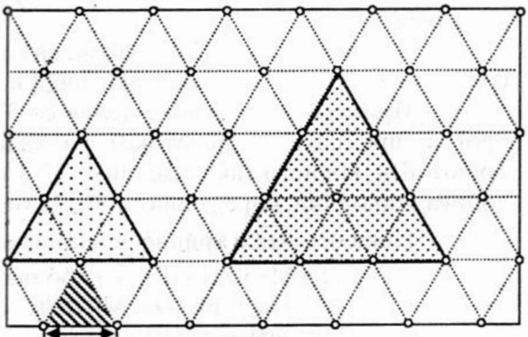
Гоце Шопкоски, Скопје

ПЛОШТИНА НА ФИГУРИ НА ТРИАГОЛНА МРЕЖА

Во еден од претходните броеви на "Нумерус" пишувавме за плоштина на некои рамнински фигури на квадратна мрежа и ја докажавме познатата теорема на Пик. Овде станува збор за плоштина на некои рамнински фигури на триаголна мрежа. Тоа всушност е мрежа од точки што се наоѓаат во темиња на рамнострани триаголници. Ќе воочиме дека релациите што важат на правоаголна мрежа се изведуваат и важат и на триаголна мрежа.

Основна мерна единица за плоштина на триаголна мрежа **е една триаголна единица (1 te).** ***Тоа е плоштината на рамностран триаголник со страна* 1.**

Пример: Рамностран триаголник со страна 2 cm има плоштина 4 te (затоа што триаголникот содржи четири рамнострани триаголници со страна 1 cm). Рамностран триаголник со страна 3 cm има плоштина 9 te (црт. 1).



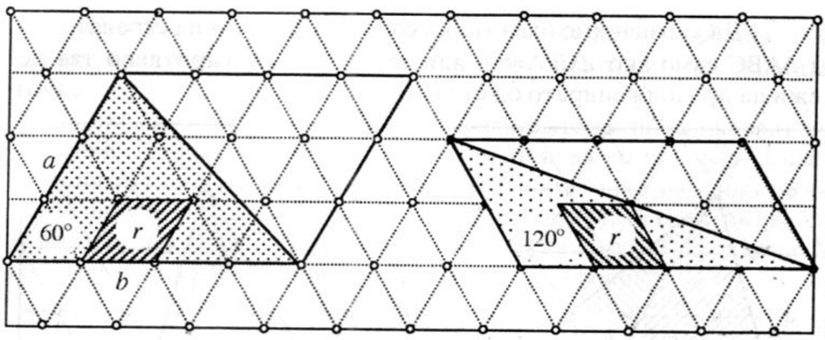
Црт. 1

ПЛОШТИНА НА 60 -АГОЛЕН ПАРАЛЕЛОГРАМ[1]

60 - аголен паралелограм со страни a и b и со темиња во точки од мрежата содржи $a \cdot b$ ромбови r (црт. 2). Секој таков ромб е составен од две триаголни единици. Според тоа паралелограм со страни a и b има плоштина $P = 2ab$ (te).

На сличен начин се одредува плоштина на 120 - аголен паралелограм со страни a и b и со темиња во точки од мрежата. И овој паралелограм има плоштина $P = 2ab$ (te) (црт. 2).

[1] Паралелограм што има агол од 60° се вика 60-аголен (или 120 - аголен) паралелограм



Црт. 2

ПЛОШТИНА НА 60 - АГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Да го дополниме 60 - аголниот триаголник (црт. 2) до паралелограм, така што аголот од 60° да биде агол на паралелограмот.

Дијагоналата го дели паралелограмот на два складни триаголници. Според тоа плоштината на триаголник со страни a и b, кои се краци на аголот од 60°, е $P = ab$ (te).

Плоштината на 120 - аголен триаголник се пресметува на ист начин.

Пример: 60 - аголниот триаголник на црт. 2 има страни a=3 cm, b= 4 cm. Според тоа тој има плоштина $P = 3 \cdot 4$ (te), $P = 12$ te.

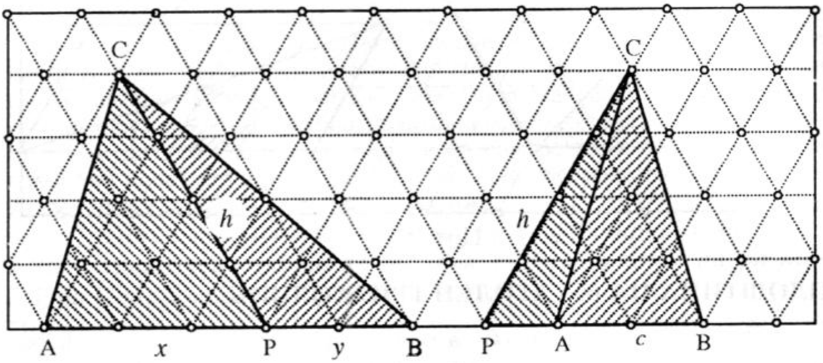
Задача: Одреди ја плоштината на 120 - аголниот триаголник на црт.2.

