

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 7 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC , пересекает катеты этого треугольника в точках M и N . Оказалось, что $AC = 2MN$. Докажите, что M и N — середины катетов треугольника ABC .

Михаил Евдокимов

- 4 2. Найдите все натуральные n , удовлетворяющие условию: числа $1, 2, 3, \dots, 2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.

Фольклор

- 1 3. Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трёх клеток. Могло ли
3 а) столько же, сколько уголков;
 б) больше, чем уголков?

Михаил Евдокимов

- 5 4. У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие — весят одинаково — и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?

Рустэм Женодаров

- 5 5. Назовём девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

Михаил Евдокимов

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 7 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 3 1. Можно ли внутри правильного пятиугольника разместить отрезок, который из всех вершин виден под одним и тем же углом? (Углом, под которым виден из точки A отрезок XU , называется угол XAU .)

Егор Бакаев, Сергей Дворянинов

- 4 2. Найдите все натуральные n , удовлетворяющие условию: числа $1, 2, 3, \dots, 2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.

Фольклор

- 5 3. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На стороне AB отмечена такая точка N , что $CN = AB$. Оказалось, что описанная окружность треугольника CBN касается прямой AD . Докажите, что она касается её в точке D .

Михаил Евдокимов

- 5 4. Назовём девятизначное число *красивым*, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 2018 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

Михаил Евдокимов

- 5 5. Петя расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася — 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать?

Егор Бакаев

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. В треугольнике ABC точка M — середина стороны BC , точка E — произвольная точка внутри стороны AC . Известно, что $BE \geq 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

Наири Седракян

- 6 2. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

Михаил Кузнецов

- 8 3. Требуется записать число вида $77\dots 7$, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по несколько штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись — это просто 77 . А существует ли число вида $77\dots 7$, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?

Сергей Маркелов

- 8 4. Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2 . Решается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

Рустэм Женодаров

- 8 5. Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E . Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1 , O_2 , O , C лежат на одной окружности.

Алексей Заславский

- 7 6. Докажите, что
3 а) любое число вида $3k - 2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;
б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

Наири Седракян

- 5 7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из любого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом невозможно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется *простым*, иначе — *сложным*. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что
5 а) в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;
7 б) в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

Максим Дидин

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 21 октября 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

Михаил Кузнецов

- 7 2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b . Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.

Фольклор

- 6 3. Докажите, что
2 а) любое число вида $3k - 2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;
б) любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

Наири Седракян

- 8 4. Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M , в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам.

Дмитрий Захаров

- 8 5. Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше 30° . Каково наибольшее возможное значение k ?

Наири Седракян

- 9 6. На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R , что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R , то на каждой дуге колеса величиной в 1° будет след хотя бы одной отмеченной точки.

Иван Митрофанов

- 10 7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выиграет, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе
4 а) ровно $2n$ жителей;
б) ровно $2n - 1$ жителей.

Глеб Погудин

40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач осеннего тура

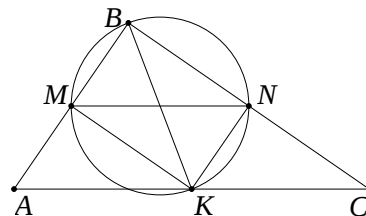
Младшие классы.

Базовый вариант

1. [4] Окружность, проходящая через вершину B прямого угла и середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC , пересекает катеты этого треугольника в точках M и N . Оказалось, что $AC = 2MN$. Докажите, что M и N – середины катетов треугольника ABC .

(М. Евдокимов)

Пусть точка M лежит на AB , точка N – на BC , и пусть точка K – середина AC . Тогда $BK = \frac{1}{2} AC$ (в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы). Так как угол B прямой, то MN – диаметр данной окружности. Поскольку $BK = \frac{1}{2} AC = MN$, то BK – тоже диаметр. Следовательно, $KM \perp AB$, то есть KM – средняя линия треугольника ABC . Аналогично KN – средняя линия.



2. [4] Найдите все натуральные n , удовлетворяющие условию: числа $1, 2, 3, \dots, 2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа.

(Фольклор)

Ответ: все $n > 1$. **Решение.** $1 + 2$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

1-й способ. Разобьём эти числа на четвёрки подряд идущих, и, если надо, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6) = 18^2$.

2-й способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1)) \dots (n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1)) \dots ((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

Замечание. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

3. Клетчатый прямоугольник размера 7×14 разрезали по линиям сетки на квадраты 2×2 и уголки из трёх клеток. Могло ли квадратов получиться

а) [1] столько же, сколько уголков;

б) [3] больше, чем уголков?

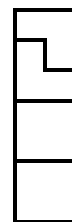
(М. Евдокимов)

а) **Ответ:** могло. Будем считать, что в прямоугольнике 7 строк и 14 столбцов. Разобьём прямоугольник на полосы из двух столбцов, а каждую из полосок – как на рисунке справа.

б) **Ответ:** не могло. Докажем, что требуется хотя бы 14 уголков. Тогда квадратов будет не больше $(7 \cdot 14 - 3 \cdot 14) : 4 = 14$.

Первый способ. Выставляя фигурки, будем следить за чётностью количества покрытых клеток в каждом столбце. Квадраты не меняют эту чётность, а уголок меняет чётность только одного столбца. Сначала все столбцы были чётными, а должны стать нечётными. Следовательно, потребуется хотя бы 14 уголков.

Второй способ. Раскрасим прямоугольник «в полоску»: все нечётные горизонтали – чёрные, а чётные – белые. При этом чёрных клеток будет на 14 больше, чем белых. Но в квадрате число чёрных клеток равно числу белых, а в уголке их количества отличаются на единицу. Следовательно, потребуется не меньше 14 уголков.



4. [5] У Насти есть пять одинаковых с виду монет, среди которых три настоящие – весят одинаково – и две фальшивые: одна тяжелее настоящей, а вторая на столько же легче настоящей. Эксперт по просьбе Насти сделает на двухчашечных весах без гирь три взвешивания, которые она укажет, после чего сообщит Насте результаты. Может ли Настя выбрать взвешивания так, чтобы по их результатам гарантированно определить обе фальшивые монеты и указать, какая из них более тяжёлая, а какая более лёгкая?

(Р. Женодаров)

Ответ. Может. **Первый способ.** Обозначим монеты буквами a, b, c, d, e . Настя попросит провести взвешивания: $a?b, c?d, ab?cd$. С точностью до симметрии возможны четыре исхода.

- 1) $a > b, c > d, ab > cd$. Тогда a – тяжёлая, d – лёгкая.
- 2) $a = b, c > d, ab = cd$. Тогда c – тяжёлая, d – лёгкая.
- 3) $a = b, c > d, ab > cd$. Тогда e – тяжёлая, d – лёгкая.
- 4) $a = b, c > d, ab < cd$. Тогда c – тяжёлая, e – лёгкая.

Второй способ. Настя отдаст эксперту четыре монеты и попросит взвесить все три разбиения их на пары. Пусть каждая из этих монет получит метку – сколько раз она была на перевесившей чаше. Для каждого вида оставшейся монеты запишем набор меток: настоящая – 2110, лёгкая – 3111, тяжёлая – 2220. Видно, что все эти случаи различаются, и в каждом из них определяется вид обеих фальшивых монет.

Замечание. Можно доказать, что других способов у Насти нет.

5. [5] Назовём девятизначное число красивым, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 1000 красивых чисел, каждое из которых делится на 37.

(М. Евдокимов)

Всякое девятизначное число M равно сумме $10^6A + 10^3B + C = 999 \cdot (1001A + B) + (A + B + C)$, где A, B, C – числа, образованные тремя первыми, тремя следующими и тремя последними цифрами числа M . Разобьём цифры от 1 до 9 на три тройки с суммой 15 в каждой. Если мы на первые места в числах A, B, C поставим три цифры из одной тройки, на вторые – из другой, на третьи – из оставшейся, сумма $A + B + C$ будет равна $15 \cdot 111 = 45 \cdot 37$. Так как и 999 делится на 37, то красивое число M при такой расстановке цифр будет кратно 37. Поскольку три цифры по трём местам можно расставить шестью способами и назначить три тройки на первое, второе и третье места тоже можно шестью способами, всего у нас получается $6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ красивых чисел, кратных 37. Теперь достаточно указать три тройки цифр с равными суммами. Например, это $\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}$.

ДОПОЛНЕНИЕ. В варианте старших классов надо было доказать, что красивых чисел не менее 2018. Приведём несколько решений этой задачи. Будем записывать красивое число

$\overline{a_8 \dots a_0}$ в виде таблицы (см. рис.). Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

$$\overline{a_8 \dots a_0} = 10^8 a_8 + \dots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}.$$

Поэтому из красивого числа, кратного d , где d – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

1-е решение. Рассмотрим таблицу справа. Суммы в её столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6 \cdot 216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111, а значит, кратных и 37.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2 \cdot 72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Для двух следующих решений нам понадобится следующая

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d , то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + y$ кратны d .

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) - 999x$.

