоа се анализира ситуацијата со издвојување на суштинските моменти од несуштинските, се поставува општ план на расудувањето и, на крајот, се остварува зацртаниот план. Расудувањето се реализира, обично, со изведување заклучок, најчесто во форма на некакво тврдење.

Меѓу расудувањето и изведувањето заклучок нема реска граница. Изведувањето заклучок, како што споменавме порано (во II.5) е мисловна операција со која, од едно или од повеќе тврдења што се наоѓаат во заемна смисловна врска, како резултат на расудување, се добива ново тврдење што содржи ново знаење во однос на првобитните тврдења.

Пример 1. Дијагоналата го дели четириаголникот на два триаголника (прво тврдење). Збирот на внатрешните агли на триаголникот е 180° (второ тврдење). Заклучок: „Збирот на внатрешните агли на четириаголникот е $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$" (ново тврдење, коешто дава ново знаење).

Тврдењата од кои се гради новото тврдење со помош на расудувања, се викаат **претпоставки** (или **премиси**), а новото тврдење што се добива со споредување или комбинирање на претпоставките се вика **заклучок** (или **извод**).

Така, во примерот 1, првото и второто тврдење се претпоставки, а новото тврдење („Збирот на внатрешните агли на четириаголникот е 360°") е заклучок на расудувањето.

Да забележиме дека *смисловната врска меѓу тврдењата што се комбинираат е суштинска за изведување заклучок.* Така, на пример, од тврдењата: „Накрсните агли се еднакви" и „1<2" не може да се изведе никаков заклучок што ќе даде ново знаење. Општо, за процесот на расудувањето е битно меѓу тврдењата да постои определена логичка врска, т.е. тие да се согласуваат едно со друго врз основа на соодветни логички правила, за да се добие валиден заклучок.

Заклучокот од едно расудување ќе биде **точен** (или **вистинит**) ако се исполнети следниве два услова:

(i) претпоставките се вистинити,

(ii) законите на мислењето правилно се применуваат при логичкото оперирање со претпоставките, т.е. при нивното споредување и сврзување.

Расудување при кое е запазен условот (*ii*) се вика **правилно расудување**. Нарушувањето макар на едниот од тие услови при расудувањето може да доведе до лажен заклучок. (Се разбира, со лажни претпоставки може да се добие и вистинит заклучок; на пример: $(4 < 3) \wedge (3 < 5) \Rightarrow (4 < 5)$.)

1.2. ПОСРЕДНО И НЕПОСРЕДНО ЗАКЛУЧУВАЊЕ

Ако еден заклучок се изведува врз основа на две или повеќе претпоставки (како во примерот 1), тогаш заклучувањето се нарекува **посредно**. Ако пак заклучокот се изведува врз основа само на една претпоставка, тогаш заклучувањето се вика **непосредно**.

Ќе разгледаме неколку примери на непосредно заклучување.

Пример 2. Тврдењето: „Секој триаголник е конвексна фигура" е точно; спротивното тврдење: „Не постои триаголник што е конвексна фигура" е лажно.

Во овој пример, од вистинитоста на едно општопозитивно тврдење изведовме заклучок за невистинитоста на спротивното, општонегативно мислење.

Пример 3. „Секој непарен број е прост број" е лажно тврдење, додека тврдењето „Некои непарни броеви не се прости" е точно.

Значи, од лажноста на општопотврдно тврдење е направен заклучок за точноста на делумно одречно тврдење.

Такви непосредни заклучоци може да се изведуваат:

- од лажноста на општонегативно, за точноста на делумно позитивно,
- од лажноста на делумно потврдно, за точноста на делумно одречно тврдење; и др.

Еве уште два примера на непосредно заклучување (наречени **заклучувања на потчинетост**).

Пример 4. Тврдењето p: „Функцијата $y=x^2$ е прекината" е лажно; следствено, и тврдењето q: „Сите полиномни функции се прекинати" е лажно. (Од лажноста на делумно потврдното тврдење p заклучуваме за лажноста на општопотврдното тврдење q; притоа, p е потчинето на q.)

Пример 5. Тврдењето p: „Во секој паралелограм дијагоналите заемно се преполовуваат" е точно, па и тврдењето q: „Во правоаголникот дијагоналите заемно се преполовуваат" е точно. (Од точноста на општо потврдното тврдење p, заклучуваме за потчинетото, делумно потврдно тврдење q.)

Индуктивните, дедуктивните и други важни видови расудувања и заклучувања ќе ги разгледаме посебно.

1.2. НАСТАВНИ СОФИЗМИ

Расудување при кое е нарушен условот (ii) од разделот 1.1 и поради тоа е добиен заклучок што не ѝ одговара на вистината, е неправилно расудување. Ако е направено неправилно расудување намерно, со цел да се „докаже" навистина лажно тврдење, тогаш таквото расудување се вика **софизам**. Софизмот се базира на двосмисленоста на некои поими, како и на докажувањето со некомплетни претпоставки. Таквото расудување е замаскирано, повеќе или помалку вешто, со формална правилност.

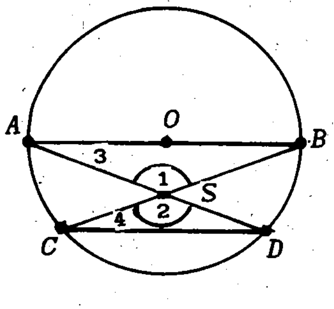
Неправилни расудувања понекогаш се применуваат намерно и во наставата со цел да се провери правилноста и нивото на усвојувањето на знаењата. Таквите расудувања се наречени **наставни софизми**. Еве еден едноставен пример.

Пример 6. Равенствата $9+4 = 4+9$, $9-12+4 = 4-12+9$ и $(3-2)^2 = (2-3)^2$ се очигледно точни. Од последното равенство извлекуваме квадратен корен и добиваме $3-2 = 2-3$, т.е. $1=-1$. Значи, позитивен број е еднаков со негативен број! (?!).

Пример 7. Да „докажеме" (т.е. да „лажосаме") дека

$$(\forall a \neq 0) \quad a = 2a.$$

Имаме: $a^2-a^2 = (a+a)(a-a)$, како и: $a^2-a^2 = a(a-a)$, од каде што $a(a-a) = (a+a)(a-a)$, па кратејќи од двете страни со $a-a$, добиваме $a=a+a$, т.е. $a=2a$. (!?).



Црт. 1

Пример 8. Да „докажеме"дека секоја тетива во една кружница е еднаква со дијаметарот. Нека е AB дијаметар, а CD - произволна тетива (црт. 1). Од цртежот гледаме дека

1) $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, како накрсни,

2) $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$, како перифериски агли над ист лак,

3) $\overline{AS} = \overline{SC}$, по претпоставка.

Според признакот ACA:

$$\triangle ABS \cong \triangle CDS.$$

Заклучок: $\overline{AB} = \overline{CD}$, како соодветни страни на складни триаголници.

Неправилноста во расудувањето може да биде:

а) **логичка** - грешка во содржината на мислата или во формата на врската меѓу тврдењата при расудувањето („тавтологија", „круг во доказот", нарушување на логичките закони);

б) **зборовна** - неточност во употребата на зборовите, мешање на различните значења од еден ист збор (омоними).

1.4. ВЕЖБИ

1. Наведи пример на посредно заклучување при кое заклучокот се изведува од: а) две претпоставки, б) три или повеќе претпоставки.
2. Установи од кој вид (општопотврдно и точно, и сл.) е тврдењето:

   а) Секој квадрат е ромб.

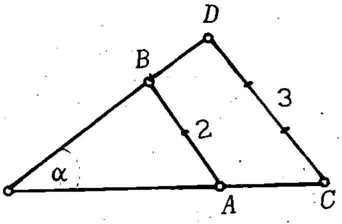
   б) Секоја ограничена низа е конвергентна.

   в) Постојат конвергентни низи што не се монотони.

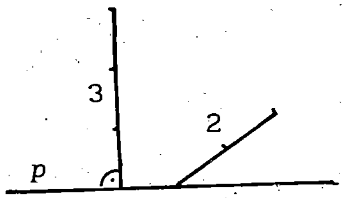
   г) Функцијата $y=e^x$ е ограничена во $\mathbb{R}$.

   Потоа, од секоја од нив, изведи некој непосреден заклучок.
3. Наведи пример на: а) лажно општопотврдно, б) лажно општонегативно, в) точно делумно позитивно тврдење и изведи соодветен непосреден заклучок.
4. „Докажи" (т.е. направи наставен софизам) дека кои било две отсечки се еднакви меѓу себе.

   Помош: Избери две отсечки AB и CD, на пример $\overline{AB}=2$ и $\overline{CD}=$ $=3$, како на црт. 2 и искористи го фактот дека „Наспроти еднакви агли во триаголникот лежат еднакви страни".



Црт. 2



Црт. 3

5. Направи наставен софизам користејќи го фактот дека „Нормалното растојание од точка до права е покусо од кое било „наведнато"." (В. и црт. 3).

6. Состави наставен софизам: „Сите природни броеви се еднакви меѓу себе".

Помош: „Докажи", прво, на пример, дека 2=0, „користејќи" го "резултатот" од примерот 6.

2. ЗАКЛУЧУВАЊЕ ПО АНАЛОГИЈА

2.1. СУШТИНА НА ЗАКЛУЧУВАЊЕТО ПО АНАЛОГИЈА

Со аналогијата како метод на научното сознавање се сретнавме (кратко) во II.5. Поради големата важност за наставата по математика, овде ќе се задржиме малку повеќе на заклучувањето по аналогија.

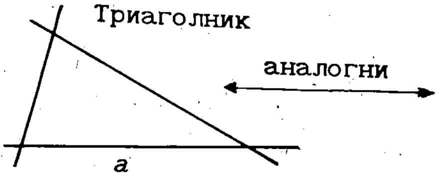
Изведувањето заклучок по аналогија претставува сложена мисловна операција. Расудувањето се одвива обично на следниот начин. Прво се установува некое „*согласување*" или „*сличност*" меѓу објектите од една и објектите од друга класа; потоа се согледува одредено својство на едната класа и, според порано утврденото согласие, се изведува заклучокот дека„*аналогно својство*" има и другата класа.

Специјално, заклучувањето по аналогија се прави и во случаи кога се установува „согласување" меѓу два објекта во некој однос, а потоа се прави заклучок за "соодветноста" на тие објекти во друг однос.

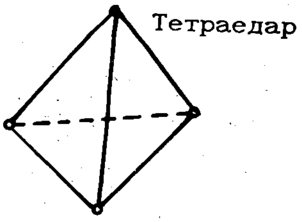
Пример 1. Да установиме аналогија меѓу класата триаголници и класата тетраедри, а потоа да изведеме заклучок „по аналогија".

Прво, можеме да прифатиме (без дискусија) дека: „она што правата претставува за 2-димензионалниот простор, тоа рамнината претставува за 3-димензионалниот простор" (според аксиомите на планиметријата и стереометријата). Во таа смисла, „*рамнината е аналогна на правата*".

Потоа уочуваме дека секој триаголник е составен од 3 прави - најмалиот број прави (2+1) од кои може да се формира затворен и ограничен лик во рамнината, а секој тетраедар е заграден со 4 рамнини - тоа е најмалиот број рамнини (3+1) од кои може да се формира затворена и ограничена фигура во просторот (црт. 1 и црт. 2). Поради тоа, *тетраедарот го сметаме за аналогна фигура на триаголникот.*



Црт. 1



Црт. 2

Следниве својства на триаголникот се добро познати.

1^{o}. *Секој триаголник е конвексна фигура.*

2^{o}. Симетралите на страните на триаголникот се сечат во една точка O.

3^{o} Околу секој триаголник може да се опише кружница (чијшто центар е точката O од 2^{o}).

4^{o}. За плоштината P на триаголникот важи $P=\frac{1}{2}ah$, каде што a е должина на „основата", а h е должината на припадната висина.

5^{o}. Збирот на аглите во триаголникот изнесува 180^{o} (или π).

Заклучувајќи „по аналогија", ќе добиеме:

$1'$. *Секој тетраедар е конвексна фигура.*

$2'$. Симетралните рамнини на рабовите од тетраедарот (6 на број) се сечат во една точка O.

$3'$. Околу секој тетраедар може да се опише сфера (чијшто центар е во точката O од $2'$).

$4'$. За волуменот V на тетраедарот важи: $V = \frac{1}{2}B\cdot H$, каде што B е плоштината на „основата", а H е припадната висина.

$5'$. Збирот на сите 6 диедарски агли на тетраедарот изнесува 2π.

Дали се точни тврдењата $1'$-$5'$ добиени „по аналогија"? – Не сме сигурни во тоа; можеме да очекуваме само дека се „веројатно точни". (Патем: $1'$, $2'$ и $3'$ се точни, а $4'$ и $5'$ – не се; дури, не постои „разумен аналог" за 5^{o}, зашто збирот на сите 6 диедарски агли на тетраедарот може да добие која било вредност меѓу 2π и 3π.)

За изведување *заклучок по аналогија*, карактеристична е следнава *шема:*

A ги има својствата: $P_1, P_2, \ldots, P_k; Q$

B ги има својствата: $P_1, P_2, \ldots, P_k$

Заклучок: *Веројатно и B го има својството Q.*

Применета на примерот 1, шемата би изгледала вака:

A (триаг.)	P_1: Фиг. е огран. од	P_2: Фиг. има мин. број	*Q*
	(дим. +1) прави	страни	*A* е конв. фигура
B (тетра.)	(дим. +1) рамн.	ѕидови	*B* ?

Заклучок: Веројатно и тетраедарот е конвексна фигура.

Во случај својството *Q* да беше: „Збирот на внатрешните агли на триаголникот е 180^{o}", заклучокот ќе гласеше: „Веројатно збирот на диедарските агли на тетраедарот е 360°".

Аналогијата, значи, е „сличност од некаков вид", при што „сличните објекти се согласуваат меѓу себе во некој однос".

Суштинската разлика меѓу аналогијата и другите видови сличности се содржи во *намерата на размислувачот.* Ако тој има намера да го сведе на определени поими односот во кој објектите *A* се согласуваат со објектите *B*, тогаш тие објекти ги разгледува како *аналогни.* Ако, притоа, успее да дојде до *јасни врски и поими* меѓу *A* и *B*, тогаш тој успеал да *ја разјасни аналогијата.*

Воопшто, во случајот кога поимот аналогија достигнува ниво на логички или математички поими, велиме дека аналогијата е **разјаснета** или **силна**; во спротивен случај, за аналогијата велиме дека е **неразјаснета** или **слаба**.

Така, во примерот 1 се работи за разјаснета аналогија (меѓу тетраедарот и триаголникот, можеме да установиме дека се „убави и едноставни" множества точки. Ако е тоа целата „сличност" што сме ја уочиле меѓу нив, тогаш таа не е некоја аналогија; всушност, таа е слаба, неразјаснета аналогија. (Што е „убаво" и што е „едноставно"?)

Аналогијата често пати е нејасна. Одговорот на прашањето: „кое на што е аналогно?" често е нееднозначен. Меѓутоа, нејасноста на аналогијата не го намалува нејзиниот интерес и корисност, особено во наставата по математика. Секако, случаите при кои поимот аналогија е подигнат на ниво на логички или математички поими (т.е. разјаснетите аналогии) заслужуваат посебно внимание.

Карактеристично за аналогијата е тоа што, скоро во сите случаи, на непосредно испитување се подлага еден објект, а се изведува заклучок за друг објект, т.е. *се врши пренос на информацијата од еден на друг објект.*

Изведените заклучоци по аналогија секогаш се само *веројатно точни*, но тоа веројатно знаење, т.е. таа претпоставка носи во себе нешто ново. Самата аналогија не дава одговор на прашањето дали добиениот заклучок е точен или не - неговата правилност треба да се проверува со други средства. Аналогијата ја свршила својата улога со тоа што нè навела на помислата за нова претпоставка, со можност за ново откритие.

2.2. ПРИМЕРИ НА АНАЛОГИИ

Во примерот 1 видовме дека триаголникот (во рамнина) и тетраедарот (во простор) се аналогни фигури. Имено, две прави во рамнината не можат да формираат (ограничен) лик, а три - можат. Во просторот три рамнини не можат да формираат (ограничено) тело, а четири - можат. Тука, односот на триаголникот кон рамнината е ист како односот на тетраедарот кон просторот, зашто и триаголникот и тетраедарот се ограничени со минимален број прости ограничувачки елементи.

Пример 2 *(Аналогијата како пропорција).* Едно од значењата на грчкиот збор αναλογια, од кој произлегува терминот аналогија, е пропорција. И пропорцијата можеме да ја разгледуваме како аналогија.

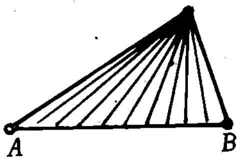
Навистина, системот од двата броја 6 и 8 е аналоген со системот од двата броја 15 и 20, зашто односите на соодветните членови се согласуваат:

$$6:8 = 15:20.$$

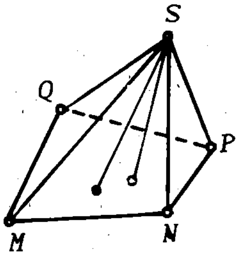
Пропорционалноста или усогласеноста на односите на соодветните делови, којашто ние интуитивно ја гледаме во геометриски сличните фигури, наведува на размислување за аналогија.

Пример 3 *(Аналогија меѓу триаголник и пирамида).* Триаголникот и пирамидата можеме да ги разгледуваме како аналогни фигури.

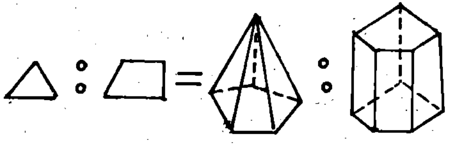
Имено, да земеме една отсечка, AB и еден многуаголник, $MNPQ$. Потоа, да избереме точка C што не лежи на правата AB и да ја сврземе C со секоја точка од отсечката AB - ќе го добиеме триаголникот ABC (црт. 3). Ако сите точки од многуаголникот $MNPQ$ ги сврземе со избрана точка S што не лежи на рамнината од дадениот многуаголник, ќе добиеме пирамида (црт. 4).



Црт. 3



Црт. 4



Црт. 5

Значи, триаголникот ABC и пирамидата $SMNPQ$ можеме да ги сметаме за аналогни според начинот на нивното настанување. (Друг ваков пример наведовме порано, во II.5.4.)

Пример 4 *(Аналогија меѓу рамнински ликови и тела во просторот).* Ако паднеме во искушение да го изразиме односот на соодветство меѓу некои (рамнински) ликови и некои (просторни) тела со помош на некој вид пропорција, и ако бидеме доволно настојчиви, можеме да дојдеме до црт. 5.

(Во црт. 5 е изменета вообичаената смисла на симболите „:" и „=" во истата насока, во која смислата на зборот αναλογια низ историјата на јазикот била изменета од „пропорција" до „аналогија".)

Пример 5. *(Аналогија комбинирана со обопштување или специјализација).* Да тргнеме од триаголник. Од една страна, со помош на обопштување можеме да се „подигнеме" до многуаголник, а со помош на специјализација можеме да се „спуштиме" кон рамностран триаголник. Од друга страна, со помош на аналогија, можеме да преминеме кон разни просторни фигури (тела): тетраедар, пирамида, призма, правилен полиедар.

Пример 6. *(Аналогија меѓу собирањето и множењето).* Собирањето и множењето во ($\mathbb{R}$) се потчинуваат на исти правила. Така,

$$a+b = b+a, \qquad a\cdot b = b\cdot a,$$

$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad (ab)c = a(bc).$$

И едната и другата операција допуштаат обратна операција:

$$a+x = b, \qquad ax = b \quad (a\neq 0).$$

Во таа смисла, одземањето е аналогно со делењето:

$$x = b-a, \qquad x = \frac{b}{a},$$

а бројот 0 е аналоген на бројот 1:

$$0+a = a, \qquad 1\cdot a = a.$$

Општо, два система објекти што им се потчинуваат на едни исти основни закони или аксиоми може да се разгледуваат како аналогни меѓу себе. Тој вид аналогија има наполно јасна смисла, т.е. е разјаснета аналогија.

Изнесените примери се поучни и за следното. *Аналогијата, особено онаа што не е сосема разјаснета, може да има повеќе значења.* Така, на пример, во врска со рамнинската и просторната геометрија, отпрво најдовме дека триаголникот во рамнина е аналоген на тетраедар во просторот, а потоа дека триаголникот е аналоген на пирамидата. Двете аналогии се разумни, секоја е на свое место и има своја вредност. Тоа значи дека меѓу рамнинската и просторната геометрија има повеќе аналогии, а не само една привилегирана аналогија.

Може да се каже и вака. Изнесените примери ја потцртуваат аналогијата меѓу рамнинската и просторната геометрија. Таа аналогија може да се посматра од многу различни гледишта и затоа *често е нееднозначна и не секогаш има јасни контури.* Но, таа е неисцрпен извор на нови идеи и нови откритија, па затоа со право влегува во групата *„големи аналогии".*

(Меѓу големите аналогии се вбројуваат: (1) Аналогијата меѓу планиметријата и стереометријата; (2) Аналогиите меѓу броевите и фигурите; (3) Аналогијата меѓу конечното и бесконечното (збирови, лимеси); (4) Аналогиите во астрономијата (движењето на Јупитеровите сателити и движењето на Месечината околу Земјата.)

Во процесот на наставата, аналогијата зазема видно место како најважен извор на асоцијации коишто овозможуваат *длабоко и трајно усвојување на знаењата.* Со таква цел, наставникот спроведува аналогија меѓу: десетичните дропки и природните броеви, алгебарските дропки и обичните, признаците за сличност и признаците за складност, својствата на геометриската и аритметичката прогресија, составувањето на квадратни равенки и линеарни равенки при решавањето на проблеми итн.

2.3. ОПАСНОСТИ НА АНАЛОГИЈАТА ВО НАСТАВАТА

Аналогијата има удел речиси во сите значајни откритија во математиката, а во некои - таа има лавовски дел. Нејзината улога не е помала ни во наставата по математика, честопати комбинирана со други научни и наставни методи. Но опасноста од нејзиното (неправилно) користење во наставата е мошне голема. Имено, во многу случаи, *учениците ги применуваат како сигурно точни заклучоците по аналогија, заборавајќи дека тие се само „веројатно точни".* Тоа многу често доведува до грешки. Подолу ќе наведеме неколку примери на грешки од таква природа.

1) Точно е: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a} = \frac{a\cdot c}{b\cdot a} = \frac{c}{b}$ (кратење)

По аналогија: $\frac{a}{b}+\frac{c}{a} = \frac{a+c}{b+a} = \frac{c}{b}$ (?!?).

2) Точно е: $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

По аналогија: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (?!?).

3) Точно е: $\log(ab) = \log a + \log b$.

По аналогија: $\log(a+b) = \log a + \log b$ (?!?).

Во стилот на горните примери, учениците ги користат и следниве „правила":

4) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. 5) $(a+b)^n = a^n + b^n$.

6) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha + \cos\beta$; специјално: $\cos 2\alpha = 2\cos\alpha$.

7) $(u+v)' = u' + v'$. По аналогија: $(uv)' = u'\cdot v'$.

┌** Да забележиме дека горните „правила" се специјални случаи од т.н. „*Универзално дистрибутивен ученички закон*" (УДУЗ):

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

каде што f е непрекината реална функција. Со негова помош може да се „докажат" голем број интересни невообичаени „теореми", како на пример:

1°. 1 = 2. („Доказ". Со помош на 6), при $\alpha=\beta=0$.)

2°. $\sqrt{2}$ е рационален број. („Доказ". Од 1°, со коренување.)

3°. $(\forall n\in\mathbb{N})\ n=0$.

4°. $\cos x = \sin x$,

и многу други „бисери".

Меѓутоа, точна е следнава:

Теорема. Единствената непрекината функција што го задоволува „УДУЗ"

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

е функцијата $f(x) = ax$, каде што a = конст. **

Сепак, и покрај големиот број грешки што ги прават учениците како резултат на заклучувањето по аналогија, *значењето на аналогијата* за наставата по математика, особено за развитокот на математичкото и, специјално, за творечкото мислење кај учениците, е неизмерно. Наставник што го применува правилно и умешно методот на откривање по аналогија, со вешти „насочувачки" прашања, може да постигне неспоредливо подобри резултати во наставата отколку друг наставник што не му посветува доволно внимание на тоа.

И, запомнете: *со аналогии ќе се среќавате на секој чекор во наставата.* Притоа, не потценувајте ги нејасните, слаби аналогии, туку обидете се да ги разјасните. Ако успеете во тоа, бидете сигурни дека тие ќе дадат добри резултати.

2.4. ВЕЖБИ

1. Разгледај го тетраедарот како тело, аналогно на триаголникот. Наброј ги поимите од стереометрија што се аналогни на следниве поими од планиметријата:

а) паралелограм; б) правоаголник; в) квадрат; г) агол; д)симетрала на агол.

Формулирај теорема во стереометријата, аналогна на следнава теорема во планиметријата: „Симетралите на трите агли на триаголникот се сечат во една точка, којашто е центар на кружница, впишана во триаголникот".

2. Збирот на два рамнински агли кај трирабно коше е поголем од третиот рамнински агол. Докажи!

Помош. Постои ли попроста аналогна теорема?

3. Разгледај ја пирамидата како тело, аналогно на триаголникот. Наброј ги телата, аналогни на следниве рамнински ликови: паралелограм, правоаголник, круг. Формулирај теорема во стереометријата, аналогна на теоремата: „Плоштината на еден круг е еднаква со плоштината на триаголник, чијашто висина е еднаква со радиусот".

4. Смисли теорема во стереометријата, аналогна на следнава планиметриска теорема: „Висината на рамнокракиот триаголник минува

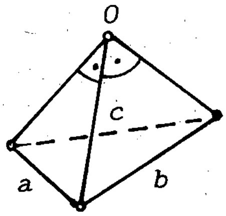
низ средината на основата".

Какво геометриско тело ќе разгледаш како аналогно на рамнокракиот триаголник?

5. Смисли теорема во планиметријата, аналогна на Питагоровата теорема.

Помош. Дали може, наместо квадрати (=правилни четириаголници), да се земат: а) други правилни многуаголници, б) полукругови, в) слични фигури?

6. Формулирај стереометриски аналог на Питагоровата теорема.



Црт. 6

Помош. Разгледај тетраедар со „прав просторен агол" (=правоаголно тристрано коше) при темето O и означи ги со A, B, C плоштините на ѕидовите што се соединуваат во O, а со S - плоштината на ѕидот спроти темето O (црт. 6). Дали е $S^3=A^3+B^3+C^3$? Дали $S^2=A^2+B^2+C^2$? Или нешто трето?

7. Најди ја должината d на дијагоналата при квадар со рабови a, b, c. (Тоа ќе биде друг стереометриски аналог на Питагоровата теорема.)

8. (Трет стереометриски аналог на Питагоровата теорема.) Нека p, q, r се должините на дијагоналите на три ѕида од квадар што се срекаваат во едно теме. Најди ја должината d на дијагоналата од квадарот.

9. Најди стереометриски аналог на Хероновата формула.

Помош. Разгледај тетраедар со правоаголно тристрано коше при врвот O (црт. 6, зад. 6) и изрази го неговиот волумен V со помош на должините a, b, c на рабовите што минуваат низ O. Воведи: $S^2 = (a^2+b^2+c^2)/2$.

10. Наведи примери за откривање својства по аналогија за:
а) неравенства, б) конгруенции,
користејќи ги својствата на равенство.

Кои од тие аналогии доведуваат до точни, а кои до неточни тврдења?

11. Во која смисла собирањето во $\mathbb{R}$ е аналогно со множењето во $\mathbb{R}^+$?

12. Со помош на УДУЗ („Универзалниот дистрибутивен ученички закон") и неговите последици, „докажи" дека:

а) $(\forall x)(\forall y)\ x+y = xy$; б) $(\forall x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))\ \mathrm{tg}x = 1$.

Наведи и други вакви „последици" од УДУЗ.

3. ИНДУКЦИЈА - ПОТПОЛНА И НЕПОТПОЛНА

3.1. ЗАКЛУЧУВАЊЕ ПО ИНДУКЦИЈА

Во II.5.3 се запознавме накусо со суштината на индукцијата како метод на научното сознавање. Индукцијата има иста, извонредна важност за наставата по математика како што има за развојот на математиката општо. Затоа овде ќе ѝ посветиме дополнително внимание.

Терминот *индукција* (лат. inductio: воведување, наведување, побудување) има три основни значења: тоа е метод на расудување, метод на научно сознавање и начин на излагање на материјалот во математичката литература и во процесот на наставата. Сите тие значења, на некој начин се блиски меѓу себе.

i) Како метод на расудување, индукцијата претставува сложена мисловна операција при која се тргнува од некои поединечни факти (установени најчесто со помош на набљудување или обид) и, од две или повеќе посебни тврдења, се доаѓа до ново, поопшто тврдење.

За илустрација на индуктивниот начин на расудување, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. Да видиме кои од следбениците на квадратите од природните броеви се деливи со 3, т.е. за кои $n\in\mathbb{N}$,

$$3|(n^2+1).$$

Прво што би помислиле е „да пробаме некои поединечни случаи", на пример, за $n = 1, 2, 3, 4$; за n^2+1 се добиваат броевите 2, 5, 10 и 17 соодветно. Гледаме дека ниеден од нив не е делив со 3. Тоа не наведува на помислата дека не се деливи со 3 и другите такви броеви. Наредниот случај, т.е. бројот 26 (што се добива за $n=5$ и не е делив со 3), ја поткрепува таа помисла.

Знаеме дека кој било природен број n може да се претстави во обликот

$n=3k$ или $n=3k+1$ или $n=3k+2$, $k\in\mathbb{N}_0$. Имаме:

T_1. Ако $n=3k$, тогаш $n^2+1=9k^2+1$ не е делив со 3. (Зошто?)

T_2. Ако $n=3k+1$, тогаш $n^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$ не е делив со 3. (Зошто?)

T_3, Ако $n=3k+2$, тогаш $n^2+1=3(3k^2+4k+1)+2$ не е делив со 3.

Од посебните тврдења T_1, T_2, T_3, како заклучок, можеме да го добиеме следново општо тврдење:

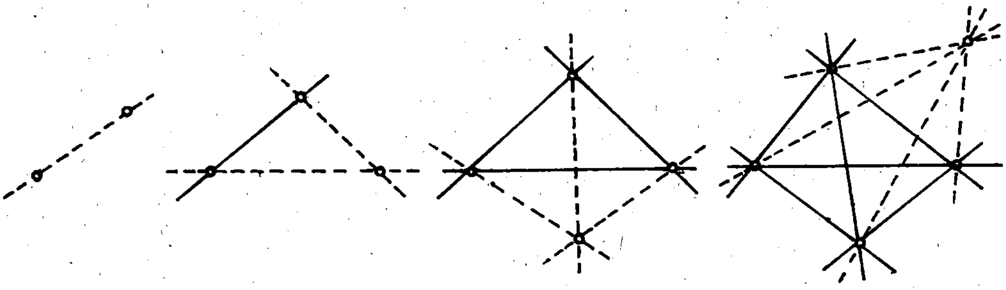
T_4. Ниеден број што е следбеник на квадрат од природен број (т.е. ниеден број од обликот $n^2+1, n\in\mathbb{N}$) не е делив со 3.

ii) Како научен метод, т.е. како метод на откривање, индукцијата е многу блиска со погоре опишаниот метод на расудување и е определена со намерата на размислувачот да изучи одредени својства на некое множество објекти (односно некоја појава). Таа намера се спроведува на следниов начин: се избираат одделни објекти (односно одделни состојби), се изучуваат во насока на саканите својства, се установуваат (или се негираат) тие својства за избраните објекти со евентуално дополнително поткрепување и, на крајот, се изведува заклучок што ќе се однесува за сите објекти на изучуваното множество (односно за тие ситуации од кои зависи дадената појава).

Така, на пример, откривањето на фактот (прво: доаѓањето до хипотеза) во II.2 дека збирот на аглите во триаголникот е 180° има индуктивен карактер. Да го илустрираме карактерот на индукцијата со уште еден пример.

Пример 2. Со колку прави може да се соединат, пар по пар, n точки во рамнината од кои никои три не се колинеарни?

Решение. Почнуваме со разгледување на поединечни случаи. Од условите на задачата е јасно дека $n\geq 2$. За $n=2$, може да се повлече само една права (црт. 1). Кон првите две точки додаваме трета и ја соединуваме со претходно дадените; добиваме 1+2=3 прави. Кон дадените три, додаваме четврта точка и ја сврзуваме со нив; добиваме: 1+2+3 прави; итн.



Црт. 1

Забележуваме одредена законитост и можеме да искажеме „досетка" дека: бројот на правите што сврзуваат n точки е (веројатно!) еднаков со збирот

$$S_n = 1+2+3+\ldots+(n-1).$$

Користејќи ја формулата за збирот на членовите на аритметичка прогресија, добиваме

$$S_n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

iii) Индукцијата како начин на излагање на материјалот во математичката литература и во процесот на наставата се карактеризира со премин од поединечно кон општо, од познато кон непознато, од просто кон сложено, т.е. во себе ги содржи повеќето барања од дидактичкиот принцип на научност.

На пример, при изучувањето на собирањето и множењето, учениците го осознаваат комутативниот закон индуктивно, преку конкретни примери: $3+4=4+3$, $2\cdot5=5\cdot2$ итн. Тргнувајќи од примери, како: $3+5=8$, $3+7=10$, $5+9=14$ и забележувајќи дека резултатот во сите случаи е парен број, ученикот може да го изведе поопштиот заклучок: „збирот од два непарни броја е парен број".

Притоа е неопходно често да им се напомнува на учениците дека индуктивно добиениот заклучок е само веројатно точен; за да бидеме сигурни во неговата исправност, тој треба да се докаже.

Воопшто, индуктивниот заклучок се темели обично на *нецелосна проверка*, а не на логичка известност. Поради тоа, заклучокот по индукција се прифаќа само како **веројатно точен** (освен во случаите на т.н. потполна индукција што ќе ја разгледаме во наредниот раздел).

3.2. ПОТПОЛНА И НЕПОТПОЛНА ИНДУКЦИЈА

Вообичаената шема за изведување заклучок по индукција е следнава.

Нека $M = \{a_i \mid i\in I\}$ е множество, а P е својство за елементите од M. (Означуваме: $P(x)$, ако елементот x го има својството P, а $\overline{P}(x)$ во спротивниот случај.) Да речеме, установено е дека својството P е вистинито за k-те случаи a_1, $a_2,\ldots,a_k\in M$. Тогаш, индуктивен заклучок се изведува според следнава **карактеристична индуктивна шема**:

$$\frac{P(a_1),\ P(a_2),\ \ldots,\ P(a_k)}{\text{Заклучок: } \textit{Веројатно } P(a) \textit{ за секој } a\in M.} \qquad (1)$$

Ако M е конечно множество со k елементи, т.е. $M=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, тогаш исказната формула:

$$(\forall x\in M)P(x) \Leftrightarrow P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_k) \qquad (2)$$

е тавтологија, па шемата:

$$\frac{P(a_1),\ P(a_2),\ldots,\ P(a_k)}{\text{Заклучок: } (\forall x\in M)\ P(x)} \qquad (3)$$

е правило за заклучување што се вика **потполна индукција**; добиениот заклучок е *сигурно точно*, т.е. *веродостојно тврдење*.

Ако пак $|M|>k$, при што M може да биде и бесконечно, т.е. разгледаните k случаи не ги исцрпуваат сите можни случаи, тогаш заклучокот според шемата (1) не е сигурно точен, туку е само веројатно вистинит. Во тој случај, изведувањето заклучок според шемата (1) се вика **непотполна индукција** или само **индукција**.

Да разгледаме неколку примери за илустрација.

Пример 3. Да испитаме колку е остатокот од делењето на бројот 4^n+15n, $n\in\mathbb{N}$, со 9.

За $n=1$ го добиваме бројот $4^1+15\cdot1=19$, којшто поделен со 9 дава остаток 1; за $n=2$ односно за $n=3$, го добиваме бројот 46 односно 109 – и тој по делењето со 9 дава остаток 1. Поради тоа, природно е да помислиме дека и за другите природни броеви n, бројот 4^n+15n поделен со 9 дава остаток 1.

Значи, ако со $P(x)$ е означено својството: 4^x+15x поделен со 9 дава остаток 1, тогаш се точни тврдењата: $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$. Според шемата (1), ќе имаме:

$$\frac{P(1),\ P(2),\ P(3)}{\text{Заклучок: } \textit{Веројатно } P(n) \textit{ за секој } n\in\mathbb{N}.}$$

Секој дополнителен случај за кој тврдењето е точно значи поткрепување на општото тврдење и зголемување на веројатноста за неговата точност. Така, за $n=4$ во примерот 3 имаме:

$$4^4+15\cdot4 = 256+60 = 316 = 9\cdot35+1,$$

т.е. $P(4)$ е точно.

Во таа смисла, при индуктивната постапка го прифаќаме следниов **принцип:**

Претпоставеното општо тврдење станува поверојатно вистинито, ако тоа се потврдува за нов, посебен случај.

Врз основа на овој принцип, се прифаќа и следнава **фундаментална индуктивна шема:**

$$\frac{\begin{array}{l}\textit{Од } A \textit{ следува } B\\ \quad B \textit{ е вистинито}\end{array}}{\text{Заклучок: } \textit{Поверојатно е дека } A \textit{ е точно.}} \qquad (4)$$

Така, за примерот 3, имаме:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Од } P(n) \text{ следува } P(4)\\ P(4)\ (\text{т.е. } 4^4+15\cdot4 = 9\cdot35+1) \text{ е точно}\end{array}}{\text{Заклучок: Поверојатно е дека } P(n) \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.}$$

Пример 4 *(за потполна индукција).* Ако n е парен природен број од втората или од третата десетка, тогаш тој е збир од два прости броја. Тоа е општо тврдење; дали е точно?

Ги имаме следниве поединечни случаи:

$12 = 5+7$, $14 = 7+7$, $16 = 3+13$, $18 = 5+13$, $20 = 3+17$,

$22 = 3+19$, $24 = 5+19$, $26 = 3+23$, $28 = 5+23$, $30 = 7+23$.

(Некои од нив имаат и по две претставувања: 18 = 7+11 и др.)

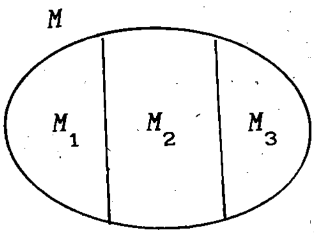
Тука, множеството $M=\{12,14,\dots,30\}$ е конечно и е направена проверка на сите случаи, при што е установено дека за сите нив тврдењето е вистинито.

Потполната индукција може да се примени и во некои случаи кога множеството M е бесконечно, ако е можно M да се разбие на конечен број подмножества од независни случаи, а за секое од нив може да се утврди точноста на разгледуваното својство за елементите од M.

Пример 5 *(за потполна индукција).* За кои $n\in\mathbb{N}$ бројот n^3-n е делив со 3?

Множеството $M=\mathbb{N}$ да го разбиеме на три класи:

$M_1=\{3k+1\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$, $M_2=\{3k+2\,|\,k\in\mathbb{N}_0\}$, $M_3=\{3k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$.



Јасно е дека M е дисјунктна унија од M_1, M_2, M_3, а и дека:

$n\in M_1 \Rightarrow n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=3k(9k^2+9k+2)$,

$n\in M_2 \Rightarrow n=3k+2 \Rightarrow n^3-n = 3(27k^3+54k^2+15k+6)$,

$n\in M_3 \Rightarrow n=3k \Rightarrow n^3-n = 3k(9k^2-1)$.

Од тоа е јасно дека n^3-n е делив со 3, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Така, ако $P(n)$ означува $3\,|\,n^3-n$, тогаш:

$P(3k),P(3k+1),P(3k+2)$ се точни

Заклучок: $(\forall n\in\mathbb{N})$ $P(n)$ е точно.

(Да забележиме дека до истиот заклучок ќе дојдевме и со разложување: $n^3-n = (n-1)n(n+1)$; еден од трите последователни броеви $n-1$, n, $n+1$ е делив со 3.)

3.3 ВЕЖБИ

1. Изразот

а) n^2-n+41; б) $2n^2+29$ (Ојлер); в) $2^{2^n}+1$ (Ферма) за $n=1,2,3$ станува прост број. Дали е тоа така и за другите природни броеви n?

Забел. в) За $n=5$, Ојлер докажал дека $2^{32}+1$ не е прост: $641\,|\,2^{32}+1$.

2. Секој број од обликот $8n+3$ $(n\in\mathbb{N})$ може да се претстави како збир од квадрат на природен број x и удвоен прост број p (Ојлерова хипотеза), т.е.

$$8n+3 = x^2+2p.$$

На пример: $8+3=11=1^2+2\cdot5$, $8\cdot2+3=19=3^2+2\cdot5$ итн. Претстави го заклучокот на Ојлеровата хипотеза со помош на карактеристичната шема (1), а потоа и со фундаменталната шема (4).

3. Нека се означени со a, b, c должините на страните на триаголник, со $2p=a+b+c$ – неговиот периметар, а со S – неговата плоштина. Потврди ја Хероновата формула:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

на колку што можеш повеќе начини („специјални случаи").

Помош. На пример: $a = b = c$ и др.

4. Четириаголник е впишан во круг. Нека се означени со a, b, c, d должините на неговите страни, со $2p = a+b+c+d$ неговиот периметар, а со S неговата плоштина.

По аналогија со Хероновата формула се тврди дека

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Провери го тоа тврдење на толку начини, колку што ќе изнајдеш. Дали имаш забелешки (за коректноста на „димензионалноста" или сл.)? (в. и 4, VIII.44.)

5. Испитај го односот помеѓу 2^n и n^3, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. За $n = 2,3,4$ важи: $2^n<n^3$. Според шемата (1), можеме да заклучиме: Веројатно $2^n<n^3$ за секој $n\geq 2$. Колку е тоа блиску до веродостојноста?

6. Со помош на индукција, најди формула за збирот S_n од првите n членови од: а) аритметичка, б) геометриска прогресија.

7. Со помош на потполна индукција докажи дека:

а) $4|n^5-n^3$; б) $5|n^5-n$.

8. При изучувањето на односот меѓу периферискиот и централниот агол над ист лак се користи методот на потполна индукција. Каде и на кој начин?

9. Правоаголен триаголник при кој должините на страните се цели броеви се вика **целоброен** правоаголен триаголник. (Таков е, на пример, триаголникот со страни 3, 4, 5, зашто $3^2+4^2=5^2$.)

Дали постојат целобројни правоаголни триаголници чијашто хипотенуза е:

а) 6; б) 12; в) 13; г) 17?

Помош. $x^2=36-y^2$; y^2: 1,4,9,16,25.

10.* Кога, при кои услови, непарниот прост број p претставува хипотенуза на целоброен правоаголен триаголник и кога не претставува? Искажи хипотеза, по разгледувањето на „доволен број" примери.

Одг. Простиот број од обликот $4n+1$ е хипотенуза точно на еден целоброен правоаголен триаголник, а простиот број од обликот $4n+3$ – на ниеден.

4. ЗАКЛУЧУВАЊА СО СИГУРНА ТОЧНОСТ. ДЕДУКЦИЈА

4.1. ПРАВИЛА НА ЗАКЛУЧУВАЊЕ

Методите на расудување што доведуваат до веродостојни, т.е. до сигурно точни заклучоци се многу важни за математиката. За изведување на таквите заклучоци (од дадени точни претпоставки и други тврдења чијашто точност е претходно установена), како што рековме во 1.1, мора да се користат и логички средства за правилно оперирање со тие претпоставки и тврдења. Таквите средства се наречени правила за изведување заклучоци или, покусо, **правила на заклучување**.

Правилата на заклучување претставуваат, всушност, тавтологиски импликации од исказната логика (V.2). Тие шематски ги одразуваат чекорите при составување докази на математичките тврдења.

Ќе ги наведеме правилата на заклучување што им одговараат на најчесто сретнуваните тавтологиски импликации (некои од тие тавтологии се наведени во вежбата 3 од V.2.5).

1°. $A,\ A \Rightarrow B \models B$ – *правило на одделување*

2°. $A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$ – *правило на негација*

3°. $A \Rightarrow B \models (\neg B \Rightarrow \neg A)$ – *правило на контрапозиција*

4°. $A\Rightarrow B,\ B\Rightarrow C \models (A\Rightarrow C)$ – *правило на премин при импликации*

5°. $\neg A\Rightarrow B,\ \neg A\Rightarrow\neg B \models A$ – *правило на докажување од спротивното*

6°. $A\Rightarrow C, B\Rightarrow C \models B$ $(A\vee B\Rightarrow C)$ – *правило на претресување (или: анализа на) случаи*

7°. $\neg\neg A \models A$ – *правило на отстранување двојна негација*

За позгодно, правилата на заклучување се запишуваат во вид на шема од два дела, одвоени со хоризонтална црта; во делот над цртата се запишуваат претпоставките, а под неа – заклучокот.

Така, на пример, правилото 1°. $A,\ A \Rightarrow B \models B$ (од тавтологијата: $((p \Rightarrow q)\wedge p) \Rightarrow q$) се запишува на следниов начин:

1′. *Правило на одделување (модус поненс)*

$$\frac{\begin{array}{c}A \Rightarrow B\\ A\end{array}}{B} \quad \text{или:} \quad \frac{A \Rightarrow B,\ A}{B}.$$

Применето на конкретен пример, би изгледало вака:

Пример 1. 1) Ако една низа е ограничена, тогаш таа има (барем една) точка на натрупување.

2) Низата (a_n) е ограничена.

Заклучок: Низата (a_n) има (барем една) точка на натрупување

Шемата на правилото 2°: $A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$ (од тавтологијата: $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q) \Rightarrow \neg p)$) ќе го добие видот:

$2'$. *Правило на негација (модус толенс)*

$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A} \quad \text{или} \quad \frac{A \Rightarrow B, \neg B}{\neg A}.$$

Пример 2. 1) Ако еден број е делив со 6, тогаш тој е делив со 3.

2) Бројот 736 не е делив со 3.

Заклучок: Бројот 736 не е делив со 6.

Шемите на другите правила 3^0–7^0 ќе го имаат видот:

$3'$. *Правило на контрапозиција:* $\dfrac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \neg A}$.

$4'$. *Правило на хипотетичен силогизам:* $\dfrac{A \Rightarrow B, \;\; B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$.

$5'$. *Правило за докажување од спротивното:* $\dfrac{\neg A \Rightarrow B, \;\; \neg A \Rightarrow \neg B}{A}$.

$6'$. *Правило на претресување случаи:* $\dfrac{A \Rightarrow C, \;\; B \Rightarrow C}{A \wedge B \Rightarrow C}$.

$7'$. *Правило на двојна негација:* $\dfrac{\neg\neg A}{A}$.

┌** Во врска со називот на правилото $4'$ да забележиме дека **силогизам** се наречува посредно дедуктивно расудување, во кое заклучокот логички се изведува од две тврдења (претпоставки). Силогизмот се вика **категоричен**, ако претпоставките се категорични тврдења, а **условен** (или хипотетичен), ако барем една од претпоставките е условно тврдење. Според тоа, силогизми се и други правила на заклучување; на пример, правилото на одделување $1'$ е условно-категоричен силогизам. **┘

При изведувањето заклучоци, секако, се користат и многу други закони на логиката, а особено следниве три:

8°. *Закон за идентичност:* $A \equiv A$, што значи дека: секоја мисла што се повторува во едно расудување мора да задржи определена, стабилна (т.е. иста) содржина.

9°. *Закон за исклучување на трето:* $A \vee \neg A$, што значи: од два противречни исказа едниот мора да е точен.

10°. *Закон за противречност:* $\neg(A \wedge \neg A)$, што значи дека: не може да бидат вистинити истовремено две спротивни една на друга мисли за еден ист објект, разгледувани истовремено и во ист однос (но, лажни истовремено – може да бидат).

Да забележиме дека шемата:

$$1''.\ \frac{A \Rightarrow B, B}{A},\ \text{односно}\ \frac{A \Rightarrow B,\ \neg A}{\neg B},$$

којашто „личи" на модус поненс, односно на модус толенс, *не е правило на заклучување.* (Зошто?) Според тоа, заклучувањето што е направено според таква шема не е правилно.

Правилата за извод 1° - 7° се запишани со јазикот на алгебрата на искази. Се применуваат и правила на извод што се искажуваат *со јазикот од теоријата на множествата или на предикатите.* На пример:

11°. $\dfrac{A \subseteq B,\ B \cap C = \emptyset}{A \cap C = \emptyset}$ или:

Сите *A* се *B*.
Ниеден *B* не е *C*.
∴ Ниеден *A* не е *C*.

12°. $\dfrac{A \cap \bar{B} \neq \emptyset,\ C \subseteq B}{A \cap \bar{C} \neq \emptyset}$ или

Некои *A* не се *B*.
Сите *C* се *B*.
∴ Некои *A* не се *C*.

4.2. ДЕДУКЦИЈА

Методите на расудување што доведуваат до веродостојни заклучоци се: потполна индукција (којашто има општонаучен карактер), математичка индукција (којашто претставува специјален математички метод на докажување математички тврдења) и дедуктивното заклучување (коешто е основен метод за заклучување со сигурна точност, во математиката и во науката воопшто).

Методот на потполна индукција го разгледавме во претходниот параграф, математичката индукција ќе ја разгледаме во на редната глава, а тука ќе се задржиме на дедуктивните заклучувања.

Терминот **дедукција** (лат. *deductio: одведување, изведување*) има три основни значења: тоа е метод на расудување, метод на научно сознавање и начин на излагање на материјалот во математичката литература и во наставата.

i) Како метод на расудување, дедукцијата претставува мисловна постапка со која, од едно или повеќе тврдења како претпоставки, се изведува некое ново тврдење кое од тие претпоставки нужно следува според правилата на логичкото мислење.

Дедуктивните заклучувања се вршат од општо кон посебно или кон поединечно, од општо кон општо, но исто така од поединечно кон посебно. Тие се темелат на правилата за изведување заклучоци (што ги разгледавме во разделот 4.1); тоа значи дека има голем број варијанти на дедуктивни заклучувања. Да разгледаме неколку примери.

Пример 3 *(од општо се заклучува за поединечно):*

1) Секоj цел броj е рационален. (Општо тврдење)
2) Броjот -7 е цел. (Поединечно тврдење)

∴ Броjот -7 е рационален. (Ново поединечно тврдење)

Пример 4 *(од општо се заклучува пак за општо):*

1) Секоj рационален броj е периодичен десетичен броj.
2) Секоj ирационален броj е непериодичен десетичен броj.

∴ Ниеден рационален броj не е истовремено ирационален.

(Спореди со 11° од разделот 4.1.)

Пример 5 *(од поединечно се заклучува за посебно):*

1) Броjот $\sqrt{2}$ е алгебарски.
2) Броjот $\sqrt{2}$ е ирационален.

∴ Некои ирационални броеви се алгебарски.

ii) Како метод на научно сознавање, дедукциjата е многу блиска со погоре опишаниот метод на дедуктивно заклучување. Имено, за добивање на ново знаење за некоj об]ект или за група истовидни објекти, со дедукциjата се бара, прво, наjблискиот род во коj влегуваат испитуваните објекти и, потоа, врз тие објекти се применува некоj закон што важи за целиот род. Друга вариjанта на дедукциjата како метод на научно трагање е преминот од знаење на поопшти ставови кон знаење на помалку општи ставови.

iii) Како начин на излагањето на материjалот во книга, учебник или на наставен час, дедукциjата се одликува со тргнување од општи ставови, закони или правила и одење кон помалку општи ставови. За апстрактно-дедуктивниот метод во наставата како начин на воведување математички поими и за изучување математички тврдења, зборувавме порано (Гл. IV.5 и V.6).

Дедукциjата има формален карактер: во расудувањата и доказите, едни тврдења се изведуваат од други според определена врска меѓу нивната форма или градба, независно од конкретната содржина на тие тврдења. Имено, расудувања со сосем различна содржина, во разни области на науката и животот, може да имаат иста форма.

Пример 5. а) Простите броеви се природни. Природните броеви се рационални. Следствено, простите броеви се рационални.

б) Кокичето е билка. Билките се растениjа. Следствено, кокичето е растение.

в) Стружаните се луѓе. Луѓето се смртни. Следствено, стружаните се смртни.

Овие расудувања се различни по содржина, а имаат иста форма, коjашто можеме да jа запишеме во вид на следнава шема (на jазикот од множествата):

$$\frac{A\subseteq B,\ B\subseteq C}{A\subseteq C}.$$

(Точноста на заклучокот по оваа шема, кога претпоставките се вистинити, е гарантирана од транзитивноста на релацијата $\subseteq$, „е подмножество од".)

За математичката логика е карактеристична формализацијата на логичките операции и целосното *апстрахирање од конкретната содржина* на тврдењата. На пример:

Пример 6. Слоновите се риби. Рибите летаат. Следствено, слоновите летаат.

- очигледна бесмислица, но од гледиште на математичката логика заклучокот е правилно изведен. (Тоа што тој е бесмислен, „виновни" се вистинитосните вредности на претпоставките.)

4.3. СООДНОС МЕЃУ ИНДУКТИВНИТЕ И ДЕДУКТИВНИТЕ МЕТОДИ ВО НАСТАВАТА

Математиката е дедуктивна наука и сосема е природно што во неа доминираат дедуктивните методи. Во наставата по математика пак ситуацијата се менува: *индуктивните методи имаат предност.* Притоа, примената на индуктивните методи во основното образование е многу поголема отколку во средното. Причината за тоа се психофизичките можности на учениците од таа возраст: тие сè уште не се способни да ја сфатат формално-дедуктивната природа на математиката и да ја разберат потребата од доказ на математичките тврдења.

Улогата на дедукцијата во наставата треба да расте постепено, од одделение во одделение. Дедуктивните елементи се среќаваат уште во V одделение, а понагласено се јавуваат од VI до VIII одделение. Учеството на дедукцијата во наставата по математика во средното образование значително се зголемува, така што во II - III клас би можела да зазема приближно ист дел (околу 50%) како и индуктивните методи.

Индуктивните методи всушност ѝ одговараат на основната задача на индуктивното расудување: да се утврдат причинските врски меѓу објектите или појавите. (Тој процес на установување започнува најчесто со набљудување и експеримент, па затоа е наречен **метод на пребарувачка или експериментална индукција.**) Во наствата по математика, индуктивниот метод се применува: како метод за установување логички врски на поими и тврдења, како начин за мотивирање на математички дефиниции и како пристап за изучување на конкретна наставна тема.

Дедукцијата има исто толку важна улога во наставата колку што има и во науката математика: скоро сите теореми, формули и идентитети се изведуваат и се докажуваат со дедуктивни методи.

Дедуктивниот и индуктивниот метод, и во науката и во наставата, секогаш *заемно се дополнуваат* на таков начин што во мисловниот процес и не може да се издвојат во „чист" вид. Францускиот математичар Адамар (J. S. Hadamard, 1865-1963), опишувајќи ја улогата на дедуктивните докази, вели дека: *„Целта на математичката строгост е да се утврди и да се озакони она што го освоила интуицијата".*

Соодносот меѓу дедуктивните и индуктивните методи во наставата зависи пред сѐ од возраста на учениците, од нивните психофизички можности, нивото на знаења и од други фактори. Дидактички правилното и оптимално користење на индуктивните и дедуктивните методи има голема важност за успехот во наставата по математика и за ефективниот развиток на математичкото мислење на учениците.

4.4. ВЕЖБИ

Да се установи дали е правилно наведеното расудување (во зад.1-4) и да се наведат логичките основи на одговорот.

1. Ако еден паралелограм е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални; во дадениот паралелограм дијагоналите се заемно нормални; следствено, дадениот паралелограм е ромб.
2. Ако еден број е делив со 8, тогаш тој е делив со 4. Бројот 54 не е делив со 8. Следствено, 54 не е делив со 4.
3. Ако еден триаголник е рамнокрак, тогаш два негови агли се еднакви меѓу себе. Дадениот триаголник не е рамнокрак; следствено, тој нема еднакви агли.
4. Некои алгебарски броеви не се рационални. Сите правилни дропки не се рационални броеви. Следствено, некои алгебарски броеви не се правилни дропки.
5. Наведи примери на дедуктивно заклучување:
   а) од општо за поединечно,
   б) од општо за општо,
   в) од поединечно за посебно.
6. а) Ако расудувањето е правилно, а барем една од претпоставките е лажна, што може да се каже за вистинитоста на заклучокот?

   б) Ако расудувањето е правилно, а заклучокот на силогизмот е невистинит, што може да се каже за вистинитоста на претпоставките?

   Да се наведат соодветни примери.
7. Во примерот 1, претпоставката 2) е поединечно тврдење. Какво тврдење е заклучокот?

   Општо, ако една од претпоставките на даден силогизам е делумно (т.е. поединечно или посебно) тврдење, какво тврдење ќе биде заклучокот?
8. Знаеме дека од $a|b$ и $b|c$ може да се заклучи дека $a|c$. Може ли да се добие некој заклучок од $a\nmid b$ и $b\nmid c$?

   Општо, дали може да се добие некој извод од две одречни претпоставки?

VII МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ МАТЕМАТИЧКИ ТВРДЕЊА

1. ДОКАЗИ НА ТЕОРЕМИ

1.1. Доказ (во општонаучна смисла) е расудување што има за цел да ја обоснови вистинитоста (или лажноста) на некое тврдење (наречено **теза** на доказот) со помош на други тврдења (наречени **аргументи** на доказот) што се признати за вистинити.

Доказ на математичко тврдење, во строга смисла, може да се даде само во рамките на *формален аксиоматски систем.* Една математичка теорија (на пример: аритметика, евклидска геометрија, теорија на групи и др.) се изградува во вид на **формален аксиоматски** (т.е. **дедуктивен**) **систем** на следниов начин:

(1) се издвојува мал број почетни поими, коишто се наведуваат експлицитно;

(2) сите други поими, освен почетните, се дефинираат со помош на почетните или на веќе дефинираните поими;

(3) сите тврдења јасно се формулираат со помош на почетните или на веќе дефинираните поими;

(4) се издвојува некој систем „појдовни тврдења", аксиоми;

(5) сите други тврдења, освен аксиомите, се изведуваат со логички средства, т.е. со дедуктивни расудувања, непосредно од аксиомите или пак посредно, користејќи веќе докажани тврдења.

Притоа, изразот „*изведување со логички средства*" има прецизна смисла: за основа на една таква, дедуктивна теорија, однапред се избира определен логички систем (на пример, логика на предикатите со равенство), којшто се дополнува со почетните поими и тврдења на предметната математичка теорија.

Во една таква теорија, **доказ на математичко тврдење** T претставува конечна низа $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ од реченици во таа теорија, такви што секоја од нив е или аксиома, или е дефиниција или тврдење чијашто вистинитост е претходно утврдена според правилата на заклучување, прифатени во основниот логички систем.

Ако постои барем една таква низа тврдења што завршува со тврдењето T, тогаш T е **теорема** или изведено тврдење во таа теорија. (Од таа гледна точка, секоја аксиома на таа теорија е теорема, чијшто доказ е низа што се состои само од еден член - самата аксиома.)

Слободно речено: **да се докаже** едно математичко тврдење значи да се установи точноста на тоа тврдење врз основа на други тврдења чијашто точност е претходно установена, а користејќи соодветни „логички средства на докажување" (т.е. правила на изведување заклучоци).

┌** Во смисла на горното објаснение на поимот *доказ* треба да ги иаме предвид следниве факти:

а) „школските докази" се далеку од строгите (во современа смисла) докази;

б) привидот за строгост е штетен таму каде што во суштина се мешаат интуицијата и логиката;

в) покорисно е отворено да им се каже на учениците дека некое тврдење се прифаќа без доказ, отколку да се даде неиздржан, а со тоа и нејасен доказ, прогласувајќи го за строг;

г) неопходно е да се изградува методиката на докажување теореми. **┘

Методите на докажување теореми, според начинот на водењето на доказот, ги делиме на: *директни* и *индиректни*, а според формата на заклучувањето, ги делиме на: *дедуктивни* и *индуктивни*.

Еден метод на докажување теорема

$$A \Rightarrow B$$

се вика **директен** (или **непосреден**) **метод**, ако заклучокот C се изведува со директно користење на претпоставките A.

Директниот метод може да биде:

- **со напредување** или **синтетичен метод**: метод при кој се тргнува од претпоставките и се стигнува до заклучокот,

- **со враќање** или **аналитичен метод**: метод при кој се тргнува од заклучокот и се стигнува до претпоставките.

Еден метод на докажување теорема $A \Rightarrow C$ се вика **индиректен** (**посреден**), ако нејзината вистинитост се установува преку докажување на вистинитоста на друго математичко тврдење што е еквивалентно со $A \Rightarrow C$. Вистинитоста на заклучокот C со индиректен метод најчесто се установува преку докажување на лажноста на тврдењето $\neg C$ (- што е спротивно на C). Поради тоа, овој метод се вика уште **доказ од спротивното** или **доказ со доведување до противречност**.

Индуктивните докази се добиваат како резултат од примената на методот на потполната индукција и математичката индукција. (Се разбира, ако за откривањето и проверувањето на точноста на некое тврдење се применети само заклучувањата со веројатна точност, на пример аналогија или непотполна индукција, тогаш таквото образложение не е доказ.)

Дедуктивните докази пак се спроведуваат само со примена на логички закони и веродостојни заклучоци (во соодветната теорија).

1.2. ВЕЖБИ

Избери неколку позабележителни теореми од некој учебник по математика за средното образование (на пример, за I клас), што се докажани.

1. За секоја од нив установи со каков метод е докажана.
2. Наведи (барем две) теореми што се докажани со:
   А. Директен метод:
      1) со напредување (синтетично);
      2) со враќање (аналитично).
   Б. Индиректни докази:
      1) од спротивното; 2) со доведување до противречност.
3. Дали некој од тие докази е индуктивен?

2. ДИРЕКТНИ МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

2.1. СИНТЕТИЧЕН МЕТОД; ЛОГИЧКА АНАЛИЗА

Директен метод на докажување математичко тврдење ја нарековме постапката при која заклучокот се изведува со непосредно користење на претпоставките. Притоа, ако се тргнува од претпоставките и се стигнува до заклучокот, тогаш за таквиот директен метод се вели дека е со напредување или дека е синтетичен метод.

Нека $A \Rightarrow C$ е некоја теорема. **Да се докаже** таа теорема значи да се утврди дека условниот исказ „Ако A, тогаш C" е вистинит за целото множество објекти за кои се однесува (броеви, геометриски фигури, функции, алгебарски структури и др.), т.е. да се изведе заклучокот дека C е логичко следство од претпоставките A.

За да се даде доказ на теоремата $A \Rightarrow C$, неопходно е да се располага со:

(i) извесна фамилија $\mathcal{F}$ од искази $И_1$, $И_2$, ..., вистинити за разгледуваното множество објекти (аксиоми, порано докажани теореми, како и дефиниции на математички поими) и

(ii) определени средства за докажување, т.е. правила на заклучување.

Сега можеме поопределено да кажеме што е синтетички доказ.

Еден доказ на математичко тврдење $A \Rightarrow C$ е **синтетичен,** ако се реализира според следнава логичка шема:

$$(A \wedge \mathcal{F}) \Rightarrow B_1,\ B_1 \Rightarrow B_2,\ \ldots,\ B_{n-1} \Rightarrow B_n,\ B_n \Rightarrow C, \qquad (1)$$

каде што $\mathcal{F}$ е одредена фамилија вистинити искази на онаа математичка теорија во чии рамки се докажува даденото тврдење и на која ѝ припаѓа конечната низа реченици B_1, $B_2, \ldots, B_n$, што го формираат доказот, како и речениците A и C.

Според тоа, синтетичниот доказ на некое тврдење започнува со воведување на некоја последица B_1 од условот A (или од некој негов дел) со користење на дадени точни искази $И_1$, $И_2, \ldots$ (од $\mathcal{F}$, а сврзани со условот), чијашто вистинитост е установена порано. Потоа, од B_1 се добива некоја последица B_2 итн, сè додека не се добие, како последица, заклучокот C на докажуваното тврдење.

Така, значи, **директен доказ со напредување,** т.е. синтетичен доказ, претставува *низа од расудувања* (секако, правилни!), таква што заклучокот на секое од нив влегува како претпоставка на некое од следните расудувања. Заклучокот на последното расудување од низата е заклучокот на докажуваната теорема (т.е. тезата на доказот).

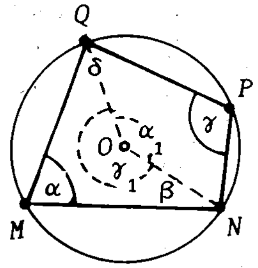
Доказите обично се излагаат некомплетно, зашто честопати некои претпоставки или цели вериги „се подразбираат". Претставувањето на еден доказ во облик на *потполна низа од расудувања* се вика **логичка анализа на доказот.** Притоа, расудувањата се прават, обично, во вид на **силогизми,** а во нив се наведуваат јавно сите вистинити искази $И_1$, $И_2, \ldots, И_k$ што ќе бидат претпоставки за вистинитата импликација:

$$И_1 \wedge И_2 \wedge \ldots \wedge И_k \Rightarrow (A \Rightarrow C). \qquad (2)$$

Логичката анализа на доказот може да се претстави во **симболична форма** - со помош на импликации што им одговараат на направените силогизми, а и во **структурна форма** - со помош на соодветна шема.

За илустрација ќе наведеме еден пример.

Пример 1. Да дадеме логичка анализа на доказот на теоремата: „Ако еден четириаголник е тетивен, тогаш неговите спротивни агли (пар по пар) се суплементни", $A \Rightarrow C$.



Црт. 1

Дадено: Четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, т.е. впишан во кружница со центар O (црт. 1). (A)

Треба да се докаже дека:

$\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$. (C)

1. Ако еден четириаголник е

тетивен, тогаш неговите агли се периферски. $И_1$

Четириаголникот $MNPQ$ е тетивен (по услов). A

∴ α и γ се периферски. B_1

2. Во иста кружница, кој било периферски агол е еднаков со половината од централниот агол над ист лак. $И_1$

Аголот α е периферски, а α_1 е централен над ист лак; и γ е периферски, а γ_1 е централен над ист лак (според B_1 и црт. 1) $B \wedge A_1$

∴ $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_1$ и $\gamma = \frac{1}{2}\gamma_1$ B_2

3. Ако два агла образуваат полн агол, тогаш нивниот збир е 360^o. $И_1$

α_1 и γ_1 образуваат полн агол (по услов, црт. 1). A

∴ $\alpha_1 + \gamma_1 = 360^o$ B_3

4. Едно равенство не се менува ако некоја величина во него се замени со друга што е еднаква со неа. $И_4$

Во равенството $\alpha_1+\gamma_1 = 360^o$ можеме да ставиме

$\alpha_1=2\alpha$ и $\gamma_1=2\gamma$. $B_3 \wedge B_2$

∴ $2\alpha+2\gamma = 360^o$ B_4

5. Ако двете страни на едно равенство се поделат со ист број ($\neq 0$), тогаш равенството не се нарушува. $И_5$

Дадено е равенството $2(\alpha+\beta) = 2\cdot 180^o$. B_4

∴ $\alpha=\gamma = 180^o$. $B_5=C$

Горната логичка анализа е **обична,** *направена со* **разбивање на силогизми.** Таа може да се претстави и во **симболичка форма,** со помош на соодветни импликации. За таа цел, ќе ги препишеме формулите што им одговараат на секој од горните силогизми, при што, *наместо* $p \wedge q$ *ќе пишуваме* pq.[1]

1) $И_1 A \Rightarrow B_1$; 2) $И_2 B_1 A \Rightarrow B_2$; 3) $И_3 A \Rightarrow B_3$;

4) $И_4 B_2 B_1 \Rightarrow B_4$; 5) $И_5 B_4 \Rightarrow C$.

Сите тие импликации се вистинити зашто им одговараат на правилни расудувања и вистинити претпоставки. Притоа е многу важно дека за премиси $И_1$, ..., $И_5$ се земени само вистинити искази (порано докажани теореми или непосредни последици од

---

[1] И натаму често ќе пишуваме pq наместо $p \wedge q$ (на пример во VII.3).

воведени дефиниции). Не е тешко да се увериме во вистинитоста на импликацијата:

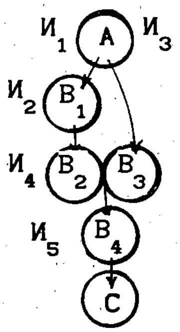
$$6)\ (И_1 A \Rightarrow B_1)(И_2 B_1 A \Rightarrow B_2)(И_3 A \Rightarrow B_3)(И_4 B_2 B_1 \Rightarrow B_4)(И_5 B_4 \Rightarrow C) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (И_1 И_2 И_3 И_4 И_5 \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

Имено, основа на вистинитата импликација 6) е конјункција од вистинитите импликации 1)-5), па според тоа можеме да заклучиме дека и заклучокот на 6), т.е. импликацијата

$$И_1 И_2 И_3 И_4 И_5 \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

е вистинита. Тоа значи дека $A \Rightarrow C$ е логичко следство од вистинитите искази $И_1$- $И_5$, т.е. $(A \Rightarrow C)$ е вистинита секогаш кога се вистинити исказите $И_1$-$И_5$.

Значи, вистинитоста на теоремата $A \Rightarrow C$ е установена врз основа на точноста на премисите $И_1$-$И_5$, со помош на правилни расудувања. Од своја страна, заклучокот C ќе биде вистинит секогаш кога ќе биде вистинита претпоставката A.



Црт. 2

Логичката анализа (т.е. погоре дадениот директен доказ) може да се прикаже **структурно-шематски,** со помош на шема како на црт. 2. Притоа, со букви во кружчињата се означени: условот A и последиците од него. Паралелно со нив се означени (со $И_k$) оние порано познати вистинити искази што се земени како претпоставки за конструирање на силогизмите.

Синтетичните докази имаат свои предности. Меѓу нив најважни се: *едноставноста, лаконското излагање* (т.е. *концизноста*) и *елегантноста на доказот.*

Но, синтетичните докази имаат и недостатоци. Меѓу најважните се:

- *големата неопределеност при изборот на последиците* $(B_1, B_2, \ldots)$ *од условот* (A);

- *нејасноста на мотивите (за ученикот) за преземање поедини чекори,* како на пример, при докажување на теоремата за збирот на аглите во ΔABC: „Низ точката C да повлечеме права, паралелна со правата AB" (A, зошто да повлечеме права? Зошто низ точката C? И, зошто баш таа права?!);

- *текот на доказот може да не му е јасен* на ученикот сè додека не се дојде *до крајот;*

- тешкотиите кај учениците со сфаќањето на *дедуктивната природа* на овие докази.

2.2. АНАЛИТИЧЕН МЕТОД; НАГОРНА И НАДОЛНА АНАЛИЗА

Уште еден директен метод на докажување теореми (т.е. метод при кој непосредно се користат претпоставките) е аналитичниот метод. За докажување на теоремата $A \Rightarrow C$ со аналитичниот метод, за разлика од синтетичниот, се тргнува од заклучокот C и се оди кон претпоставките A.

Една од најважните варијанти на аналитичниот метод е т.н. **нагорна (или совршена) анализа**. Процесот на размислување при докажувањето на теоремата

$$A \Rightarrow C$$

со методот на нагорна анализа се одвива на следниов начин.

Тргнувајќи од заклучокот C, се избира доволен услов B_1, таков што $B_1 \Rightarrow C$; потоа се избира доволен услов B_2 за B_1, таков што $B_2 \Rightarrow B_1$ да биде вистинито; на тој начин се продолжува сè додека не се добие доволен услов B_n за B_{n-1}, таков што $B_n \Rightarrow B_{n-1}$ и B_n да се вистинити, а и $A \Rightarrow B_n$. Притоа се користат како условот (A) на докажуваната теорема, така и некоја фамилија $(\mathcal{F})$ тврдења (сврзани со A и C) од дадената теорија, чијашто вистинитост е порано установена.

Симболички, процесот на размислување по методот на нагорна анализа може да се претстави со шемата:

$$B_1 \Rightarrow C,\ B_2 \Rightarrow B_1, \dots,\ B_n \Rightarrow B_{n-1},\ (A\wedge\mathcal{F}) \Rightarrow B_n \qquad (3)$$

Таков доказ е сосема коректен и строг. (Поради тоа, методот на нагорна анализа се вика *совршена анализа.*) Очигледно, шемата (3) може да се запиши во обликот:

$$(A\wedge\mathcal{F}) \Rightarrow B_n \Rightarrow B_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow C, \qquad (4)$$

т.е. *доказот со методот на совршена анализа може да се претвори во синтетичен доказ.*

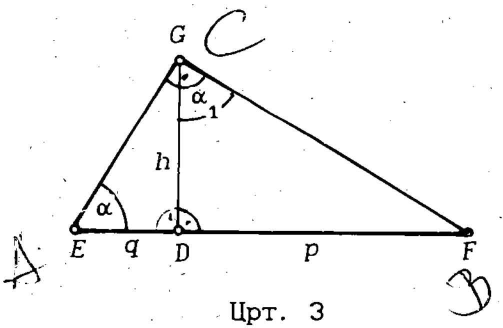
Аналитичниот метод има дидактички предности во однос на синтетичниот. Тој е поефективен во наставата, зашто нуди поголеми можности за учениците како да расудуваат и самостојно да конструираат нов доказ, а со тоа се развива нивното математичко мислење. Нагорната анализа природно и ефективно се комбинира со евристичен разговор и проблемскиот метод во наставата по математика.

За илустрација на аналитичниот метод (поточно: методот на нагорна анализа), ќе разгледаме еден пример.

Пример 2. Да ја докажеме теоремата:

„Ако h е висината на правоаголен триаголник спуштена од темето на правиот агол, а p и q се ортогоналните проекции на катетите врз хипотенузата, тогаш $h^2=pq$", $A \Rightarrow C$.

Дадено е (A): ΔEFG е правоаголен, со прав агол во темето G, $h = \overline{GD}$, $p = \overline{ED}$ и $q = \overline{FD}$ (црт. 3) (A)



Црт. 3

Треба да докажеме:

$$h^2 = pq. \qquad (C)$$

Да тргнеме од равенството (C). За да биде тоа исполнето, доволно е да биде точно равенството:

$$h{:}q=p{:}h, \text{ т.е. } \overline{GD}{:}\overline{ED}=\overline{FD}{:}\overline{GD}. \qquad (B_1)$$

Равенството (C) е пропорциjа од четири отсечки, па можеме „да побараме" некои слични триаголници, за кои тие отсечки се нивни страни. Трагањето, секако, ќе не доведе до ΔEDG и ΔGDF. Така, за точноста на равенството (B_1), доволно е да биде:

$$\Delta EDG \sim \Delta GDF. \qquad (B_2)$$

За да биде точно $(B\ )$, доволно е тие два триаголника да имаат (два еднакви соодветни агли, а за тоа е доволно (в. црт. 3):

$$\sphericalangle EDG = \sphericalangle GDF \text{ и } \alpha = \alpha_1. \qquad (B_3)$$

Бидеjќи аголот при темето D е прав (по претпоставка: $GD \perp EF$), за (B_3) е доволно:

$$EF \perp GD \text{ и } EG \perp GF. \qquad (B_4)$$

Последното тврдење е точно, како дел од претпоставките (A) (ΔEFG е правоаголен, со $EG \perp GF$ и h е висина, т.е. $GD \perp EF$), па $A \Rightarrow B_4$. Значи:

$$B_1 \Rightarrow C,\ B_2 \Rightarrow B_1,\ B_3 \Rightarrow B_2, B_4 \Rightarrow B_3,\ A \Rightarrow B_4.$$

Со преуредување, добиваме:

$$A \Rightarrow B_4 \Rightarrow B_3 \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow C.$$

со што е докажана точноста на $A \Rightarrow C$.

⌜** **Забелешка**. Во практиката многу често се применува и т.н. „метод на **надолна анализа**". Тоj претставува една вариjанта на аналитичниот метод при коjа се тргнува од заклучокот C на докажуваното тврдење $A \Rightarrow C$ и расудувањето се насочува кон добивање логички следства:

$$C \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ \dots \Rightarrow B_n, \qquad (5)$$

каде што B_n е тврдење, чиjашто вистинитосна вредност ни е позната. Притоа се возможни два основни случаи 1° и 2°.

1°. *Добиената последица B_n е неточно тврдење.* Во тоj случај сосем определено може да се каже дека и заклучокот C е неточен.

Овој случај на надолна анализа се користи за индиректно докажување на вистинити тврдења. Имено, даденото тврдење $A \Rightarrow C$ се трансформира во „помошното тврдење $A \Rightarrow \neg C$ и на ова се применува надолна анализа, тргнувајќи од $\neg C$. Ако добиената последица B_n е лажна, и помошното тврдење $A \Rightarrow \neg C$ ќе биде лажно, од што ќе следува дека $A \Rightarrow C$ е вистинито. Тоа е и *методот „од спротивното"* (в. VII.3).

2°. *Добиената последица* B_n *е вистинита.* Во тој случај не може да се каже ништо одредено за вистинитоста на докажувањето тврдење, ни дека е вистинито ни дека е лажно.

Имено, вистинита последица може да се добие не само од вистинита, туку и од лажна претпоставка. (На пример, равенството $|a-b| = |b-a|$ е точна последица како од точната претпоставка $(a-b)^2=(b-a)^2$, така и од лажната: $a-b = b-a \wedge a\neq b$.)

Меѓутоа, во случајот 2°, надолната анализа кон тврдењето $A \Rightarrow C$ честопати сугерира пат за конструирање синтетичен доказ. Имено, се прави обид процесот на расудување при надолната анализа (5) за тврдењето $A \Rightarrow C$ да се „преврти":

$$(B_n \wedge A) \Rightarrow B_{n-1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_2 \Rightarrow B_1 \Rightarrow C.$$

Ако оваа низа доведува до точен заклучок C, тогаш е докажана точноста на тврдењето $A \Rightarrow C$ со синтетичен метод.

Понекогаш е невозможно надолната анализа да се претвори во синтетичен доказ; тоа може да биде знак дека докажуваното тврдење е лажно. На пример, за тврдењето: „$d|a+b \Rightarrow d|a \wedge d|b$", надолната анализа би била:

$$d|a \wedge d|b \Rightarrow a=da_1 \wedge b=db_1 \Rightarrow a+b = da_1+db_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a+b = d(a_1+b_1) \Rightarrow d|a+b.$$

Но, таа не може да се "преврти" во синтетичен доказ (пробај!); тоа е знак дека (веројатно) тврдењето не е точно. **

2.3. ВЕЖБИ

Во задачите 1-7 дадена е по една теорема.

а) Најди директен доказ на дадената теорема и направи логичка анализа: обична - со разбивање на силогизми, симболична - со импликации и структурна - со шема.

б) Установи кои видови расудувања се користат во доказот и што претставува секој од вистинитите искази, земен како аргумент.

1. Спротивните страни на паралелограмот пар по пар се еднакви.

2. Дијагоналите на паралелограмот се преполовуваат со пресечната точка.
3. Дијагоналите на правоаголникот се еднакви меѓу себе.
4. Дијагоналите на ромбот се заемно нормални.
5. Аглите при иста основа кај рамнокрак трапез се еднакви меѓу себе.
6. Ако производот на два природни броја е непарен број, тогаш збирот на тие броеви е парен број.
7. Ако еден полином $P(x)$ е делив со $x-c$, тогаш c е корен на тој полином.

Во задачите 8-11 најди аналитичен доказ на дадената теорема (со помош на нагорна анализа).

8. Квадратот на катетата (a) во еден правоаголен триаголник е еднаков на производот од хипотенузата (c) и нејзината проекција (p) врз хипотенузата (т.е. $a^2=cp$).
9. Дијагоналите во рамнокрак трапез се еднакви меѓу себе.
10. Дијагоналите во делтоид се заемно нормални.
11. Низ една точка M, надвор од дадена кружница, повлечени се: тангента MA и секанта MS, којашто ја сече кружницата во точките B и C. Докажи дека: $\overline{MB}\cdot\overline{MC} = \overline{MA}^2$.

Со помош на методот на надолна анализа, конструирај синтетичен доказ на дадената теорема (12-15).

12. Ако $a,b\in\mathbb{R}^+$ и $a\neq b$, тогаш $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ (т.е. аритметичката средина е поголема од геометриската).
13. $a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2|ab|$.
14. Ако a,b се реални броеви со ист знак, (т.е. $ab>0$), тогаш $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
15. Ако a и b се позитивни реални броеви, тогаш:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

3. ИНДИРЕКТНИ МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

3.1. ЛОГИЧКИ ОСНОВИ

Ќе ги разгледаме логичките основи на методите што во 1.2 ги нарековме индиректни методи на докажување. Притоа, за пократко, ќе пишуваме:

XY наместо $X\wedge Y$ и $\overline{X}$ наместо $\neg X$.

Суштината на индиректните методи се состои во следното: *наместо теоремата $A \Rightarrow C$ да се докажува директно, се допушта* *дека е точна нејзината негација*

$$\overline{(A \Rightarrow C)}\text{[1]}, \quad t.e. \ A\overline{C},$$

и потоа се побива точноста на тоа допуштање.

Таа цел се постигнува со помош на директно докажување на точноста на една од следниве импликации:

1) $\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$, 2) $A\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$, 3) $A\overline{C} \Rightarrow C$,

4) $A\overline{C} \Rightarrow D\overline{D}$, 5) $A\overline{C} \Rightarrow \overline{И}$,

каде што D е произволен, а $И$ е сигурно точен исказ.

Ќе го разгледаме секој од овие случаи.

1°. $\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$ е теорема, спротивна на обратната. Ако импликацијата $\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$ е точна, тогаш можеме да заклучиме не само дека допуштението $A\overline{C}$ е лажно туку и непосредно дека теоремата $A \Rightarrow C$ е точна (поради тавтологијата $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$).

2°. $A\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$. Ако оваа импликација е точна, тогаш претпоставката $A\overline{C}$ е лажна за кои било A и C, што може да се види од следната вистинитосна таблица (Табл. 1).

Таблица 1.

A	C	$\overline{A}$	$\overline{C}$	$A\overline{C}$	$\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$	$A\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$	$A\overline{C} \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
T	T	⊥	⊥	⊥	T	T	T	T
T	⊥	⊥	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥
⊥	T	T	⊥	⊥	T	T	T	T
⊥	⊥	T	T	⊥	T	T	T	T

3°. $A\overline{C} \Rightarrow C$. Точноста на оваа импликација повлекува лажност на допуштението $A\overline{C}$, што исто така, може да се види од Табл. 1.

4°-5°. Точноста на импликациите $A\overline{C} \Rightarrow D\overline{D}$ и $A\overline{C} \Rightarrow \overline{И}$ повлекуваат лажност на допуштањето $A\overline{C}$, зашто $D\overline{D}$ и $\overline{И}$ се неточни и можат да бидат последици само од лажната претпоставка $A\overline{C}$.

Според тоа и според Табл. 1, секоја од импликациите **1°**-**5°** е еквивалентна со формулите $A\overline{C}$ и $A \Rightarrow C$.

Ако пак дадената теорема има структура:

$$A_1 A_2 \ldots A_k \Rightarrow C,$$

тогаш нејзиниот посреден доказ во случајот **2°** се сведува на

---

[1] Уочи дека: $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow \overline{A} \vee C$, па

$$\overline{(A \Rightarrow C)} \Leftrightarrow \overline{(\overline{A} \vee C)} \Leftrightarrow A \wedge \overline{C} \ (\equiv A\overline{C}).$$

докажување на импликација од видот:

$$A_1A_2\ldots A_k\overline{C} \Rightarrow \overline{A}_i,$$

кадее што $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ (ова е обопштен случај од 2°). Навистина,

$$A_1A_2\ldots A_k\overline{C} \equiv \overline{A_1A_2\ldots A_k}\,\overline{C}\vee\overline{A}_i \equiv \overline{A}_1\vee\overline{A}_2\vee\ldots\vee\overline{A}_k\vee\overline{\overline{C}}\vee\overline{A}_i \equiv$$

$$\equiv \overline{A}_1\vee\overline{A}_2\vee\ldots\vee\overline{A}_k\vee C$$

($\overline{A}_i$ може да се испушти зашто се повторува), а последнава формула е еквивалентна со:

$$\overline{A_1A_2\ldots A_k\overline{C}} \text{ но и: } \overline{A_1A_2\ldots A_k}\vee C \equiv A_1A_2\ldots A_k \Rightarrow C.$$

Во сите случаи **1°-5°**, претпоставката на импликацијата го содржи *„спротивното од заклучокот на теоремата $A \Rightarrow C$" (т.е. $\overline{C}$ или $A\overline{C}$)*. Поради тоа, индиректниот начин на докажување теорема е наречен и **метод од спротивно** .

3.2. ДОКАЗ СО МЕТОДОТ ОД СПРОТИВНО

Докажувањето на теоремата $A \Rightarrow C$ со методот „од спротивно", како што рековме, започнува со „допуштањето" дека тврдењето $A \Rightarrow C$ е лажно, т.е. дека е вистинита конјункцијата $A\overline{C}$. Значи, го земаме $A\overline{C}$ за услов и, придодавајќи соодветни вистинити искази $И_1$, $И_2,\ldots,И_k$, формираме директна низа расудувања. Како резултат на тоа, ќе се појави точност на една од импликациите **1°-5°**:

1°. $\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$ - кога условот A не е искористен како претпоставка во ниедно од расудувањата;

2°. $A\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$ - добиена е негација на условот A;

3°. $A\overline{C} \Rightarrow C$ - добиена е негација на допуштањето $A\overline{C}$;

4°. $A\overline{C} \Rightarrow D\overline{D}$ - добиен е„ апсурд", т.е. контрадикција на два спротивни еден на друг искази;

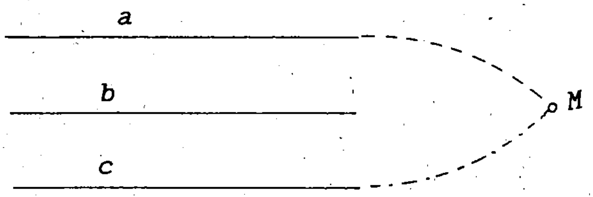
5°. $A\overline{C} \Rightarrow \overline{И}$ - добиена е негација на некој сигурно точен исказ $И$.

Тоа што ќе се докаже дека некоја од импликациите **1°-5°** е точна, значи дека конјункцијата $A\overline{C}$ е лажна, а тоа пак значи дека е точна импликацијата $A \Rightarrow C$.

Во училишниот курс, при докажување теореми со методот од спротивно, најчесто се среќаваат случаите **2°**, **4°** и **5°**.

За илустрација на методот од спротивно, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. Да ја докажеме следнава теорема од планиметријата: "Ако a, b, c се три прави од една рамнина, такви што $a \parallel b$ и $b \parallel c$, тогаш $a \parallel c$".



Дадено е:

$a \parallel b$	A_1
$b \parallel c$	A_2
$\therefore\ a \parallel c$	C

Црт. 1

Структурата на теоремата е: $A_1A_2 \Rightarrow C$.

Доказ. Да допуштиме дека докажуваното тврдење е лажно, т.е. дека важи $A_1A_2\overline{C}$: "$a \parallel b$ и $b \parallel c$, но $a \nparallel c$" (црт. 1). Да видиме што следува од допуштањето $A_1A_2\overline{C}$.

1. Ако две прави не се паралелни, тогаш тие се сечат во една точка.

Ако две прави не се паралелни, тогаш тие се сечат во една точка.	$И_1$
Правата a не е паралелна со c	$\overline{C}$
$\therefore$ Правите a и c се сечат во една точка M.	B_1

2. Ако две (различни) прави се паралелни, тогаш тие немаат заедничка точка.

Ако две (различни) прави се паралелни, тогаш тие немаат заедничка точка.	$И_2$
$a \parallel b$, $c \parallel b$ и $M = a \cap c$.	$A_1A_2B_1$
$\therefore\ M \notin b$	B_2

3. Низ дадена точка надвор од дадена права минува точно една права паралелна со дадената.

Низ дадена точка надвор од дадена права минува точно една права паралелна со дадената.	$И_3$
$M \in a$, $M \in c$ и $M \notin b$.	$A_1A_2B_2$
$\therefore$ Низ точката M минуваат две прави (a и c), паралелни со правата b.	$\overline{И}_3$

На правилните расудувања **1-3** им одговараат вистинитите импликации:

$$И_1\overline{C} \Rightarrow B_1, \quad И_2A_1A_2B_1 \Rightarrow B_2, \quad И_3A_1A_2B_2 \Rightarrow \overline{И}_3,$$

коишто може да се запишат во обликот:

1) $И_1 \Rightarrow (\overline{C} \Rightarrow B_1)$; 2) $И_2 \Rightarrow (A_1A_2B_1 \Rightarrow B_2)$;

3) $И_3 \Rightarrow (A_1A_2B_2 \Rightarrow \overline{И}_3)$.

Од точноста на импликациите 1)-3) и точноста на $И_1$, $И_2$, $И_3$

може да се направи заклучок за точноста на импликациите:

$$\overline{C} \Rightarrow B_1; \quad A_1A_2B_1 \Rightarrow B_2; \quad A_1A_2B_2 \Rightarrow \overline{И}_3.$$

Не е тешко да се увериме во точноста на импликацијата

$$4) \quad (\overline{C} \Rightarrow B_1)(A_1A_2B_1 \Rightarrow B_2)(A_1A_2B_2 \Rightarrow \overline{И}_3) \Rightarrow (A_1A_2\overline{C} \Rightarrow \overline{И}_3).$$

Од вистинитоста на 4) и вистинитоста на нејзината претпоставка заклучуваме дека $A_1A_2\overline{C} \Rightarrow \overline{И}_3$ е вистинита.

Според тоа, низата расудувања 1-3 е директен доказ на импликацијата $A_1A_2\overline{C} \Rightarrow \overline{И}_3$. Нејзината вистинитост пак повлекува невистинитост на допуштането $A_1A_2\overline{C}$, а со тоа, врз основа на обопштувањето од случајот 5°, е утврдена вистинитоста на теоремата $A_1A_2 \Rightarrow C$.

Индиректни докази на теореми може да се направат и со помош на другите случаи 1°-5° (види вежба 7-11).

Забелешка 1. Индиректниот метод, секако, е моќно средство за трагање по вистината. Но, тој понекогаш е и „опасен". Имено, користејќи го индиректниот начин на аргументирање, може лесно да се западне во *„маѓепсан круг"*, т.е. да се користи (јавно или скриено) докажуваната теорема како аргумент за нејзиното докажување! Наставникот треба да биде свесен за тоа и на соодветен начин да ги предупредува учениците.

Забелешка 2. При индиректните докази утврдуваме дека негацијата на теоремата е невистината, а поради тоа, теоремата ја сметаме за докажана. Притоа, суштински се користи законот за исклучување на третото ($p \vee \overline{p}$). Меѓутоа, тој не е секогаш применлив. Во современата математика, во т.н. *„конструктивна насока"*, не се применува законот на третото и нема индиректни докази. Во таа смисла, сферата на применување на посредни докази во математиката не е неограничена.

3.3. ВЕЖБИ

1. Докажи дека исказната формула $A \Rightarrow C$ е еквивалентна со $C \vee \overline{A}$.

Во задачите 2-4, тврдењето што е дадено во обликот $A \Rightarrow C$, искажи го во обликот $C \vee \overline{A}$.

2. Ако четириаголникот е правоаголник, тогаш дијагоналите му се еднакви.
3. Ако бројот завршува на нула, тогаш тој е делив со 5.
4. Ако правите a и b се паралелни и правата c (од истата рамнина) ја сече a, тогаш c ја сече правата b.
5. Докажи (со помош на вистинитосна таблица) дека: ако е точна импликацијата

а) $A\overline{C} \Rightarrow D\overline{D}$; б) $A\overline{C} \Rightarrow \overline{И}$,

каде што D е произволно, а $И$ е сигурно точно тврдење, тогаш претпоставката $A\overline{C}$ е невистинита.

6. Докажи дека секоја од импликациите 1^o-5^o во 3.2 е еквивалентна со формулите $A\overline{C}$ и $A \Rightarrow B$ (т.е. комплетирај ја Табл. 1 во 3.1).

Во задачите **7-13** дадената теорема докажи ја со методот од спротивно преку некој од случаите 1^o-5^o и направи логичка (и симболичка) анализа на доказот.

7. Ако еден паралелограм е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални. (Кон 1^o: $\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$.)

8. Производот на два непарни броја е непарен број. (Кон 1^o.)

9. Ако a е најмалиот, различен од единица, делител на природниот број n, тогаш a е прост број. (Кон 2^o: $A\overline{C} \Rightarrow \overline{A}$.)

10. Нека a, b, c се прави во иста рамнина. Ако $a \parallel b$ и $c \nparallel a$ (т.е. c ја сече a), тогаш $c \nparallel b$. (Кон $2'$: $A_1A_2\overline{C} \Rightarrow \overline{A}_i$.)

11. Ако две различни прави MN и PQ отсекуваат на краците од еден агол $\alpha = \sphericalangle S$ пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни меѓу себе. (Кон $3'$: $A_1A_2\overline{C} \Rightarrow \overline{C}$.)

Помош. Структурата на теоремата е: $A_1A_2 \Rightarrow C$, каде што A_1: MN и PQ се различни прави, A_2: $\overline{SM}:\overline{SN}=\overline{SP}:\overline{SQ}$, $C: MN \parallel PQ$. Нека важи $A_1A_2\overline{C}$; да избереме точка Q' на полуправата SQ, така што $MN \parallel PQ'$; итн.

12. Ако квадратот на некој број е 2, тогаш тој број не е рационален (4^o: $A\overline{C} \Rightarrow D\overline{D}$.)

13. Нека a, b, p се прави во иста рамнина. Ако $a \perp p$ и $b \perp p$, тогаш $a \parallel b$. (5^o: $A\overline{C} \Rightarrow \overline{И}$.)

Примени посреден метод за побивање на вистинитоста (односно установи ја точноста) на следново тврдење (**14-16**):

14. $(\forall x)\ [(x+1)^2 = x^2+1]$.

15. $(\forall x)\ [\sqrt{x^2} = x]$.

16. $(\forall x)\ [tgx > sinx]$.

Помош. Убеди се во точноста на негацијата, наоѓајќи барем една вредност на x за која негацијата е точна.

4. МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА

4.1. ПРИНЦИП НА МАТЕМАТИЧКАТА ИНДУКЦИЈА

Математичката индукција е дедуктивен метод - еден од најважните методи за докажување во математиката. Тој е заснован на следнава:

Аксиома за индукција. *Ако S е множество природни броеви, такво што*

1) S го содржи природниот број 1,

2) S го содржи природниот број $k+1$ секогаш кога го содржи природниот број k,

тогаш S ги содржи сите природни броеви.

Со помош на оваа аксиома се докажуваат повеќе важни теореми, меѓу кои и теоремата, наречена принцип на математичката индукција.

Теорема 1 (Принцип на математичката индукција). *Нека $P(n)$ е тврдење што е определено за секој природен број n. Ако:*

(i) $P(1)$ е вистинито и

(ii) ако $P(k+1)$ е вистинито секогаш кога $P(k)$ е вистинито,

тогаш $P(n)$ е вистинито за секој природен број n.

Доказот следува непосредно од аксиомата за индукција. Имено, нека S е множеството природни броеви за кои тврдењето $P(n)$ е точно. S го содржи бројот 1 (според (*i*)), а исто така и природниот број $k+1$ секогаш кога го содржи природниот број k (поради (*ii*)). Следствено, според аксиомата за индукција, S ги содржи сите природни броеви.

Принципот на математичката индукција симболички може да се искаже со формулата:

$$P(1) \wedge (\forall k\in\mathbb{N})[P(k) \Rightarrow P(k+1)] \Rightarrow (\forall n\in\mathbb{N})[P(n)]; \quad (1)$$

притоа: $P(n)$ е **индуктивно тврдење**, n е **индуктивна променлива** по која се изведува индукцијата; $P(1)$ е **основа на индукцијата**; $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ е **индуктивен чекор.**

Математичката индукција е строг, дедуктивен метод на докажување, но, како и секоја дедукција, во себе вклучува некој елемент на индукција, а тоа е непосредната проверка на вистинитоста на тврдењето $P(n)$ за $n=1$. (Инаку, принципот на математичката индукција нема некоја друга врска со неполната индукција.)

Да забележиме дека ниеден од условите (*i*) и (*ii*) во принципот на математичката индукција не може да се изостави.

Пример 1. Да „покажеме" дека, ако

$$P(n):\ 2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1} \quad (2)$$

е точно за $n=k \geq 1$, тогаш тоа е точно за $n=k+1$.

Имено, нека равенството (2) важи за $n=k$, т.е.

$$2+2^2+...+2^k = 2^{k+1}.$$

Тогаш, за $n=k+1$ ќе имаме:

$$(2+2^2+...+2^k) + 2^{k+1} = 2^{k+1}+2^{k+1} = 2\cdot 2^{k+1} = 2^{k+2},$$

т.е. $P(n)$ важи за $n=k+1$.

Но, дали (2) е точно за секој $n\in\mathbb{N}$? Очигледно - не! (За $n=1$, равенството (2) не е точно.)

Значи, условот (i), т.е. базата на индукцијата, не смее да се изостави.

Пример 2. Дека ни условот (ii), т.е. индуктивниот чекор, не смее да се изостави, покажува следниов пример: формулата

$$P(n) = 2n^2+29$$

дава прости броеви за $n=1,2,3,4,...$. Но, не за секој $n\in\mathbb{N}$, изразот $2n^2+29$ е прост број (за $n=29$, тој е сложен број).

Доказот на едно математичко тврдење со методот на математичката индукција задолжително содржи два дела: **1°** проверка на вистинитоста на тврдењето $P(n)$ за $n=1$, т.е. $P(1)$; **2°** претпоставувајќи дека $P(n)$ е вистинито за $n=k$, се докажува дека $P(n)$ е точно при $n=k+1$, т.е. се докажува вистинитоста на импликацијата $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Со тоа, точноста на тврдењето $P(n)$ е строго докажано за кој било природен број n и останува тоа да се констатира како заклучок, со повикување на принципот на математичката индукција.

4.2. МАТЕМАТИЧКАТА ИНДУКЦИЈА ВО НАСТАВАТА

Математичката индукција широко се користи во наставата, при изведувањето на формули во врска со: аритметичката и геометриската прогресија, деливоста, логаритмите, биномната формула, комбинаториката и др. Меѓутоа, овој метод е тежок за учениците, дури и за тие од горните класови. Причината за тоа е *необичноста на методот, новината и оригиналноста,* но и поради тоа што тој има некои црти што потсетуваат *повеќе на индиректен, отколку на директен доказ* (а имено, индиректните докази им се чинат на учениците помалку убедливи отколку директните).

Поради тоа, неопходно е овој метод да им се објасни внимателно и опстојно, поткрепен со едноставни, но сугестивни примери. Како добра примена на овој метод може да служи строгиот доказ на формулите за n-тиот член на аритметичката и геометриската прогресија.

За совладување на методот на математичката индукција, корисно е да им се предлагаат на учениците задачи од следните типови:

1) Докажи дека $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

2) Докажи ја формулата за збирот на членовите кај аритметичка, односно геометриска прогресија.

3) Пресметај го збирот $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

4) Докажи дека $7\,|\,13^n+1$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

5) $2^n \geq n^2$ за $n \geq 5$ итн.

Овој метод може со успех да се применува и за задачи со геометриска содржина.

*4.3. НЕКОЛКУ ЗАБЕЛЕШКИ

Забелешка 1. Понекогаш индуктивното тврдење $P(n)$ нема смисла или не е точно за некои од првите природни броеви или, обратно, важи не само за секој $n\in\mathbb{N}$, туку и за $n=0$. За такви случаи, принципот на математичката индукција се формулира вака:

Нека $P(n)$ е тврдење, што зависи од целобројната променлива n. Ако

i′) $P(n)$ е вистинито за $n=m$, и

ii′) ако $P(n)$ е вистинито за $n=k+1$ секогаш кога е вистинито за $n=k\geq m$,

тогаш $P(n)$ е вистинито за секој цел број $n\geq m$.

(Таков е, на пример, случајот со задачата 5, наведена во 4.2.)

Забелешка 2. Со помош на аксиомата за индукција може да се докаже следнава:

Теорема 2 (Принцип на најмал природен број). *Секое непразно множество природни броеви има најмал елемент.*

Теорема 3 (Втор принцип на математичката индукција). *Нека $P(n)$ е тврдење што е дефинирано за секој природен број n. Ако:*

i′) $P(1)$ е вистинито,

ii′) и ако за секој природен број m, $P(m)$ е вистинито секогаш кога $P(k)$ е вистинито за секој природен број $k\leq m$,

тогаш $P(n)$ е вистинито за секој природен број n.

Доказ. Нека M е множеството природни броеви за кои $P(n)$ е невистинито и, да претпоставиме дека M не е празно. Тогаш, според теоремата 2, M има најмал природен број, на пример, m. Да забележиме дека $m\neq 1$ (зашто $P(1)$ е вистинито, па $1\notin M$). Значи, за секој природен број $k<m$, $P(k)$ е вистинито. Тогаш, според условот ii′), мора да е $P(m)$ вистинито. Но, ова му противречи на фактот дека m е во M. Следствено, M мора да е празно, т.е. $P(n)$ е вистинито за секој природен број n.

Забелешка 3. За некои случаи се применува т.н. **индукција со двојна основа:**

$$i')\ P(1) \wedge P(2), \qquad ii')\ P(k) \wedge P(k+1) \Rightarrow P(k+2);$$

ако е тоа исполнето, тогаш својството P важи за секој природен број.

Пример 3. Да докажеме дека збирот од видот:

$$x^m+x^{-m}$$

за кој било $m\in\mathbb{N}$, може да се претстави како полином $f(y)$ со цели коефициенти со променлива $y=x+x^{-1}$.

Прв чекор. $m=1$: $x+x^{-1}=y$, т.е. $f(y)=y$. $m=2$: $x^2+x^{-2}=$

$$=(x^2+2+x^{-2})-2=(x+x^{-1})^2-2=y^2-2, \text{ т.е. } f_2(y)=y^2-2.$$

Втор чекор. Нека за $m=k$ и $m=k+1$ функциите

$$f_k(y) = x^k+x^{-k} \quad \text{и} \quad f_{k+1}(y) = x^{k+1}+x^{-(k+1)}$$

се полиноми од k-ти и $(k+1)$ - степен, соодветно, со цели коефициенти. Да докажеме дека и $f_{k+2}(y) = x^{k+2}+x^{-(k+2)}$ е полином од $(k+2)$-степен со цели коефициенти. Имаме:

$$x^{k+2}+x^{-(k+2)} = (x^{k+1}+x^{-k-1})(x^1+x^{-1}) - (x^k+x^{-k}) =$$

$$= f_{k+1}(y)\cdot y - f_k(y) = f_{k+2}(y)$$

(според својството за множење на полиноми со цели коефициенти).

4.4. ВЕЖБИ

Во задачите **1-4**, даденото тврдење за природните броеви, докажи го со помош на принципот на математичката индукција.

1. $1^3+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2 = [\frac{1}{2}\cdot n(n+1)]^2$.
2. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{1}{3}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$.
3. $6|n^5+5n^3$.
4. $64|9^n-8n-1$.

Докажи ја точноста на следните тврдења (**5-13**).

5. $1^2+4^2+7^2+\ldots+(3n-2)^2=\frac{1}{2}\cdot n\cdot(6n^2-3n-1)$.
6. $64|3^{2n+2}-8n-9$.
7. $n^3+1 > n^2+n$, за $n\geq 2$.
8. $2^n > n^3$ за $n \geq 10$.
9. Покажи дека, ако равенството

$$1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^2$$

е точно за $n=k\geq 1$, тогаш тоа е точно за $n=k+1$. Дали е тоа доволно за да се заклучи дека равенството е точно за секој природен број? Дали равенството е точно за некој природен број?

10. Збирот на аглите во n-аголникот е $(n-2)\cdot 180^{\circ}$.

11*. Максималниот број прави во рамнината определени со $n\geq 2$ точки изнесува $\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$.

12*. Максималниот број пресеци на n прави ($n\geq 2$) во една рамнина изнесува $\frac{1}{2}(n-1)\cdot n$.

13*. Бројот делови на кои n прави ја делат рамнината, не е поголем од 2^{n}.

Со помош на вториот принцип, докажи дека (14-16):

14*. За секој $n\in\mathbb{N}$, $n+1$ е прост или може да се претстави како производ на прости броеви.

15*. Бројот на позитивните прости множители од $n\geq 2$ е помал од $2\ln n$.

16*. Во секое множество од n различни природни броеви постои најголем елемент.

17*. Докажи дека за секој природен број n,

$$u_{n} = \frac{1}{2^{n}\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{n}-(1-\sqrt{5})^{n}]$$

е природен број.

5. МЕТОДИКА НА ДОКАЖУВАЊЕ ТЕОРЕМИ

5.1. ЗА ДОКАЗОТ ВО НАСТАВАТА

Во разделот V.5.1. ги разгледавме начините на воведување и изучување математички тврдења при што се задржавме, главно, на предностите на генетскиот метод во однос на догматскиот. Од реченото таму е јасно дека ученикот треба да ги учи и да ги разбира предвидените теореми, формули, правила. Но, дали е неопходно да ги учи и нивните докази? Прашањето е поставено само поради распространетото мислење дека на ученикот не му се потребни докази, т.е. „нема зошто да ја проверува вистинитоста на дадена теорема кога однапред се знае дека таа е точна!"

Меѓутоа, работите стојат поинаку: мошне важно е ученикот да ги усвојува доказите на одделни теореми, а уште поважно е да научи *самостојно да докажува*. Имено, обучувањето на ученикот да докажува значи обучување да расудува, а тоа е една од основните задачи на наставата по математика. Да напомниме дека под *„обука за докажување"* се подразбира: *подго-*

товка за трагање, откривање и составување доказ на математичко тврдење, а не учење напамет готови докази.

При обуката на докажување треба да се има предвид:

1) дека *училишниот курс по математика не се гради како строга дедуктивна теорија* (макар што учениците се запознаваат со духот на дедуктивниот систем уште во основното образование, особено со почнувањето на „систематскиот курс" по геометрија),

2) дека *во училишните докази се неизбежни интуитивни елементи* и

3) дека *потребата од (логички) доказ може да се сфати подобро на неочигледни примери.*

Дедуктивните докази, како самостоен елемент на математичката теорија може да им се даваат на учениците само тогаш кога изучуваниот материјал овозможува да ја согледаат неопходноста од доказ. Математичкиот доказ е специјален случај од научниот доказ. Неговата најважна карактеристика е строгата логичност и целосна веродостојност, коишто се засновани врз користењето само на: заклучувања со сигурна точност, т.е. на логички правила на строг извод и на прецизноста на математичките поими, тврдења и операции.

Во учебниците по математика за основно и средно образование, *доказите на теоремите не се разбиени на силогизми.* Но, за тоа таму нема ни потреба; таа задача може, евентуално, да биде една од формите низ наставата за самостојна творечка работа на учениците над изучуваните (подобро: над изучени) докази, под раководство на наставникот. Ваквата активност на учениците остварува уште една функција: ефективно повторување, длабоко и трајно усвојување на учебниот материјал, школување на ученикот да ја сфати потребата од доказ и да ја совлада вештината на докажување математички тврдења. Сето тоа има големо значење за развојот на математичкото мислење кај учениците.

Можеме да сметаме дека изучувањето на конкретен доказ ја постигнува целта, ако ученикот: 1) *ја сфаќа неопходноста од доказ, 2) умее да го репродуцира самостојно и 3) може да укаже на претпоставките и аргументите што се користени за заклучување.*

3.2. ТРАГАЊЕ ПО ДОКАЗ

Трагањето по доказ се насочува со три основни, куси прашања: Што? Од каде? Како?

Што? - *Што се докажува? Што е дадено, а што се бара, т.е. што треба да се докаже? Дали е сè јасно и познато во формулацијата? Дали може тврдењето да се формулира поинаку?*

Ученикот може да пристапи кон барање доказ на даденото математичко тврдење дури тогаш кога е наполно уверен дека правилно ја разбрал неговата содржина и јасно ги разграничил условот и заклучокот во него. За таа цел си поставува прашања како горните, од групата прашања „што?" и си дава одговори на нив. (Се разбира, прашањата што ги наведовме погоре ни оддалеку не го исцрпуваат списокот прашања што ги обединивме во кусото прашање „што?".)

Препознавањето на условот и заклучокот на теоремата за ученикот е многу полесно, ако теоремата е претставена во вид на импликација. Затоа е корисно за ученикот да ја искаже во условна форма.

Пример 1. Издвојувањето на условот и заклучокот во теоремата „Трапез со еднакви дијагонали е рамнокрак" предизвикува тешкотии кај многу ученици. Но, откако ќе се помачат и ќе ја формулираат во условна форма: „Ако дијагоналите на трапезот се еднакви, тогаш трапезот е рамнокрак", тешкотиите веднаш се отстрануваат.

За успех во натамошната постапка е неопходно на ученикот да му се совршено јасни (да ги знае добро дефинициите на) поимите, што се содржани во теоремата (во примерот: трапез, рамнокрак трапез, дијагонала).

Исто така, докажувачот треба да си ги објасни сите услови на теоремата, особено кога таа е искажана „слободно".

Пример 2. Ако треба да го докажеме тврдењето: „Геометриската средина на два броја е поголема од нивната хармониска средина", ние треба прво да увидиме дека тоа важи само за позитивни броеви и различни меѓу себе. Тоа се истакнува со запишување во вид на импликација, вака:

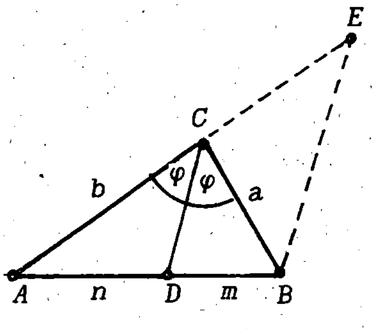
$$(a>0) \wedge (b>0) \wedge (a\neq b) \Rightarrow \sqrt{ab} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Од каде? - Во ова прашање се обединети повеќе прашања што ученикот треба да си ги постави, трагајќи по доказ. *Од какви претпоставки следува докажуваното тврдење? Што е доволно за да се изведе заклучокот? Дали од претпоставките на теоремата може непосредно да се изведе заклучокот?* Или, од какви веќе познати тврдења во дадената теорија (аксиоми, дефиниции, порано докажани теореми) може да се „добие" таа теорема?

Трагањето по одговори на тие прашања може да почне од самата докажувана теорема или пак од други познати и со неа сврзани тврдења. Притоа е честопати згодно: да се преиначи условот на теоремата со цел да се зближи со заклучокот (најчесто кога се докажува со „напредување", т.е. со синтетичниот метод) или пак да се трансформира заклучокот за да се приближи кон условот (при аналитичниот метод).

Пример 3. Да ја разгледаме познатата теорема: „Симетралата на кој било агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови, пропорционални на прилегнатите страни".

Во практиката честопати се дава готов доказ: во ΔABC се зема симетралата CD на $\sphericalangle C$ (црт. 1), се продолжува AC и се повлекува отсечката BE, паралелно со CD. Заклучокот на теоремата ($m:n=a:b$) се добива како последица од сличноста на ΔADC и ΔABE.



Црт. 1

Но, како да се досетиме дека треба да почнеме од сличноста на овие два триаголника, уште повеќе што тие не беа назначени на првобитниот цртеж? Тоа треба, просто, да се запомни. Но, може ли да се запомнат почетоците на доказите од сите теореми?! И, дали е тоа потребно, ако нашата цел е ученикот да научи самостојно да расудува и да докажува? Секако - не!

Во овој случај е препорачливо да се тргне од заклучокот ($m:n=a:b$), да се анализира ситуацијата и да се најде некој доволен услов за него. (Пропорцијата треба да не наведе на помислата за слични триаголници.)

Како? - На прашањето: *„Како докажуваното тврдење се добива од порано установени тврдења во дадената теорија?"* може да се одговори кратко: „Со расудување". Во училишниот курс има два степена на расудување: а) без јавно објаснети правила на заклучување (главно во основното образование) и б) со објаснети логички правила за извод (во средното образование).

При расудувањето за конструирање на доказот треба да се имаат предвид следниве правила:

1°. *Поимите што се содржани во условот и заклучокот* или пак тие што се јавуваат во доказот, *се заменуваат со нивните дефиниции.* Притоа, ако еден поим има повеќе еквивалентни дефиниции, тогаш треба да се избере онаа што го скратува патот на расудувањата.

2°. *Наместо дефиницијата на поимот, да се примени некој негов признак.*

3°. *Условот на теоремата да се искористи целосно.*

5.3. ДИДАКТИЧКИ ПРАВИЛА ЗА УСПЕШНО ДОКАЖУВАЊЕ

За постигнување добри резултати во изучувањето на доказите и, особено, во обучувањето на учениците самостојно да докажуваат теореми, треба да се имаат предвид редица дидактички правила.

1) *Да се подготви „теренот"*, т.е. да се повтори и освежи во паметта на ученикот сè што е битно за докажување на даденото математичко тврдење. Во таа смисла, во почетокот на часот или непосредно пред почнувањето на соодветниот дел на

доказот, треба да се спроведе повторување (со испрашување) на формулациите од потребните дефиниции или теореми. Во некои случаи, ако тие дефиниции, теореми, правила или формули подолг период не биле употребувани, добро е да се зададат за повторување претходниот час како домашна работа.

2) Наставникот треба прво да се убеди дека сите ученици *правилно ја разбрале содржината на теоремата* и дури потоа да пристапи кон организирање доказ.

3) Секој ученик, пристапувајќи кон докажувањето, треба да знае дека *се вистинити сите тврдења што го градат доказот на докажуваната теорема* (содржани во условот на теоремата, во дефиницијата на поимите што фигурираат во неа, во употребените аксиоми, во порано докажани теореми или во последиците од нив и од условот).

4) Пред да се пристапи кон доказот, наставникот треба да се обиде *да ги убеди учениците во неговата неопходност*. Тоа е особено важно во систематскиот курс по геометрија, каде што редица први теореми се речиси очигледни („Низ една точка минуваат безброј многу прави" и др.).

5) Наставникот треба да укажува на *правилното разбирање на цртежот при доказите*: дека цртежот ништо не докажува, но понекогаш дава идеја за откривање доказ и го олеснува неговото сфаќање и водење.

6) Дадена теорема може да биде формулирана во вид на *„задача од општ вид"*. Да наведеме еден пример.

Пример 4. Теоремата: „Висината h, спуштена кон хипотенузата во правоаголен триаголник е геометриска средина од ортогоналните проекции p и q на катетите врз хипотенузата, т.е. $h = \sqrt{pq}$" (Евклидова теорема), може да се формулира во вид на ваква задача: „Да се изрази висината h, спуштена кон хипотенузата во правоаголен триаголник, со помош на ортогоналните проекции p и q на катетите врз хипотенузата".

Ваквиот пристап кон докажувањето теореми (во вид на решавање соодветна задача) во наставата *внесува елементи на евристичност и проблемност*, со што подобро се стимулира активната работа на учениците (отколку догматското задавање на готова формулација). Притоа, запознавањето на учениците со разни методи на докажување математички тврдења (или со разни методи на решавање задачи) има првостепено значење за да се научат самостојно да докажуваат.

Уште еднаш ќе напомниме дека секој ученик е должен *да ги помни формулациите на изучените теореми* (не мора дословно). Но, не е потребно да се бара од него да ги помни доказите на сите тие теореми. Препорачливо е доказите на порано изучени теореми да се задаваат за повторување. Притоа, треба да им се укаже на учениците дека е доволно во нивните одговори да ја изнесат *само идејата или планот на доказот* (а не и сите поединости, наредени последователно).

5.4. ВЕЖБИ

Да се направи подробна анализа за трагањето по доказ и да се даде (барем еден) доказ на назначената теорема (**1-4**).

1. Трапез со еднакви дијагонали е рамнокрак. (Пр. 1.)
2. Хармониската средина на два позитивни различни броеви е помала од нивната геометриска средина. (Пр. 2.)
3. Симетралата на кој било агол на триаголникот ја дели спротивната страна на делови пропорционални на прилегнатите страни (Пр. 3.)

Како може да се искористи за доказ на оваа теорема односот на плоштините P_1 и P_2 на ΔADC и ΔBDC (црт. 1)?

4. Ако a, b, c се страни на некој триаголник и

$$a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca,$$

тогаш тој триаголник е рамностран.

5. Да се изрази должината (a) на една катета во правоаголен триаголник со помош на нејзината ортогонална проекција (p) врз хипотенузата и должината (c) на хипотенузата.

VIII

МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИЧКО МИСЛЕЊЕ

1. МАТЕМАТИЧКА ЗАДАЧА

1.1. ПОИМОТ ЗАДАЧА, РЕШАВАЊЕ, РЕШЕНИЕ

Со математички задачи и со нивно решавање се срекававме уште од почетокот на нашето школување. А сепак, кога би се запрашале: „Што е тоа (математичка) задача?", веројатно не би дале задоволителен одговор.

Зборот *задача,* во најширока смисла, означува некакво *барање* да се исполни нешто, „да се реши". Во наставата, под *задача* најчесто се подразбира *вежба што се извршува со: пресметување, конструирање или расудување („докажување")* и за неа се вели дека е *дидактичка задача.*

Во математиката (како наука, но и како наставен предмет) многу често се поставува барањето:

> *„Од дадено множество M математички објекти да се оддели подмножество S, чиишто елементи задоволуваат дадени услови, т.е. имаат дадени својства."*

Во тој случај се вели дека со тоа барање е поставена една **математичка задача** или накусо **задача.**

** Овој поим ќе го објасниме поблиску. Но, пред тоа ќе разгледаме неколку примери на објекти што се нарекуваат математички задачи.

Пример 1. Да се реши равенката $X^3-4X^2+3X = 0$.

Со оваа задача е зададено, на описен начин, едно множество S (а: тоа е множеството корени на равенката $X^3-4X^2+3X=0$) и се бара **тоа множество да се зададе конструктивно,** т.е. преку непосредно посочување на неговите елементи.

Притоа, однапред се има предвид дека S е подмножество од некое множество броеви M, наречено **множество од допуштени**

вредности на непознатата (овде, на пример $M=\mathbb{R}$).

Пример 2. Основите на еден рамнокрак трапез се 24 cm и 8 cm, а кракот му е 10 cm. Да се најде плоштината на триаголникот, чијашто основа е помалата основа на трапезот, а другите две страни се добиени како продолжение на краците на трапезот до нивниот пресек.

Оваа задача претставува една низа од мисли, преку која, всушност, описно се задава едно множество S (имено: множеството чијшто елемент е бројот што ја претставува плоштината на споменатиот триаголник) и се бара тоа множество да се зададе конструктивно. И тука S е подмножество од некое множество M, кое јавно не е назначено, но се подразбира дека тоа е множеството на позитивните реални броеви.

Пример 3. Да се конструира триаголник, ако се зададени: a, $b+c$, h_c.

Со оваа задача е описно зададено множеството S од тројки неколинеарни точки-темиња на триаголник што ги задоволуваат дадените услови. Се бара множеството S да се зададе конструктивно, т.е. да се посочи секој елемент на S. Притоа се бара објектите на S да се добијат по конечен број примени на некакви правила, што карактеризираат определени цртачки инструменти, најчесто линијар и шестар. Секако, и тука S го разгледуваме како подмножество на друго множество M - множество од сите неколинеарни точки во рамнината.

Пример 4. Во ΔABC страната AB е најголема. Ако точката P лежи на страната AC, а точката Q - на BC, тогаш $\overline{PQ} \le \overline{AB}$. Докажи!

Во оваа задача е зададено множеството $S=\{(PQ,AB)\}$ од подредена двојка отсечки, за кои $P\in AC$, а $Q\in BC$. Треба да се докаже дека тоа множество е подмножество од графикот на релацијата "<" во множеството на сите отсечки.**⌋

Разгледаните примери ја сугерираат следнава описна дефиниција.

Математичка задача е низа од мисли со кои, на некој начин, се задава подмножество S на дадено множество M од математички објекти и се бара:

а) *да се најде S конструктивно, ако е конечно;* или

б) *да се установи дека S е подмножество на веќе зададено подмножество од M;* или

в) *да се покаже дека објектите на S може да се добијат преку определени правила што карактеризираат некакви цртачки инструменти;* или

г) *да се покаже дека S се совпаѓа со некое множество S' кое се прифаќа како познато.*

Начините а)-г) за задавање на S обично се викаат **барано претставување** на S, а за задачата се вели дека е **определена во множеството** M. Самото подмножество S се вика **множество решенија** (или **одговор**) на задачата во M.

Со поимот задача се сврзани и термините: текст, услов, заклучок, решавање и решение на задачата.

Текст на задачата се вика низата зборови од говорниот јазик и симболите што ги изразуваат мислите, со кои се задава: множеството *M*, својствата на елементите од *S* и барањето за соодветно претставување на *S*.

Услов на задачата е делот од текстот со кој се задава *S* описно (а *M* - описно или конструктивно).

Заклучок на задачата е делот од со кој се посочува бараното претставување на *S*.

Решавање на задачата - тоа е дејноста со која, од даденото задавање на *S* во текстот, се оди кон бараното претставување на *S*.

Притоа, како резултат на таа дејност (т.е. на решавањето) се формира конечна низа од начини на задавање на *S* (а понекогаш - и од други множества S_k) што овозможуваат да се добие бараното претставување на *S*, а секоја таква низа се вика **решение на задачата**.

Забелешка. Поимот „решение на задача" не треба да се изедначува со „решение на равенка" (или со *решение на кој било предикат*). На пример, бројот 3 е решение на равенката $X^3-4X^2+3X=0$; решение пак на задачата „Да се реши равенката $X^3-4X^2+3X=0$" е низата од начини на задавање на множеството *S* од сите броеви што ја задоволуваат дадената равенка.

Поимот *математичка задача во математиката не е строго дефиниран.* Реченицата со која погоре го објаснивме овој поим не е дефиниција (во математичка смисла), туку само опис на тој поим. И поимот дидактичка задача останува недефиниран.

1.2. ВИДОВИ МАТЕМАТИЧКИ ЗАДАЧИ

Во согласност со кажаното во 1.1, можеме да сметаме дека *секоја задача е составена од:*

(i) услов на задачата, означен со *A* и

(ii) барање (или заклучок) на задачата, означен со X и да ја запишеме симболички:

$$A \Rightarrow X.$$

(Понекогаш, за целиот текст со кој е зададена задачата се вели дека е „услов на задачата", но ние ќе го користиме тој термин во смисла на (*i*), т.е. само делот *A*, без барањето X.)

Во врска со тоа, а и според други цели и критериуми, можеме да направиме повеќе поделби на задачите и тоа, според: условот, барањето, структурата, припадноста кон некоја област, дидактичките цели, видот на мислењето и др.

1°. **Според условот**, задачите се делат на: определени, неопределени и преопределени.

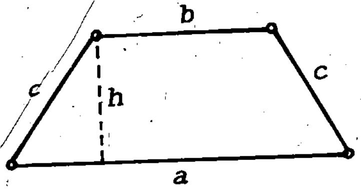
Задачата $A \Rightarrow X$, при која условот (A) содржи доволно и само доволно (тоа значи: ни повеќе ни помалку) податоци за исполнување на барањето (X), се вика **определена задача**.

Ако од условот (A) на определена задача $A \Rightarrow X$ се испушти некој податок (a_k), тогаш за така добиената задача се вели дека е **неопределена**.

Ако, пак, во условот (A) на една определена задача $A \Rightarrow X$ се додаде и некој друг податок (a_{n+1}), што не бил пред тоа во A, тогаш за така добиената задача (A, a_{n+1}) $\Rightarrow X$ се вели дека е **преопределена**. Притоа, ако $A \Rightarrow a_{n+1}$ е логичко следство, т.е. ако податокот a_{n+1} е логичка последица од другите податоци во условот A, тогаш задачата (A, a_{n+1}) $\Rightarrow X$ останува определена. Во спротивно, т.е. ако податокот a_{n+1} не е последица од податоците во A и им противречи, тогаш новодобиената задача (A, a_{n+1}) $\Rightarrow X$ нема решение и за неа се вели дека е **противречна**.

Пример 5. а) Даден е рамнокрак трапез со основи a=13cm, b=7 cm и крак c=5 cm. Да се најде плоштината P на тој трапез (црт. 1).

Условот на оваа задача содржи доволно и само доволно податоци за исполнување на барањето. Според тоа, оваа задача е определена.



Црт. 1

б) Задачата: „Да се најде плоштината P на трапез со основи a=13 cm, b=7 cm и крак c=5 cm" е добиена од претходната со испуштање на условот „ трапезот е рамнокрак".Постојат безброј многу трапези со дадените податоци (а не се складни) што имаат различни плоштини. Според тоа, оваа задача е неопределена; таа има безброј многу решенија.

в) Ако во условот на задачата под а) се додаде и податокот дека висината е h=4 cm, тогаш се добива преопределена задача, којашто останува определена (податокот a_{k+1}: h=4 cm е последица од другите податоци). Ако пак во а) се додаде h=6 cm, ќе се добие преопределена задача што е противречна.

Да забележиме дека школските задачи обично се определени задачи.

2°. **Според барањето**, задачата може да биде: а) за пресметување ("**нумеричка**"), б) за конструирање ("**конструктивна**") и в) за докажување ("**теориска**").

3^o. **Според структурата**, задачата може да биде: а) **проста**, т.е. таква задача којашто не може, или нема потреба, да се разбие на две или повеќе задачи, б) **сложена**, т.е. таква задача, којашто задолжително се разбива на две или повеќе задачи (наречени **подзадачи** од таа задача).

Пример 6. Задачата „Да се најде плоштината на правоаголник чии страни се a=5 cm и b=3 cm" е проста задача.

Задачата, пак: „Да се најде плоштината на правоаголник чија дијагонала е 26 cm, а страните се однесуваат како 12:5" можеме да ја сметаме за сложена. (Кои подзадачи за оваа задача се неопходни?)

4^o. **Според содржината**, т.е. според **припадноста** кон некоја математичка дисциплина, задачите можеме да ги поделиме на:

- **аритметички** (такви се, на пример, нумеричките вежби што ги вклучуваат четирите аритметички дејства со рационални броеви),
- **алгебарски** (такви се задачите за решавање равенки, неравенки и нивни системи, задачи за трансформации на алгебарски изрази, докази на алгебарски идентитети и неравенства),
- **геометриски** (тоа се задачи, сврзани со геометриски фигури, при што тие може да бидат задачи за: пресметување, докажување и конструирање),
- **аналитични** (задачи, аналогни на алгебарските, а се однесуваат на трансцедентните предикати, на изводите, интегралите и др.),
- **тригонометриски** (што се однесуваат на тригонометриските функции, равенките, идентитетите и сл.; тие може да се сметаат за поткласа од аналитичните задачи).

┌** Но, оваа поделба е релативна: една иста текстуална задача, понекогаш, по содржина може да припаѓа на една област, а по методот на нејзиното решавање - на друга; уште повеќе, една задача, во некои случаи, може да се реши на повеќе различни начини: аритметички, алгебарски, геометриски. Според тоа, оваа поделба не претставува класификација на задачите (во математичка смисла), а истото важи и за другите поделби на задачите. **┘

Пример 7. Задачата:

а) „Докажи дека $7|(3^{99}+4^{99})$" е аритметичка;

б) „Реши ја равенката $5^{2x}-6\cdot5^{x}+5=0$" е алгебарска;

в) „Во трапезот $ABCD$ ($AB\|CD$), средната линија е 6,5 cm, основите се разликуваат за 5 cm и $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACB$. Пресметај ја должината на дијагоналата AC"е геометриска (попрецизно: планиметриска) задача;

г) „Најди го $tg\frac{\alpha}{2}$, ако $cos\alpha$=0,8 и α е остар агол" е тригонометриска задача;

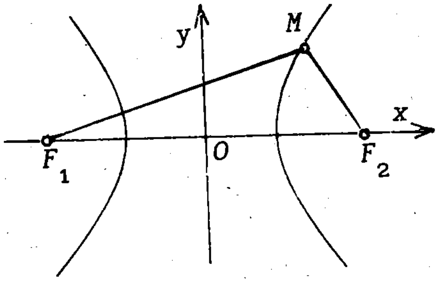
д) „Во пресечните точки A и B на правата $7X+y = 25$ и кружницата $(X-7)^2+(y-1)^2 = 25$ се конструирани тангенти на кружницата. Најди го аголот α меѓу тангентите" - е аналитична задача.

г) „Да се најде волуменот на телото добиено со ротација на лакот од синусоидата $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, околу оската OX" е аналитична.

Како што споменавме, една задача што припаѓа по содржина на некоја област, во некои случаи може да се реши со методи од друга област.

Пример 8. Една точка M од дадена хипербола е сврзана со фокусите F_1 и F_2. Да се најде геометриското место на пресечните точки меѓу симетралите на отсечките MF_1 и MF_2 кога M се движи по хиперболата (црт. 2).

Според содржината, оваа задача може да се нареди меѓу аналитичните. Таа може да се реши со методите на аналитичната геометрија, но може и со чисто планиметриски методи, поради што можеме да ја наредиме и во класата на геометриските задачи.



Црт. 2

Пример 9. Задачата: „Изведницата на прав кружен конус со должина S, наклонета е кон рамнината на основата под агол α. Пресметај ја плоштината P и волуменот V на конусот" можеме да ја сметаме за стереометриска, но и за тригонометриска.

5°. Според дидактичките цели, задачите се делат на три вида: а) **задачи за сознавање („сознавачки")** - со чија помош се доаѓа до нови знаења; б) **задачи за увежбување („тренирачки")**, чијашто главна цел е стекнување трајни навики и вештини, в) **задачи за развивање („творечки")**, за кои е неопходно творечко мислење.

Елементи на творечкото мислење се среќаваат и во задачите за сознавање и увежбување, но тие не можат наполно да ја обезбедат многу важната цел на современата настава: развивање на продуктивно, творечко, „евристично" мислење кај учениците. Затоа треба систематски да се решаваат специјално одбрани задачи, во кои, покрај логичкото мислење, се бара математичка интуиција, пронаоѓаштво и еластичност на мислењето. Таа тенденција е одразена во новите учебници преку предлагање **нестандардни задачи.**

6°. Според типот на мислењето што преовладува во текот на решавањето, задачите можеме условно да ги поделиме на: алгоритамски, полуалгоритамски и евристични.

Алгоритамски се наречени задачите при кои решението е еднозначно определено по соодветна формула или правило; најчесто, тоа се вежби за наоѓање бројна вредност на некој израз, пресметување корени на квадратна или друга равенка, пресметување плоштина на ликови, волумени на тела според формула и сл.; кон нив припаѓаат главно задачите за увежбување.

Полуалгоритамски (полуевристични) се викаат задачите при кои решението се определува нееднозначно по ориентациона шема; такви се повеќето геометриски задачи; задачите за сознавање најчесто се полуалгоритамски, а такви се и некои задачи за увежбување (што не се решаваат директно, „по формула" или по некое правило).

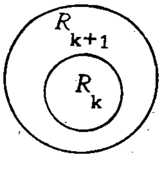
Евристични - тоа се нестандардни задачи, за чие решавање доаѓа до израз творечкото мислење; задачите за развивање главно се евристични, а многу примери за нив наоѓаме меѓу геометриските и аналитичните задачи.

1.3. СТРУКТУРА НА РЕШЕНИЕТО НА МАТЕМАТИЧКА ЗАДАЧА

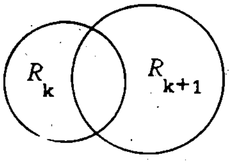
Секое решение на која било математичка задача се состои од: аксиоми или дефиниции или од решенијата на други задачи. Секоја задача Z_k, чие решение се содржи во решението на дадена задача Z, се вика **задача-компонента** (или задача-составка или **подзадача**) на дадената задача Z.

Да го означиме со R_n решението на задачата Z_n, а со R_1, $R_2, \dots, R_{n-1}$ - последователно аксиомите и решенијата на подзадачите што се содржат во решението R_n. Нивниот однос можеме да си го претставиме со венови дијаграми како на црт. 3 - црт. 6, според следниов договор:

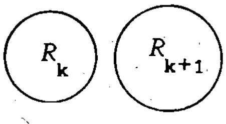
- црт. 3: R_k се содржи во R_{k+1},
- црт. 4: R_k и R_{k+1} имаат заеднички дел, но ниедно од нив не се содржи во другото,
- црт. 5: R_k и R_{k+1} немаат заеднички дел,
- црт. 6: R_k се содржи и во R_{k+1} и во R_{k+2}, а последниве не се содржат едно во друго.



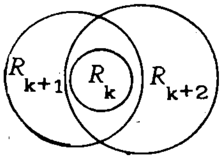
Црт. 3



Црт. 4

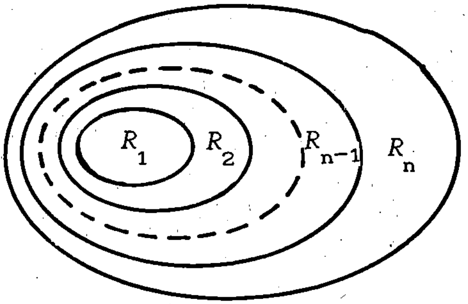


Црт. 5

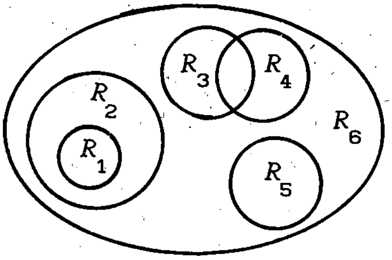


Црт. 6

Наjпростиот случаj кога за секоj k решението R_k се содржи во R_{k+1} е претставен на црт. 7. Но, во повеќето случаи, диjаграмот со коj е претставена низата R_1, $R_2,\ldots,R_n$ е посложен, како на пример, на црт. 8.



Црт. 7



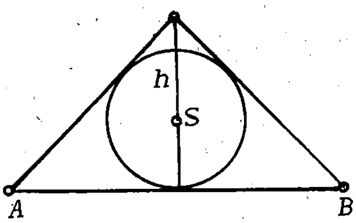
Црт. 8

Структурата на решението на една математичка задача, ќе jа согледаме на еден пример.

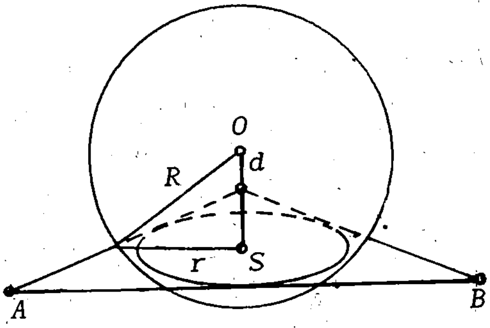
Пример 10. Да jа претставиме (со: зборови, диjаграм и граф) структурата на решението на следнава задача:

„Страните на ΔABC, со должини $\overline{AB}$=12 cm и $\overline{AC}=\overline{BC}$=10 cm, допираат сфера со радиус R=5 cm. Да се наjде растоjанието d од центарот O на сферата до рамнината на триаголникот".

Решение. Дадената ситуациjа можеме да си jа претставиме како на црт. 9 и црт. 10.



Црт. 9



Црт. 10

Решението на задачата ќе го сочинуваат решениjата на неколку подзадачи.

1) Jа наоѓаме висината h на ΔABC, спуштена од темето C:

$$h = \sqrt{b^2-a^2/4} = 8 \text{ cm}.$$

2) Ја наоѓаме плоштината P на $\triangle ABC$:

$$P = \frac{ah}{2} = 48 \text{ cm}^2.$$

3) Полупериметарот на $\triangle ABC$ е $s = \frac{a+2b}{2} = 16$ cm.

4) Го бараме радиусот r на впишаната кружница во $\triangle ABC$:

$$r = \frac{P}{s} = 3 \text{ cm}.$$

5) Бараното растојание d е оддалеченоста меѓу центарот O на сферата и центарот S на впишаната кружница во $\triangle ABC$:

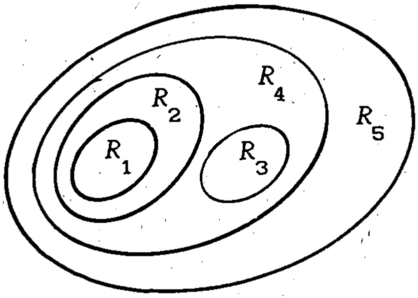
$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = 4 \text{ cm}.$$

(*Забелешка.* За да се конструира решението 1)-5), обично „се тргнува одназад":

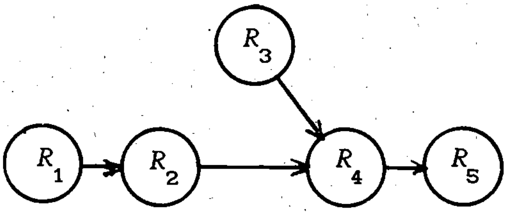
$$\text{а) } d = \sqrt{R^2 - r^2}; \quad \text{б) } r = \frac{P}{s}; \quad \text{в) } s = \frac{a+2b}{2};$$

$$\text{г) } P = \frac{ah}{2}; \quad \text{д) } h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.)$$

Означувајќи го со R_k решението на подзадачата к), к=1, 2, 3, 4, 5, дијаграмот на решението на дадената задача ќе изгледа како на црт. 11; на црт. 12 е претставен графот на тоа решение.



Црт. 11



Црт. 12

1.4. ВЕЖБИ

Да се утврди од колку елементи се состои множеството (S) решенија на дадената задача (**1-4**).

1. Помалата страна на еден правоаголник е еднаква со a cm, а симетралата на еден од неговите агли ја дели поголемата страна во однос 2:5. Да се најде периметарот на правоаголникот.

Одг. Од два; $S = \{9a, \frac{24a}{5}\}$.

2. Да се најде точка на правата $3x+y-15=0$, од која отсечката AB, $[A(-4,-3),\ B(-3,4)]$ се гледа под прав агол.

Одг. Од два; $\{(4,3),\ (5,0)\}$.

3. Во еден двоцифрен број, цифрата на единиците е за 1 а) поголема, б) помала од цифрата на десетките. Ако тој број се подели со цифрата на десетките, ќе се добие количник 11 и остаток 1. Кој е тој број?

Одг. а) $S=\{12,23,34,45,56,67,78,89\}$. б) $S=\emptyset$.

4. Да се конструира ΔABC, ако се зададени: $a+b$, c, α (при: $a+b > c$, $0 < \alpha < 180^{\circ}$).

Одг. Од еден.

5. Дадена е следнава задача:

„Основите на еден трапез се $a=39$ и $b=18$, а краците се $c=13$ и $d=20$. Да се пресмета плоштината P на трапезот".

а) Покажи дека таа е определена.

б) Ако во дадената задача „трапез" се замени со „четириаголник", дали таа ќе биде определена?

в) Од дадената задача направи една неопределена и една преопределена.

6. Две кружници се допираат однадвор, и се сместени во трета, поголема од нив кружница. Секоја од трите кружници ги допира другите две, а нивните центри лежат на иста права. Даден е радиусот R на најголемата кружница и должината t на нејзината тетива што е тангента на помалите кружници во нивната допирна точка.

а) Да се најде плоштината P на делот од големиот круг што е надвор од малите кругови.

б) Дали се дадени доволно податоци за добивање еднозначен резултат?

в) Дали задачата е определена (неопределена, преопределена)?

7. Да се одреди видот на задачата **1**, земајќи разни признаци. Истото да се направи за секоја од задачите **2-6**.

Да се решат задачите **8-12**. Во решението (на секоја од нив) да се посочат јавно решенијата на подзадачите од кои тоа е составено. Да се направи дијаграм и граф на решението.

8. Да се најде плоштината на трапезот чиишто основи се $a=18$ и $b=10$, а аглите при поголемата основа се $\alpha=60^{\circ}$ и $\beta=30^{\circ}$.

9. Основите на еден трапез се 34 cm и 20 cm, а краците се 13 cm и 15 cm. Да се најде односот меѓу плоштината P_1 на трапезот и плоштината P_2 на триаголникот што се добива „над трапезот" со продолжување на неговите краци.

10. Две пумпи можат да исцрпат еден резервоар за 6 часови. При едно празнење, по 4 часа заедничка работа, првата пумпа се расипала, а втората ја завршила работата уште за 5 часови. За колку часови би можела да ја изврши це-

целата работа секоја пумпа одделно?

11. Во $\triangle ABC$, со страни $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{BC}=8$ cm и $\overline{AC}=12$ cm, страната AC служи за дијаметар на полукружницата којашто ги сече AB и AC во точките M и N. Да се најде плоштината на четириаголникот $AMNC$.

12. Во правилна четириаголна пирамида, со основен раб $a=12$ и висина $H=8$, впишана е коцка така што еден нејзин ѕид лежи на основата од пирамидата, а четири темиња лежат на бочните рабови. Да се најде односот на плоштините на пирамидата и коцката.

2. МЕТОДИ НА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ

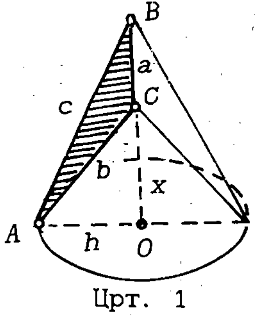
Решавањето на која било сложена задача се сведува на решавање попрости задачи од кои таа е составена. Според тоа, главниот проблем е: да се издвојат подзадачи, чиешто решение ќе доведе до исполнување на барањата од дадената задача. Можни се два основни начини за барање решение: *синтетичен* и *аналитичен*, при што аналитичниот метод има повеќе варијанти.

2.1. СИНТЕТИЧЕН МЕТОД

Основата на синтетичниот метод за решавање на една задача $A \Rightarrow X$ е содржана во постапката што обично ја применуваат учениците при решавањето на сложена задача.

Имено, *се зема некој податок од условот A на задачата и кон него се придружува некој од другите податоци;* ако овие два податока образуваат проста задача, тогаш таа ќе се реши; (ако пак не се добила проста задача, се земаат други податоци); како резултат на таа проста задача, се добива прв *помошен податок;* користејќи го, евентуално, и тој помошен податок (заедно со почетните податоци, од условот), се составува нова проста задача и се добива втор помошен податок; итн., сѐ додека не се дојде до таква проста задача чијшто резултат е барањето на основната задача.

Пример 1. Триаголникот ABC со страни $a=9$, $b=10$ и $c=11$ ротира околу најмалата страна. Да се пресмета волуменот на така добиеното тело.



Црт. 1

Решение. Со назначената ротација се добива тело што претставува остаток од еден конус кога од него ќе се „извади" еден друг, помал конус (црт. 1).

Го земаме податокот $a=9$; кон него ги приклучуваме другите два податока $b=10$ и $c=11$ и составуваме задача.

1) *(Прва проста задача).* При дадени страни a, b и c, да се најде полупериметарот s на ΔABC.

Решението на оваа задача,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+10+11}{2} = 15,$$

претставува прв помошен податок.

2) *(Втора проста задача).* Со помош на a, b, c и s, ќе ја пресметаме плоштината P на ΔABC:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{15\cdot6\cdot5\cdot4} = 30\sqrt{2}.$$

3) Со помош на a и P, ќе ја пресметаме висината $h=\overline{AO}$ (спуштена од темето A кон страната BC):

$$h = \frac{2P}{a} = \frac{2\cdot30\sqrt{2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{3}.$$

4) Земајќи ги h и b, од ΔAOC, ќе го најдеме $x=\overline{OC}$:

$$x^2 = b^2-h^2 = 100 - \frac{800}{9} = \frac{100}{9},\quad x=\frac{10}{3}.$$

5) Со помош на x и h, ќе го најдеме волуменот V_1 на „помалиот конус" (црт. 1):

$$V_1 = \frac{\pi}{3}\cdot h^2\cdot x = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{800}{9}\cdot\frac{10}{3} = \frac{800\pi}{81}.$$

6) Бидејќи $h = \frac{20\sqrt{2}}{3}$ е радиусот и $a+x = 9+\frac{10}{3} = \frac{37}{3}$ е висината на „поголемиот конус" (црт. 1), неговиот волумен V_2 ќе биде

$$V_2 = \frac{\pi}{3}\cdot h^2(a+x) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{800}{9}\cdot\frac{37}{3} = \frac{800\cdot37\pi}{81}.$$

7) На крајот:

$$V = V_2-V_1 = \frac{800\pi}{81}\cdot(37-10) = \frac{800\pi}{3}.$$

┌∗∗ **Забелешка.** Подзадачите 4)-7) може да се заменат со следнава подзадача:

$$4')\quad V = V_2-V_1 = \frac{\pi}{3}h^2(a+x) - \frac{\pi}{3}h^2\cdot x =$$

$$= \frac{\pi}{3}h^2\cdot a = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{800}{9}\cdot9 = \frac{800\pi}{3}.$$ ∗∗┘

Ако дадената задача се запише условно, во вид на импликацијата $A \Rightarrow X$, а решенијата на првата и последната од конечната низа подзадачи, од кои се добива решението на дадената задача, ги означиме со a_1 и a_n соодветно, тогаш процесот на решавањето на задачата со синтетичниот метод најчесто може да се запише шематски вака:

$$A \Rightarrow a_1;\ a_1 \Rightarrow a_2;\ \ldots;\ a_n \Rightarrow x, \qquad (1)$$

од каде што, според правилото на хипотетичен силогизам (и, евентуално, други правила), добиваме дека е точна импликацијата $A \Rightarrow X$.

Во практиката, при решавањето на задачи на час (на табла или во тетратката) се врши *краток запис на решението*, во кое се испуштени не само формулациите на прашањата (т.е. на подзадачите), туку и некои усни и „очигледни" дејства.

Така, решението на задачата од примерот 1, по црт. 1, би го запишале кратко:

„За ΔABC (црт. 1) имаме: $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 15$, плоштината $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 30\sqrt{2}$, а висината $h=\overline{AO}=\dfrac{2P}{a} = \dfrac{20\sqrt{2}}{3}$. Тогаш за волуменот V, ставајќи $x=\overline{CO}$, ќе имаме: $V = \frac{\pi}{3}h^2(a+x)-\frac{\pi}{3}h^2x = \frac{\pi}{3}h^2a = \frac{\pi}{3}\cdot\dfrac{800}{9}\cdot 9 = \dfrac{800\pi}{3}$."

Меѓутоа, ученикот треба да знае да си ги постави прашањата, т.е. да си ги формулира подзадачите, а потоа да ги објасни добиените резултати. Значи, ученикот треба да знае, од таков краток запис, строго и целосно да го образложи решението, укажувајќи на секој чекор во него. (Увежбувањето на таква дејност придонесува за развивање на математичкото мислење и воопшто за подигнување на математичката култура на ученикот.)

Синтетичниот метод се применува за широк круг задачи: аритметички, алгебарски, геометриски, за пресметување, за докажување, за конструирање. *Компактноста* при излагањето на „готовите" решенија и релативно *кусото време* за проследување на решението е предност (и достоинство) на овој метод.

Така, и покрај ниската пребарувачка и дидактичка ефикасност, синтетичниот метод е мошне популарен и меѓу учениците и меѓу наставниците, меѓу другото и затоа што не бара голем мисловен напор од ученикот.

2.2. АНАЛИТИЧЕН МЕТОД НА РЕШАВАЊЕ

При аналитичниот метод на решавање задача се тргнува не од условот на задачата, туку од прашањето, т.е. од барањето во неа.

Решавањето на задача со овој метод почнува со прашањето:

„Што треба да се знае, за да се одговори на прашањето, т.е. да се исполни барањето од дадената задача"?

За да се даде правилен одговор на поставеното прашање, треба да се знаат податоците (условот) на задачата и да се уважат оние зависности што ги сврзуваат со бараниот број, величина и сл.

Пример 2. Паралелните страни на еден трапез се $a=24$ и $b=10$, а непаралелните се $c=13$ и $d=15$. Да се пресмета плоштината на трапезот.

Решение. 1) За да ја пресметаме плоштината S на трапезот, доволна ни е формулата

$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h,$$

при што висината h на трапезот не ја знаеме (црт. 2).

2) За да ја најдеме h, доволно ни е да ја знаеме плоштината P на $\triangle MBC$, при што $MC \parallel AD$ (црт. 2):

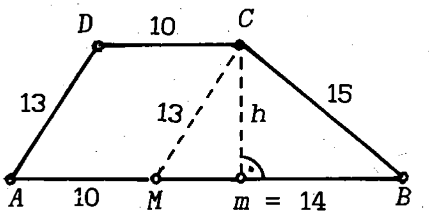
$$P = \frac{m\cdot h}{2}, \text{ т.е. } h = \frac{2P}{m},$$

каде што $m=\overline{MB}=a-b=14$, $c=\overline{CM}=13$.

3) За да ја најдеме плоштината P, доволна ни е Хероновата формула:

$$P = \sqrt{s(s-m)(s-d)(s-c)},$$

каде што $s = \dfrac{m+d+c}{2} = \dfrac{14+15+13}{2} = 21$.



Црт. 2

4) Сега, од последната етапа 3), се враќаме, преку 2), кон 1):

$$P = \sqrt{21\cdot 7\cdot 6\cdot 8} = 84; \quad h = \frac{2\cdot 84}{14} = 12; \quad S = \frac{24+10}{2}\cdot 12 = 204,$$

со што барањето (S) во задачата е најдено.

(Уште една илустрација на аналитичниот метод може да се најде во забелешката на крајот од примерот 10 во разделот 1.3.)

Аналитичниот метод се применува за многу широк круг задачи, од сите видови. Излагањето на решението со овој метод *не е така концизно* како со синтетичниот метод, но затоа пак има многу предности. Најважната од нив е дидактичката: *ученикот самостојно,* со сопствено размислување, може да *навлегува во решението* на задачата, т.е. сам „да го открива" и да трага по нови решенија.

Аналитичниот метод има повеќе варијанти, од кои најважните се методот на равенки и анализа при конструктивните задачи.

2.3. МЕТОД НА РАВЕНКИ (ИЛИ: МЕТОД НА АЛГЕБАРСКА АНАЛИЗА)

Методите во алгебрата за решавање задачи се наречени со заедничко име „алгебарска анализа". Методот на равенки е најважниот меѓу нив и затоа, честопати, самиот тој се нарекува **метод на алгебарска анализа.**

Називот алгебарска анализа за методот на равенки е оправдан зашто тој има нагласени одлики на аналитичен метод. Имено, кога се решва задача со тој метод, се тргнува од барањето во задачата, се воведува ознака за непознатата (или за непознатите, ако се работи за систем равенки) и се составува равенка. Како резултат на тоа, основната задача се трансформира во *прва помошна задача: да се реши составената равенка или систем равенки.* Тоа е **првата основна етапа** на овој метод.

Пример 3. Таткото е трипати постар од синот, а пред шест години бил петпати постар од него. Колку години има таткото, а колку синот?

Ученикот тргнува од барањето, т.е. почнува со решавањето „одназад": „Нека таткото има X години, а синот $У$ години; ...".

Втората основна етапа на методот на равенки се состои во *извршувањето на низа трансформации на помошната задача* (т.е. составената равенка или систем равенки), којашто ќе води кон добивање на корените на првобитната равенка, односно кон решенијата на првобитниот систем.

Третата етапа се состои од *проверка дали добиените корени односно решенија се бараните броеви,* т.е. дали се совпаѓаат бараното и добиеното множество решенија и, ако не се совпаѓаат, се бараат условите што треба да ги задоволи процесот на трансформирањето на равенките за да се добие множеството од сите решенија на основната задача и само тие. Со други зборови, треба да се види дали секоја од добиените равенки е еквивалентна со првосоставената равенка. Ако одговорот на ова барање е потврден, тогаш бараното и добиеното множество се совпаѓаат и останува само да го запишеме резултатот.

Случајот кога секоја од добиените равенки е еквивалентна со првосоставената е „идеален". Тој може да се прикаже со логичка шема на следниов начин.

За основната задача со услов A и барање X нека е составена равенка, означена со $A(X)$. Ако се запазува еквиваленцијата на сите натамошни трансформации, тогаш процесот на решавањето можеме да го претставиме со шемата:

$$A(X) \Leftrightarrow A_1(X) \Leftrightarrow A_2(X) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_{n-1}(X) \Leftrightarrow A_n(X). \qquad (2)$$

Во практиката, новодобиените равенки (односно системот), најчесто се последица од првобитната. (Притоа, една равенка B се вика **последица** од друга равенка A, симболички:

$A \Rightarrow B$, ако B ги содржи сите решенија на A.) Во тој случај последната равенка ги содржи сите решенија на основната задача, но може да содржи и други, **„туѓи решенија"**, што не се решенија на основната задача. Поради тоа, неопходна е проверка на секој добиен корен или решение со помош на условите од основната задача. (Таква проверка е потребна дури и тогаш кога е обезбедена еквивалентност на сите равенки, од првосоставената до последната, а првосоставената равенка е последица од основната задача.)

Значи, ако релацијата за еквивалентност во шемата (1) е заменета, макар за еден пар соседни задачи, со релацијата *„следува"* – од обликот $A_k \Rightarrow A_{k+1}$, тогаш е можно појавување на *„туѓи решенија"*.

Ако пак релацијата $\Leftrightarrow$ во (1) се замени со релација од обликот $A_{k+1} \Rightarrow A_k$, тогаш може *да се загубат решенија* (се разбира, и тоа е недопустливо).

Така, на пример, преминувајќи:

а) од $X+1 = 3$ на $(X+1)^2 = 9$

се јавува ново, „туѓо" решение ($X=-4$),

б) од $(X^2-2X-15)(X-1)=0$ на $X^2-2X-15=0$,

„се губи" едно решение ($X=1$).

Проверката на решението на една задача, добиено со методот на равенки, од теориско-логичка гледна точка, е неопходна. Таа често се сведува на решавањето на некоја од можните задачи што се обратни на решената, „основната" задача. (Во практиката, нема единствено мислење за проверката.) Во секој случај, *ученикот треба да ја сфати неопходноста од таквата проверка и да умее да ја направи,* на пример, на контролните писмени работи.

Наместо проверка преку решавањето на некоја обратна задача, во интерес на штедење време, најчесто се ограничуваме на *делумна проверка:* секој од најдените корени го заменуваме во првосоставената равенка или пак ја проверуваме нивната непротивречност со условот на основната задача.

** **Забелешка.** Декарт, во својата работа *„Правила за раководство на умот"* се стремел да даде универзален метод за решавање задачи (Д. Поја [28], стр. 45). Шемата, за која очекувал дека ќе биде применлива кон сите видови задачи, приближно е следнава: 1) задача од кој било вид се сведува на математичка задача; 2) математичка задача од кој било вид се сведува на алгебарска задача; 3) која било алгебарска задача се сведува на решавање една единствена равенка. Иако оваа програма не е применлива при денешниот развој на математиката (а и самиот Декарт подоцна ги увидел нејзините недостатоци), сепак таа укажува на тоа, колку важно место треба да има методот на равенки.**

2.4. АНАЛИЗА ВО КОНСТРУКТИВНИТЕ ЗАДАЧИ

Една варијација на аналитичниот метод се јавува и при решавањето на конструктивни задачи. Имено, ако една конструктивна задача е сложена и патот за нејзиното решавање не е очигледен, тогаш се прави анализа за да се изнајде таков пат што ќе овозможи да се конструира бараната фигура.

Решавањето започнува „одназад", т.е. од барањето на основната задача, најчесто со зборовите: *„Нека задачата е решена"* и приближно се претставува бараната фигура. Потоа, на направената скица се уочуваат познатите елементи, се издвојуваат попрости фигури (или се формираат со дополнување на цртежот) и меѓу нив се бара таква **помошна фигура** што ќе ги задоволува следните два услова:

(*i*) *таа фигура може да се конструира од дадените елементи на основната задача,*

(*ii*) *тргнувајќи од неа, може да се конструира бараната фигура.*

Очигледно, горната постапка е карактеристична за аналитичниот метод (зашто „се тргнува од последиците и се оди кон причините"), па затоа може да се смета за една варијанта на тој метод.

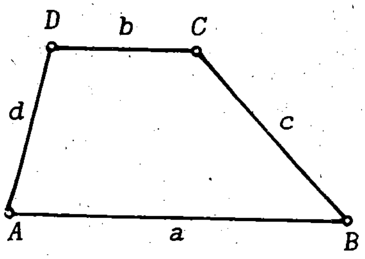
** За илустрација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 4. Да се конструира трапез ако се дадени неговите страни a, b, c, d.

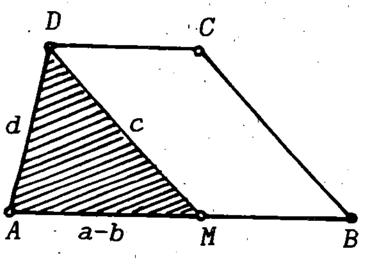
Решавањето на една конструктивна задача има, обично, четири чекори: 1) *анализа,* 2) *конструкција,* 3) *доказ* и 4) *дискусија (испитување).*

1) **Анализа.** Првиот чекор - анализата, како што рековме погоре, обично започнува со реченицата: „Нека задачата е решена", т.е. (во оваа задача) четириаголникот $ABCD$ нека е бараниот трапез (црт. 3), за кој е познато:

$a=\overline{AB}$, $b=\overline{CD}$, $c=\overline{BC}$, $d=\overline{AD}$ и $AB \parallel CD$.



Црт. 3



Црт. 4

Бараме помошна фигура (некој „дел" од трапезот) што може лесно да се конструира од дадените податоци, а што ќе овозможи и конструирање на трапезот. Во нашето трагање по таква фигура би можеле да дојдеме до ΔAMD, каде што $DM \parallel CB$ (црт. 4). Тој лесно се конструира (дадени му се сите три страни: $a-b$, c и d), а исто така овозможува, пак лесно, да го конструираме паралелограмот $MBCD$. Со тоа, трапезот би бил конструиран.

(Другите три чекори во решавањето на задачата не се битни за прашањето што го разгледуваме, но заради целосност, ќе ги проследиме накусо и нив.)

2) **Конструкција.** Го конструираме ΔAMD (според основната конструкција на триаголник што произлегува од признакот ССС). Потоа го конструираме паралелограмот $MBCD$ (по дадени: двете соседни страни и правците од правите на кои лежат тие две страни).

3) **Доказ.** Четириаголникот $ABCD$, добиен во 2) е трапез. Навистина, од конструкцијата следува дека $AB \parallel CD$, а $AD \parallel BC$.

4) **Дискусија** (испитување). Задачата може да има шест решенија, во зависност од тоа дали:

$$a \parallel b,\ a \parallel c,\ a \parallel d;\ b \parallel c,\ b \parallel d;\ c \parallel d.$$

Притоа, добиениот четириаголник ќе биде трапез, ако $x \neq y$ при $x \parallel y$ (т.е. избраните паралелни страни x, y се различни по должина). **

2.5. ВЕЖБИ

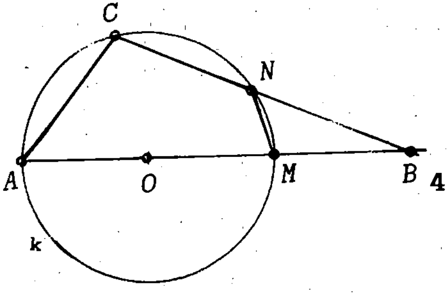
Да се решат на синтетичен начин задачите 1-3.

1. Правоаголен триаголник со катети $a=15$ и $b=20$ ротира околу хипотенузата. Да се пресмета волуменот на така добиеното тело.

2. Две машини можат да завршат една работа за 9 часа. Но, по 5 часа заедничка работа, едната машина престанала со работа, а другата ја завршила работата уште за 10 часа.

   За колку часа секоја машина одделно би ја завршила целата работа? (Види ја зад. 10 од 1.4.)

3. На црт. 5, кружницата k има центар во точката O, радиус еднаков со 7 cm, $\overline{OB}=22$ cm, $\overline{BC}=25$ cm и плоштината на ΔABC е 60 cm^2. Да се пресмета плоштината на четириаголникот $AMNC$.



Црт. 5

4. Да се реши зад. 1 со аналитичниот метод. Која е разликата меѓу ова решение и решението добиено со синтетичниот метод?

Да се илустрира аналитичниот начин на решавање во задачите 5-6.

5. Во прав кружен конус е впишана пирамида со основа правоаголен триаголник, а бочниот ѕид што минува низ едната од катетите, со рамнината на основата, образува агол на диедар α. Да се најде волуменот на пирамидата, ако генератрисата на конусот има должина s и е наклонета кон основата под агол B.

$$Одг.\ V = \frac{2s^3}{3\sin\alpha}\cdot\sin^2\beta\, ctg\alpha\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}.$$

6. Таткото им оставил 1600 златници на своите три сина. Во тестаментот прецизирал дека најстариот треба да добие 200 златници повеќе од средниот, а средниот 100 златници повеќе од најмладиот. По колку добил секој од синовите?

Наредните задачи (7-11) да се решат со методот на равенки.

7. Една цевка го полни еден базен за 15 минути, друга за 20 минути, а трета за 30 минути. За колку време ќе го наполнат трите цевки, ако работат истовремено?

8. Една работа Диме може да ја изврши за 6 часа, Климе за 8 часа, а Симе за 12 часа. За колку време тие ќе ја извршат таа работа, работејќи заедно (без да си пречат)?

9. Спореди ги задачите 7 и 8. Што забележуваш? Состави поопшта задача (со буквени ознаки) што ќе ги опфати двете споменати задачи. Обопштувањето да се направи и со земање неколку „полнечки" и неколку „празнечки" цевки.

10. Еден трговец продавал ореви од два вида: едни од 90 денари, а други по 60 денари за килограм. Тој сакал да добие 50 kg смеша по 72 денари за килограм.

а) Колку kg ореви од секој вид се потребни за тоа?

б) Обопшти ја задачата, заменувајќи ги броевите 90, 60, 72, 50 со букви a, b, c, v соодветно. (Прочитај го уште еднаш условот и воведи равенки.)

11. Двајца работници можат да завршат една работа за 18 часа, но по 15 часа заедничко работење, првиот ја напуштил, а вториот ја довршил уште за толку часови за колку што првиот би завршил $\frac{1}{9}$ од работата. За колку часа секој од нив сам би ја завршил таа работа?

12. Да се утврди дали ќе се загубат или ќе се добијат нови корени, кога дадената равенка се трансформира како што е назначено:

а) од $f(x)=g(x)$ на $f^2(x)=g^2(x)$;

б) од $f^2(x)=g^2(x)$ на $|f(x)|=|g(x)|$;

в) од $f(x)=g(x)$ на $\ln f(x)=\ln g(x)$.

13. Да се докаже дека

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 1 + \sqrt{x-1} \quad \text{при} \quad x\geq 1,$$

а) со надолна анализа (в. VII.2.2),

б) со помош на формулата:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}} \pm \sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}\right].$$

14. Да се конструира рамнокрак трапез, ако се зададени: поголемата основа a, висината h и дијагоналата f.

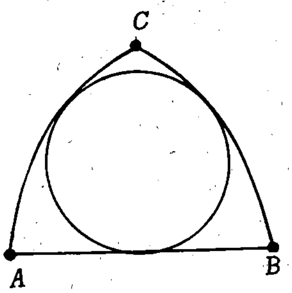
15. Да се конструира ромб, ако е даден остриот агол α и отсечката $a+h$, што е збир од страната и висината.

16. Да се конструира ΔABC, ако се дадени: аголот α, страната a и односот $m:n$ на страните AB и AC.

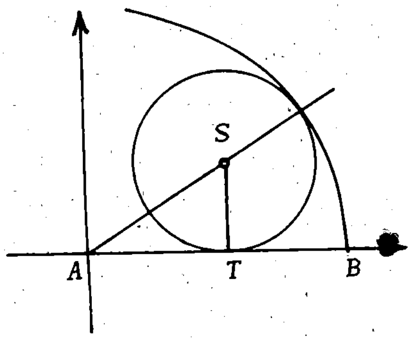
17. Да се конструира паралелограм, ако се дадени: една страна, односот меѓу дијагоналите и аголот меѓу нив.

18*. Праволиниската отсечка AB и двата кружни лака AC и BC формираат криволиниски триаголник. Центарот на едната кружница е во точката A, на другата е во точката B, а секоја од тие кружници минува низ центарот на другата. Во дадениот криволиниски триаголник да се впише кружница што ќе ги допира сите три негови страни.

Помош: Соодветната конфигурација е претставена на црт. 6 (таа може да се види на архитектонски дела од готски стил). Уважувајќи само дел од условот, соодветниот цртеж ќе го поставиме во координатен систем (црт. 7) и ќе се послужиме со средства од аналитичната геометрија.



Црт. 6



Црт. 7

Задачата се сведува на наоѓање на центарот $S(x,y)$ на бараната кружница (зашто радиусот r ќе биде $r = \overline{ST}$). Ако $\overline{AB} = a$, ќе добиеме: $y = a-\sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $x^2= a^2-2ay$, а бидејќи $x = a/2$, ќе добиеме $y = 3a/8$.

19. Низ центарот O на впишаната кружница на произволниот триаголник ΔABC е повлечена права, паралелна со AB. Таа права ги сече страните AC и BC во точките P и Q соодветно. Да се докаже дека

$$\overline{AP}+\overline{BQ} = \overline{PQ}.$$

Каков метод на решавање употреби?

20. Со какви правилни складни многуаголници може сосем да се покрие рамнина (притоа, секој многуаголник се наоѓа надвор од другите, а соседните многуаголници имаат една заедничка страна)?

Решение. Нека е тоа можно со n-аголници, при што во едно теме се наоѓаат m агли. Внатрешниот агол на правилен n-аголник изнесува $180(n-2)/n$, па

$$\frac{180(n-2)}{n}\cdot m = 360^{\circ}, \text{ т.е. } m = \frac{2n}{n-1} = 2+\frac{4}{n-2} \quad (n\geq3)$$

Но, m е природен број, па $n\in\{3,4,6\}$.

21. Забележуваме дека: $3=2^2-1^2$, $5=3^2-2^2$, $7=4^2-3^2$. Има ли општо правило? Формулирај го и образложи го (т.е. докажи го).

22. а) Да се покаже дека 100!+2 и 100!+3 се сложени броеви. Какви се 100!+4, ..., 100!+11?

б) Дали 100!+1 е прост или сложен број?

в) Да се напише низа од 100 последователни сложени природни броеви.

Одг. б) Сложен. *Помош.* Да се искористи теоремата на Вилсон: Ако p е прост број, тогаш $(p-1)!+1$ е делив со p.

23. Даден е $\triangle ABC$. Да се конструира квадрат $PQRS$ така што страната PQ да лежи на страната AB, а темињата R и S – на страните BC и CA соодветно.

3. МАТЕМАТИЧКО МИСЛЕЊЕ

3.1. ЗА ЗНАЧЕЊЕТО НА МАТЕМАТИЧКОТО МИСЛЕЊЕ

На прашањето: „Кое мислење се вика математичко, што е тоа, кои се неговите основни одлики?" досега нема јасен и еднозначен одговор ни во дидактиката на математиката ни во психологијата. И покрај тоа, прашањето за развивање на математичкото мислење кај учениците добива високо место при секоја реформа на средното или основното образование. Испитувањата на психолозите покажале дека математичкото мислење треба да се развива плански, насочено, со што се постигнуваат поефективни резултати во усвојувањето на системот математички знаења, вештини и навики.

Првите чекори во развивањето на математичкото мислење се содржани во развивањето на способност кај учениците *да овладеат со определени фиксирани операции или конкретни пос-*

тапки. Но, вистинскиот развиток на математичкото мислење означува развивање способност за: *откривање нови врски, овладување со општи постапки* (што ќе овозможат решавање на нови задачи) и добивање на нови знаења.

Математичкото мислење се карактеризира, обично, според следниве четири компоненти: а) содржината, б) математичката дејност и в) формата на мислењето, како и г) субјективните својства на карактерот на човекот што се занимава со математика.

Содржината ги претставува основните типови на математичкото мислење: конкретно, апстрактно, интуитивно, функционално, творечко.

Дејноста при математичкото мислење се базира врз научните методи на математичките иследувања: набљудување и обид, индукција, дедукција (т.е. аксиоматски метод), традукција (т.е. примена на аналогија), моделирање (т.е. примена на апстрактни математички модели).

Формата на математичкото мислење ги означува квалитетите на мислењето што го определуваат стилот на мислењето: еластичност, активност, помнење, ширина и длабочина, критичност и самокритичност, јасност, концизност и оригиналност.

Субјективните својства на карактерот (т.е. моралните квалитети) на човекот што се занимава со математика (што треба „математички да мисли"), се: наклоност кон истражување, способност за концентрација, имагинација и фантазија, поседување на упорност, љубопитност и интелектуална чесност, склоност кон творештво, точност и концизност, чувство на задоволство од работата и од нејзините резултати.

3.2. ОСНОВНИ ТИПОВИ НА МИСЛЕЊЕ

Овде ќе ги разгледаме накусо типовите мислења што се карактеристични за математичкото мислење.

1. Конкретно (предметно) мислење - тоа е мислење што е во тесна врска со конкретни модели на изучуваниот објект. Овој вид мислење е својствен на децата од предучилишната возраст и на учениците од првите одделенија. Во горните одделенија и во средното образование, учеството на конкретното мислење се намалува и му отстапува сè повеќе место на апстрактното, коешто настапува како соодветно обопштување на конкретното мислење. Во таа смисла конкретното мислење може многу успешно да се користи при воведувањето на нова тема или ново тврдење, а тоа има особено голема улога и во формирањето на апстрактни поими.

Да забележиме дека конкретното мислење се јавува во две форми: *неоперативно* - кога означува некое набљудување или сетилен прием и *оперативно* - кога означува непосредни дејства со конкретниот модел на објектот.

2. Апстрактно мислење. Мислење кое се одликува со способност за мисловно оттргнување од конкретната содржина на изучуваниот објект во полза на неговите општи својства што треба да се изучуваат, се вика апстрактно мислење.

** **Пример 1.** а) При разгледувањето на поимот геометриско тело, ние се оградуваме од сите својства на реалните (физички) тела, освен од формата, големината и положбата во просторот (во овој случај, апстрактното мислење се јавува во експлицитен вид)

б) Во случајот на броење предмети на конкретно множество, ние имплицитно ги игнорираме својствата на секој предмет одделно, сметајќи дека сите тие меѓусебно се еднакви (тука, апстрактното мислење се јавува во имплицитен вид). **

Апстрактното мислење се дели на: аналитично, логичко и просторно-шематско. Секое од нив настапува не изолирано, туку заедно со другите, само што преовладува во одделни етапи.

а) **Аналитичното мислење** *се карактеризира со јасно одделени етапи во сознавањето,* со целосно осознавање и на содржината и на применуваните дејства. Во наставата, ова мислење се јавува кај аналитичните докази на теореми, при решавањето задачи со помош на равенки и сл.

б) **Логичкото мислење** *се карактеризира со вештина да се изведуваат последици од дадени претпоставки* и теориски да се претскажуваат конкретни резултати. Во наставата, овој вид мислење се јавува во дедуктивните заклучувања, во заклучувањата со потполна индукција, при докажувањето теореми и сл.

Пример 2. Дали е точно тврдењето: „Доволен услов за една функција да биде непрекината е функцијата да биде диференцијабилна?" Дали тој услов е неопходен?

Пример 3. Дали е правилно заклучувањето: „Ако еден триаголник е рамнокрак, тогаш тој има два еднакви агли. Дадениот триаголник има два еднакви агли. Следствено, тој триаголник е рамнокрак".

в) **Просторно-шематското мислење** *се одликува со умеењето мисловно да се создаваат просторни претстави* или шематски конструкции на изучуваните објекти и извршување на операции над нив како над самите објекти. Шемите што притоа се составуваат може да имаат најразличен вид.

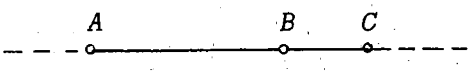
За развитокот на просторно-шематското мислење има мошне големо значење решавањето на соодветни задачи, изготвување модели на просторни фигури и ситуации, запознавање со поимот граф и сл.

Да разгледаме неколку примери.

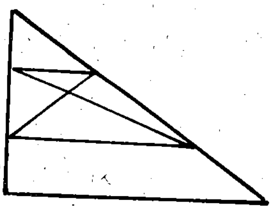
4) Колку отсечки се претставени на црт. 1? А колку полуправи?

5) Колку трапези се претставени на црт. 2? А колку триаголници?

6) Кој е најголемиот број делови на кои една рамнина ја делат три прави? А кој е најмалиот?



Црт. 1



Црт. 2

3. Интуитивно мислење. Интуитивното мислење е посебен начин на сознавање што *се карактеризира со непосредно постигнување на вистината.* Тоа дава можност да се дојде до некое решение или идеја во вид на скок, без премин, со испуштање на одделни алки во расудувањето.

Интуитивното мислење многу често се јавува во процесот на заклучувањето по аналогија, при решавањето на равенки, при нестандардните задачи и сл.

Улогата на интуицијата при изучувањето на математиката е мошне важна, особено во „истражувачки цели". Повеќе педагози препорачуваат *„прво да се создаде интуитивна претстава за материјалот и дури тогаш да почне запознавањето на учениците со формалните методи на дедукција и докажување"* во геометријата, алгебрата или анализата, сеедно (Џ. Брунер, Е. Кастелнуово, А. Н. Колмогоров).

Сепак, значењето на интуицијата не треба да се прецену-ва, зашто таа, сама за себе, без доволно труд, не може да обезбеди солидни знаења од предметот.

За развитокот на интуитивното мислење кај учениците може да помогнат многу задачи, како на пример:

7) „Да се реши равенката: а) $X+X=X$; б) $X\cdot X=X$; в) $X^X=X$" и др.

8) „Колку време е потребно за да се изброи од 1 до милион: 3 години, 10 часа, 2 недели, 5 месеци (при „вообичаени" пропозиции за броењето)?"

4. Функционално мислење. Поимот функција е во основата на скоро сите природни процеси. Математичкиот поим функција е еден од најважните во математиката и еден од најмоќните инструменти за сознавање на реалниот свет. Затоа е природно што се оформил посебен тип мислење сврзан со овој поим и наречен функционално мислење.

Основната одлика на функционалното мислење е способноста за сознавање на општите и посебните врски и релации меѓу математичките објекти или меѓу нивните својства, како и вештината тие практично да се искористат. Други карактеристики на функционалното мислење се: а) претставување на математичките објекти во "движење", б) операционен пристап кон математичките факти и нивното содржинско толкување, в) зголемено внимание кон примената на математиката.

Функционалното мислење се среќава на секој чекор при изучувањето и примената како на математиката, така и на сите природни науки.

Функционалното мислење е многу блиско до т.н. **дијалектичко мислење**, за кое е карактеристично: *променливоста, двојственоста, единството на спротивности, заемната врска и заемната зависност на поимите и соодносите.* Да се мисли дијалектички значи да се поседува способност за нешаблонски, разностран приод кон изучувањето на објектите и појавите.

На крајот да разгледаме два примера.

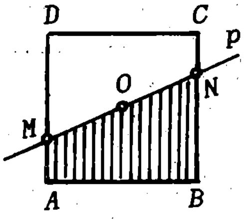
Пример 9. Еден фармер имал гуски и зајаци,со вкупно 50 глави и 160 нозе. Колку гуски и колку зајаци имал фармерот?

Ако со X го означиме бројот на гуските, а со Y бројот на зајаците; тогаш од равенките $X+Y=50$, $2X+4Y=160$ добиваме дека $X=20$, $Y=30$.

Присуството на функционално мислење природно наметнува прашања од видот: Дали задачата ќе биде „добра" и при други вредности „за главите и за нозете"? Задржувајќи го фиксиран бројот 50 за главите, дали за нозете може да се земе бројот: 180? 169? 80? 240? Какви промени во условите на задачата може да се прават?

По овие размислувања лесно се доаѓа до „поопшта" задача во која има гуски и зајаци со вкупно m глави и n нозе, т.е. до системот равенки $X+Y=m$, $2X+4Y=n$, од каде што лесно се гледа дека треба да биде исполнет условот $2m < n < 4m$.

Пример 10. (фигура во „движење"). Квадратот $ABCD$ е пресечен со права p што минува низ центарот O на квадратот (црт. 3). Ротирајќи ја p мисловно околу O (со преместување на точката M од A до D), да се установи како ќе се менува а) плоштината P, б) периметарот L на осенчениот дел.



Црт. 3

Ученик, вооружен со функционално мислење, лесно ќе заклучи дека плоштината не се менува ($P=$ $= a^2/2$), а L се менува: $3\cdot a \leq L \leq (2+\sqrt{2})a$.

5. Творечко мислење. Една човекова мисловна дејност може да се нарече творечко мислење, ако: а) *резултатот на таа дејност е некое ново знаење,* со определена вредност за другите луѓе или за самиот размислувач; б) *самиот мисловен процес се одликува со новина:* тој ги трансформира или основано отфрла некои порано прифатени идеи. Притоа, се подразбира дека за тој творечки процес размислувачот има силна мотивација и упорност, долго време или голем интензитет на мислењето.

Во литературата нема едногласност дали треба да се смета за творечко мислење и дејноста чијшто „производ" е новина само во однос на размислувачот. Сепак, преовладува ставот дека самото мислење може да биде творечко во одделни случаи, иако резултатот од него не претставува новина во однос на целото човештво.

Во таа смисла се смета дека и во процесот на наставата може да се јави творечка дејност на учениците и тоа не само при решавањето на одделни „(творечки") задачи, туку и при изучувањето на (за учениците нов) учебен материјал.

** Во врска со горното, ќе го наведеме ставот на Џ. Поја, американски математичар-педагог, изнесен во неговото дело „Математичко откритие" ([28], стр. 274).

Мислењето може да се нарече продуктивно, ако тоа води кон решавање на дадена конкретна задача; мислењето може да се нарече творечко, ако тоа создава средства за решавање идни задачи. Колку што е поголем бројот и колку што е поширока разновидноста на задачите кон кои се применуваат создадените средства, толку е повисоко творечкото ниво на мислењето.

Понекогаш работата на решавачот може да се нарече *творечка* дури и во тој случај кога тој не успеал да ја реши задачата - на пример, ако неговите усилби довеле до откривање начини за решавање, применливи на други задачи. Работата на решавачот може да испадне творечка и индиректно, на пример, ако тој остава макар и нерешена, но добра задача, којашто на крајот од краиштата ги води другите кон плодотворни идеи.

Мене ми се чини дека старите Грци, оставајќи ни ја задачата за трисекција на агол, направиле голема творечка работа, без оглед на тоа што тие не ја решиле и без оглед на тоа што во текот на изминатите столетија од тоа време таа задача била извор на неверојатно количество непродуктивна работа. " ... „ Одејќи по тој пат, ние натаму се среќаваме со задачите на делење агол на 5, 7 и 17 еднакви делови, сврзани со задачите за решавање равенки во радикали и, во крајна линија, со откритијата на Абел, Гаус и Галуа, коишто довеле до создавањето на теории, применливи за решавање на бесконечно множество задачи, за кои, старите Грци, што почнале да размислуваат над задачите за трисекција на агол, дури и не помислувале". **

3.3. КВАЛИТЕТИ НА МИСЛЕЊЕТО

Воспоставувањето на т.н. „математички стил на мислење" кај учениците е важна цел на наставата. Овде ќе ги наведеме најважните квалитети на мислењето што формираат математички стил на мислење.

1. **Еластичност на мислењето.** Под еластичност на мислењето подразбираме: *способност за варирање на начините за дејствување,* леснотија да се изврши промена на системот на знаења при промена на условите, согледување на сите варијанти, вештина за премин од една ситуација кон друга, можеби неочекувана.

Спротивност на еластичноста е **крутост** на мислењето.

Пример 11. Двајца (луѓе) дошле истовремено до една река. На брегот имало само едно кајче (кајак), со кое можел да се превезува само еден човек наеднаш. Сепак, двајцата ја преминале реката со тоа кајче. Како е можно тоа?

(Една можност е: едниот човек дошол на едниот брег, а другиот човек - на другиот брег од реката.)

Прашања од тој вид се и следниве:

12) Каков е Црнецот што, по капењето, излегол од Црвеното Море?

13) Што е лицето кое: се родило во Франција од татко Италијанец и мајка Германка, животот го провело во Англија, а умрело во Америка?

2. **Активност на мислењето.** Активноста на мислењето е квалитет што се карактеризира со: силна желба да се реши поставената задача, постојаност на усилбите и барање разни начини за нејзиното решавање. Овој квалитет се нарекува и „насоченост на мислењето", а тоа значи стремеж да се реализира решението по колку што е можно покус пат.

Антиподот на активноста се вика **пасивност** (и бесцелност) на мислењето.

** Во врска со активноста на мислењето, мошне впечатлива е анегдотата за малиот Гаус, којшто како третоодделенец, луцидно ја решил задачата:

13) Да се најде збирот на природните броеви од 1 до 100: 1+2+3+...+98+99+100.

Како треба ученик-основец да го насочи мислењето за да најде кус пат до решението? **

3. **Помнење и подготвеност на умот. Помнењето** е квалитет на мислењето што се карактеризира со способноста да се прими и задржи определена информација. Тоа зависи од: честотата и начинот на повторувањето, практичните примени, изучувањето на наставен материјал што е оптимален по обем и емоционално дотеран. **Подготвеноста на умот** означува способност за брзо и правилно повикување на „складираните" информации, неопходни

за извршување на дадена задача.

Во зависност од содржината на информацијата што треба да се запомни и дејноста на човекот во тој процес, помнењето може да биде: *моторно, емоционално, сликовно* и *зборовно-логичко,* а во зависност од времето на чување на информацијата: *краткотрајно* и *долготрајно.* Во процесот на наставата, неопходно е да се развиваат кај учениците сите гореспоменати видови помнење.

Помнењето и подготвеноста на умот кај учениците се развиваат особено ефективно, ако запомнувањето на одредени факти се базира на сознајно разбирање на тие факти. (Поради тоа, „бубањето" на многубројни правила е не само непродуктивна туку и штетна работа.)

Спротивност на помнењето е **заборавањето.** (За разлика од спротивностите на другите квалитети на мислењето, заборавањето не само што не е негативна карактеристика туку, во одредени случаи, има позитивна улога во сознајната дејност на учениците.)

4. Ширина и длабочина на мислењето. Ширината на мислењето се карактеризира со способноста за формирање обопштени начини на дејство, со широк дијапазон на примена кон нетипични случаи, а **длабочината** - со способност за длабоко сфаќање на секој од изучуваните факти. (Види и вежба 7,8.)

Спротивност на ширината на мислењето е **теснотијата,** а на длабочината е **површноста** (обете со негативна улога).

5. Критичност и самокритичност на мислењето. Воспитувањето на овој квалитет кај учениците во процесот на наставата е мошне важно. За неговото формирање и негување помага честото обраќање кон разни проверки и груби проценки на најдениот (односно бараниот) резултат, а исто така кон проверка на изведените заклучоци, добиени со индукција, аналогија или интуиција. (Вежба 9,10.)

Спротивност на овој квалитет е **некритичноста** (за жал, присутна кај многу наши средношколци).

6. Други квалитети на мислењето се: *точност, јасност и концизност* во искажувањето и запишувањето, како и **оригиналност** на мислењето, коишто можат да се постигнат кај учениците со широка примена на логичко-математичката симболика и со постојана грижа на наставникот за точноста на зборовите и записите во текот на наставата. За оригиналноста на мислењето мошне корисни се необичните решенија на познати задачи, предложени било од учениците било од наставникот. (Вежба 12.)

3.4. ВЕЖБИ

Во следните три задачи, да се уочи улогата на *конкретното мислење* за формирање апстрактни поими и постапки кај учениците.

1. Објасни зошто собирањето „по колони": дава правилен резултат?

 231
+642
 873

2. Зошто а) 13-9=4, б) 7-0=7?

3. Докажи (со методот од спротивно) дека, ако $X+7=19$, тогаш $X=12$. (Искористи го законот за трихотомија.)

За развитокот на *логичкото мислење* кај учениците, може да помогнат задачи како наредните две (4-5).

4. Да се споредат вредностите на бројните изрази:

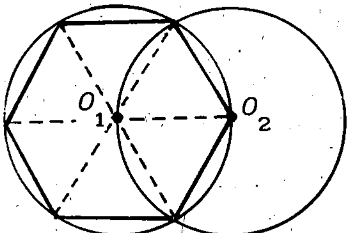
765345 + 234189 и 234189 + 765345

(за IV-VI одделение).

5. („Логичка задача", како можна „незадолжителна домашна работа"). Двајца играат ваква игра: првиот кажува едноцифрен број (од 1 до 9). Вториот додава кон тој број друг едноцифрен број и го кажува збирот. Кон тој збир првиот додава уште некој едноцифрен број и го кажува збирот; итн. Добива тој што прв ќе го каже бројот 66.

Како треба да се игра во таква игра за да се добие? Кој ќе добие при правилна игра: тој што почнува или неговиот противник?

6. На црт. 4 се претставени две кружници со еднакви радиуси, така што едната минува низ центарот од другата и обратно и во првата е впишан правилен шестаголник.

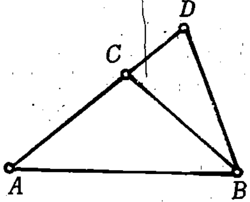


Црт. 4

Состави неколку сугестивни прашања-задачи за *творечка работа* на учениците од V до VII одделение.

(На пример: запознавање со рамнострани триаголници, ромб, рамнокрак трапез, правоаголен триаголник, ротација, складност и разни тврдења во врска со споменатите поими.)

7. За тестирање (и развивање) *еластичноста на мислењето,* може да послужат задачи, како следнава:



Црт. 5

Колку е должината на основата AB на рамнокракиот ΔABC (црт. 5), ако периметарот L_1 на ΔABD е 58, а периметарот L_2 на ΔBCD е 41?

($\overline{AB}=L_1-L_2=17.$)

Во врска со *длабочината на мислењето*, коментирај го решението на секоја од наредните задачи (8,9).

8. Дали низата 5, 5, 5,... е прогресија и (ако е) каква? (Од што зависи одговорот?)

9. Познато е дека собирањето има само една обратна операција - одземањето, а истото може да се каже и за множењето (со извесна забелешка). Зошто операцијата степенување има две обратни операции (коренување и логаритмирање)?

За формирање *критичност и самокритичност* на мислењето кај учениците, помагаат многу задачи. Направи соодветен коментар за следните две (10,11).

10. Дали е точно тврдењето:

$$(a \perp b) \wedge (b \perp c) \Rightarrow a \parallel c,$$

каде што a, b, c се прави?

11. Реши ја усно равенката: $(59-34)+13 = 59-(x-13)$.

12. Да се илустрира *оригиналност на мислењето* со решавањето на следнава задача.

Докажи дека е идентитет (по x) равенството:

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{9a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

13.* *(Синот на професорот Косинус).* Професорот по математика напишал на таблата полином $f(x)$ со цели коефициенти и рекол:

„Денес е роденден на син ми. Ако неговата возраст c се замени во дадениот полином наместо x, ќе се добие равенството $f(c)=c$. Забележете, исто така, дека $f(0)=p$, каде што p е прост број, поголем од c."

Колку години имал синот на проф. Косинус?

14. Кои три реални броеви го имаат својството: нивниот збир да е 3 и збирот на нивните квадрати да е 3?

15. Колку а) правоаголници, б) правоаголни триаголници, чиишто должини на страните се природни броеви, имаат плоштина бројно еднаква со периметарот? в) Кои (разумни) обопштувања се наметнуваат?

Одг. а) Два: (6,3) и (4,4). б) Два: (6,8,10), (5,12,13). в) Волумен и плоштина на коцка и квадар; и др.

16.* Испитај колку неправоаголни триаголници, чиишто должини на страните се природни броеви, имаат плоштина бројно еднаква со периметарот.

Одг. Три; (6,25,29), (7,15,20), (9,10,17).

4. УЛОГАТА НА ЗАДАЧИТЕ ВО НАСТАВАТА

4.1. ОБУЧУВАЊЕ ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАЧИ

Најважните цели на наставата по математика се остваруваат преку решавањето на задачи. Затоа е разбирливо што на задачите им се отстапува поголемиот дел од наставното време и оправдано е барањето: наставникот да ги обучи сите ученици да решаваат задачи. Тоа претпоставува наставникот совршено да владее со основните методи на решавање задачи (што ги разгледавме во VIII.2), било за задачи „на пресметување", „на докажување" или „на конструирање".

Во методичката литература има прекрасни книги во врска со обучувањето за решавање задачи. Неколку такви книги се наведени во списокот на користената литература (на пр.: [26], [28], [17], [35], [38]), а најзабележителни меѓу нив се книгите на D. Поја: „ Како да се решава задача?" и „Математичко откритие". Во првата од нив е дадена една *дидактичка шема во врска со решавањето на задачи,* мошне корисна особено за учениците. Овде ќе ги одбележиме нејзините главни елементи, во слободна интерпретација.

Решавањето на една нестандардна задача, според таа шема, се одвива во **четири основни етапи.**

I етапа - подготвителна фаза: *да се разбере дадената задача.*

1) Како гласи задачата? Што е дадено? Што треба да се најде? Дали е наполно определено непознатото (т.е. бараното) од дадените податоци? Или пак тие се недоволни; прекумерни; противречни?

2) Какви врски има (т.е. нам ни се познати) меѓу бараното и даденото? Може ли тие да се претстават со цртеж, таблица или шема што ќе помогне да се осмисли задачата? (Притоа, треба да имаме предвид дека правилното графичко претставување на условот и барањето означува точна, јасна и конкретна претстава за задачната ситуација во целост.) Дали не ќе биде подобро (за навлегување во суштината на задачата), да го измениме распоредот на елементите од задачата на цртежот или шемата?

3) Какви општи математички методи за решавање „такви" задачи ни се познати (метод на равенки, метод на геометриски трансформации, координантен или векторен метод итн.)? Дали можеме да ги изразиме елементите на дадената задача на јазикот од соодветниот метод?

II етапа - составување план за решавање: *да се најде пат од непознатото (т.е бараното) кон даденото (значи, да се направи „анализа").*

И тука се наметнуваат повеќе прашања и совети.

1) Формулирајте ги односите меѓу непознатото и дадените елементи. Трансформирајте го непознатото (или воведете ново), приближувајќи го кон даденото.

2) Дали дадената задача можете да ја наредите во некој вид (тип) задачи чијшто начин на решавање ви е познат? Помнете дека целта на задачата е главен ориентир за насоките на трагање по решение. Затоа, имајте ја во мислите целта на задачата во секој момент на решавањето и обидувајте се да примените некој метод или приод што ви е познат. Спомнете си за решението на аналогна задача.

3) Контролирајте ја постојано разумноста на вашите обиди да ја решите задачата, споредувајќи ги добиените делумни резултати со условот и барањето на задачата.

4) Може ли задачата да се формулира поинаку: да се упрости нејзиниот услов (т.е. да се состави и да се реши аналогна задача, но попроста), да се обопшти условот (т.е. да се состави задача, поопшта од дадената), да се заменат поимите (што се сврзани со задачата) со нивните дефиниции?

5) Расчленете го условот на задачата на одделни елементи и обидете се да добиете нови комбинации меѓу нив (или, можеби, комбинации со други елементи што не се разгледуваат во задачата). Можете ли да ја разбиете дадената задача на низа помошни задачи, од чиешто последователно решавање ќе може да се состави решението на дадената задача? Обидете се да составите делумни задачи, раководејќи се од целта на дадената задача.

6) Разгледајте ги граничните случаи за одделни елементи и согледајте како ќе се одрази тоа на основната цел на задачата.

7) Направете одредена измена на некои од елементите од задачата и погледајте како ќе се одрази таа измена на другите елементи; врз основа на тие набљудувања и на добиените резултати, обидете се да искажете хипотеза што ќе се однесува на целта на задачата.

8) Ако не успеете да ја решите дадената задача, побарајте во учебната или во популарната литература задача што е слична на дадената. Изучете го внимателно тоа „готово" решение и настојувајте да извлечете од него полза за решавање на дадената задача.

III етапа - практична реализација на составениот план *(„синтеза")*

На оваа етапа е важно да се избере таков начин на оформување на рашението што ќе овозможи тоа да се претстави во јасна и колку што е можно пократка форма. Паралелно со тоа, треба да се следи правилноста на решението, образложувајќи ја правилноста на секој чекор.

IV етапа - завршна фаза: *да се провери и практично да се оцени решението.*

1) Дали добиениот резултат ви изгледа точен? Зошто? Ако

има можност, направете проверка. Помислете дали е можно задачата да се реши на друг начин. Имајте предвид дека добивањето на истиот резултат на друг начин е подобра проверка за правилниста на решението.

2) Обидете се да најдете поекономичен пат од претходниот, поопшт, поелегантен итн. (новиот начин го збогатува искуството на решавачот).

3) Испитајте ги посебните случаи на решението и споредете ги со граничните вредности на одделните елементи на задачата. Обопштете ги резултатите на решението на дадената задача и помислете на какви задачи можете да ги примените. Откријте го и она корисно поради кое вредело да се решава дадената задача (она што е важно да се знае, да се умее и да се помни).

4) Обрнете поебно внимание на оние теориски ставови, особености на задачата итн., коишто биле клучни за наоѓање на даденото решение (или на други решенија) на задачата.

Учениците треба да ја усвојат изнесената дидактичка шема преку нејзиното многукратно применување.

Во врска со I етапа, секој ученик треба да го знае и постојано да го применува следново правило: „*Не пристапувај кон решавање на задачата или кон барање пат за решение сè додека не си убеден дека наполно си го разбрал текстот на задачата, дека си ги осмислил и ги помниш сите податоци од условот како и барањето на задачата*".

За да го усвојат учениците ова правило (како и други, слични методски правила), тоа треба и практично да се применува. Во случај задачата да има сложен текст, препорачливо е тој да се прочита внимателно неколку пати. Ако се применува фронтален начин на работа со класот, тогаш наставникот треба да провери дали учениците ја разбрале задачата, преку соодветни прашања.

Инаку, главната етапа во процесот на решавањето на задачата е барањето пат за решение (се разбира, ако на решавачот не му е познат по изучувањето на текстот на задачата). Тука, најплодоносни и најефективни се разните аналитички методи и пристапи, со кои учениците треба постепено да овладуваат.

** На крајот да забележиме дека изнесената дидактичка шема за решавање на задачи може да се применуива, со незначителни измени, и при докажување теореми.

Слична шема се применува и во уметноста. Имено, создавањето уметничко дело минува низ следниве пет фази: идеја, намера, план, реализација и исполнување на намерата. Во таа смисла, решавањето на една математичка задача може да се спореди со тој процес. **

4.2. ЦЕЛИТЕ НА НАСТАВАТА НИЗ ЗАДАЧИТЕ

Преку систематско решавање задачи се постигнуваат речиси сите **основни цели** на наставата по математика:

а) сознајно усвојување на материјалот,
б) стекнување трајни вештини и навики,
в) развивање на математичкото мислење.

Решавањето на задачи е главно средство и за:

г) врска на наставата со животот,
д) политехничка насоченост во наставата,
ѓ) остварување на меѓупредметни врски во самата математика и на математиката со други учебни предмети (физика, географија, ликовно воспитување и др.), т.е. остварување на принципот на интегралност во наставата.

Паралелно со основните цели, преку решавањето задачи, наставата постигнува и *други цели*, пред сѐ *од поопшт карактер:*

1) да заинтересира и мотивира, т.е. да разбуди интерес кон математиката (особено преку „практични" задачи),

2) да доведе до откривање на процеси и до сфаќање на соодноси,

3) да ја развива „техниката на решавање проблеми",

4) да го формира поимот „математички модел".

Исто така се важни и *специфичните цели* во наставата што се постигнуваат преку задачите:

5) за откривање одреден математички факт, самостојно од учениците,

6) за „да се подготви терен" за воведување нова тема, поим или тврдење,

7) за освежување, утврдување, проверување и самоконтролирање на знаењата,

8) за придобивање на учениците за истражувачка и творечка работа.

Улогата на задачите за оспособување на учениците *за самостојна работа е огромна.* (Посебно важни за тоа се нестандардните задачи, т.е. задачите од „проблемски карактер".) За постигнување на таа цел (којашто нејавно е содржана во основната цел б)), наставникот треба да води постојана грижа учениците сами да трагаат по патишта за решенија на задачите. Искусниот наставник, притоа, нема да брза да му соопшти на ученикот или на класот како треба да ја реши задачата кога ќе наиде на тешкотии, туку ќе рече: „Ајде заедно да најдеме излез од тешкотиите" и потоа ќе обезбеди услови пак сите да пробаат самостојно да најдат излез. Притоа е многу важно секој ученик да си ги објасни причините за тешкотиите на кои наишол во задачата.

Најефективното средство за постигнување на општата цел в): *развивање на математичко мислење* е учењето преку задачи.

Со решавањето на проблемски задачи, ученикот врши математичка дејност, којашто може да се смета за „откривачка", „евристична". Одговарајќи на прашањата што ќе си ги постави во почетната фаза од решавањето на задачата (в. 4.1), преку барањето пат за решение и реализација на планот, како и активностите околу завршните разгледувања на решението на задачата, ученикот се воспитува, општо, да бара (економични) патишта за излез од разни проблеми што ќе се појават.

За *успешна евристична дејност на ученикот* посебно значајно е самостојното составување на задачи (преку обопштување, специјализација и апстракција) и решавањето на задачи од применет карактер. За одржување на интересот за решавање задачи пак честопати може да помогне добар избор задачи „од занимлива природа".

За да се реализираат успешно горенаброените цели, неопходно е за вежбите по математика и за домашна работа да се прави „*добар распоред на задачите*". (Тоа е важно за составувачите на учебници и збирки, но и за наставникот.*) Во таа смисла, би можеле да се формулираат неколку **општи принципи**. Имено:

(а) при решавањето на задачите *да се применуваат дефиниции или теореми, изучени во соодветната лекција;*

(б) во решенијата на првите такви задачи да се користат, по можност *помалку стари* знаења, а од основните теореми да се користат по една или најмногу две одеднаш;

(в) тие задачи *да се компоненти на други одделни задачи* или групи од задачи со посложени решенија или теореми;

(г) по решавањето на неколку од нив *да може да се открие општ метод за решавање* не само на решените туку и на целата класа други задачи;

(д) да го овозможат *усвојувањето на даден поим или тврдење.*

Во утврдената практика, многу малку внимание му се обрнува на принципот (б), уште помалку на (в), а речиси никакво на (г) и (д).

Општа појава е да се разгледуваат директно „непозициони" (сложени) задачи, без претходно да се разгледани соодветни „позициони" (прости) задачи. Наставникот треба на тоа да обрнува големо внимание пред секој час за вежбање и задавање домашна работа.

4.3.* ЗА ВРСКАТА НА МАТЕМАТИКАТА СО ФИЗИКАТА ВО НАСТАВАТА

** Во смисла на наведените цели на наставата низ задачите во 4.2 треба да ја одбележиме цврстата и плодоносна заемна врска меѓу математиката и физиката.

Од една страна, физиката отсекогаш била и останува еден од најважните корисници на математиката, а од друга – задачите на физиката биле, и сега се, стимул за натамошен развиток на математиката, Разни математички поими и теории изникнувале од физички модели и се развивале пред се за задоволување на потребите на физиката.

Ќе направиме неколку забелешки во врска со целите: формирање на поимот **математички модел** и остварување на принципот на **интегралност во наставата** (во 4.2 наведени како 4) и ѓ) соодветно).

Применувањето на теоријата обично претставува конструирање на некаков модел. Притоа, кога теоријата се применува на практични задачи од нејзината област, тогаш се гради модел во самата теорија. Ако пак една теорија се применува во друга, тогаш се гради модел од првата во втората.

Пример 1. Тројката (a_1,a_2,a_3), при зададен координатен систем, е модел на поимот вектор - објект на векторската алгебра, во аналитичната геометрија.

Пример 2. Линеарните равенки:

$$y = kx \quad \text{и} \quad y = kx+b \tag{1}$$

(k, b - дадени броеви) претставуваат математички модели на зависноста на патот s од времето t при рамномерното праволиниско движење соодветно:

$$s = vt \quad \text{и} \quad s = s_0+vt. \tag{2}$$

Од друга страна, равенките (2) претставуваат физички модели на линеарната функција (1).

Равенките (1) имаат и други интерпретации (модели) во физиката:

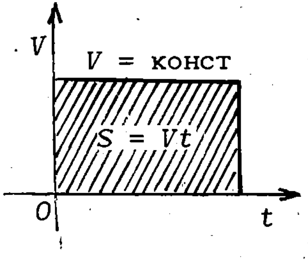
- брзина на рамномерното променливо движење:

$$v = at \quad \text{и} \quad v = v_0+at,$$

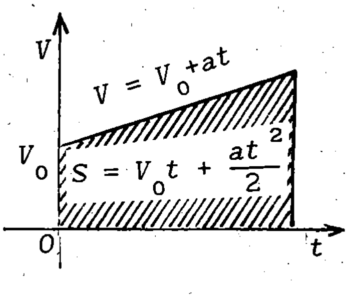
- волумен (V) односно притисок (p) на гасот како функции од температурата (t):

$$V = v_0(1+\alpha t) \quad \text{односно} \quad p = p_0(1+\alpha t).$$

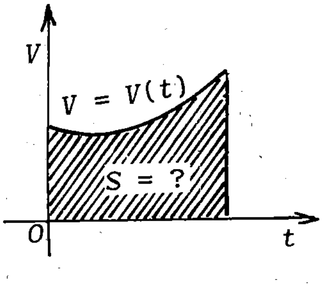
На црт. 1, патот $s=vt$ на рамномерно движење е претставен како плоштина на ликот под графикот на функцијата V=кон.



Црт. 1



Црт. 2



Црт. 3

Пример 3. Законот на патот при рамномерното забрзано движење,

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (\text{специјално: } s = \frac{gt^2}{2}),$$

претставува физички модел на квадратната функција. Тој може да послужи како мотивација за изучување на квадратната функција $y = ax^2+bx+c$.

Физичкото толкување на некои (од горните) функции дава можност за толкување на плоштината на ликот под графикот на брзината на рамномерно променливо движење, $v = v_0+at$ (црт. 2). Тој метод на определување на патот по брзината може да се прошири и на случајот на нерамномерно движење (црт. 3), при што тој ја наложува потребата од дефинирање плоштина на „криволиниски трапез", т.е. претставува мотив за воведување на поимот определен интеграл. **

4.4. ВЕЖБИ

Реши ги предложените задачи и коментирај го решението на секоја од нив во смисла на *основните етапи* во решавањето на задачи и *целите* на наставата низ задачите.

1. Разгледај ги равенствата:

   $1\cdot 9+2 = 11, \quad 12\cdot 9+3 = 111, \quad 123\cdot 9+4 = 1111.$

   а) Како ќе се запише во општ вид законот (правилото) што се наѕира од нив?

   б) Каква задача може да се формулира во врска со тој закон?

2. Аналогно како во зад. 1 за равенствата:

   $1^2=1, \quad 2^2=1^2+3, \quad 3^2=2^2+5, \quad 4^2=3^2+7.$

3. Должините на страните на еден тетивен четириаголник ($ABCD$) се a, b, c, d. Да се најдат должините x, y на дијагоналите и да се докаже дека нивниот производ е еднаков со збирот од производите на спротивните страни (т.е. $xy = ac+bd$). (Теорема на Птоломеј.)

   Помош. x^2 да се изрази на два начина со косинусната теорема. Од добиените равенки да се елиминира косуинусот на аголот. По средувањето, ќе се добие: $x^2=(ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)$. Аналогно: $y^2= (ac+bd)(ab+cd)/(ad+bc)$.

4. Докажи дека плоштината P на тетивен четириаголник со страни a, b, c, d е

   $$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

   каде што s е полупериметарот на четириаголникот. (В. и 4, vi. 3.3)

Помош. $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(\pi-\alpha) = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\alpha$ ($a=\overline{AB}$, $b=\overline{BC}$ итн., $\alpha=\sphericalangle B$); потоа, да се изедначат изразите за двата квадрата на $\overline{AC}$: $a^2+b^2-2ab\cos\alpha = c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\alpha)$.

5. Во правоаголен триаголник со катети a, b и хипотенуза c важи: $c^2=a^2+b^2$. Каква „линеарна" врска може да се воспостави меѓу a, b и c?

Помош: Секако, не: $c=a+b$. Дали $c=a+b-2r$, каде што r е радиусот на впишаната кружница?

6*. Во $\triangle ABC$ отсечката AD е симетрала на внатрешниот агол A, а $\overline{AB}=12$ cm, $\overline{BC}=18$ cm и $\overline{AC}=15$ cm. Да се најде односот меѓу должините на радиусите r_1 и r_2 на кружниците впишани во $\triangle ADC$ и $\triangle ABD$.

Одг. $r_1:r_2 = 15:14$.

7. Ако $a=zb+yc$, $b=xc+za$, $c=ya+xb$, тогаш

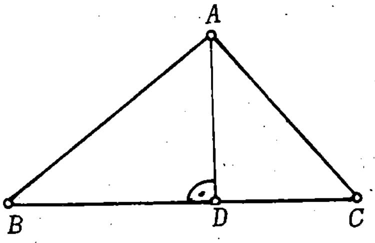
$$\frac{a^2}{1-x^2} = \frac{b^2}{1-y^2} = \frac{c^2}{1-z^2} \qquad (*)$$

а) Докажи!

б)* Какво геометриско потекло имаат овие равенства?

Помош: зад. 8.

8. Нека должините на страните на $\triangle ABC$ се a, b, c (црт. 4).



Црт. 4

а) *Изрази ги $\cos A$, $\cos B$ и $\cos C$ преку a, b, c (користејќи: $\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{DC}$).

б) Ставајќи $x=\cos A$, $y=\cos B$, $z=\cos C$ и користејќи ја синусната теорема, состави ги равенствата (*) од задачата 7.

9. Функцијата

$$f(a,b,c,d) = \frac{(a-d)(c-b)}{(d-c)(b-a)}$$

во проективната геометрија е позната како **двоен однос**. Нека

$$f(a,b,c,d) = x.$$

а) Колку е $f(a,d,b,c)$?

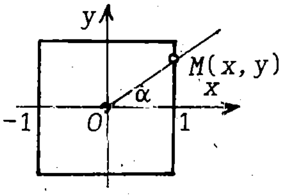
б) Колку различни распореди (пермутации) на буквите a,b,c,d може да се направат?

в) Покажи дека добиените 24 изрази $f(p,q,r,s)$ по пермутирањето на буквите a, b, c, d се сведуваат на 6 различни:

$$x,\ \frac{1}{x},\ 1-x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x} \text{ и } \frac{x}{x-1}.$$

г) Разгледај го множеството G од 6-те функции во в) и операцијата композиција на функции. Каква алгебарска структура („најдобра") се добива?

10.* На учениците им е познато дека тригонометриските функции можат да се моделираат со движење на точка по тригонометриска кружница. Затоа се викаат **кружни** или **циклометриски функции**. Познато е исто така дека со движење на точка по елипса или хипербола може да се интерпретираат т.н. **елиптични** односно **хиперболични функции**. Оттаму може да се дојде до идејата дека со движење на точка по контурата на други фигури (т.е. по линии) може да се толкуваат други класи функции, аналогни на кружните.



Црт. 5

Избирајќи квадрат со центар во координатниот почеток (црт. 5), да ставиме:

$sen\alpha\ x+y$ („квадратен синус")

$ces\alpha=x-y$ („квадратен косинус")

$teg\alpha=x^2-y^2$ („квадратен тангенс").

а) Да се испита секоја од така добиените функции.

б) Да се најдат формули за трансформација на вредностите на тие функции по аналогија со тригонометриските.

в) Да се конструираат графиците на тие функции.

ПРИРАЧНИК
ЗА СТУДЕНТИ И НАСТАВНИЦИ

А ОРГАНИЗАЦИЈА НА НАСТАВАТА

1. НАСТАВЕН ЧАС

1.1. НАСТАВЕН ЧАС, ДЕФИНИЦИЈА И БАРАЊА

Основната организациона форма на учебната работа во основното и средното образование е наставниот час. Како дидактички поим, тој се определува на следниот начин.

Наставен час е логички оформен, заокружен сегмент на образовно-воспитниот процес, поставен во определени временски рамки, а наменет за решавање определени образовни и воспитни задачи, планирано и организирано. Во него се вградени, во сложена взаемна врска, основните составки на наставниот процес: а) целите, б) содржината, в) средствата, г) методите, д) организацијата. Тој е основната временска единица на наставата: обично трае 45 минути, а може и пократко (30 или 35 минути за помлади ученици), но и подолго (90, 135, па дури и 180 минути). Квалитетот на наставниот час зависи од правилното поставување на секоја составка од наставниот процес и нивното рационално комбинирање. Заокружената целина на наставниот материјал што се обработува во текот на еден наставен час се вика **наставна единица, методска единица** или **лекција**.

За успешно реализирање на наставните задачи, пред организаторот на наставниот час се поставуваат следниве барања:

1) поставување на основната учебна (дидактичка) цел,
2) посебни воспитни задачи,
3) соодветен избор на учебниот материјал,
4) примена на наставни методи за активно учење,

5) организираност и јасност на наставниот час.

Секое од овие барања ќе го разгледаме натаму малку подробно.

За наставната практика, во врска со наставниот час, најважни се следниве три прашања: како да се подготви добро, како да се спроведе успешно и како да се оцени правилно спроведениот наставен час.

И овие прашања ќе ги разгледаме натаму, во наредниот дел.

1.2. ОСНОВНА ДИДАКТИЧКА ЦЕЛ НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Во повеќето случаи, **во еден наставен час се решаваат неколку дидактички (учебни) задачи**: се проверуваат знаењата од порано изучениот материјал, се изучува нов материјал, се утврдува изученото и др. Меѓу тие повеќе цели што се остваруваат во еден наставен час секогаш може и треба да се согледа една главна или основна цел и нејзе да ѝ се потчинат другите.

Да разгледаме **еден пример**.

Да речеме, се работи за наставен час по темата: „*Формула за корените на сведена квадратна равенка*", $x^2+px+q = 0$, сметајќи дека со учениците порано се решавани неполни квадратни равенки и дека бил претворан квадратен трином во бином што е збир или разлика од квадратите на два израза.

Основната дидактичка цел на овој час би била: запознавање на учениците со алгоритамот за решавање сведени квадратни равенки.

Оваа основна цел повлекува поставување и остварување на следниве *потчинети цели:*

а) проверување на вештината за решавање неполни квадратни равенки.

б) претварање на квадратен трином во бином (збир или разлика),

в) увежбување на алгоритамот што ќе биде откриен во текот на часот.

Притоа, мошне е важно основната цел на наставниот час да ја дознаат учениците благовремено, да знаат што треба да научат и зошто е потребно тоа да го знаат („мотив за изучување").

** За реализирање на оваа намера, пожелно е во погоден момент на часот да се создаде **проблемска ситуација**: соодветен проблем се формулира согласно со возраста на учениците и се наметнува потребата од изнаоѓање начин да се реши тој проблем. Со тоа ќе се добие барем еден мотив за изучување на темата што е основна цел на часот, т.е. ќе се одговори на горното прашање „зошто се изучува".

Во конкретниот случај, наставникот треба да им соопшти на учениците дека многу практични задачи доведуваат до потребата да се реши равенка, при што таа може да биде квадратна. Потоа треба да ги упати на некоја конкретна задача, поставена порано или на тој час. Една таква задача би можела да биде:

1) Да се најде основата на правоаголник чијашто плоштина е 35 cm^2, а периметарот му е 24 cm.

(„Оваа задача доведува до равенката $x(12-x)=35$, т.е. $x^2-12x+35=0$. За да добиеме одговор на задачата, треба да ја решиме добиената равенка, но се уште не знаеме како. Ќе си поставиме цел да научиме како се решаваат таквите равенки".)

Друг пример во кој се доаѓа до квадратна равенка:

2) Бројот на дијагоналите на еден многуаголник е 27. Колку страни има тој многуаголник?

(И тука добиената равенка $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=27$, т.е. $n^2-3n-54=0$ може да се проследи со соодветен коментар.) **

Во согласност со основната и со потчинетите цели на овој наставен час, неговата содржина би изгледала вака:

1°. Решавање на равенки од видот $ax^2+bx=0$ и $ax^2+c=0$ (како повторување и проверка). Утврдување на методот на нивното решавање:

$$ax^2+bx=0 \Rightarrow ax(x+\frac{b}{a})=0 \Rightarrow x=0;\ x+\frac{b}{a}=0.$$

$$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-c/a}.$$

2°. Претворање на трином во бином

$$x^2-4x-5,\qquad x^2-12x+37$$

$$[x^2-4x-5=(x-2)^2-9;\qquad x^2-12x+37=(x-6)^2+1].$$

3°. Поставување на нова задача: решавање на квадратни равенки со претварање на трином во бином. Составуваме план: примена на познатиот метод во 1°: $ax^2+c=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-c/a}$ на нов случај.

4°. Решавање на следниве равенки:

$$x^2-4x-5=0;\quad (x-2)^2-9=0\quad (x-2)_{1,2}=\pm\sqrt{9};$$

$$x^2-x-6=0;\quad (x-\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}=0\quad (x-\frac{1}{2})_{1,2}=\pm\sqrt{25/4}$$

и констатирање на фактот дека еден алгоритам за решавање на квадратна равенка е најден.

5°. Примена на најдениот алгоритам за решавање на равенката $x^2+px+q=0$.

$$(x-\frac{p}{2})^2-[(\frac{p}{2})^2-q]=0,\quad x-\frac{p}{2}=\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q},$$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}.$$

Констатација: најден е втор алгоритам во вид на формула за решавање на сведени квадратни равенки.

Забелешка. Наместо 3°, можеме да одиме на разложување квадратен трином на множители, како на пример: $X^2-4X-5 = (X-2)^2-9 = (X-2-3)(X-2+3) = (X-5)(X+1)$ и да го примениме методот: $(X-5)(X+1)=0 \Rightarrow (X-5)=0 \vee (X+1)=0$. На тој начин ја решаваме равенката $X^2+pX+q=0$ и доаѓаме до крајната формула.

6°. Решавање на равенки по формулата; примери:

$$X^2-2X-15=0, \quad X^2+11X-60=0, \quad X^2-5,6X+6,4=0.$$

7°. Споредување на двата алгоритми, заклучок за предноста на вториот.

8°. Правење биланс (резиме) на наставниот час.

9°. Задавање домашна работа: да се научи изведувањето на формулата; да се реши равенката ... на двата начина; дадена равенка да се доведе на сведен, нормален облик и да се реши со формулата; да се реши задачата ... (составување квадратна равенка).

Во дадениот случај, сите елементи на наставниот час, неговите посебни учебни цели, ѝ беа потчинети на основната дидактичка цел.

1.3. РЕШАВАЊЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИ ВОСПИТНИ ЗАДАЧИ

Наставата воспитува пред сè, со својата содржина - со фактите и со нивното толкување. Но, паралелно со тоа, на наставниот час се поставуваат и следниве специфични воспитни задачи:

а) побудување и одржување интерес кон математиката,

б) мотивирање на потребата да се учи математика,

в) воспитување одговорен однос кон учењето.

Тие задачи се реализираат во текот на наставниот час низ решавањето на многу заемно сврзани, делумни воспитни задачи.

Конкретните факти или задачи што се изучуваат на часот се важни, но не само самите за себе. Тие можат да бидат заборавени со текот на времето. Меѓутоа, нивното изучување треба да остави определена трага во сознанието на ученикот за следново:

а) како човекот доаѓа до фактите и до резултатите на задачите што ги наметнува практиката или што се јавуваат во животот општо и

б) како човекот ги фиксира во свеста резултатите на спознавањето.

Секако, особините на личноста на ученикот не изникнуваат веднаш и стихијно. Тие се резултат на планска и долга работа на наставникот и другите фактори во воспитниот процес, а наставниот час е основната организациона форма за нивното реализирање.

1.4. ИЗБОР НА УЧЕБНИОТ МАТЕРИЈАЛ

Содржината на лекцијата не е случајна (како што видовме во примерот со решавањето на сведена квадратна равенка). Барањето за избор на учебниот материјал за наставниот час се состои во следното:

а) содржината да биде соодветна на основната учебна цел,

б) обемот на учебниот материјал да биде одмерен, ни преголем ни премал,

в) односот меѓу конкретното и апстрактното да биде оптимален, усогласен со психофизичките способности на учениците,

г) да биде одразена на соодветен начин заемната врска меѓу теоријата и практиката.

1.5. ПРИМЕНА НА НАСТАВНИ МЕТОДИ ЗА АКТИВНО УЧЕЊЕ

Успешното реализирање на основната учебна цел и другите цели на наставниот час, во голема мера зависи од изборот на наставните методи. За да биде што поефективен, за наставниот час се поставува ова важно барање: да се применат во лекцијата такви *наставни методи и форми што ќе обезбедат активно учење на учениците.*

Активноста на учениците е едно од најважните наставни барања на наставниот час за сознајно усвојување и трајно задржување на знаењето. Тоа се постигнува со:

- правилно организирање и спроведување на самостојна работа,
- применување на проблемска настава,
- лабораториска работа за воведување поими и откривање факти,
- примена на евристичниот метод и неговите модификации.

Важно: сè што можат учениците да направат сами, треба да се бара тоа и фактички да го направат, особено во основното образование.

1.6. ОРГАНИЗИРАНОСТ И ЈАСНОСТ НА ЛЕКЦИЈАТА

Се смета дека наставниот час се спроведува организирано и јасно, ако учениците:

- ги сфатиле главните учебни задачи на часот,
- ги разбираат причините за премин од една кон друга задача,
- сите се активни во решавањето на тие задачи,
- времето во лекцијата го користат рационално за обучување и воспитување.

Со други зборови, лекцијата се спроведува организирано и јасно, ако се реализираат претходните четири барања за наставниот час. За да се постигне таков степен на организација, неопходно е наставниот час да биде обмислен од наставникот благовремено и во сите негови подробности. Општо земено, **наставникот треба:**

1) слободно да владее со материјалот од наставниот час, со наставниот предмет во целина и да не губи време во размислување и присетување на часот,

2) да ја знае методиката на секое разгледувано прашање, целиот арсенал од варијанти, начини и средства на изучување,

3) да ги знае индивидуалните особености на класот.

1.8. ВЕЖБИ

1. Да се определи: а) основната дидактичка цел, б) потчинетите цели, в) содржината на наставниот час за секоја од наведените теми (1-10).
    1) Агли на трансферзалата од две прави (VI одд.).
    2) Надворешни агли на триаголник (VI одд.).
    3) Степен со показател природен број (VII одд.).
    4) Сличност во правоаголен триаголник (VIII одд.).
    5) Поим за волумен на тело (VIII одд.).
    6) Најголем заеднички делител (НЗД) и НЗС (I клас).
    7) Врски меѓу тригонометриските функции од ист агол (I клас).
    8) Биквадратни равенки (II клас).
    9) Синусна теорема (III клас).
    10) Равенка на кружница.
2. Да се илустрира примената на наставните методи за активно учество на учениците (при откривање теорема и создавање доказ) за лекцијата „ Деливост на збир ($a+b$) со број (d)", (VI одд).

    Помош. Една можност: Направи картички за секој ученик (со примери и делумно поставени задачи што ќе ги состават учениците), по една картичка за секој од следниве четири случаи:

Случај	a е делив со d			b е делив со d			$a+b$ е делив со d		
1)	24	да	6	48	да	6	72	?	6
2)		да			не			?	
3)		не			да			?	
4)		не			не			?	

3. Опиши еден начин за откривање и потоа за докажување на Питагоровата теорема за активно учество на учениците.

2. ВИДОВИ НАСТАВНИ ЧАСОВИ

2.1. ОСНОВНИ СТРУКТУРНИ ЕЛЕМЕНТИ НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Секој наставен час треба да има однапред определена физиономија. Неговата структура (градба) зависи од образовните цели што треба да се постигнат со него. Во градбата на наставните часови може да учествуваат следниве **основни структурни елементи:**

- запознавање со нов наставен материјал (т.е. со нови содржини),
- утврдување на новиот материјал,
- решавањее задачи (вежбање),
- повторување и систематизирање на порано изучен материјал,
- проверка на задачите од претходната домашна работа,
- поставување задачи за следната домашна работа,
- практични примени на математиката, од учениците,
- проверување и оценување на знаењата на учениците.

Секако, еден наставен час не ги содржи сите наброени структурни елементи; но, секој наставен час може да се состави од нив, со разни комбинации.

Ќе се задржиме накратко на особеностите на некои од тие структурни елементи на наставниот час.

1) Запознавање на учениците со нови содржини на часот треба да се остварува во согласност со основните дидактички принципи - како процес на активно усвојување од страна на учениците. Соопштувањето на готови знаења треба да биде сведено на минимум. Наставникот треба да се стреми да обезбеди такви дидактички разработки на материјалот, што ќе дадат најголема ефективност во усвојувањето.

2) Утврдувањето на материјалот е дидактичка неопходност. Во текот на часот, запознавањето на новиот материјал често природно преминува во утврдување, а понекогаш двете се менуваат наизменично.

При проблемската настава утврдувањето често се реализира во текот на проверката и анализата на самостојното решение на проблемот и резултатот. Аналогно е и во случајот кога се применува методот на самостојна работа при запознавањето на нов материјал. При проблемското или при расказното изнесување на материјалот, на утврдување со „прашање-одговор" се подлагаат само потешките делови од темата.

3) Увежбувањето, т.е. решавањето на задачи е најважниот структурен елемент на часот за стекнување знаења и вештини во врска со материјалот што се изучува на тој час или на претходните. Првата примена на новиот материјал за решавање задачи може да се смета и како утврдување. Основен метод на часовите за увежбување е самостојното решавање; се препорачува тој метод да се користи максимално.

4) Заборавањето е природен процес на човечката психа. Затоа е неопходно редовно *периодично повторување* на разни прашања што не смее да се заборават. Тие прашања може да се поставуваат секогаш, на секој наставен час, макар што не биле зададени за повторување.

Повторувањето се препорачува на крајот од секоја тематска целина (поголема тема) или на крајот од секое полугодие. Тоа треба да биде: разновидно, творечко и да предизвикува интерес кај учениците. Притоа, повторувањето треба да ги обопштува, да ги систематизира и да ги продлабочува усвоените знаења.

2.2. ОСНОВНИ ТИПОВИ НАСТАВНИ ЧАСОВИ

Во согласност со главните цели што треба да се постигнат на наставниот час, а во зависност од структурните елементи што доминираат на тој наставен час, можеме да ги издвоиме следниве основни типови наставни часови:

- час за обработка на нови содржини,
- комбиниран час (или: час од мешан тип),
- час за вечбање (решавање задачи),
- час за повторување и систематизирање,
- час за практична примена на математиката,
- час за проверување и оценување на знаењата.

Во еден наставен час обично се преплетуваат повеќе структурни елементи, т.е. тој не се јавува во „чист вид", а типот се определува според структурниот елемент што преовладува. Ќе ги разгледаме подолу главните карактеристики на секој од споменатите типови часови. Да забележиме само дека околу половината наставни часови по математичките предмети во училишниот курс се часови за обработка на нови содржини и комбинирани часови.

1°. Наставен час за обработка на нови содржини

Часовите од овој тип се наменети за почетно изучување нов материјал и за негово утврдување. Почнува, обично, со кратко испрашување (најчесто 3-5 минути), наполно насочено кон подготовката на учениците за усвојување на новиот материјал.

Структурата на лекцијата за обработка на нови содржини е следнава:

а) *Се соопштува темата на наставниот час.* Прво, се потцртува нејзиното значење во склопот на тематската целина, за математиката општо и за практиката, а потоа следува кратка беседа на наставникот за врската со порано изучен материјал.

б) *Се излага новиот материјал.* Излагањето се спроведува преку извршување на: обиди, набљудувања, анализа на примерите, споредба со познати нешта и др. Притоа, вниманието на учениците се насочува кон суштината на тие активности што ќе служат за изведување на главните заклучоци.

Да забележиме дека новите знаења се изнесуваат, се осмислуваат и се обопштуваат систематски и последователно, при што учениците учествуваат активно во откривањето на својствата, формулациите и создавањето на доказите на тие својства, под творечко раководство на наставникот.

в) *Се утврдуваат новите знаења.* Утврдувањето се врши преку повторување на поимите, резултатите, формулите и сл., усно или писмено, со одбран систем задачи.

г) *Се задава домашна работа.* Задавањето на задачи за домашна работа обично е последната етапа на овој вид часови, макар што во некои случаи тоа може да се врши во текот на целиот час. Во секој случај, домашната работа треба да се зададе благовремено (а не откако ѕвончето ќе го објави крајот на часот!) и по можност задачите да бидат проследени со соодветен коментар.

д) *Се прави резиме.* Наставникот организира заокружување на методската единица преку соодветни прашања и други активности на учениците, ставајќи акцент на тоа што треба трајно да го запомнат учениците од таа методска единица.

2°. Комбиниран час (час од мешан тип)

И комбинираниот час е предвиден за обработка на нови содржини, но тој има поинаква, обично *побогата структура* отколку претходниот тип. Тој ги содржи скоро сите структурни елементи на часот за почетно усвојување на нови знаења, но, има и други. Имено, овој вид час задолжително содржи проверка на домашната работа и обично со тоа се почнува. Наставникот врши проверка до која мера е усвоен материјалот од претходната лекција, а тоа го спроведува преку индивидуални задачи за поедини ученици или преку фронтално испрашување. Потоа, преминува кон изучување на нов материјал (раскажува, објаснува, илустрира со примери, користи нагледни средства итн.), потоа продолжува со утврдување и задавање на домашна работа во врска со новиот материјал (што ќе биде полезен за идниот наставен час), а на крајот прави резиме на часот.

Прилично *богатата структура* на комбинираниот час е неговото достоинство, но со неа е сврзан и еден сериозен недостаток: на таквиот час честопати *нема доволно време*. Имено, во практиката често се случува првиот дел од часот (проверката на домашната работа и проверката на претходната лекција) да се протегне повеќе отколку што треба, па затоа ќе страда вториот дел - усвојувањето на новите знаења и нивното утврдување ќе протече на брзина.

Поради тоа, препорачливо е да се применува комбиниран час само тогаш кога новиот материјал (теоретскиот дел и вежбите што треба да се решаваат на тој час) е *мал по обем и нема да предизвика тешкотии* во тој клас.

3^o. Наставен час за вежбање (решавање задачи)

Целта на овој вид наставни часови е: утврдување на знаењата и формирање вештини и навики во применувањето на тие знаења. Часовите за вежбање (или како што популарно се викаат: „часови за решавање задачи") се исто толку важни и често применувани во наставата по математика, колку што се часовите за нови содржини.

На овие часови теорискиот материјал треба да го најде своето вистинско место: при образлагањето на секој чекор од решавањето на задачата, ученикот стекнува навики на сознајно усвојување на материјалот и го продлабочува сфаќањето на теориските прашања во математиката.

Структурата на наставниот час за вежбање (со решавање задачи) е следнава: а) соопштување на темата, б) приспомнување на основното и суштинското од теоријата што ќе се применува, в) задавање задачи, г) решавање на задачите, д) анализирање на решенијата (притоа, в)-д) може да се спроведуваат за групи задачи или за секоја задача поединечно, а „задачата" може да биде: нумеричка задача, конструктивна задача, задача за докажување, цртање геометриски објекти и др.).

Некои од овие часови целосно му се посветени на самостојното решавање задачи од учениците и затоа се викаат часови за самостојна работа. На овие часови доаѓа до израз принципот на активност и индивидуалниот приод кон учениците, коишто се мошне важни за зголемување на интересот кон математиката, за нејзиното изучување. Исто така тие му помагаат на наставникот да ги запознае подлабоко индивидуалните способности на учениците за математика. Општо земено, часовите за вежбање имаат извонредна важност за учењето математика.

Распространето е мислењето дека часовите за вежбање не бараат од наставникот некоја посебна подготовка; се мисли: доволно е да се земе под мишка збирката задачи и на самиот час да се изберат неколку задачи, па учениците „нека вежбаат!" Тоа мислење е сосем погрешно. На часот за вежбање секој ученик треба да го изврши поголемиот дел од работата самостојно, а знаеме , не се сите ученици од еден клас со исти способности. Затоа, наставникот треба да подготви *неколку варијанти задачи, најдобро со три степени на тежина:* првата варијанта (т.е. првиот степен) – за послабите ученици, втората за просечните, третата за понапредните. Притоа, тој треба однапред да ја обмисли техниката на работа со повеќестепени варијанти од задачи.

4°. Час за повторување и систематизирање на знаењата

Основната цел на овој вид часови е да се утврдат и да се прошират знаењата низ: повторување, обопштување и систематизирање, со што знаењата на учениците добиваат нови димензии: широчина и длабочина.

Структурата на часот е следнава: а) тема на лекцијата (наставникот ја соопштува во почетокот на часот); б) план по кој ќе се спроведе лекцијата; притоа, секоја точка од планот има обопштувачки карактер и се спроведува под раководството на наставникот, со активно учество на учениците; в) исполнување на планот: учениците земаат активно учество во припомнувањето , објаснувањето и систематизирањето; г) се вршат одредени подготовки за наредната лекција.

Основен метод при спроведувањето на овој вид часови е методот на разговор.

3°. Наставни часови за примена на математиката

Во секоја погодна прилика, независно од видот на часот, наставникот треба да изнаоѓа начини за укажување на примената на изучуваниот материјал во физиката, хемијата, географијата и други предмети, а особено во конкретни практични ситуации од животот, преку соодветно избрани задачи.

И покрај тоа, честопати е погодно да се предвидат посебни часови за примена на математиката. Во нив, покрај спомнатите активности, спаѓаат и: а) лабораториската работа во класот, б) практичната работа во природа (на пример, теренско мерење), на производен објект и др., в) час-екскурзија по математика, г) лекции со користење филм, телевизија и сл.; итн.

6°. Часови за проверување и оценување на знаењата

Целта на овие часови е да се провери и оцени степенот на усвоените знаења и вештината на нивното применување. Тука спаѓаат наставните часови, пред сè, за спроведување писмени контролни работи и нивната поправка, за писмени вежби, а и часовите за проверка на домашни работи, изработени модели, мерни инструменти и друго.

Проверувањето и оценувањето на знаењата кај учениците е мошне важна и одговорна задача на наставникот. За да добие повратна информација до која мера учениците го совладале материјалот, наставникот спроведува кратки писмени вежби, обично по 20 минути (за одделни наставни целини или нивни делови), при што ученикот може да добива и помош. Во таа смисла, *тие вежби немаат контролна, туку обучувачка функција* и не даваат вистинска слика на знаењата на ученикот. Меѓутоа, со тие вежби наставникот ги открива пропустите кај одделни ученици и *презема соодветни мерки за нивното отстранување.* На тој начин учениците се подготвуваат и за контролна писмена работа.

Контролните писмени работи (получасовни, едночасовни или двочасовни) се работат при обезбедени услови за *строга самостојност* на секој ученик посебно. За да се добие што повистинита слика (и оценка) на знаењата на ученикот, најдобро е да се разработи и да се применува систем на повеќеварајантни контролни работи со задачи од три степени на тежина. (Секако тоа бара од наставникот повеќе напори, но тие напори на крајот се исплатуваат.) На следниот час треба да се направи куса анализа на контролните работи и, на некои ученици, да им се зададат задачи во врска со грешките што ги направиле.

Меѓу овие часови се вбројуваат и часовите за *усна проверка на знаењата,* што се спроведуваат понекогаш пред завршувањето на полугодието или тримесечието. Сепак, основата на усната проверка и оценување ја сочинува тековното следење на учениците што се реализира (по можност) на секој час.

2.3. ЗА ЕФЕКТИВНОСТА НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Еве неколку совети на наставникот-почетник.

Секој наставник треба да се труди да ги усовршува своите наставни часови и да ја зголемува нивната ефективност во духот на следниве тенденции:

а) да се зголемува научното и идејното ниво на учебниот материјал што се изучува на наставниот час,

б) да се стави тежиштето на наставата и воспитувањето на самиот час,

в) да се активира колку што е можно сознајната активност на учениците во процесот на наставата,

г) да се користат на часот разни технички наставни средства.

Ефективноста на наставата по математика многу ќе се зголеми ако наставникот посвети доволно внимание и време за да се подготви системот од лекции по одделните тематски целини.

Исто така, ефективноста на часот може да се зголеми, ако често се посетуваат *наставни часови на поискусни наставници*, ако се анализираат нивните наставно-воспитни постапки и ако се преземат најрационалните од нив. (Се разбира, за таа цел треба да се прават такви анализи и на сопствените наставни часови.)

2.4. ВЕЖБИ

1. Во учебникот „Геометрија за VIII одделение", разгледај ја лекцијата Плоштина на призма". Каков вид наставен час би применил?
2. Во учебникот „Математика за I година на средното образование" разгледај ги лекциите „Поим за корен", „Проширување и скратување на корени", „Коренување на производ и количник" и направи систем задачи за утврдување на тој материјал.
3. Разгледај ја темата „ Сличност. Питагорова теорема" во учебникот „ Геометрија за VIII одделение" и запиши го системот прашања и задачи за повторување и систематизирање на материјалот од таа тема.

3. ПЛАНИРАЊЕ НА НАСТАВАТА: ГОДИШНО И ТЕМАТСКО

3.1. ПОДГОТОВКА ЗА НАСТАВА; ПЛАНИРАЊЕ

Подготовката на наставникот за настава претставува реализирање на систем мерки и активности што ќе обезбедат разни услови (организациски, наставно-програмски, матерјално-технички, дидактичко-методски, временски и други), неопходни за квалитетна и рационална воспитно-образовна дејност по наставниот предмет математика.

Подготовката за настава е една од најважните задачи на наставникот и пресуден фактор за успешно, навремено и ефикасно остварување на наставната дејност. Таа вклучува во себе повеќе меѓусебно поврзани барања и активности. Едно од основните барања за успешна подготовка е планирањето на таа дејност.

Под **планирање** на наставата подразбираме однапред набележан систем мерки за навремено извршување на поставените задачи. Подготовката и планирањето на наставата се постојано заемно сврзани: подготовката има карактер и на планирање, а планирањето на воспитно-образовната дејност претставува истовремено и подготовка за нејзиното спроведување.

Со планирањето се создава основа за конкретна реализација на наставниот процес: *однапред се предвидува што ќе се работи, во кој временски термин, со кои наставни средства, методи и сл.* Со тоа се овозможува и се обезбедува:

- утврдување и конкретизирање на наставните содржини,
- систематско, рамномерно и целосно реализирање на наставната програма во текот на целата учебна година,
- правилно распоредување (во логички редослед) на наставниот материјал,
- планско користење на наставните средства, вклучувајќи ги и техничките помагала,
- усогласување на сите активности, сврзани со наставниот процес,
- правилно воспитно влијание врз учениците.

Подготовката на наставникот за наставата, во зависност од целта што треба да се постигне, задачите што треба да се реализираат и времето кога се врши, може да биде: годишна (глобална) подготовка, подготовка за обработка на наставна целина и подготовка за наставен час. Во согласност со тоа, при подготовката и планирањето на наставата, наставникот ги приготвува и следниве документи: годишен (глобален) план, план на наставната целина (тематски план), план на наставен час.

3.2. ГОДИШЕН ГЛОБАЛЕН ПЛАН

Годишната подготовка на наставникот има општ, глобален карактер, зашто е насочена кон обезбедување на претпоставките за остварување на сите активности што се неопходни за успешно, квалитетно и комплетно реализирање на воспитно-образовната дејност во текот на целата учебна година.

Глобалната подготовка започнува пред почетокот на учебната година. Наставникот ги презема и ги реализира следниве активност и задачи:

1) *ги обезбедува сите позначајни извори и документи,* врз чија основа ќе го изработува годишниот глобален план,

2) *ја проучува наставната програма на предметот* (особено ако се работи за нова или коригирана наставна програма, или ако првпат ја изведува таа настава),

3) *ја анализира работата (својата и од учениците) од претходна учебна година,* односно од претходните години и согледува кои делови од материјалот од претходните учебни години е неопходно добро да ги знае ученикот за успешно да ја следи наставата во претстојната учебна година,

4) *ги проверува и проучува неопходните наставни средства во согласност со наставната програма,* постојните нормативи и расположивите услови, а презема соодветни мерки за обезбедување на потребните материјално-технички услови на наставата,

5) *ги проучува учебникот и збирката, соодветните методски прирачници,* материјали од семинари за наставници, како и друга стручно-методска литература,

6) *прави глобална разработка на програмските содржини и активности:* а) го утврдува фондот на наставните часови за секоја тематска целина, б) ги распоредува тие часови според разни наставни активност (за нови содржини, за утврдување и увежбување, за повторување и систематизирање, за применување на стекнатите знаења, за писмени и други контролни работи воопшто: за проверување и оценување и др.), в) врши ориентационо временско распоредување на наставните содржини и активности.

Врз основа на сето тоа, наставникот приготвува годишен глобален план пред почетокот на учебната година, во два примерока, од кои едниот треба да му го предаде на директорот на училиштето, а другиот го задржува за себе.

Формулар 1

-стр. 1-

____
(Воспитно-образовна организација)

ГОДИШЕН ГЛОБАЛЕН ПЛАН

за наставата по предметот ____________________
Година (клас) __________ Паралелки ______________
Учебна година ____________________
Предметен наставник ____________________
(Име и презиме)

Септември, 19___ година

-стр. 2-

I ПОЛУГОДИЕ

Ред. број	Програмски содржини (наставни теми-тематски целини, наставни активности и сл.)	Број на часови	Период на реализација
⋮			
Забелешка во врска со планирањето и реализацијата			

-стр. 3-

II ПОЛУГОДИЕ

Ред. број	Програмски содржини (наставни теми-тематски целини, наставни активности и сл.)	Број на часови	Период на реализација
⋮			
	Забелешка во врска со планирањето и реализацијата		

-стр. 4-

Претпоставки и услови за реализација на програмата
(Организациони, материјално-технички и др.)

Согледувања за реализацијата на програмата
(Констатации и предлози)

Предаден на ______________ год.

Примил и прегледал, Наставник,

____________________ ____________

Годишниот глобален план за наставата по предметот математика претставува содржинска и временска основа, т.е. ориентација за работата во текот на целата учебна година. При неговото изработување, наставникот треба да води сметка и за следново: учебната година има 36 работни седмици (180 работни денови), а во некои училишта бројот на работните седмици може да варира (поради: завршни испити, практична работа, екскурзии и др.), па според тоа, треба да планира и „резервни" часови.

Врз основа на горенаведените укажувања, а водејќи сметка за прегледноста и едноставноста, писмената форма на годишниот глобален план може да се направи како што е дадено погоре (формулар бр. 1).

Наставникот може да набави готов формулар или да си направи сам, земајќи, двоен лист хартија (4 страници) со формат A_4 и внесувајќи ги сите неопходни рубрики.

Пожелно е наставникот да го подготвува годишниот глобален план во соработка со наставниците од активот на математичарите во училиштето што ќе го предаваат истиот материјал во претстојната учебна година (поради користење искуства, усогласување и др.).

3.3. ПЛАН И ПОДГОТОВКА НА ТЕМАТСКА ЦЕЛИНА

За поефикасно реализирање на материјалот, наставната програма се дели на логички и содржински заокружени делови, наречени **наставни** или **тематски целини** (или, уште покусо, **теми**). Списокот на тематските целини е даден во годишниот глобален план, за целата учебна година, заедно со ориентациониот фонд на часови.

Наставникот пристапува кон дефинитивната подготовка и планирање, за секоја тема посебно, најдоцна една недела пред започнувањето на реализацијата на таа тема. Тој се запознава со содржината на темата во подробности, според: учебникот, збирката, методско-дидактичкиот прирачник за наставникот (ако има), други стручно-методски извори и според своето претходно искуство. Така, тематската подготовка, всушност, значи натамошно разработување и конкретизирање на годишниот глобален план.

На оваа етапа, наставникот ги решава *следниве методски задачи:*

1) го определува местото (т.е. значењето) на тематската целина во учебниот курс, ја определува нејзината содржина (т.е. го избира неопходниот учебен материјал) и ги утврдува оперативните задачи;

2) го распоредува материјалот од темата по наставни часови;

3) планира утврдување и повторување, по време и по содржина, го означува времето на спроведување на самостојните и контролните работи.

За тематската подготовка, наставникот води соодветна писмена документација. Во таа смисла, тој пополнува соодветен формулар, наречен „План и подготовка на темата бр. ____"

(формулар бр. 2). Притоа, наставните часови се планираат така како што ќе се запишуваат во дневникот.

Формуларот се состои од двоен лист хартија, со формат A_4. Во него, покрај општите податоци за називот на темата, наставниот предмет и наставникот, се разработуваат и се набележуваат следниве елементи.

А. Структура на тематската целина

Тука се определуваат наставните единици, односно часовите за разните активности во врска со темата, наведувајќи ги по редоследот по кој ќе се спроведуваат. Притоа, наставникот се раководи од барањата што се наведени во наставната програма, од вкупниот број часови што се предвидени за таа тема во годишниот глобален план, се служи со учебникот и се потпира на сопствените искуства и искуствата на колегите.

Во рубриката „период на реализација" за соодветниот наставен час треба да се стави денот кога за прв пат, во првата паралека ќе се изведува тој наставен час.

Б. Оперативни задачи на темата

Во наставната програма, покрај општите задачи, се даваат и посебните, т.н. оперативни задачи. Врз основа на тоа, а и на сопственото искуство, наставникот ги определува начелно тие задачи, како образовните и воспитните така и практичните.

В. Корелации на програмските содржини

Во рамките на подготовките на тематската целина, наставникот размислува и за содржинско-функционалното поврзување на наставниот материјал, како во рамките на самиот наставен предмет така и со други наставни предмети. Тие размислувања и согледувања се начелни, но мошне важни за конкретно и успешно поврзување на материјалот од секој наставен час посебно, со други делови од наставата воопшто, па нив ги набележува во планот.

Г. Организациона и материјално-техничка подготовка. Подготовка на учениците

Наставникот размислува за создавање соодветни услови за изведување на наставата: местото и наставните средства, видот на евентуалните посебни вежби и демонстрации, посети на вонучилишни места (работни организации), користење технички средства, како: графоскоп, дијапроектор, филм, радио, систем од респондери и сл. Тој се грижи да ги обезбеди тие средства, помагала, технички апарати, прибори, потрошен материјал и слично, врши проверка на нивната исправност и функционирање, а се подготвува и за нивното адекватно и вешто користење – манипулирање. (Овие подготовки наставникот ќе ги реализира

Формулар 2

-стр. 1-

____
(Воспитно-образовна организација)

ПЛАН И ПОДГОТОВКА НА ТЕМАТА БР. ___

____
(Назив на темата)

Наставен предмет ________________________
Година (клас) __________ Паралелки __________
Учебна година __________________
Наставник ______________________________

________ 19___ година

-стр. 2-

А. Структура на наставната тема		
Ред. бр. на часот	Наставни единици	Време на реализација
⋮		

Б. Оперативни задачи

В. Корелации на програмските содржини

Г. Претпоставки и услови за реализацијата
(Организациони, материјално-технички,
подготовка на учениците и др.)

-стр. 4-

Д. Користена стручно-методска литература

Ѓ. Согледувања за реализацијата на темата
(Констатации и предлози)

поконкретно и пооперативно во рамките на својата подготовка за секој наставен час.)

За одделни наставни целини, потребно е и корисно, *учениците да извршат соодветни подготовки* според упатствата на наставникот. Со тоа многу често им се олеснува усвојувањето на новите програмски содржини. Затоа, наставникот треба со тематскиот план начелно да ја предвиди и оваа подготовка, а ќе ја реализира конкретно низ наставните часови, особено преку домашната работа.

Д. Користена стручно-методска литература

Наставниците, во текот на своето школување, се здобиваат со неопходната стручна подготовка од предметот, па и од односната тематска целина. Сепак, потребите на наставата наложуваат тие постојано да се усовршуваат и методски да се изградуваат. Поради тоа, наставникот треба да користи разни извори на знаења, како учебници така и друга стручна и методска литература. Тој треба да наведе краток список на соодветна литература во планот на темата.

Ѓ. Согледувања за реализацијата на темата

Во текот на обработката на тематската целина или по нејзиното завршување, наставникот *прави анализа*, врз основа на која дава констатации, *заклучоци и оценки* за одделни аспекти на подготовката, организацијата и реализацијата на наставата по таа тема. Тоа ќе му помогне за подобро подготвување, планирање и изведување на наставата во иднина, односно за неговото лично усовршување.

Во двојниот лист на планот од темата, како во папка, наставникот става по еден лист за секој наставен час од таа тема, одбележувајќи го насловот на наставниот час и, евентуално, некои други согледувања и забелешки. Наставникот ќе го исполни комплетно секој од тие листови најдоцна во текот на подготовката на соодветниот наставен час.

3.4. ВЕЖБИ

1. Проучи ја наставната програма и учебникот по математика за I година (глобално) и направи годишен глобален план за наставата на:
   а) природно-математичката струка,
   б) техничките струки.
2. Избери и проучи во подробност една тема (од учебникот, а според годишниот глобален план од зад. 1) и направи тематски план на таа наставна целина.

4. ПОДГОТОВКА НА НАСТАВНИКОТ ЗА НАСТАВЕН ЧАС

4.1. ОСНОВНИ ПРАШАЊА ЗА ПОДГОТОВКАТА И ПРЕПОРАКИ

„Постои мислење дека на искусен наставник не му е потребно време за подготвување на наставниот час, дека тој може да го спроведе ех abrupto, т.е. без претходна подготовка. Тоа мислење е сосема погрешно. Дури и обратно: искусниот наставник подобро од другите ја разбира потребата од внимателна подготовка на секој наставен час" [15, стр. 311].

Наставникот се подготвува за секој наставен час според претходно изготвен тематски план за соодветната тематска целина. Притоа, пред наставникот се појавуваат повеќе методски прашања. Меѓу нив, кога се работи за наставен час за обработка на нови содржини основни се:

1) Како да се воведат учениците во наставниот час, како да се постави пред нив одреден проблем или учебна задача?

2) Како да се воведе нов поим и како да го совладаат учениците?

3) Како да се открие некое својство на веќе воведен математички поим, објект или релација?

4) Како да се докаже некоја законитост, откриена индуктивно?

(Аналогни прашања се поставуваат и за други видови наставни часови.)

Одговор на секое од овие прашања наставникот треба да си даде сам при подготовката на наставниот час, во зависност од конкретната ситуација. Во врска со тоа, на наставникот - почетник може да му бидат од полза следниве препораки и примери.

1) Учениците се воведуваат во темата на наставниот час најчесто преку правовременото дознавање на основната учебна цел на часот. Притоа, секогаш кога е можно, препорачливо е тоа да се прави преку создавање на некоја проблемска ситуација што ќе ги мотивира учениците за изучување на тој материјал. Примерот „формула за корените на сведена квадратна равенка" што го разгледавме во А.1 може да послужи како пример за воведување на учениците во наставниот час.

2) Воведувањето на нови поими е препорачливо да се врши со конкретно-индуктивниот метод, најчесто по пат на разговор меѓу наставникот и учениците. Притоа, наставникот поставува соодветни прашања, а учениците даваат одговори. На тој начин тој ги води учениците од познати поими кон новиот поим што треба да го совладаат.

Како пример може да послужи фрагментот на наставниот час „Степен со показател цел број", наведен во IV.6.3.

При подготовката на овој или друг фрагмент на часот, истовремено се решаваат барем три прашања:

- *содржина на разговорот (дејноста),*
- *што ќе каже (што прави) наставникот и што ќе кажат (што прават) учениците,*
- *што и како да се запише на таблата односно во тетратките на учениците.*

Да забележиме дека содржината на нашиот разговор со учениците обично не е иста со соодветниот текст во учебникот. Во поголемиот број случаи така треба и да биде. Учебникот не е раководство по методика на наставата. Во него се утврдуваат главно фактите, а не програмата за нивното усвојување.

Тоа значи дека *наставникот не го прераскажува текстот од учебникот, туку творечки го интерпретира, т.е. „дидактички го преточува".*

** Наставниците - почетници честопати го поставуваат прашањето: „ Колку примери да наведам при воведувањето на определен поим"? Секако, за тоа нема шаблон. Најдобро е (акс е можно) да се придружуваме до т.н. „ аха!-ефект" (во психологијата), т.е. да даваме примери за воведување додека (ученикот не рече „Аха!" (т.е. „Јасно ми е!"). **

3) *Откривањето на ново својство* на математички поим или релација може да се врши главно на два начина: конкретно-индуктивно или апстрактно-дедуктивно. Во општите препораки *се дава предност на конкретно-индуктивниот метод,* особено во основното образование. Како пример може да послужи откривањето на својството за збирот на аглите во триаголникот во VI одделение (види II.2). Паралелно со развивањето на психофизичките способности на учениците, во средното образование, постепено се зголемува улогата и на апстрактно-дедуктивниот метод.

4) *Индуктивно откриена законитост (својство, теорема) обично треба да се потврди со доказ.* Во зависност од конкретната теорема, возраста на учениците и други педагошко-методски околности, се избира соодветен метод на докажување. Притоа, треба да се направи соодветна анализа, да се извршат неопходните подготовки, учениците да ја сфатат потребата од доказ и доказот да протече природно, прифатливо за нив. За да го постигне тоа, наставникот мора да се подготви внимателно, да ја знае (или да ја запомни) добро последователноста на заклучоците и нивните причини во доказот на теоремата.

Всушност, *при подготовката на наставниот час, наставникот ја разработува не самата теорема и нејзиниот доказ (тоа се смета за општопознато!), туку програмата на дејноста на класот за создавање на доказот.*

** Треба да се има предвид дека даденото методско решение не е единствено, постојат и други варијанти, со други наставни постапки или средства, а кои од нив ќе се изберат - зависи од општите и од посебните околности. **

4.2. ПЛАН (КОНСПЕКТ) НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Во склоп со подготовката за наставниот час, наставникот подготвува **писмен план** (т.е. **конспект**) на наставниот час, во форма, на пример, како приложениот формулар бр. 3. Ја дефинира основната дидактичка цел на часот и ја одбележува во планот (но, тоа не е задолжително, ако целта е јасна од насловот на наставната единица).

Наставникот се запознава со соодветниот текст во учебникот, ги прегледува задачите во него и во збирката, размислува за нивните решенија, а потоа се обраќа кон методските прирачници и дополнителната литература. При утврдувањето на образовните задачи, *наставникот наведува во конспектот кои знаења* (поими, дефиниции, факти, правила, формули, теореми и сл.) *учениците треба да ги усвојат и на кое ниво.* Се определуваат, исто така, и знаењата односно содржините што ќе се прецизираат, коригираат, продлабочуваат или прошируваат. Наставникот размислува за за корелациите, за идејно-воспитните и практичните задачи и, доколку има можности, ги набележува.

Потоа, наставникот ги определува материјално-техничките услови за часот - *наставни средства и помагала,* водејќи сметка за современите дидактичко-методски барања (принципи), во согласност со подготовката што ја извршил глобално при подготовката на соодветната наставна целина.

Откако ќе го објасни типот на наставниот час и неговата можна структура, наставникот пристапува кон *најделикатното и најодговорно прашање: какви методи е целисходно да се применат за таа лекција.* Наставник што работи творечки, нема просто да го прераскажува текстот од учебникот, туку ќе примени адекватни наставни методи (на докажување или решавање) што ќе обезбедат активно и развојно учење на учениците во текот на наставниот час. Набележувајќи вежби за решавање на часот, тој ќе забележи во планот експлицитно кои од тие задачи ќе бидат предложени за самостојно решавање.

Планот на лекцијата (т.е. текот на часот) треба да се напише доста подробно. Во него се запишуваат една по друга *етапите на часот што одговараат на неговите структурни елементи.* Етапите на часот е згодно да се нумерираат со римски цифри, а за нумерација во секоја етапа да се употребуваат арапски цифри или буква. За секоја етапа треба да се запише ориентационо времето што ќе и се посвети. Во планот треба да се определи јасно не само работата на наставникот туку и тоа (уште поважно!) *што треба да прават учениците во секоја етапа на часот.*

Во случаи кога ќе се применува *методот на (евристичен) разговор,* треба да се запише во конспектот добро обмислениот систем прашања за достигнување на целта.

Во случаи кога се планира лекцијата да се реализира

Формулар 3

Стр. 1

ПОДГОТОВКА ЗА НАСТАВЕН ЧАС
Тип на часот
НАСТАВНА ЕДИНИЦА, АКТИВНОСТ
Наставна тема
Година (одд., клас), паралелки
Датум
А. НЕПОСРЕДНИ ЗАДАЧИ И КОРЕЛАЦИИ НА ЧАСОТ:
Б. ОРГАНИЗАЦИЈА И МАТЕРИЈАЛНО-ТЕХНИЧКИ УСЛОВИ НА ЧАСОТ (Место на одржување, средства, помагала и др.):
В. НАСТАВНИ ФОРМИ И МЕТОДИ:

Стр. 2

Г. АРТИКУЛАЦИЈА (ТЕК) НА ЧАСОТ
(План-етапи; содржина-скица; методи; задачи):

Д. ДОМАШНА РАБОТА

Ѓ. РЕЗИМЕ

Е. СОПСТВЕНИ СОГЛЕДУВАЊА ЗА РЕАЛИЗАЦИЈАТА НА ЧАСОТ *преку самостојна работа на учениците,* треба да се назначи какви ќе бидат податоците на задачите, упатствата за нивното исполнување, како ќе биде реализирана проверката итн.

Ако се планира да се примени *методот на проблемска настава,* во конспектот треба да се одбележи како ќе се создаде проблемската ситуација, како и од кого ќе биде формулиран проблемот, какво учество ќе земат учениците при неговото решавање и проверката на решението, каква помош ќе им биде дадена од наставникот.

Исто така, треба да се дефинираат *формите за утврдување на материјалот* од таа лекција.

Се препорачува во планот да се вклучат и решенијата на задачите, предвидени за решавање на часот, како и на тие за домашна работа. Тоа барање е задолжително за тие наставници што немаат искуство во реализирањето на таа програма. Решенијата се запишуваат скратено, а некои погломазни - може да се запишат под (т.е. надвор од) планот на лекцијата.

За одржаниот час, добро е *наставникот да направи анализа, да ги согледа и да ги оцени постигнатите резултати:* дали правилно и адекватно се реализирани поставените цели и задачи, дали имало недоследности, неефикасност и сл. Тој треба да ги одбележи во конспектот и позитивните и негативните страни на часот, а тоа ќе му послужи *конкретно* - за подобро изведување на таа лекција во иднина, но и *општо* - *за неговото стручно-методско усовршување.*

4.3. УШТЕ НЕКОЛКУ ЗАБЕЛЕШКИ И ПРЕПОРАКИ

Наставниот час може да започне на најразлични начини: со фронтална беседа, со проверка на домашната работа, со самостојна работа, со проверка на некои ученици, со кусо повторување на минатата лекција (на пример, поради поврзување со новата) итн. Секако, тоа треба наставникот да го обмисли при подготовката на наставниот час. Инаку, разнообразноста во почнувањето на наставните часови зависи од: содржината, работата во претходниот час, подготовката на учениците и, секако, од творечките можности на наставникот. Се разбира, пожелно е лекциите да почнуваат разнообразно, не шаблонски.

Во планот на лекцијата треба да се формулираат сите задачи и прашања по материјалот од минатата лекција или за повторување, коишто наставникот има намера да ги постави при испрашувањето. Особено е важно да забележи што од домашната работа ќе биде проверено, **кога и како.**

На почетокот на часот наставникот треба да обрне внимание *дали класот е готов за почнување на лекцијата* (ако не е- да се обезбедат услови за тоа), а на крајот треба да се направи кратко резиме, т.е. треба да се каже (од наставникот или од учениците - со поттикнување) што научиле на тој наставен час.

Се препорачува навремено да се разработуваат плановите на *систем од неколку последователни лекции*, по можност - на сите наставни часови од наставната целина што се обработува. Тоа ќе обезбеди подобра усогласеност на плановите и на процесот на наставата воопшто.

4.4. ВЕЖБИ

1. Со конкретно-индуктивниот метод, обмисли како да се открие својството:
   - а) Ако два броја a и b се деливи со ист број d, тогаш и збирот $a+b$ е делив со d (V одделение).
   - б) Во ромбот дијагоналите се симетрали на аглите (VI одделение).
   - в) Евклидовите теореми (VIII одделение).
   - г) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (I клас).
   - д) Синусна теорема.
2. Разгледај ја наставната програма и учебникот за I клас (за која било струка), избери и обмисли некој наставен час и направи целосна подготовка и план на наставниот час.

5. САМОСТОЈНА И ДОМАШНА РАБОТА НА УЧЕНИЦИТЕ

5.1. ЗА ЗНАЧЕЊЕТО НА САМОСТОЈНАТА РАБОТА

Самостојната работа на учениците има огромна важност за постигнување на целите на наставата. Затоа овде пак ќе се навратиме на неа (види III.3.5).

Навиката за самостојна работа на учениците треба да се создава систематски, за време на часовите, да се негува, т.е. да се усовршува, особено преку: домашната работа, со решавање задачи, изучување нов материјал, со изработување цртежи, графици, модели и друго. Тоа се постигнува обично преку индивидуалната форма на работа, но може, исто така, преку работа по групи и, специјално, по парови.

Некои наставници ретко го применуваат методот на самостојна работа, а кога ќе се обидат, таа обично е недоволно успешна. Причината за тоа е најчесто неподготвеноста на класот, односно на наставникот за таков начин на работа. За успешна примена на самостојната работа наставникот треба да прави посебни подготовки дома, а треба да го подготвува и класот подолго време, упорно и стрпливо. Потрошеното време за тоа повеќекратно ќе се исплати подоцна.

Ненавикнатоста на учениците за самостојна работа создава повеќе недостатоци, меѓу кои и некористењето на учебникот. Како последица од тоа, кај учениците се јавуваат *неполни и површни знаења, ограничен математички речник и неспособност да користат друга, соодветна математичка литература.*

Меѓутоа, добро организираната самостојна работа дава многу позитивни резултати: со нејзина широка и смислена примена може да се научат самостојно да решаваат задачи речиси сите ученици. Преку самостојната работа ученикот постигнува: *квалитетни знаења, стимул за самостојно истражување, висок степен на самокритичност, самоконтрола, самоиницијативност и други квалитети.*

Според тоа, со самостојната работа во најголема мера се реализираат најважните дидактички принципи во наставата: активност на учениците, сознајно усвојување на учебниот материјал, трајност на знаењата, индивидуален пристап и принципот на воспитување низ наставата.

5.2. ПРЕПОРАКИ ЗА ОРГАНИЗИРАЊЕ И СПРОВЕДУВАЊЕ НА САМОСТОЈНА РАБОТА

1°. Самостојна работа на учениците може да се организира на повеќе видови наставни часови, но најчесто се организира и најчесто се практикува *на часовите за вежбање* (т.е. „за решавање задачи").

На часовите за вежбање, според структурната шема на тој тип часови, наставникот ја објавува темата, *организира потсетување* на најважни факти за материјалот што ќе биде увежбуван и дава препораки за начинот на работа: самостојно решавање задачи. Пред почнувањето на самостојната работа на учениците, наставникот може прво да демонстрира решавање на некоја *типична задача* (ако оценил претходно дека има потреба за тоа). Притоа е пожелно учениците да не пишуваат во тетратките,туку само да ги следат објаснениjата на наставникот. Потоа, решението на задачата се брише од таблата и на учениците им се задава слична задача (дури и истата).

Натаму, класот ја продолжува работата според *системот задачи* што наставникот однапред го обмислил и составил водејќи сметка за принципот на научност, последователност и систематичност (т.е. „од познато кон непознато", „ од просто кон сложено" и „следното се потпира на претходното").

За време на самостојното решавање на задачите, наставникот им укажува *индивидуална помош на послабите,* а им дава *дополнителни задачи на посилните* (најдобро преку однапред подготвени ливчиња).

По решавањето на задачата, ако е неопходно, наставникот *ги дискутира со класот:* резултатот, одделните етапи на решавањето, идејата, планот, можните обопштувања и др.

2°. *Во некои случаи, учениците (т.е. класот во целина) не ќе можат да решат самостојно определена задача* (најчесто поради лоша проценка на наставникот за нивната подготвеност и можности). Во такви случаи наставникот треба да се откаже од самостојната работа на учениците врз поставената задача, но само привремено. Имено, пожелно е да организира *„полусамостојна работа", т.е. работа со помош:* поставува прашања фронтално, бара соодветни одговори од учениците (или ги дава сам), ја разбива задачата на подзадачи и со тоа им дава на учениците минимум информации, според кои тие ќе можат да го откријат патот за решавањето на задачата. Такви ситуации се јавуваат најчесто при нестандардни задачи. Самостојната работа тогаш потешко се спроведува, но ако е солидно подготвена, таа може и во такви случаи да даде добри резултати. Според тоа, наставникот не треба да ги избегнува нестандардните задачи за овој начин на работа.

3°. *Самостојната работа може да се практикува и за нов материјал,* но само во случај кога тој им е скоро познат на учениците или е релативно лесен за самостојно совладување. Во таков случај, најчесто се користи учебникот. Наставникот бара од учениците сами да обработат некој дел - „порција" од лекцијата (обично тоа се прави со учениците од основното образование) или им ја задава целата лекција. Потоа врши проверка на усвојувањето со сите ученици, дополнувајќи и поправајќи сè што ќе забележи дека е пропуштено или е погрешно сфатено.

Усните вежби за време на часот или дома *имаат голема дидактичка вредност* и претставуваат, исто така, еден вид самостојна работа. Поради тоа, треба систематски да му се обрнува внимание на организирањето усни вежби за време на часот.

4°. Во практиката се среќава следнава појава: *наставникот повикува ученик да решава на таблата, а истовремено бара од другите ученици самостојно да ја решаваат таа задача.* За одличните ученици по математика, решавањето на таблата е непотребно, а за послабите не е пожелно, зашто тие само ќе препишуваат од таблата. Голем број и од „средните ученици" што би можеле да решаваат самостојно, во повеќето случаи ќе препишуваат. Во таков случај, всушност, не може да има самостојна работа. Според тоа, класичното „вадење ученик на табла" претставува смрт за самостојната работа на учениците.

** Поради тоа, пред да изведете ученик да решава задача на таблата, добро промислете за целта на неговото повикување: за што е тоа потребно? Како причини за повикување ученик на табла, наставниците најчесто ги наведуваат следниве:

- да го имаат (во тетратка) решението на задачата и оние учениците што не можат сами да ја решат, или

- да го проверам знаењето на ученикот.

Меѓутоа, не е убедлива ниедна од наведените причини - секоја од нив може да се отфрли, лесно, аргументирано.

Па, тогаш, дали е забрането да се повикува ученик на табла? Секако не е! - Но, треба за тоа да има добра причина или оправдание, како на пример:

- да се коментира задачата во целина,
- да се укаже на некој критичен момент во решавањето или на некоја типична грешка,
- да се прикажат други можни решенија и, евентуално, најелегантното,
- да се прикаже оригинално решение.

(Во сите тие случаи може ученик што е готов со решението да го препише на таблата од својата тетратка, без да се прекинува работата на другите ученици.) **

На крајот да забележиме дека самостојната работа на учениците, меѓу другото, може многу добро да се искористи *за правилно оценување на учениците,* било за систематско следење било за повремено проверување на одделни ученици.

5.3. СОДРЖИНА, ОБЕМ И ЗАДАВАЊЕ НА ДОМАШНА РАБОТА

Домашната работа за ученикот претставува продолжување на работата од часот и таа е највисок степен на неговата самостојна работа. Домашната работа е исто толку значајна колку и работата на часот, па затоа е многу важно таа да биде *добро обмислена и правилно спроведена.* Може слободно да се каже дека, без добро организирана домашна работа, илузорно е да се очекуваат добри резултати во наставата по математика.

Според тоа, нема дилеми дали на учениците да им се задава домашна работа или не. Треба, секако! Предмет на дискусија можат да бидат само некои нејзини елементи: содржината, обемот, задавањето, изработувањето и прегледувањето.

Содржината на домашната работа *може да биде мошне широка и разновидна.* Таа може да опфати задачи:

- за усно одговарање,
- за писмено искажување,
- од практичен карактер (цртање, мерење, лепење, изработување графици, шеми или модели и др.).

Задачите треба да бидат разнообразни и подредени според сложеноста.

Скоро секоја домашна работа треба да има два дела:

- *I дел:* задачи за утврдување на новоизучениот материјал, и, по можност, задачи за повторување и систематизирање на изученото од една или повеќе тематски целини;
- *II дел:* задачи и активности што непосредно ќе помог-

нат за воведувањето и совладувањето на новиот материјал, предвиден за наредниот наставен час.

Во домашната работа треба да се вклучуваат и потешки задачи, наменети *за учениците што сакаат да научат повеќе математика, но тие задачи треба да бидат незадолжителни.* Наставникот треба да ја следи оваа дополнителна работа на учениците индивидуално и, по можност, одвреме навреме да го запознава класот со оригиналните (или најинтересните) решенија на некои од тие задачи, како и со нивните автори.

На **обемот на домашната работа,** исто така, треба да му се посвети соодветно внимание. Тој треба да биде „оптимален" - ни премал ни преголем. Во случај кога домашната работа е преобемна, постои голема опасност да биде промашена: голем број од учениците ќе ја препишат, немајќи време да ја изработат сами.

Наставникот мора да води сметка за тоа колку време ќе му треба на „просечниот" ученик за да ја изработи домашната работа (имајќи предвид дека тој има обврски и од другите предмети).

Постојат разни мислења во врска со времетраењето на изработката на домашната работа. Тоа зависи од повеќе околности (возраста на учениците, нивото на знаењата на класот, наставната единици, периодот во неделата и др.), па затоа не може однапред да се определи „времетраењето" што ќе важи универзално, за секоја ситуација.

Најчесто е мислењето дека домашната работа не треба да му одзема на ученикот повеќе од 50% од потрошеното учебно време за предметот во училиштето (а тоа значи до 30 минути, ако во тој ден имал еден наставен час).

За ориентација, наставникот може да се раководи од следниот став: *за домашна работа да се задаваат толку задачи (по број и по обем), колку што „просечните" ученици самостојно решиле задачи на часот.* (Овој критериум важи особено за учениците од основното образование, но може успешно да се применува и за тие од средното).

Се смета дека домашната работа е **правилно зададена,** ако наставникот стекнал уверување дека скоро сите ученици ќе ја изработат самостојно (во согласност со горespоменатиот критериум).

Домашнара работа треба да се зададе **навреме** (значи, не откако ќе заѕвони ѕвончето за завршување на часот!) и, по можност, со коментар. Таа треба да се запише на таблата кратко („телеграфски") и да им се предложи на учениците да ја запишат во тетратките (до завршувањето на часот).

5.4. ПРОВЕРУВАЊЕ НА ДОМАШНАТА РАБОТА

При задавањето на домашната работа треба да се планира и начинот на нејзиното проверување. Притоа, треба да се почитува следниов принцип: *при проверувањето, сите ученици да бидат активни.*

Методите на проверувањето на домашната работа се разновидни. Најчесто применуваните се:

1) *бегло погледнување* во тетратките, во почетокот на часот, со прошетка низ класот,

2) *усно испрашување* „од место" или „на табла", со барање резултати или одделни етапи од решенијата на задачите,

3) *делумна проверка,* т.е. проверка само на некои ученици, усно или писмено, најчесто сврзана со следењето на нивната редовност во учењето,

4) *кратка писмена работа* составена од задачи од претходната (или од неколку претходи) домашни работи, обично во почетокот на часот, за десетина минути,

5) *темелна проверка* - со земање на тетратките од сите (или само од некои) ученици и прегледување надвор од часот.

Беглото прегледување во тетратките не одзема многу време, дава брз преглед на тие што имаат/немаат домашна работа, и ги тера учениците да ја носат тетратката. Меѓутоа, тој начин не дава можност да се провери дали учениците самостојно ја изработиле домашната работа или ја препишале, а не е добар и поради тоа што учениците се пасивни додека трае прегледувањето. Овој метод може да даде подобри резултати само ако се комбинира со други методи на проверување.

Усното испрашување, исто така, е брзо, економично, но не обезбедува „одбрана" од препишување. „Лек" против препишувањето може да биде практикувањето на кратка писмена работа; но, во тој случај, наставникот треба (задолжително!) да ги прегледа тие работи и соодветно да ги оцени.

Делумната проверка може да се врши мошне успешно на часот кога е организирано самостојно решавање задачи. Притоа, на наставникот му стојат на располагање повеќе начини на проверување на домашната работа.

Темелната проверка е најтешка, но затоа пак е најсолидна. При таква проверка, наставникот треба да го забележи своето мислење (во тетратките, со црвен молив) за редовноста, уредноста и др. на домашната работа на ученикот. Според тоа, ваквото проверување е можне заморно, одзема многу време, но сепак треба да се практикува (препорака: по една во секое полугодие).

Кој метод на проверување ќе го примени наставникот зависи од повеќе фактори: содржината на домашната работа, врската со новата лекција, расположливото време, составот на класот, бројот на учениците и др. *Искусниот наставник применува разновидни методи на проверување,* настојува да ги комбинира усната и писмената форма пред излагањето на новиот материјал, за да ги ангажира и подготви сите ученици. Проверката може значително да ја олесни и зогати, ако има можности за примена на специјални технички средства за проверување на знаењата.

5.5. ВЕЖБИ

Избери систем задачи за домашна работа што ќе бидат во функција на новата методска единица:

1. Волумен на права призма (VIII одделение).
2. НЗД и НЗС на полиноми (I клас).
3. Степен со показател цел број (I клас).
4. Синусна теорема (III клас).

6. ПРОВЕРУВАЊЕ И ОЦЕНУВАЊЕ НА ЗНАЕЊАТА НА УЧЕНИЦИТЕ

6.1. ЦЕЛИ, УСЛОВИ И НАЧИНИ НА ПРОВЕРУВАЊЕ

Проверувањето на знаењата и способностите на учениците во процесот на наставата има мошне важно образовно и воспитно значење. Тоа овозможува да се установи: степенот, целосноста, длабочината, сознајноста и трајноста на усвоените знаења, т.е. ја овозможува повратната информација ученик - наставник.

Со проверувањето се зголемува учебната дисциплина и се побудува активноста на учениците, а тоа помага за свесен однос кон редовната работа.

Наставникот треба да ги обезбеди неопходните услови за проверка на знаењата. *Проверката треба да биде:*

✓ *а)* **навремена,** по можност за секоја лекција;

✓ *б)* **планска:** во планот на наставниот час треба да биде јасно назначен начинот на проверувањето - дали ќе биде индивидуално, фронтално, преку кратка писмена проверка, преку самостојна работа итн.;

✓ *в)* **внимателна и психолошки издржана,** т.е. да не бидат забрзувани учениците, да не се создава нервоза што би придонела за давање необмислени одговори;

✓ *г)* **објективна,** т.е. да не бидат некои ученици привилегирани, а други запоставувани, или, уште полошо, злоставувани.

Има разни начини на проверување на знаењата и способностите. Најчести се:

✓ (1) Проверка преку **систематско набљудување** - тоа е следење на целокупната активност на секој ученик посебно, вклучувајќи ја редовноста во изработувањето на домашните работи, уредноста и др.

(2) **Индивидуална,** *усна или писмена проверка:* во писмена форма е можна и поволна особено при добро организирана самостојна работа. Важно педагошко-барање: при индивидуалното проверување другите ученици да не останат пасивни.

(3) **Фронтална** *усна проверка* – може да се применува во секоја етапа на наставниот час.

(4) *Проверки преку разни* **писмени вежби:** кратки контролни вежби, разни видови тестови, како и едночасовна или двочасовна писмена работа.

Особено важни се проверките на крајот од: тематската целина, тримесечјето, полугодието, или на крајот од учебната година. Исто така важни се проверките на домашната работа.

6.1. ПИСМЕНИ КОНТРОЛНИ РАБОТИ

Краткотрајни писмени контроли се применуваат за добивање информација за успешноста на усвоените наставни содржини во даден момент. Тие се вршат во дел од часот, а можни се и во вид на самостојна работа. Најчесто вакви проверки се прават во почетокот на часот за подготовка и мотивирање, а исто така на крајот од часот – за утврдување.

Посебен вид краткотрајни контроли претставуваат **математичките диктати.** Тие се наменети за усвојување на математичката симболика и за сознаен премин од усно на писмено изразување. Се спроведуваат така што наставникот чита зборовен текст, а учениците го запишуваат со симболи.

На пример, текстот „за секој реален број a, постои природен број n, таков што a е поголем или е еднаков со n, а е помал од n+1" учениците го запишуваат:

$$(\forall a\in\mathbb{R})(\exists n\in\mathbb{N}),\ (n \le a < n+1).$$

Математичките диктати можат да послужат и за проверка на знаењата од споменатиот вид и обем.

Писмените работи, т.е. едночасовните или двочасовните писмени контролни работи служат за проверка на поголем комплекс знаења и вештини по една тематска целина или по неколку тематски целини на тримесечје или на полугодие.

Според намената, разликуваме неколку *видови писмени работи:*

а) за решавање задачи,

б) за изработка на цртежи и графици,

в) за проверка на теориски материјал (изведување на формули, докажување на теореми и одговори на други прашања од теориски карактер),

г) комбинирани писмени работи (со или без подробни објаснения).

Наставникот треба да ѝ посвети *посебно внимание на проверката на писмената работа,* поаѓајќи од следниов став: „Успехот (неуспехот) на писмената работа е заеднички успех (неуспех) на учениците и наставникот". (Пристапот на наставникот од видот: „ништо не сте направиле (в и е)", не е оправдан.)

На поправката, наставникот треба:

- да даде статистички податоци за писмената работа, пред целата паралелка,
- да ги дискутира со учениците општите тешкотии и повторуваните грешки,
- да ги соопшти имињата на учениците што ги решиле сите задачи,
- да ги истакне решенијата што заслужуваат посебно внимание (оригиналност, досетливост, елегантност и економичност на решението и сл.).

6.3. ПРОВЕРУВАЊЕ СО ТЕСТОВИ

Проверката на знаењата со помош на тестови сѐ повеќе се применува во наставата. Причината за тоа се некои нивни предности, од кои најважни се следниве:

- се добива брз увид во знаењата на учениците,
- се исклучува влијанието на наставникот врз одговорите на ученикот,
- резултатите од тестовите се погодни за статистичка обработка.

Има два основни типа тестови:

I) тестови со понудени одговори и

II) тестови за присетување и дополнување.

Кај тестовите од типот I) на ученикот му се нудат одговори на секое прашање, а тој ги избира точните одговори. Поради тоа, овие тестови се викаат и *изборни тестови.* Тие се делат на: алтернативни тестови, тестови со повеќе (од два) одговори, тестови со вкрстен избор и тестови за идентификација.

1°. **Алтернативните тестови** се направени така што на поставеното прашање ученикот треба да одговори со „да" или „не".

Пример 1. Во следните прашања да се потцрта точниот одговор.

а) Дали бројот 1278 е делив со 6? Да. Не.

б) Дали квадратот е ромб? Да. Не.

в) Дали ромбот е ромбоид? Да. Не.

г) Дали бројот 1 е прост? Да. Не.

Наместо прашања, може да се понудат искази (тврдења), на кои ученикот одговара со „точно" (т) или „неточно" (⊥).

Пример 2. Стави Т или ⊥ (тоа што одговара) крај секое од следниве тврдења:

а) Две точки може да не се колинеарни.

б) Три точки секогаш лежат на една права.

в) Низ две дадени точки минува една и само една права.

г) Низ три точки секогаш минува една кружница.

Алтернивните тестови се применуваат поретко отколку другите тестови со понуден одговор. Сепак, нивната примена има добра перспектива при спроведување на фронтално испитување, особено во училници што се опремени со автоматизирани средства.

2°. Во **тестовите со повеќе одговори**, за секое прашање се понудени повеќе одговори, обично 3-5, од кои еден и само еден е точен, а ученикот треба да го заокружи точниот.

Пример 3. Заокружи ја бројката пред точниот одговор:

а) $\cos(90^\circ+\alpha)$ е: 1) $\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha$; 3) $-\sin\alpha$; 4) $-\cos\alpha$.

б) $(-0,5)^{-2}$ изнесува: 1) 0,25; 2) 4; 3) $\frac{-1}{25}$; 4) 2,5.

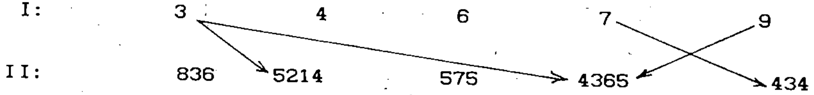
в) Решение на равенката $\frac{x}{2} = 0$ е:

1) $x = 2$; 2) $x = 0$; 3) $x = 1$; 4) Нема решение.

Постојат повеќе можности за оценување на ваквите тестови: (1) да се оценува со поен (еден, два или поинаку) секој правилно заокружен одговор, а негативните одговори да не се земаат предвид, (2) да се оцени со 2 поена секој точно заокружен одговор, со -1 поен („негативен поен") секој неточно заокружен одговор и без никакви поени, ако не е ништо заокружено, и други начини. (Секако, вториот начин е подобар.).

3°. **Тестовите со вкрстен избор или тестови со придружување** се уште една разновидност на тестовите со понудени одговори. На ученикот му се нудат две редици (или колони) податоци коишто стојат во определена заемна врска, а ученикот треба да ги пронајде податоците што си одговараат и да ги сврзе (со линија, стрелка или со друга ознака).

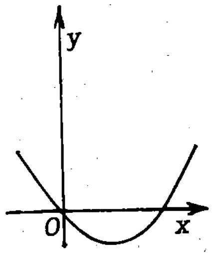
Пример 4. Сврзи го со стрелка секој број од I редица (даден подолу) со оној број од II редица што е негов содржател.



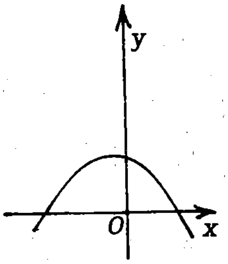
4°. **Тестовите за препознавање (идентификација)** претставуваат варијација на тестовите со придружување. Кај тие тестови, наместо одговори со зборови или со броеви, се наведуваат графици, шеми, цртежи и сл. Ученикот треба да ги распознае сликите и да ги нумерира во согласност со условите.

Пример 5. Утврди која од дадените релации а) - г) одговара на некој од графиците на функцијата $y = ax^2+bx+c$ (црт. 1 - 4):

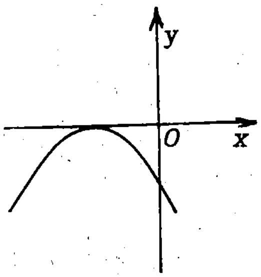
а) $a < 0$, $D = 0$; б) $a < 0$, $D > 0$;
в) $a > 0$, $D > 0$; г) $a < 0$, $D < 0$.



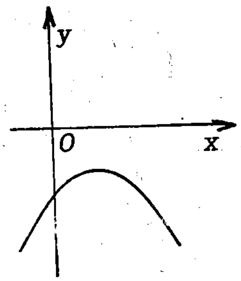
1)



2)



3)



4)

II) **Тестовите за присетување и дополнување** се состојат во следново: се задава текст во кој се испуштени некои зборови, знаци, формули или сл.; а ученикот треба да се присети и правилно да ги доплолни. (Вакви тестови обично се применуваат во работни тетратки и во линеарно програмирани материјали.)

Еве' неколку примери што даваат претстава за карактерот на тие тестови.

Пример 6. Тетива што минува низ центарот на кружницата се вика .... (Тоа е карактеристичен пример од линеарно програмирано учебно помагало.)

Пример 7. Дадена е функцијата:

$$y = x^2-5x+6.$$

Функцијата е дефинирана во интервалот .... Нејзиниот график е крива, која се вика .... , и ја сече X-оската во точката .... , а Y-оската во точката .... Темето ѝ е во точката .... Функцијата е позитивна во интервалот .... , негативна е во интервалот .... , а опаѓа во интервалот ....

Со менување на дадените податоци (земајќи други квадратни функции) можно е да се направат произволно голем број индивидуални тестови.

6.4. ОЦЕНУВАЊЕ

Оценувањето на ученикот може да се смета за вреднување на неговиот труд, а оценката претставува награда („плата") за неговата работа врз предметот. Според тоа, оценувањето на ученикот е мошне важна, одговорна и деликатна задача за наставникот, вклучувајќи го и воспитниот аспект на проблемот.

За поголемиот број ученици, оценката е мотив за работа по предметот. Најдобро е кога мотивот за работа е *„стимулативен"* (на пример: охрабрување, ослободување од стравот, пофалба, добра оценка), но во практиката често се среќава *„принудниот мотив"* (застрашување со слаба оценка, со повторување одделение/клас и сл.). Без дискусија е јасно дека вториот мотив не е пожелен.

Во разни наставни системи во светот постојат разни начини на оценување, а најчести се бројното и описното оценување.

Бројното оценување има разни варијанти: од 1 до 5, со непреодна оценка 1, најмала преодна оценка 2, а одлична 5 (како кај нас); од 1 до 5 но со одлична оценка 1; од 5 до 10; со букви *A* (одлична) *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и други варијанти. Описното оценување е особено згодно за предмети по уметностите и вештините (ликовно, музичко, физичко воспитување), а при обезбедување соодветни услови (помал број ученици во паралелка, помал број ученици на наставник и други услови), таквото оценување може да се покаже згодно и за другите предмети.

При правилното и комплетно спроведување на описното оценување, речиси се исклучени идентични оценки за различни способности, како што често се случува при бројното „петстепено" оценување.

Каква и да е формата, оценувањето мора да биде: објективно, непристрасно, што е можно поправедно и за сите ученици подеднакво.

Како да се најде мерило кое ќе го покаже објективно степенот на знаењата на ученикот? - На тоа прашање нема експлицитен и еднозначен одговор. Дури, нема апсолутно единствен критериум за определување *минимум барања за позитивна оценка.*

За решавање на овој проблем, најчесто се тргнува од т.н. „среден (или просечен) ученик" за реализација на програмата. Но, „среден ученик" за одредено одделение е едно, за одредено училиште - друго, а за целата Република Македонија - сосем различно нешто. Работата уште повеќе се заплеткува кога ќе го вклучиме индивидуалниот став на наставникот. (Екстремно, може да се смета дека има толку градации на „среден ученик" колку што има наставници!)

Секако, мора да се бара (соодветен) излез од оваа комплицирана ситуација. Би требало таков излез да се најде барем за „среден ученик" во паралелката и за минимум барања за позитивна оценка.

** Еден можен пристап кон решавањето на тој проблем е следниов.

Системот задачи (во: учебникот, збирката или пак направен од наставникот), за секоја тематска целина треба да се подели на три категории:

А: за „2" - задачите од „прва" категорија,

Б: за „3", „4" - задачите од „втора" категорија.

В: за „5" - задачите од „трета" категорија.

Ако се работи по тој принцип и на часовите за самостојно решавање задачи, тогаш за писмената работа треба да се изберат задачи во три варијанти. Така на пример, „првата задача" би содржела три варијанти: 1А, 1Б и 1В, со забелешка за бројот на поените (на пример, за варијантата а: 12 поени, за Б: 20 поени, за В: 25 поени).

На ист начин (од по три варијанти) би биле составени 2-та, 3-та (итн.) задача. Ученикот решава само по една варијанта од секоја задача, а бројот на поените што ќе го освои ученикот, ќе ја определи неговата оценка. (На пример, од 100 можни поени, минимум за преодна оценка: 35 поени, односно:

- за „2": 35 - 49 поени,
- за „3": 50 - 69 поени,
- за „4": 70 - 89 поени,
- за „5": 90 - 100 поени.

За спроведување на соодветно оценување (на пример, со задачи во три варијанти) неопходно е училиштето да располага со елементарна техника и материјал за размножување (шапирограф, машина за пишување, матрици, хартија и друго или, уште подобро, но потешко: апарат за фотокопирање, и соодветен материјал.) Ако такви средства нема во училиштето, наставникот треба да го предвиди тоа во својот глобален план за работа и да настојува кај училишното раководство да се обезбедат навремено, во училиштето или надвор од него.

6.5. ВЕЖБИ

1. Направи математички диктат за усвојување на математичката симболика во петто одделение, во врска со множествата. (На пример, 1) A е множеството од сите природни броеви што се поголеми од 10, но не се поголеми од 20; 2) Множеството M се состои од разликата на множеството A и унијата од множествата B и C.)
2. Во учебникот „Геометрија за VI одделение",
   а) разгледај ја темата „Воведување во геометријата" и направи алтернативен тест за проверка на знаењата;
   б) разгледај ја темата „Триаголник" (со складност на триаголниците) и направи тест за присетување и дополнување.
3. Во учебникот „Геометрија за VIII одделение":
   а) разгледај ја темата „Пропорционални отсечки" и направи тест со вкрстен избор;

б) разгледај ја темата „Сличност. Питагорова теорема" и направи тест за препознавање (т.е. идентификација);

в) разгледај ја темата „Призма. Пирамида" и подготви систем задачи за краткотрајна (20 минути) писмена контрола.

4. Направи тест со повеќе понудени одговори за годишна проверка на материјалот од I клас на средното образование.

5. Направи тест за проверка на домашните работи од темата „Квадратни равенки" (II клас).

7. ФАКУЛАТИВНИ ЗАНИМАЊА И ВОНКЛАСНА РАБОТА НА НАСТАВНИКОТ

7.1. ФАКУЛТАТИВНИ ЗАНИМАЊА

Покрај редовните задолженија определени со наставната програма, во наставниот процес се вклучува и т.н. "вонкласна работа", обично со следниве дополнителни елементи:

- факултативни занимања,
- работа со послаби ученици,
- работа со надарени ученици.

Сите тие активности се во определена заемна врска со задолжителниот дел на наставниот процес.

Факултативните занимања имаат за цел да ги прошират и продлабочат знаењата од редовната настава, да помогнат во развивањето на математичките способности и за професионалната ориентација на учениците. Тие ја збогатуваат математичката култура на ученикот, го подигнуваат квалитетот на неговите математички знаења, ја поттикнуваат неговата желба за решавање разни проблеми и, воопшто, го подготвуваат за занимавање со математика.

Факултативните занимања треба да се спроведуваат за посебни групи ученици, врз основа на принципот активно учење, во согласност со современата дидактика. Тие треба да се организирани со најшироката примена на творечките наставни методи: проблемскиот, истражувачкиот и евристичкиот метод, самостојната работа, употребата на нагледни и технички лабораториски средства, накусо речено: со методите што го побудуваат и одржуваат интересот кон математиката.

Пожелно е факултативните и разните специјални курсеви по математика да се предаваат преку соодветни системи задачи за самостојна работа на учениците (под насочувачкото раководство на наставникот). Така, теорема со тежок доказ треба да се разбие на неколку последователни полесни задачи за самостојна работа. Факултативните занимања не би смееле да се претворат во настава како за другите ученици ни по форма ни по содржина.

7.2. РАБОТА СО ПОСЛАБИ УЧЕНИЦИ

Некои ученици заостануваат во учењето (од разни причини). Тоа е негативна појава во училиштето и мора да се води енергична борба против неа, вклучувајќи ги сите учесници во наставата и воспитувањето: наставникот, учениците, родителите, училиштето.

Првата задача на наставникот е да ги открие причините за слабиот успех на одделението и, посебно, на одреден ученик. За таа цел, тој води разговор со: ученикот (насамо), со родителите и со другарите на ученикот.

По откривањето на причините за слабиот успех, наставникот треба да обмисли соодветни мерки за отстранување на слабостите. Тој прави план за надополнување на пропуштеното за оние ученици што изостанале (поради боледување или друго), подготвувајќи посебни системи задачи, особено за часовите предвидени за самостојно решавање задачи. На тој начин, задавајќи и посебни задачи за домашна работа за таквиот ученик, наставникот треба да ја насочи активноста на ученикот кон надополнување на пропуштеното, а истовремено, кон совладување на новото.

Во рамките на редовните задолженија на наставникот, предвидено е одржување *корективна настава* (наречена „дополнителна") со учениците што заостануваат во учењето.

За подобрување на успехот кај некои ученици и, воопшто, на одделението, пожелно е наставникот да користи такви форми на работа, при кои *добрите ученици ќе им помагаат на послабите*, било на часовите било надвор од нив. Притоа, ползата е двојна: таа помош му користи на послабиот, но со тоа и добриот ученик се усовршува.

7.3. РАБОТА СО НАДАРЕНИ УЧЕНИЦИ; НАТПРЕВАРИ

Важна задача на наставникот е *откривањето на особено успешни, надарени ученици за математика.* Откривањето на таквите ученици не е тешко; најчесто е можно преку редовната настава, особено на часовите за самостојно решавање задачи.

Работата со напредните ученици по математика бара *индивидуален пристап и групна работа со нив.* Секој од тие ученици одделно треба да биде насочуван кон продлабочено изучување на прашања од учебниот материјал, но и надвор од рамките на програмата, преку проучување соодветна литература. (Секако, на наставникот мора да му е добро позната литературата што ќе ја препорача, и по содржина, и по „тежина".) Притоа, важна задача на наставникот е перманентно да ја следи и поттикнува работата на секој таков ученик одделно.

Наставникот треба да ги преземе почетните чекори за организирана работа на учениците што сакаат да научат повеќе математика преку *формирање на математичка секција* во училиштето. Пожелно е организационо-техничкото раководство на секцијата да им го довери на учениците, а научно-стручното раководење и одговорноста за целата дејност на математичката секција да ги преземе наставникот.

Заедничката работа на секцијата би требало да се одвива на посебни часови, обично 2 часа на секои две недели, според посебно подготвена програма од наставникот, во согласност со афинитетот и способностите на учениците. Во програмата за работа може да се предвиди: обработка на теми што претставуваат проширување на изучуваниот материјал од редовната програма (на пример, статии од „Нумерус", „Сигма" или други списанија), решавање нестандардни задачи, составување задачи и математички занимливости, работа за учество во списанија, подготовки за натпревари и друго.

Од посебна важност е работата со напредните ученици при *подготовките за натпревари* по математика. Притоа, не помалку важно е да се придобијат колку што е можно повеќе ученици (не мора членови на математичката секција) за училишните и општинските, односно за регионалните натпревари.

Натпреварите по математика, било за основците било за средношколците, претставуваат одличен мотив за натпреварувачите за проширување и продлабочување на знаењата по математика, а самите подготовки за натпреварот имаат посебно воспитно и образовно значење. Имено, голем број ученици - поранешни ученици на натпревари или во математички секции, подоцна се определуваат за студии по математика или техника и, мнозинството од нив, постигнуваат мошне добри резултати во студиите и подоцна. Поради тоа, една од најважните задачи на наставникот во вонкласната работа со учениците треба да биде неговото ангажирање во подготвувањето на учениците за натпревари по математика.

7.4. ВЕЖБИ

1. Проучи го системот на натпревари по математика во РМ (за основното и средното образование) преку Правилникот за натпревари („Информативен гласник СИГМА", бр. 1/1979 и 20/1990).
2. Разгледај ги задачите од последниот републички натпревар за VII и VIII одделение и направи споредба со аналогни задачи од „редовната" настава (задачите се објавуваат обично во наредниот број на „Нумерус").
3. Разгледај ги (и реши ги) задачите од последниот: регионален, републички натпревар на средношколците и направи споредба во смисла на нивната сложеност (задачите се објаву-

ваат во последните два броја на СИГМА - по натпреварите).

4. Запознај се со збирките задачи:
   1) „Десет години натпревари по математика за средните школи во СРМ" од П. Димиќ и Е. Бубеска, Скопје 1969;
   2) „Десет години сојузни натпревари по математика за учениците од средните школи во СФРЈ" од Д. Димитровски во соработка со С. Марковски, Скопје 1971;
   3) „Републички натпревари по математика во СРМ 1968-1977" од Н. Целакоски и А. Самарџиски, Скопје 1977;
   4) „Десет години републички натпревари по математика 1976-86, за учениците од основните училишта во СРМ", од И. Јанев и К. Мишовски, Скопје 1985;
   5) „Републички натпревари по математика во СРМ 1978-1987", Скопје 1988;
   6) „Регионални натпревари по математика во СРМ 1978-1987", Скопје 1988;

8. НАГЛЕДНИ СРЕДСТВА. КАБИНЕТ ПО МАТЕМАТИКА

8.1. ВИДОВИ НАГЛЕДНИ СРЕДСТВА

Како што споменавме порано (III.1.2), мисловното сознавање има исто толку голема улога во наставата по математика колку што има и во науката математика. Сепак, одделни етапи во наставата не можат успешно да се спроведат без сетилно сознавање. Оттаму и доаѓа важноста на дидактичкиот принцип за нагледност во наставата (III.2.4).

Нагледноста помага да се постигне висок степен на апстракција на математичките поими, релации и зависности. Таа е особено пожелна при изучувањето на стереометријата, но нејзиното значење не е за занемарување и во други делови на училишната математика.

Сепак, нагледноста треба да се користи само тогаш кога е неопходна. Прекумерната употреба на нагледни средства може да се претвори во навика кај учениците да размислуваат конкретно, само на даден модел, а со тоа би се забавувал развитокот на апстрактното мислење. Одејќи кон горните класови, таа потреба од нагледност опаѓа.

Нагледните средства се дел од материјално-техничката компонента на наставата (в. III.1.3). Повеќето од нив служат за демонстрации на наставните часови; затоа се викаат **демонстрациони нагледни средства**. Ќе ги наведеме најважните видови од нив.

1) Најраспространетиот вид нагледни средства по математика во школите се разните **геометриски тела**, изработени од:

дрво, жица, стакло, картон и друго. (Секоја од овие изработки има свои предности за одредени наставни прашања.)

2) Мошне корисни се разните **подвижни модели** на рамнински и просторни фигури, како што се моделите на: агол, триаголник, „подвижна пирамида", тригонометриска кружница за менување на тригонометриските функции и други модели, при кои се менуваат „димензиите" на фигурите и се даваат можности да се добие претстава за непрекинатиот процес на менување на фигурите или функциите.

3) **Таблиците** по математика претставуваат, исто така, нагледни средства. Меѓу големиот број таблици, ќе ги спомeнеме:

- (многубројните) таблици - слики и цртежи на геометриски тела,
- таблици за пресеци на геометриски тела врз проекциона рамнина,
- таблици по одделни теми од планиметрија,
- таблици од метричниот систем мерки,
- таблици со колони броеви за усни вежби,
- таблици за важни факти од аритметика, алгебра или геометрија,
- таблици со формули, особено по тригонометрија, но и по алгебра и анализа (за: функции, лимеси, изводи, интеграли, логаритми, симболи, логички операции, множествени поими).

4) Посебно место меѓу нагледните средства заземаат **графиците** на најважните функции што се изучуваат (линеарна функција, обратна пропорционалност, квадратна функција, експоненцијална, логаритамска, тригонометриски функции и др.). Некои од нив може да се купат, но повеќето треба да ги направи наставникот сам или со учениците.

Некои демонстрациони таблици или графици се обесуваат во училницата (обично привремено, додека е актуелна соодветната наставна тема). Ако има повеќе паралелки, во школата треба да има неколку комплети демонстрациони помагала.

Демонстрационите нагледни средства треба да имаат доволни димензии за да се гледаат од сите места во училницата.

8.2. КАБИНЕТ ПО МАТЕМАТИКА

Секое училиште треба да има (барем еден) кабинет по математика. Кабинетот треба да е сместен во посебна соба, во која може да се одржува настава, но не мора, а уште подобро ако училиштето располага со неколку такви кабинети-училници. Таму се одржуваат часови само по математика за разни класови. Тоа е мошне удобно, зашто наставникот ќе може правовремено да ги користи сите неопходни, а расположиви нагледни средства.

За секој кабинет по математика се поставува одговорен наставник. Наставникот се грижи за оформување на кабинетот, за неговото одржување и збогатување. Збогатувањето се врши, главно, преку купување нагледни средства од специјализирани продавници, а некои средства наставникот ги приготвува заедно со учениците.

Кабинетот по математика треба да се оформува соодветно и да ја пропагира математиката преку соодветни наставни средства, преку портрети на видни математичари, забележани мисли за значењето на математиката, анегдоти и др.

Кабинетот по математика треба да биде снабден со:

- основен прибор за цртање: шестар, агломер, триаголен линијар и линијар со тркалца (најмалку толку комплети колку што има наставници по математика во тоа училиште),
- разни модели за геометрија и нацртна геометрија,
- комплет (или комплети) инструменти за цртање,
- графоскоп, епископ, дијапроектор (и дијафилмови) и други технички помагала,
- збирки од паноа со графици, формули, табели, слики,
- учебници и збирки задачи за редовната настава, како и збирки задачи од посебен вид (за натпревари и др. потреби),
- материјали за работа на математичката секција,
- методски прирачници и
- друга, соодветна методска и стручна литература по математика.

8.3. ВЕЖБИ

1. Посети едно (основно или средно) училиште и замоли го одговорниот наставник да ти го покаже кабинетот по математика. Спореди ја фактичката опременост на кабинетот со претпоставената (во горниот текст) и направи заклучок.

Б ЗА НАСТАВНАТА ПРАКТИКА НА ИДНИОТ НАСТАВНИК ПО МАТЕМАТИКА

1. ЦЕЛИ И ОРГАНИЗАЦИЈА НА НАСТАВНАТА ПРАКТИКА

1.1. ЦЕЛИ НА НАСТАВНАТА ПРАКТИКА

На студентот-практикант, како на иден наставник по математика, неопходни му се одредени вештини и навики за успешно вклучување во воспитно-образовниот процес. Поради тоа, во рамките на предметот методика на наставата по математика се предвидува спроведување на наставна практика (поточно: наставно-педагошка практика) во вид на гостување („хоспитации") во некое училиште за основно или средно образование, каде што студентот ќе ги добие почетните искуства во тој поглед.

За време на наставната практика на студентот му помагаат менторот (т.е. професорот по математика во училиштето) и професорот по методика на математиката. (Би било идеално, кога оваа помош би била уште поорганизирана, со вклучување на претставници и од други области, особено по психологија и педагогија, како што тоа се прави во некои земји.)

Со наставно-педагошката практика треба да се постигнат повеќе цели, меѓу кои најважните се студентот да научи:

1) *како практично се применуваат теориските знаења* со кои се здобил при изучувањето на методиката на математиката, педагогијата, психологијата и други специјални дисциплини;

2) *како самостојно се планира и се спроведува воспитно-образовната работа*, со преземање конкретна творечка иницијатива во решавањето на тие задачи;

3) *да се набљудува, анализира и обопштува искуството* што е насобрано од наставничкиот колектив на посетуваното училиште.

Покрај тоа, наставно-педагошката практика треба да му помогне на студентот:

а) да ги продлабочи и да ги зацврсти теориските знаења со кои се здобил на факултетот,

б) да ја зацврсти љубовта кон наставничката професија,

в) да му помогне во професионалното усовршување (како, на пример: избор на материјали за семинарска или дипломска работа, да спроведе експеримент).

1.2. УПАТСТВО И ДНЕВНИК НА СТУДЕНТОТ-ПРАКТИКАНТ

За спроведување на наставната практика, студентот-практикант треба да добие *упатство*, составено од катедрите по методика (на соодветниот предмет), педагогија и психологија, од менторите и од Педагошкиот завод.

Упатството треба да му помогне на студентот да ги сфати задачите што стојат пред него за време на наставната практика и да ја определи содржината на преземените чекори што ќе бидат спроведени во текот на практиката. Тоа треба да содржи директиви за:

1) водење на дневникот за наставна практика,

2) проучување (посматрање) на учениците и спроведување на наставните часови,

3) преземање чекори за вонкласните активности и часови.

(Такво упатство кај нас сè уште не е изработено, а ќе го заменат овие белешки.)

За наставната практика, секој студент води *дневник*; тој е основниот документ за таа активност на студентот. Во дневникот се запишуваат резултатите на секојдневната работа и поважните моменти од педагошката практика: резултати од набљудувања, анализа на наставните часови, вонкласни задачи и чекори, заклучоци, задачи за наредните денови на практиката.

(Се препоставуваат „благопријатни" услови за спроведување на наставната практика: секој студент поминува два-три месеца во определено училиште, секој ментор има најмногу двајца студенти со кои активно работи и се предвидени посебни часови по специјална методика на математиката.)

1.3. ЗА ОРГАНИЗАЦИЈАТА НА НАСТАВНО-ПЕДАГОШКАТА ПРАКТИКА

Во некои земји на наставната практика на студентот и се посветува посебно внимание: се применуваат разни технички средства и организациони форми за зголемување на нејзината ефикасност. Тоа е само уште една потврда за важноста на оваа дејност во оформувањето на стручно-методската подготовка на идниот наставник. Ќе наведеме неколку такви средства и форми.

1. На студентите им се прикажуваат *кратки филмови,* на кои се снимени *лекции од подобри наставници,* со цел да се запознаат „на дело" со најрационалните и најефективните методи за изведување на одделни лекции.

2. *Дел од лекцијата* што ја одржува студентот-практикант (на пр. 10-15 мин.) *се снима на филмска лента* и потоа се прикажува во соодветна просторија. Тоа, од една страна, му дава можност на студентот самиот да види како го спровел наставниот час, а од друга страна, овозможува подобро и подлабоко да го проанализираат часот: студентите, менторот-методичар и професорот по методика. Тоа овозможува да му се дадат на студентот соодветни совети, упатства и да се внесат соодветни исправки за наредните подготовки на студентите на часовите.

3. *Целиот тек на часот може да биде снимен со кино-камера* со цел да се проанализира работата на учениците: вниманието, активноста, самостојноста и др.

4. *Наставната практика завршува со стручно-методска конференција,* на која студентите истапуваат со резултатите од своите мали исследувања. Тие истражувања, подготвени во текот на наставната практика, треба да ја потврдат методската зрелост на студентот и неговата способност да спроведува научно-исследувачка работа по методика на математиката.

Тематиката на тие исследувања е наставната и целокупната дејност на училиштето. На пример:

- разработка на еден од факултативните курсеви,
- факултативни задачи за учениците,
- тема за избрани ученици (за кружок: наједноставните поими од топологијата, прво запознавање со диференцијални равенки, поимот изоморфизам и др.),
- тема за развитокот на математичкото мислење и самостојноста,
- развиток на навиките за самостојна работа на учениците со учебник и со дополнителна литература,
- организирање натпревари по математика како начин за проширување и продлабочување на знаењата на учениците,
- развиток на творечките способности на учениците и др.

** Тие мали исследувања во областа на методиката на математиката можат да послужат и како подготовка за изработка на семинарски и дипломски работи. Може да се посочи поголем број теми за дипломска работа, сврзани со прашања што се актуелни за наставата. На пример:

а) Елементи од математичката логика во училишниот курс по математика;

б) Аксиоматскиот метод и идејата на алгебарските структури во училишниот курс;

в) Развиток на творечкото мислење на учениците во процесот на решавање задачи;

г) Методика на програмираната проверка на часовите по математика;

д) Активноста и мотивацијата во математиката; и др. **

2. ЗАДАЧИ ЗА СТУДЕНТОТ-ПРАКТИКАНТ ПРИ ХОСПИТАЦИИТЕ

За време на спроведувањето на наставно-педагошката практика студентот-практикант треба да добие конкретни задачи, сврзани со неговото хоспитирање во соодветното училиште. Тие задачи се сврзани со набљудувањето на работата на училиштето во целина, а посебно со работата и однесувањето на учениците на часот и надвор од него. Извршувањето на тие задачи има големо значење за добивање на први практични искуства во наставата. Ќе наведеме неколку примери на такви задачи.

2.1. Задача I: Запознавање со училиштето и со класот

1. Проследи го влегувањето на учениците во училиштето и излегувањето по завршувањето на часот.
2. Запознај се со просториите на училиштето.
3. Опиши ја училницата:
   а) осветленост, чистота, клупи, видливост на пишувањето на таблата од разни места на училницата, декорации;
   б) обезбеденост на учениците со работни места; достапност на секое работно место за наставникот;
   в) табла - квалитет и размери, креда, крпа и дежурство;
   г) снабденост со нагледни средства и технички уреди за настава.
4. Состав на класот: список на учениците, активни ученици (што брзо го усвојуваат материјалот), пасивни ученици, ученици со дефект, повторувачи.

2.2. Задача II: Работа на наставникот во класот

1. Поведение на наставникот: самоуверено - несигурно, смирено - нервозно, лежерно - возбудено, восхитено - незаинтересирано итн.
2. Особености на говорниот стил: изразност, дикција, достапност за учениците, логичка последователност и др.
3. Има ли контакт со класот и владее ли со него? Дали го привлекува и го задржува вниманието на целиот клас или само на одделни ученици?
4. Запишување на таблата: кратко, јасно, читко, краснописно,

планско итн.

5. Дали наставникот ги стимулира учениците да работат, дали ја подбуцнува нивната иницијатива и дали ги активира послабите?
6. Дали бара од учениците: точни формулации на правилата, теоремите и уредно извршување на работата, дали бара комплетни одговори на поставените прашања, дали бара образложение за правилноста на одговорот?
7. Систем прашања на наставникот: јасност на прашањата, нивната конкретност, дали дава време за обмислување на одговорот, како поставува сугестивни прашања, дали поставува прашања за размислување и др.
8. Спроведување на усни вежби.
9. Користење на нагледни средства и технички уреди на часот.
10. Работа на наставникот за: воспитување на математички стил на мислење и постојано внимание на учениците, организирање индивидуална работа, развивање навики за самостојна работа на часот и развиток на творечките способности на учениците.
11. Авторитет на наставникот кај учениците.

2.3. Задача III: Изучување на нов материјал на часот

1. Дали учениците се подготвени за усвојување на нов материјал?
2. Дали се објаснува: а) врската на новото со порано изученото и б) значењето на новото во практиката?
3. Дали се наведуваат: а) историски податоци во врска со изучуваниот материјал и б) перспективите за натамошниот развиток на изучуваните прашања?
4. Кои методи, нагледни и технички средства применува наставникот за објаснување на новиот материјал и како го придобива класот за работа?
5. Какви методи и начини користи наставникот за активирање на математичката дејност на учениците со цел: развивање на математичкото мислење и подобрување на квалитетот на знаењата на учениците?
6. Обратете внимание на: темпото на лекцијата, „згуснувањето" на времето на лекцијата, дали наставникот посветува доволно внимание на усвојувањето и појаснувањето на новите поими, дали учениците при решавањето на задачите јасно разграничуваат што е дадено, а што се бара, како се составува планот на решението, избор на оптимално решение, дали се прави резиме на работата од часот, како тоа се остварува итн.

2.4. Задача IV: Домашна работа

1. Во кој дел од часот се проверуваат домашните задачи и како се остварува таа проверка?
2. Како постапува наставникот со учениците што не ја изработиле домашната работа?
3. Кои прашања во домашната работа предизвикале големи тешкотии кај учениците и зошто? Дали наставникот прави анализа на грешките што ги направиле учениците и како се остварува тоа на тој час?
4. Каква е продуктивноста на домашната работа? Какви средства се употребени за нејзиното извршување? Како се оценува изработувањето на домашната работа?
5. Колку материјал за нова домашна работа им дава наставникот на учениците од темата што се изучува? Што им задава: илустративни примери, задачи (проблеми), теориски материјал, прашања што бараат досетување?
6. Дали задачите за домашна работа се сврзани само со изучуваниот материјал и дали се разнообразни (да се вршат пресметувања и мерења, да се прават модели итн.)?
7. Дали се задаваат дополнителни задачи за оние ученици што сакаат да научат повеќе (т.е. за подобрите), односно за оние ученици што заостануваат во математиката?

(Аналогни задачи може да се поставaт во врска со: примената на наставните методи и форми, утврдувањето на минатиот материјал, запознавањето со наставната програма, начинот на проверување и оценување на знаењата, нивото на знаењата на учениците и др.)

3. ПРЕПОРАКИ ЗА ПОДГОТОВКА, СПРОВЕДУВАЊЕ И АНАЛИЗА НА НАСТАВНИОТ ЧАС

3.1. ПОДГОТВУВАЊЕ НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Во делот А.1.1 (организација на наставата) наведовме дека наставниот час е основната организациона форма на воспитно- образовната работа во нашето школство. Од тоа како ќе биде организиран наставниот час, какви методи ќе применува наставникот и каква конкретна содржина ќе вгради во секоја лекција, во голема мера зависи иницијативноста и самостојноста на учениците и воопшто, успешноста на образовно-воспитниот процес.

При подготовката и спроведувањето на наставниот час, најважно место треба да добијат секако оние наставни методи и форми што ќе обезбедат максимални резултати при најмали загуби на снага и време (како за стекнувањето на знаења, вештини и навики, така и за развитокот на математичкото мислење, творечката активност и иницијативност на учениците).

Студентот-практикант треба да ја започне подготовката на наставниот час со *прелистување на:* учебникот, збирката, прирачникот за наставникот и расположивата стручно-методска литература за соодветната тема.

Откако добро ќе си ја објасни содржината на лекцијата, тој треба *да ги определи:*

1) основната дидактичка цел на часот,

2) минимумот знаења (што е предвиден, обично со наставната програма),

3) местото на лекцијата во системот лекции од соодветниот раздел на математиката (а тоа е можно да го направи само ако ја познава програмата, содржината на учебникот и дополнителната методска литература за соодветната тема).

Потоа, студентот *одлучува:*

4) кои наставни методи ќе ги примени,

5) какви наставни средства ќе користи,

6) кои начини за диференциран пристап кон изучувањето ќе употреби.

(Притоа, диференцијација се планира најчесто за етапата на самостојната работа, а особено за домашната работа; за таа цел треба да се подготват задачи од три степени, различни по обем и тежина.)

Откако ќе ја утврди содржината на наставниот час, структурата и методите на неговото спроведување, студентот треба да пристапи кон *составување план (конспект) за наставниот час.*

Конспектот, т.е. **планот на часот** (види А.4.2 формуларот) содржи:

- општи податоци (име на училиштето), година/клас, паралелка, предмет, наставник, датум);
- податоци за лекцијата (наслов на наставната единица, тип на часот, наставна тема-целина);

I. Непосредни задачи, основна дидактичка цел
II. Организација и материјално-технички услови
III. Наставни форми и наставни методи
IV. Тек на часот (содржинска артикулација, скица, методи, постапки, план на таблата, прашања, задачи и др.)
V. Домашна работа на учениците
VI. Резиме
VII. Согледувања за реализацијата на часот.

Наставниот час може да се одржи откако ќе биде потврден конспектот од страна на наставникот или менторот. Текстот на конспектот не траба да се учи напамет.

3.2. СПРОВЕДУВАЊЕ НА НАСТАВНИОТ ЧАС

1) Студентот-практикант треба да влезе во училницата откако *учениците ќе ги заземат своите места,* ќе ги подготват учебниците, прирачниците, тетратките - приборот неопходен за часот.

2) Откако ќе влезе во училницата, практикантот треба внимателно да ја погледа и да провери *дали класот е подготвен за почнување на часот,* зашто прецизноста и деловноста на почнувањето го обезбедува неопходниот ритам во текот на целиот час.

3) Откако ќе се создаде во класот *работна атмосфера,* на учениците може да им се соопшти: планот на часот, главната наставна задача што треба да се реши, етапите на спроведувањето на часот. Потоа може да се направи проверка на домашната работа - индивидуално, групно или поинаку и да им се зададат вежби на учениците што ќе ги подготват за примање на новиот материјал.

4) При излагањето на новиот материјал важно е да се согледува *логичката врска со порано изучениот материјал;* тоа помага за одржување на вниманието и за побудување на интересот кај учениците.

6) *Главното внимание* треба да се насочи не кон изучувањето на готови, „наместени" начини на решавање, туку *кон развивањето на творечките способности на учениците:* кон барање на оригинални решенија и разни начини на решавање, поставување и решавање на нестандардни задачи (т.е. „проблеми"), евристичен пристап кон решавањето на задачите.

7) Завршниот дел на часот има големо значење. Од тоа како ќе биде направено *резимето за работата на часот* и како ќе биде зададена домашната работа, ќе зависи активноста на учениците на наредните часови.

3.3. АНАЛИЗА НА НАСТАВНИОТ ЧАС

Анализата на часот, направена од студентот, од наставникот или од другите студенти во групата, треба да ги содржи следните појдовни поставки и податоци.

1. Организационен почеток на часот:

- подготвеност на наставникот за часот (дали има конспект, нагледни средства, инструменти и сл.);
- подготвеност на учениците за часот (дежурни, дали имаат тетратки, учебници, прибор за пишување и цртање и сл.);
- подготвеност на училницата (чистота, табла, креда, светлина).

2. Организациона структура на часот:

- мобилизирачки почеток на часот;
- јасност и точност на целата структура на часот и завршност на одделните етапи;
- дали структурата на часот е соодветна на содржината на материјалот; последователност, заемна врска и однос меѓу деловите;
- заситеност на часот и темпото на неговото спроведување;
- контакт на наставникот со класот;
- активност на учениците во текот на часот.

3. Анализа на содржината на наставниот материјал за часот

- систематичност на излагањето;
- соодноc на теорискиот и практичниот материјал;
- соодветство на изложениот материјал со воспитните цели;
- врска со животот и практиката; историски податоци.

4. Општопедагошки и дидактички барања и нивното исполнување

- усогласеност на планот (конспектот) на час со поставената цел на лекцијата;
- издвојување на главното, основното и правење резимеа;
- разновидност на методите, нивното комбинирање, педагошкото оправдување за нивниот избор;
- усвојување на материјалот за време на часот;
- техничка опременост на часот, користење на нагледни средства;
- избор на вежби според зголемувањето на „тежината";
- земање предвид на индивидуалните особености и интереси на учениците посебно на класот како целина, за воспитување интерес кон математиката;
- појава на меѓупредметни врски;
- моментите на часот што го помагаат естетското воспитување на учениците и формирањето поглед на светот;
- проценка на знаењата на учениците;
- единство на процесите на образование и воспитување.

5. Дејноста на наставникот на часот:

- поведение на наставникот на час (контакт со класот, ерудиција, авторитет, особености на говорот, педагошки такт);
- излагање на новите содржини;
- организација за утврдување на материјалот;
- организација на самостојната работа на учениците;
- проверка и оценка на знаењата, вештините и навиките на учениците;

- работа на наставникот со послабите ученици;
- работа на наставникот со подобрите ученици;
- редот и дисциплината за време на часот;
- користење на најнови достигнувања во областа на предавањето на математиката, искуството на подобрите наставници;
- согледување на барањата за задавање домашни задачи.

6. Дејност на учениците на часот:

- подготвеност за работа;
- поведение (дисциплина, активност, внимание, вештина да преминуваат од еден на друг вид работа);
- концентрација, постојаност на вниманието, самостојна работа;
- знаења на теоријата, математичка писменост и способност за: усвојување на материјалот, пресметувања, просторна претстава, логичко мислење.

7. Општа оценка на часот:

- исполнување на планот, постигнување на целта и исполнување на задачите на часот;
- особено интересното и поучното, нешто што направило голем впечаток на часот;
- какви измени би имало смисла да се внесат при повторно спроведување на часот по истата тема.

8. Заклучоци и оценка.

4. ЗАДАЧИ ЗА ДОМАШНИ И СЕМИНАРСКИ РАБОТИ

4.1. ЗАДАЧИ ОД РАЗНИ ОБЛАСТИ, ВАЖНИ ЗА УЧИЛИШНИОТ КУРС

Реши ја наведената задача и размисли за задачи аналогни на неа или сврзани со неа. Обрни внимание на:

(а) значењето на резултатот од задачата (за математиката општо),

(б) применливоста на употребениот метод во други ситуации,

(в) важноста на задачата и на некои нејзини последици за наставата во училишниот курс по математика.

1.1. Докажи дека:

а) Множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните броеви е преброиво.

б) Множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви е непреброиво.

12. Докажи дека:

а) Постојат безброј многу прости броеви.

б) Множеството прости броеви од обликот $4k-1$ е бесконечно.

1.3. Докажи ја основната теорема на аритметиката:

Секој сложен природен број може да се претстави како производ од прости броеви што е еднозначно определен, ако не се зема предвид распоредот на множителите.

1.4. а) Со помош на конгруенции, да се изведат критериуми за деливост на повеќецифрени броеви со: 2,3,4,5,6,7,8, 9,11 и 12.

б) Како се решава ова прашање (за 2,3,4,5,6 и 9) во основно училиште, специјално во V одделение?

1.5. Докажи дека:

а) Бројот $\sqrt{2}$ е ирационален.

б) Ако k е природен број, тогаш $\sqrt{k}$ е или природен или ирационален број (без да се користи основната теорема на аритметиката).

в) За секој природен број k, броевите $\sqrt{1+\frac{1}{k}}$ и $\sqrt{k+\sqrt{k}}$ се ирационални.

1.6*. Докажи дека бројот $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ е ирационален.

1.7. Докажи дека:

Секој позитивен реален број x може да се претстави како гранична вредност на низа од обликот:

$$x_n = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

каде што m и a_n се цели броеви, $m \geq 0$ и $0 \leq a_n < 10$; и

поопшто:

$$x_n = m + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \ldots + \frac{a_n}{b^n},$$

при што m, $a_n, b \in \mathbb{Z}$ и: $m \geq 0$, $0 \leq a_n < b$, $b > 1$.

(Со други зборови: Секој реален број може да се претстави како b-адична дропка.)

1.8. Ако x и y се позитивни реални броеви, тогаш броевите:

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad g = \sqrt{xy}, \quad h = \frac{2xy}{x+y}, \quad k = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

се викаат, по ред: **аритметичка, геометриска, хармониска и квадратна средина** на броевите x и y. Докажи дека:

$$h \leq g \leq a \leq k,$$

при што еднаквоста важи само кога $x=y$ (тогаш: $h=g=a=k$).

Докажи и:

$$n\in\mathbb{N},\ a_1,\ \ldots,\ a_n\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n) \geq \sqrt{a_1\cdots a_n}.$$

1.9.* Докажи ја теоремата за делење на полиноми:

За секој пар полиноми $F(x)$ и $G(x)$, при што $G(x)$ е ненулти, постојат еднозначно определени полиноми $Q(x)$ и $R(x)$, такви што

$$F(x) = Q(x)\cdot G(x) + R(x),$$

каде што $R(x) = 0$ или, пак, $R(x) \neq 0$ има помал степен од полиномот $G(x)$.

1.10. Докажи дека:

а) За секој полином $P(x)$ со степен $n \geq 1$ и за секој реален број a, постои еднозначно определен полином $H(x)$, со степен $n-1$, таков што:

$$P(x) = (x-a)\cdot H(x) + P(a)$$

б) Бројот a е корен на полиномот $P(x)$ ако и само ако полиномот $x-a$ е делител на полиномот $P(x)$.

в) Ако полиномот $P(x)$ има степен $n \geq 1$, тогаш тој нема повеќе од n различни корени.

1.11.* Докажи ја **основната теорема на алгебрата:**

Секој неконстантен полином има барем еден корен.

Последица. Секој полином со степен $n \geq 1$ има точно n корени (реални или комплексни, некои еднакви меѓу себе).

1.12. а) Ако полиномот $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ со цели коефициенти $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1}$ има рационален корен, тогаш тој е цел број и е делител на a_0.

б) Најди метод со кој може да се установи дали равенката:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

со цели коефициенти a_k има рационални корени. Наведи примери.

1.13. Докажи дека: Секое ограничено множество реални броеви има супремум и инфимум.

1.14. Дискутирај го воведувањето на поимот степен (a^x), задржувајќи се специјално на воведувањето степен со ирационален показател. Потоа, докажи дека:

$$(ab)^x = a^xb^x;\quad a^xa^y = a^{x+y};\quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

1.15. Воведи го поимот логаритам. Потоа, докажи дека:

$$\log (xy) = \log_a x + \log_a y;\quad \log_a b\cdot\log_b a = 1;$$

$$\log_a x^r = r\log_a x \quad (a,b,x,y > 0,\ a,b \neq 1,\ r \text{ - позитивен реален број}).$$

1.16. Докажи (векторски или планиметриски) дека:

а) Трите тежишни линии на триаголникот се сечат во една точка.

б) Трите тежишни линии на тетраедарот се сечат во една точка, наречена тежиште на тетраедарот. (**Тежишна линија на тетраедарот** е отсечка, чијашто една крајна точка е едно теме, а другата крајна точка е тежиштето на спротивниот ѕид на тетраедарот.)

в) Трите висини на триаголникот се сечат во една точка.

г) Трите симетрали на аглите на триаголникот се сечат во една точка.

1.17.* а) Воведи го бројот π како гранична вредност на низата периметри од вписаните односно опишаните правилни многуаголници при кружница со дијаметар $2r=1$.

б) Искористи го тоа за приближно пресметување на бројот π.

в) Докажи дека периметарот L на кружница (претходно: дефинирај!) е еднаков на производот од бројот π и дијаметарот $2r$.

г) Дефинирај го поимот плоштина на кружница и докажи дека таа е еднаква со производот на бројот π и квадратот од радиусот $P = r^2\pi$.

1.18. а) Воведи го поимот волумен на тело и дискутирај го принципот на Кавалиери.

б) Докажи ја формулата за пресметување волумен на пирамида.

1.19. Докажи ја формулата за пресметување:

а) Волумен на топка, $V = \frac{4}{3}R^3\pi$.

б) Плоштина на топка, $P = 4R^2\pi$.

1.20. Докажи дека:

а) $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$.

б) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Наведи ги најважните последици од овие (адициони) теореми.

1.21. а) Воведи ги поимите парна и непарна функција и разгледај ги нивните најважни својства (збир, разлика, производ, количник, сложена функција од парни/непарни функции, претставување на функција како збир од парна и непарна функција).

б) Докажи дека:' Еден полином е парна функција акко содржи само парни степени од X, а непарна - акко содржи само непарни степени.

1.22. а) Воведи го поимот непрекината функција (во точка и на сегмент).

б) Докажи ја теоремата на Вајерштрас: Секоја функција непрекината на сегмент е ограничена и достигнува најмала и најголема вредност.

в) Коментирај ги другите важни факти за функции непрекинати на сегмент.

1.23. Докажи: Ако една непрекината функција $f(X)$, дефинирана на $\mathbb{R}$, го има својството: $f(x+x') = f(x)+f(x')$ за секој пар x,x' од $\mathbb{R}$, тогаш $f(x) = cx$, каде што c е произволна константа.

1.24.* Испитај ја конвергенцијата и лимесот на низата (a_n), за $c > 0$:

$$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{c}{2+0},\ a_3 = \frac{c}{2+\frac{c}{2}},\dots,\ a_{n+1} = \frac{c}{2+a_n}.$$

(Посебно за $c=3$ и $c=1$.) Запознај се со поимот верижна дропка и со нејзините најважни својства и примени.

1.25. Ако една непрекината функција $f(x)$, дефинирана на $\mathbb{R}$ го има својството: $f(x+x') = f(x)\cdot f(x')$ за секој пар x,x' од реални броеви, тогаш $f(x) = e^{cx}$, c=произволна константа (или, пак, $f(x)=0$).

***

1.26.* (Природни броеви и математичка индукција.)

Разгледај го системот аксиоми за природните броеви, I односно II, во кој за примитивни поими се земаат:

I. Множество $\mathbb{N}$ чиишто елементи се наречени **природни броеви,** заедно со две бинарни операции, наречени **собирање** (+) и **множење** (·) (со 10 аксиоми: 1°-6° комутативност, асоцијативност, дистрибутивност и неутрален елемент; 7°-8° кратење; 9° трихотомија; 10° аксиома на индукцијата).

II. **Природен број, следбеник** и **1** (Пеанови аксиоми - 5 на број) (Види: Чупона, стр. 25 и Eves and Newsom, стр. 195 и 203)[1].

а) Покажи дека Пеановиот систем аксиоми е последица од системот аксиоми I.

(Важи и обратното. Да забележиме дека аксиомите 7° и 8° во I се „прекубројни".)

б) Докажи ја теоремата (наречена принцип на најмал природен број): Кое било непразно множество M од природни броеви има најмал елемент.

1.27. Со помош на математичката индукција, докажи го следниов идентитет:

а) $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\dots(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$.

б) $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\dots(1+\frac{1}{n}) = n+1$.

в) $1+2\cdot(\frac{1}{2})+3\cdot(\frac{1}{2})^2+\dots+n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1} = 4-(n+2)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$.

1.28. Докажи дека:

а) Ако $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \le a_i \le 1$ $(i=1,\dots,n)$, тогаш

---

[1] За полниот наслов на цитираните книги да се види во „Литература".

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

б) Ако $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}$ се позитивни реални броеви, тогаш

$$a_1a_2\cdots a_{2^n} \le \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_{2^n}}{2^n}\right)^{2^n},$$

а равенството важи само ако $a_1=a_2=\dots=a_{2^n}$.

Помош. Прво покажи дека $a_1a_2 = \left(\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a_1-a_2}{2}\right)^2$.

1.29. Докажи дека:

а) За секој $n\in\mathbb{N}$, $n+1$ е прост или е производ од прости броеви.

б) Бројот од позитивни прости множители на $n\ge 2$ е помал од $2\ell n n$.

Помош. Примени го II **Принцип на математичката индукција:** Нека $P(n)$ е тврдење дефинирано за секој природен број n. Ако $P(1)$ е вистинито и ако, за секој природен број m $P(m)$ е вистинито секогаш кога $P(k)$ е вистинито за сите природни броеви $k < m$, тогаш $P(n)$ е вистинито за сите природни броеви n. (Види и VII.4, Вежби.)

1.30. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n = [(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n]/2^n\sqrt{5}$$

е природен број. (Види и VII.4, Вежби.)

Помош. Покажи дека $u_1=u_2=1$ и дека $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$. Потоа примени го III **Принцип на математичката индукција** (земајќи $h=2$): Нека $P(n)$ е тврдење што е дефинирано за секој природен број n. Ако $P(n)$ е точно за сите $n \le h$, каде што h е некој фиксиран природен број, и ако, за секој природен број m, $P(m+h)$ е точно секогаш кога $P(k)$ е точно за сите природни броеви k, такви што $m\le k< m+h$, тогаш $P(n)$ е точно за сите природни броеви n.

1.31. Спроведи ја конструкцијата на целите броеви како подредени парови (a,b) од природни броеви (види Eves and Newsom, стр. 205; Куликов Л. Я: Алгебра и теориЯ чисел, стр. 135, Москва 1979; в. и Чупона, стр. 73).

Докажи ги следниве теореми за целите броеви:

а) $(a,b)+(x,y) = (c,d)+(x,y) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$.

б) $(x,y)\cdot(a,b)=(x,y)(c,d) \wedge (x,y)\neq(m,m) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$.

в) Равенката $(a,b)+(x,y) = (c,d)$ има единствено решение.

1.32. Докажи ги следниве теореми во врска со целите броеви:

а) $-(-y)=y$. б) $(-x)(-y)=xy$. в) $(-x)y=x(-y)=-(xy)$.

Договор. Ќе пишуваме: $x-y$ наместо $x+(-y)$.

г) $-(x+y) = -x-y$. д) $x(y-z) = xy-xz$.

1.33. Спроведи ја конструкцијата на рационалните броеви како подредени парови $<m,n>$ од цели броеви, $n\neq 0$. (Чупона, стр. 115-118; Eves and Newsom, стр. 208-209.) Потоа, докажи ги следниве теореми за рационалните броеви:

а) $<a,b>+<0,1> = <a,b>$. б) $<a,b>+<-a,b> = <0,1>$.

в) $<a,b><m,m> = <a,b>$.

г) $<a,b><e,f> = <c,d><e,f> \wedge e\neq 0 \Rightarrow <a,b> = <c,d>$.

д) Равенката $<a,b><x,y> = <c,d>$ има единствено решение ако $a\neq 0$.

1.34. Што е комплетно поле? Докажи дека полето $\mathbb{Q}$ не е комплетно.

1.35*. Проследи ја конструкцијата на реалните броеви со помош на завршни интервали од $\mathbb{Q}$ (Чупона, стр. 128-133). Докажи дека: ако $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ се комплетни полиња, тогаш тие се изоморфно подредени полиња.

1.36*. Што е дедекиндов пресек (A|B) во множеството од рационалните броеви?

Проследи ја конструкцијата на реалните броеви со помош на дедекиндови пресеци (Eves and Newsom, стр. 211 - 213). Исто така: У. Рудин, ОсновЫ математического анализа, Москва 1966, стр. 11-21; Г. М. ФихтенголЬц: ОсновЫ математического анализа, Москва 1968, стр. 16-24.)

1.37*. Запознај се со методот на сместени интервали за конструкција на реалните броеви (R. Courant, H. Robins: What is Mathematics?, стр. 68-71).

1.38*. Што е кошиева (или фундаментална) низа во $\mathbb{Q}$?

Запознај се со конструкцијата на реалните броеви со помош на фундаментални низи во $\mathbb{Q}$. (М. ЗамЯнскиЙ: Введение в современнуЮ алгебру и анализ, Москва 1974,стр. 195: Л. Я. Куликов: Алгебра и теориЯ чисел, Москва 1979, стр. 152).

1.39. Конструирај го полето $\mathbb{C}$ на комплексните броеви како множество парови $[a,b]$ од реални броеви. Докажи дека равенката $[a,b][x,y] = [c,d]$, при $a\neq 0$ или $b\neq 0$ секогаш има решение.

1.40. Нека $\mathbb{C}_1$ е множеството од сите квадратни матрици од втор ред од обликот $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$. Докажи дека алгебрата $(\mathbb{C}_1,+,\cdot,^{-1},e)$, каде што $+,\cdot,^{-1}$ се обичните операции над матрици и $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, е поле, изоморфно со полето $\mathbb{C}$ на комплексни броеви.

4.2. НАПИСИ ОД: ИСТОРИЈАТА НА МАТЕМАТИКАТА, ДИДАКТИКАТА НА МАТЕМАТИКАТА И ДРУГИ

Прочитај го назначениот напис, размисли за содржината и запиши ги (примерно: на две-три страници) најважните моменти: факти, идеи, духот на написот и, специјално, нештата што може да послужат при изведувањето на некој конкретно замислен наставен час.

Подолу се употребуваат кратенките ВМ, МК, НМ, МПР и МО за книгите:

- ВМ: Велики математичари (Е. Т. Бел), Загреб 1972;
- МК: Математика краљица и ропкиња науке (Е. Т. Бел), Београд 1967;
- НМ: Настава математике у средњој школи (Ч. Батлер, Ф. Л. Врен), Београд 1967;
- МПР: Математика и правдоподобные рассуждения (Д. Пойа) Москва 1975
- МО: Математическое открытие (Д. Пойа), Москва 1976.

2.1. Модерни мисли во стари тела (ВМ, 33-47)

2.2. Декарт - џентлмен, војник и математичар (ВМ, 48-65)

2.3. Ферма - принцот на аматерите (ВМ, 66-80)

2.4. Предисторија на диференцијалното и интегралното сметање (Г. М. Фихтенгхольц: Основы математического анализа, т. 1, Москва 1968, стр. 411-421)

2.5. На морскиот брег (ВМ, 96-120); Исак Њутн (како во 2.4, 421-427)

2.6. Мајстор на сите знаења (ВМ, 121-132); Готфрид Вилхелм Лајбниц (како во 2.4, стр. 427-433)

2.7. Владетел на математичарите - Гаус (ВМ, 212-256)

2.8. Гениј и глупост - Галоа (ВМ, 342-356)

2.9. Последниот универзитет - Поанкаре (ВМ, 496-521)

2.10. Загубениот рај? - Кантор (ВМ, 522-545)

***

2.11. Гледишта (Предметот на математиката. Златниот период. Абеловиот совет. Духот на модерната математика) (МК, 9-18)

2.12. Математичка вистина. Пробивање на границите (МК,19-34)

2.13. Мислење во слики (МК, 83-94)

2.14. Кралица на математиката (МК, 143-162)

2.15. Јуриш кон небото. Карпест терен (МК, 245-260)

***

2.16. Побудување и одржување интерес за математиката (НМ, 76-90)

2.17. Средства за успешна настава и за насочување на учењето. Развојна настава (НМ, 90-99)

2.18. Настава за асимилација: контролирано учење. Настава за постигнување трајност: увежбување, повторување и одржување. Настава за пренос (НМ, 99-115)

2.19. Планирање во успешна настава и учење (НМ, 117-130)

2.20. Вреднување на наставата (НМ, 132-142)

2.21. Стручно подготвен наставник (НМ, 143-154)

2.22. Надзор на наставата (НМ, 154-167)

***

2.23. Наставата по аритметика (НМ, 172-192)

2.24. Наставата по другите делови од аритметика (НМ, 193-214)

2.25. Наставата по алгебра во вишите одделенија на основното образование (НМ, 214-242)

2.26. Наставата по другите делови на елементарната алгебра (НМ, 242-272)

2.27. Наставата по геометрија во основното училиште (НМ, 297 -306)

2.28. Наставата по геометрија во средното образование (НМ, 307-328)

2.29. Наставата по тригонометрија (НМ, 329-360)

2.30. Наставата по аналитична геометрија (НМ, 363-384)

2.31. Наставата по диференцијално и интегрално сметање (НМ, 385-407)

***

2.32. Индукција (МПР, 25-33)

2.33. Обопштување, специјализација, аналогија (МПР, 34-50)

2.34. Математичка индукција (МПР, 128-140)

2.35. Расудувањата со веројатна точност во пронаоѓањето и образованието (МПР, 371-390)

2.36. Методот на Декарт (МО, 45-84)

2.37. Историјата на едно мало откритие (МО, 85-126)

2.38. За учењето, предавањето и обучувањето за предавање (МО, 286-311)

2.39. Решавање задачи - зошто? Создавање теорија; општа култура; внатрешна и надворешна помош; колку е тоа тешко? (МО, 312-335)

2.40. Досетка и научен метод (МО, 336-352)

4.3. ЗАДАЧИ ВО ВРСКА СО ОРГАНИЗАЦИЈАТА НА НАСТАВАТА

i) Направи тематски план и подготовка на наставната целина (3.1-3.6).

3.1. Триаголник (без „паралелни прави"; VI одд.; 14 часа)

3.2. Функции. Пропорционалност (VII одд.; 12 часа)

3.3. Призма. Пирамида (VIII одд.; 12 часа)

3.4. Коренување (I клас; 12 часа)

3.5. Равенки што се сведуваат на квадратни (II клас; 14 часа)

3.6. Адициони теореми (III клас; 15 часа) *ii*) Направи план и подготовка на наставниот час (3.7–3.14).

3.7. Својства на рамнокракиот триаголник (VI одд.; тема: Триаголник).

3.8. Права и обратна пропорционалност (VII одд.; тема: Функции. Пропорционалност)

3.9. Волумен на права призма (VIII одд.; тема: Призма. Пирамида)

3.10. Прстенот на целите броеви (I кл.; тема: природни и цели броеви)

3.11. Нормален вид на корен (I кл.; тема: коренување)

3.12. Други формули за плоштина на триаголник (Херонова формула, $P=rs$, $P=\frac{abc}{4R}$) (I кл.; тема: Плоштина на многуаголник и круг).

3.13. Ирационални равенки што се сведуваат на линеарни или квадратни (II кл.; тема: Равенки што се сведуваат на квадратни)

3.14. Синусна теорема (III кл.; тема: Решавање на косоаголен триаголник).

iii) Направи систем задачи за самостојна работа при утврдување на материјалот (3.15–3.20)

3.15. Талесова теорема за пропорционални отсечки (VIII одд.)

3.16. Цилиндар; плоштина и волумен (VIII одд.)

3.17. Разлагање на полиноми на множители (I клас)

3.18. Линеарни равенки и задачи што се сведуваат на линеарни равенки (I клас)

3.19. Својства на корените на квадратна равенка (II клас)

3.20. Услови за паралелност и нормалност на две прави (III клас; од: Аналитична геометрија во рамнина).

iv) Во задачите 3.21–3.28, подготви систем задачи за домашна работа во наставниот час што ѝ претходи на:

3.21. Лекцијата од 3.7.

3.22. Лекцијата од 3.8.

3.23. Лекцијата од 3.9.

3.24. Лекцијата од 3.10.

3.25. Лекцијата од 3.11.

3.26. Лекцијата од 3.12.

3.27. Лекцијата од 3.13.

3.28. Лекцијата од 3.17.

v. Во задачите 3.29–3.32, направи тест-задачи за проверување на знаењата по темата:

3.29. Темата 3.3.

3.30. Темата 3.4.

3.31. Темата 3.5.

3.32. Темата 3.6.

Прилог

НЕКОЛКУ СОВЕТИ ЗА НАСТАВНИКОТ-ПОЧЕТНИК

1. **Не оди на часовите неподготвен.** Дипломираните студенти често си мислат дека материјалот што треба да го предаваат го знаат „ на прсти", па затоа не се подготвуваат доволно. Запомнете дека часот бара и други елементи покрај стручната подготвеност. Секоја лекција треба да биде методски добро подготвена, имајќи го предвид видот и составот на учениците во класот.
2. **Не планирај премногу материјал за часот**, зашто, повлечен од тоа, може да одиш напред со твојата подготвена лекција, иако целиот клас е сосем изгубен.
3. Твоите лекции и дискусии во класот **базирај ги на учебникот**. Учениците сосема ќе бидат збунети ако ти користиш други ознаки или друг пристап при објаснувањето на поимите од оние што се дадени во нивниот учебник.
4. Немој да сметаш дека учениците се способни да разберат сè што ќе прочитаат во учебникот. Инсистирај на **употреба на учебникот** и обиди се да ги научиш учениците како да го користат.
5. Запомни дека ти не правиш преглед, туку презентираш нов материјал. Затоа е пожелно **повеќе повторување** на часот. Повторувај почесто и во почетокот на секоја нова поголема тема: што сте направиле дотогаш и што треба да направите натаму.
6. Во почетокот на полугодието **направи краток преглед** на целиот материјал што ќе се изучува во тоа полугодие, за учениците да добијат претстава што ги очекува. Притоа, добро е да се посочат некои теореми и резултати што се најважни во смисла на нивната идна примена.
7. Прегледај ги (дури и реши ги) **задачите за домашна работа** пред да им ги зададеш на учениците. Некои задачи може да се неприкладни, зашто содржат долги и досадни пресметувања, па можеби е подобро да не се задаваат. Биди сигурен дека можеш да ја решиш секоја од зададените задачи!

   Задавај за домашна работа и некои други задачи за кои нема одговор на крајот од учебникот. Предупреди ги учениците дека може да се случи некој од одговорите на задачите во книгата да не е точен и дека одговорите во учебникот често пати се упростени, така што ученикот може да има коректен одговор иако се разликува од одговорот во учебникот.
8. Не биди премногу амбициозен. **Не очекувај премногу.** Специјално, не очекувај учениците да ги учат доказите на сите теореми што ќе им ги предадеш. Запомни дека многу малку (ако воопшто некои) од твоите ученици ќе станат математичари, т.е. ќе ја изберат математиката за свој животен по-

зив.

9. **Изведувањето на наставата има многу сличности со театарската уметност.** Да речеме, треба на класот да му изложиш доказ (на некоја теорема), којшто ти го знаеш одлично, зашто многупати си го слушал и си го изведувал. Тој доказ тебе, секако, не те интересира; но, не смееш тоа да го покажеш пред класот! Ако учениците забележат дека тебе ти е досадно, тогаш сигурно ќе им стане досадно на сите нив. Пристапувајќи кон доказот, труди се да изгледаш заинтересиран; во текот на доказот не пропуштај ги можностите да им нафрлиш на учениците некои интересни идеи што се во врска со тоа; по завршувањето на доказот труди се да изгледаш малку зачуден и дај им можност на учениците да го забележат твоето малку „подигнато" настроение.

   Општо земено, некој дел од материјалот може да „не ти лежи", не ти е интересен. Сепак, ти треба да се трудиш да изгледаш заинтересиран.

10. Ако имаш некои **нови револуционерни идеи** за тоа како треба да се предава математиката, **не обидувај се нив да ги спроведеш уште во првата година** на твоето професорување!

ĽÙÜÊÈÄÜÔÈÄ

1. Баковлев М. (Bakovljev Milan): *Didaktika;* "Naučna knjiga", Beograd 1984.
2. Батлер Ч., Врен Л. (Charles Butler,Linwood Wren): *Nastava matematike u srednjoj školi, program i metodi,* Beograd 1967.
3. Бел Е.Т. (E.T. Bell): *Men of mathematics;* New York 1965.
4. Бел Е.Т. (E.T. Bell): *Математика краљица и ропкиња науке;* Београд 1967.
5. Бескин Н.М.: *Методика геометрии;* Москва 1947.
6. Брадис В.М.: *Методика преподавания математики в средней школе;* Москва 1954.
7. Василевский А.Б.: *Методы решения геметрических задач*; Минск 1969.
8. Ганчев И.: *За математическите задачи*; София 1976.
9. Гастева С.А. и др. (под редакција на Е.С. Ляпин): *Методика преподавания математики в восмилетней школе*; Москва 1965.
10. Градштейн И.С.: *Прямая и обратная теоремы;* Москва 1972.
11. Депман И.Я.: *История арифметики;* Москва 1965.
12. Драпкина М.Е.: *Логические упражнения по злементарной математике*; Минск 1965.
13. Ивз Х., Њусом К. (Howard Eves, Carrol Newsom): *An Introduction to the Foundations and Fundamental concepts of Mathematics*; Holt, Reinhart and Winston, 1964.
14. Иванов П.: *Методика на обучението по математика*; София 1965.
15. Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Санинский В.Я., Луканкин Г.Л.: *Методика преподавания математики в средней школе (Общая методика)*; Москва 1975.
16. Колягин Ю.М. и др. (шест автори): *Методика препродавания математики в средней школе (Частные методики)*; Москва 1977.
17. Колягин Ю.М., Оганесян В.А.: *Учись решать задачи*; Москва 1980.
18. Кудраявцев Л.Д.: *Мысли о современной математике и ее изучении;* Москва 1977.
19. Куликов Л. Я.: *Алгебра и теория чисел;* Москва 1979.
20. Лицман В.: *Къде е грешката?;* София 1975 *(превод од германски,* Leipzig 1969)
21. Ляпин Ц.Е., Гастева С.А., Квасникова З.Я., Крелштейн Б. И.: *Методика на обучението по математика, част II* (редактор: Е.С. Ляпин); москва 1956.
22. Мазаник А.А., Столяр А.А.: *Вопросы и задачи по методике преподавания математики;* Минск 1964.
23. Метельский Н.В.: *Дидактика математики;* Минск 1975.
24. Метельский Н.В.: *Психолого-педагогические основы дидак-*

тики математики; Минск 1977.

25. Пенавин В. (Penavin V.) и др.: *Metodički priručnik za neka pitanja početne nastave matematike;* Нови Сад 1974.
26. Пойа Д. (George Polya): *Как решать задачу;* Москва 1961.
27. Пойа Д. (George Polya): *Математика и правдоподобные рассуждения;* Москва 1975.
28. Пойа Д. (George Polya): *Математическое открытие;* Москва 1961.
29. Пољак В. (Vladimir Poljak): *Didaktika,* "Šk. knjiga"; Zagreb 1985.
30. Првановиќ С. (Stanko Prvanović): *Metodika savremenog matematičkog obrazovanja u osnovnoj školi; Beograd 1970*
31. Реньи А. (Alfréd Rényi): *Диалоги о математике*; Москва 1969.
32. Рогов А.Т.: *Алгебра - программированное учебное пособие для техникумов*; Москва 1972.
33. Рыбников К.А.: *История математики*; Москва 1960.
34. Сергиенко Л.Ю., Самойленко П.И.: *Планирование учебного процесса по математике*; Москва 1987.
35. Сојер В.В. (Sawyer W.W.): *Prelude to Mathematics;*Penguin books; London 1966.
36. Столяр А.А.: *Педагогика математики*; Минск 1974.
37. Стројк Дирк: *Кратак преглед историје математике*; Београд 1987.
38. Туманов С.И.: *Поиски решения задачи*; Москва 1969.
39. Хабиб Р.А.: *О новых приемах обучения планиметрии*; Москва 1969.
40. Чичигин В.Г.: *Методика на обучението по геометрия - Планиметрия*; София 1964 (превод од руски).
41. Чупона Ѓ.: *Алгебарски структури и реални броеви*; Скопје 1976.
42. Шимлеша П. (Pero Šimleša, urednik) и др. (17 автори): *Pedagogija*; Zagreb 1978.
43. Учебниците и збирките задачи по математика за средното и основното образование (во употреба: 1986 - 1991).
44. Списанија:
    1) СИГМА, СДМИ Скопје (1979 - 1991).
    2) НУМЕРУС, СДМИ Скопје (1975 - 1991).
    3) МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ, Москва.
    4) MATHEMATICS TEACHER, USA.

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ И ИМИЊА

Издавач
Математичко списание "Нумерус" - Скопје
ул. Пиринска б.б. барака 4

*

д-р Наум Целакоски
Дидактика на математиката
со прирачник за студенти и наставници

*

Лектура
Александар Џукески

*

Цртежи
м-р Душко Ачовски

*

Корици
Јово Стефановски

*

Технички уредник
Розалинда Трајкоска

*

Подготвиле за печат
Коста Мишовски - Петре Крстески

*

Ракописот е предаден во печат во јануари 1993 година. Печатењето е завршено во февруари 1993 година. Обем 324 стр. Формат: 17 x 24 *cm*. Тираж: 1200 примероци. Отпечатено во НИП "Нова Македонија", РЕ "Печатница" - Скопје.

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека
"Климент Охридски", Скопје

371.3.02:51(075.8)

ЦЕЛАКОСКИ , Наум
Дидактика на математиката : со прирачник за студенти и наставници / Наум Целакоски ; [цртежи Душко Ачовски]. - Скопје : Нумерус , 1993 . - VI , 315 стр. : илустр . ; 24 см . - (Дидактичко-методска Нумерусова библиотека ; 2)

Библиографија: стр. 312-313 . - Регистар.

а) Математика - Методика - Дидактика - Учебници