ПЛОШТИНА НА ПРОИЗВОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Секој триаголник може да се претстави како збир или разлика од плоштините на два триаголници. Имено, на една од страните или на нејзиното продолжение се избира точка, така што аголот помеѓу страната и сврзницата на оваа точка со спротивното теме биде еднаков на 60°.

Двата случаи, кога точката лежи на страната или пак на нејзиното продолжение, се претставени на црт. 3.

Да ја означиме оваа точка со P. Таа ќе лежи на страната AB од ΔABC само ако $\angle CPA=60^\circ$ или $\angle CPB=60^\circ$. Во спротивно таа ќе лежи на продолженирето од страната AB.



Црт. 2

Да го разгледаме случајот кога точката P лежи на страната AB. Да ставиме $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = y$, $\overline{PC} = h$, $\overline{AB} = c$, при што $x+y = \overline{AB} = c$.

$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta APC} + P_{\Delta BPC} = hx + hy = h(x + y) = hc$, односно $P_{\Delta ABC} = hc$.

Пример: Плоштината на ΔABC на црт. 2, лево е:

$$P = 3\cdot 4 + 2\cdot 4 = 20 \text{ те.}$$

Ако точката P лежи на продолжението од страната AB тогаш: $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta PBC} - P_{\Delta PAC} = h(x + c)-hx = hx + hc - hx = hc$, односно $P_{\Delta ABC} = hc$, каде $x = \overline{PA}$, $x+c = \overline{PB}$, $h = \overline{PC}$.

Вочуваме дека во двата случаи *плоштината на триаголникот е еднаква на* ***производот од основата c и аголовата висина h.***

Теоремата на Пик, што ја разгледавме на правоаголна мрежа, важи и на триаголна мрежа. За да го објасниме ова тврдење доволно е ако претпоставиме дека правоаголната мрежа е добиена од триаголната мрежа со ротација за агол од 30° околу целобројна оска.

Плоштина на произволна фигура чии темиња лежат во точки од квадратна мрежа се пресметува со формулата (на Пик):

$$P_{\square} = \frac{g}{2} - 1 + v = \frac{g}{2} + (v-1)$$

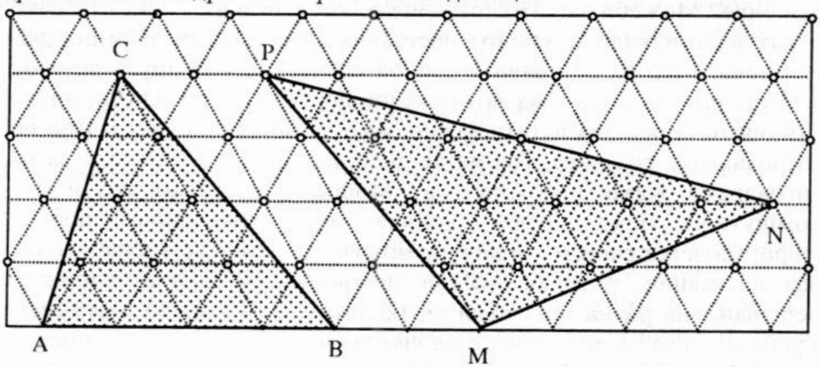
каде што Р е плоштина на фигурата во квадратни единици, р е бројот на точките на полигонот, а v е бројот на внатрешните точки.

Со ротација за агол од 30° квадратите се пресликуваат во ромбови. Притоа, секој полигон се пресликува во полигон, а внатрешните точки на полигонот во внатрешни точки на сликата на полигонот. Според тоа заклучуваме дека формулата (на Пик) важи и во овој случај, со тоа што единица мерка е ромб со страна 1, (односно два рамнострани триаголници). Така добиваме

$$P_\Delta = \left(\frac{g}{2} - 1 + v\right)\cdot 2 = p + 2(v - 1)$$

каде P_Δ претставува плоштина на триаголникот во te.

Задача: Да се пртесмета плоштината на триаголниците на цртежот во квадратни и триаголни единици.



Решение: Плоштина на ΔABC:

- во квадратни единици: g=6, v= 6, па $P_\square = \frac{6}{2} - 1 + 6$, односно $P_\square = 8$.

- во триаголни единици (te): $P_\Delta = \left(\frac{6}{2} - 1 + 6\right)\cdot 2$, односно $P_\Delta = 16$.

На сличен начин се пресметува плоштината на триаголникот MNP. Обидете се сами да ја пресметате.

Очигледно е дека формулата на Пик е најопшт вид за пресметување плоштина на фигура како во квадратна, исто така и во во триаголна мрежа.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус