MATEMATIKA

Teorem o majorizaciji i primjene

Sanela Jukić[1]*, Slatina, Sanja Varošanec*[2]*, Zagreb*

U prvom prošlogodišnjem broju MFL-a M. Valčić je opisao Jensenovu nejednakost za konveksne funkcije i njezinu primjenu u trigonometriji. Sada ćemo opisati još jedan rezultat koji vrijedi za konveksne funkcije, tzv. teorem o majorizaciji, te ilustrirati njegovu primjenu.

Prije svega ponovimo definiciju i neka svojstva konveksne funkcije.

Definicija. Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ interval. Za funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ kažemo da je **konveksna** na I ako za svaki $\alpha \in [0,1]$ i za svake x i y iz I vrijedi

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{1}$$

Ako su x_1, x_2, x_3 bilo koje tri različite točke iz I, $x_1 < x_2 < x_3$, tada zamjenama

$$x \to x_1, \quad y \to x_3, \quad \alpha \to \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$$

nejednakost (1) poprima oblik

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3)$$

što se može svesti na

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}, \quad x_1 < x_3, \quad x_1, x_3 \neq x_2. \tag{2}$$

Dokažimo sljedeće svojstvo konveksne funkcije koje ćemo koristiti u dokazu teorema o majorizaciji.

Lema 1. *Neka je $f : I \to \mathbf{R}$ konveksna funkcija, te neka su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in I$ takvi da je $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Tada vrijedi*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}. \tag{3}$$

Dokaz. Stavimo li u nejednakost (2) zamjenu $x_3 \to y_1$ dobivamo

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1}.$$

Stavimo li u nejednakost (3) zamjene

$$x_1 \to x_2, \quad x_2 \to y_1, \quad x_3 \to y_2$$

dobivamo

$$\frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1} \leq \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}.$$

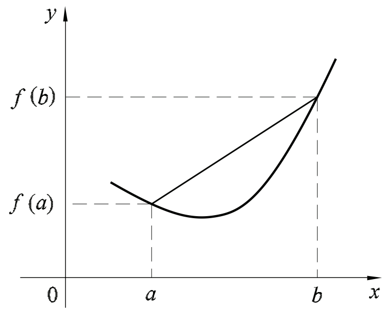
Iz te dvije nejednakosti slijedi (3).

---

[1] Autorica je profesor matematike u Osnovnoj školi Josipa Kozarca u Slatini.

[2] Koautorica je redoviti profesor na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu; e-mail: `varosans@math.hr`

Konveksne funkcije posjeduju razna zanimljiva svojstva i igraju ključnu ulogu u nekim granama matematike. Korisno je znati da se graf konveksne funkcije, promatran na intervalu $[a, b] \subset I$, nalazi ispod tetive koja spaja točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, te ako je funkcija f dva puta diferencijabilna tada je f konveksna ako i samo ako je $f'' \geq 0$ na intervalu I.



Izrecimo sada i glavni rezultat ovog teksta.

Teorem o majorizaciji (Muirheadov teorem). *Neka su* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *i* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *realne* n*-torke s koordinatama u padajućem poretku, tj.* $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$, $\quad y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, *takve da je*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i, \quad \text{za svaki} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{5}$$

Tada za svaku konveksnu funkciju $f : I \to \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(y_i).$$

Komentar. Ako dvjema n-torkama $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ koordinate preuredimo tako da budu u padajućem poretku i ako za tako uređene koordinate vrijede relacije (4) i (5), tada kažemo da n-torka $\mathbf{y}$ **majorizira** n-torku $\mathbf{x}$ i pišemo $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

Razna poopćenja ovog teorema mogu se naći u knjigama [1] i [2].

Primjer 1. a) Za prirodni broj n vrijedi

$$\left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1}, 0\right) \prec \ldots \prec \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

b) Ako su α, β i γ kutovi trokuta, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, tada je

$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0).$$

Ako je trokut šiljastokutan, tada je $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$, a ako je trokut tupokutan, tada je $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \prec (\alpha, \beta, \gamma) \prec (\pi, 0, 0)$.

c) Ako su $a_1, \ldots, a_n$, $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ nenegativni realni brojevi čija je suma jednaka 1, tada vrijedi

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \prec (a_1, a_2, \ldots, a_n) \prec (1, 0, \ldots, 0).$$

Dokažimo prvu nejednakost u primjeru c), dok ostale ostavljamo čitatelju za vježbu.

Treba dokazati da vrijede relacije (4) i (5). Relacija (5) je očito zadovoljena jer je $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Neka je k bilo koji broj iz skupa $\{1,2,\ldots,n-1\}$. Treba dokazati da je $\frac{k}{n}\leq\sum_{i=1}^{k}a_i$. Ta je nejednakost ekvivalentna sa sljedećim:

$$\frac{k(a_1+\ldots+a_n)}{n}\leq a_1+\ldots+a_k,$$
$$ka_1+\ldots+ka_n\leq na_1+\ldots+na_k,$$
$$ka_{k+1}+ka_{k+2}+\ldots+ka_n\leq(n-k)(a_1+\ldots+a_k).$$

Budući da je $a_{k+1}\leq a_1$, $a_{k+1}\leq a_2,\ldots,a_{k+1}\leq a_k$, slijedi $ka_{k+1}\leq a_1+\ldots+a_k$. Isti odnos vrijedi i za ostale produkte $ka_{k+2},\ldots,ka_n$. Sumirajući tih $n-k$ nejednakosti dobivamo posljednju u nizu ekvivalentnih nejednakosti.

Dokaz teorema. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $x_i\neq y_i$ za svaki $i=1,2,\ldots,n$. Definirajmo brojeve d_i ovako

$$d_i=\frac{f(x_i)-f(y_i)}{x_i-y_i},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Ako u nejednakost (3) stavimo

$$x_1\to y_{i+1},\quad x_2\to x_{i+1},\quad y_1\to y_i,\quad y_2\to x_i$$

dobivamo $\frac{f(x_{i+1})-f(y_{i+1})}{x_{i+1}-y_{i+1}}\leq\frac{f(x_i)-f(y_i)}{x_i-y_i}$, tj. $d_{i+1}\leq d_i$. Uz oznake $X_k=\sum_{i=1}^{k}x_i$, $Y_k=\sum_{i=1}^{k}y_i$ imamo

$$\sum_{i=1}^{k}f(x_i)-\sum_{i=1}^{k}f(y_i)=\sum_{i=1}^{k}(f(x_i)-f(y_i))=\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i-y_i).$$

Budući da je $x_1-y_1=X_1-Y_1$, $x_2-y_2=(X_2-Y_2)-(X_1-Y_1)$, $x_3-y_3=(X_3-Y_3)-(X_2-Y_2),\ldots,$ $x_n-y_n=(X_n-Y_n)-(X_{n-1}-Y_{n-1})$ dobivamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i-y_i)&=d_1(X_1-Y_1)+d_2((X_2-Y_2)-(X_1-Y_1))+d_3((X_3-Y_3)-(X_2-Y_2))\\&\quad+\ldots+d_n((X_n-Y_n)-(X_{n-1}-Y_{n-1}))\\&=(d_1-d_2)(X_1-Y_1)+(d_2-d_3)(X_2-Y_2)\\&\quad+\ldots+(d_{n-1}-d_n)(X_{n-1}-Y_{n-1})+d_n(X_n-Y_n).\end{aligned}$$

Izraz (X_n-Y_n) jednak je 0, a svi ostali izrazi oblika X_k-Y_k su nepozitivni. Uz to je $d_k-d_{k+1}\geq 0$, pa je cijela suma na desnoj strani jednakosti nepozitivna, tj. $\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\leq\sum_{i=1}^{k}f(y_i)$ što je i trebalo dokazati.

Ovaj se teorem može primijeniti pri dokazivanju niza nejednakosti.

Primjer 2. Dokažimo da u šiljastokutnom trokutu vrijedi

$$2\leq\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Rješenje. Funkcija $f(x)=-\sin x$ je (strogo) konveksna na $(0,\pi)$, jer je $f''(x)=\sin x>0$. Za kutove šiljastokutnog trokuta vrijedi majorizacija

$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha,\beta,\gamma) \prec \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)$, pa je prema teoremu

$$3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(0),$$

tj. $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \leq -\sin\alpha-\sin\beta-\sin\gamma \leq -2$, odakle slijedi tražena nejednakost.

Primjer 3. (1. balkanska matematička olimpijada, 1984.) Neka je $n \geq 2$, te neka su $a_1,\ldots,a_n$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a_1+\ldots+a_n = 1$. Dokažite da je

$$\frac{a_1}{1+a_2+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_1+\ldots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Rješenje. Zamijetimo da se zbog uvjeta $a_1+\ldots+a_n = 1$ svaki od razlomaka s lijeve strane nejednakosti može napisati kao $\frac{a_k}{2-a_k}$. Dakle, nejednakost poprima oblik

$$\frac{a_1}{2-a_1}+\frac{a_2}{2-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Funkcija $f(x) = \frac{x}{2-x}$ je konveksna na $(0,1)$ jer je $f''(x) = 4(2-x)^{-3} > 0$, pa primijenimo teorem na n-torke $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right) \prec (a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Dobivamo da je $f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(a_1)+\ldots+f(a_n)$, tj. $n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1}{2-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n}$, što je upravo tražena nejednakost. Zamijetimo da zbog majorizacije $(a_1,a_2,\ldots,a_n) \prec (1,0,\ldots,0)$ dobivamo i donju ogradu, tj. $\frac{a_1}{2-a_1}+\ldots+\frac{a_n}{2-a_n} \leq 1$.

Zadaci

1. Dokažite da u svakom trokutu vrijede ove nejednakosti:

a) $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$, b) $2 < \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

c) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{3}{8}\sqrt{3}$, (*uputa*: promatra se funkcija $f(x) = -\ln\sin x$).

2. Dokažite da u šiljastokutnom trokutu vrijedi:

a) $\frac{3}{4} \leq \sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2} \leq 1$, b) $\frac{1}{2} \leq \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3. Neka su $x_1,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi. Dokažite nejednakost

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

4. Neka su x,y,z pozitivni realni brojevi takvi da je $x+y+z = 1$. Dokažite da je

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

Literatura

[1] A. W. MARSHALL, I. OLKIN, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, 1979.

[2] J. E. PEČARIĆ, F. PROSCHAN, Y. L. TONG, *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*, Academic Press, 1992.