2-е решение. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100 \cdot 8 + 10 \cdot 18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972. Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5 \cdot 3 \cdot 216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При

этом $5 \cdot 72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ (навеяно идеей Алиева Рашида, 10 кл., г. Махачкала). Рассмотрим таблицу справа. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24 \cdot 216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

0	3	7
1	4	8
2	5	9

Замечания. 1. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

0	7	4
1	8	5
2	9	6

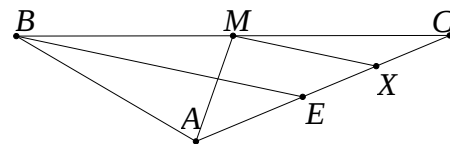
2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

Сложный вариант

1. [5] В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC , точка E – произвольная точка внутри стороны AC . Известно, что $BE \geq 2AM$. Докажите, что треугольник ABC тупоугольный.

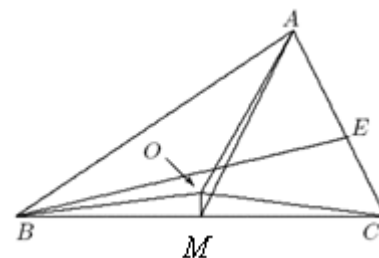
(Н. Седракян)

Решение 1. Пусть X – середина отрезка EC . Тогда $MX = \frac{BE}{2}$. Как известно, чевиана треугольника меньше хотя бы одной из сторон, выходящих из той же вершины (это следует, например, из свойств наклонных и проекций). По условию, $MX \geq MA$, значит, $MX < MC$. Тем более, $MA < MC$. Следовательно, точка A лежит внутри круга с диаметром BC . А это и значит, что угол A тупой.



Решение 2. Пусть угол A не тупой. Тогда центр O описанной окружности треугольника ABC лежит на BC или по ту же сторону от BC , что и вершина A . Значит, $2AM \geq 2AO = OB + OC \geq BC > BE$. Противоречие.

Решение 3. (Арбуханова Гульжаган) Построим треугольник до параллелограмма $ABDC$. Пусть AM и BE пересекаются в точке Y . Так как треугольники AYE и DYB подобны и $BE \geq 2AM = AD$, то $BY \geq YD$. Сравнивая это с неравенством треугольника $YM + MB > BY$, получим $MB > MD$. То есть BC – большая диагональ параллелограмма. Это и значит, что угол A тупой.



2. [6] На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

(М. Кузнецов)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение.** Назовём рыцарей и лжецов принципиальными людьми.

Оценка. Первый способ. (Бучаев Абдулкадыр) Будем следить за балансом – разностью количеств ответов «Да» и «Нет». В начале и в конце баланс нулевой, с каждым ответом он изменяется на 1. Нулевые значения баланса разбивают ряд жителей на группы. Внутри каждой группы баланс сохраняет знак. Подпевалы всегда увеличивают модуль баланса. Поэтому, чтобы сделать баланс нулевым, принципиальных жителей должно быть не меньше чем подпевал. Это справедливо для каждой группы, а значит, и для всех жителей острова.

Второй способ. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то принципиальных жителей хотя бы 1009.

Пример. Сначала все 1009 подпевал сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 принципиальных жителей можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

3. [8] Требуется записать число вида $77\dots7$, используя только семёрки (их можно писать и по одной, и по несколько штук подряд), причём разрешены только сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень, а также скобки. Для числа 77 самая короткая запись – это просто 77. А существует ли число вида $77\dots7$, которое можно записать по этим правилам, используя меньшее количество семёрок, чем в его десятичной записи?

(С. Маркелов)

Ответ. Существует. **Решение 1.** Заметим, что $\underbrace{7\dots7}_n = \frac{10^n - 1}{9} \cdot 7 = \frac{7 \cdot 10^n - 7}{9}$. Число 10 можно записать как $(77 - 7):7$, а 9 – как $7 + (7 + 7):7$. В качестве n можно взять 77 или $14 = 7 + 7$.

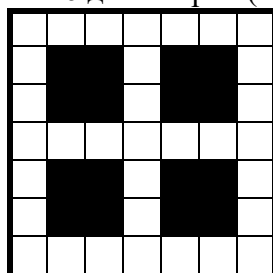
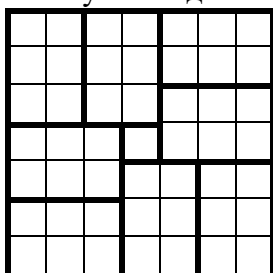
Замечание. В этом решении использовано 12 семёрок. Заменяя $(77 - 7):7$ на $7 + (7 + 7 + 7):7$ можно обойтись без использования двузначных чисел.

Решение 2. (Будун Будунов) $\underbrace{7\dots7}_{14} \cdot \left(\left(\frac{77 - 7}{7} \right)^{7+7} + \frac{7}{7} \right) = \underbrace{7\dots7}_{28}$.

4. [8] Доска 7×7 либо пустая, либо на ней лежит «по клеткам» невидимый корабль 2×2 . Разрешается расположить в некоторых клетках доски по детектору, а потом одновременно их включить. Включённый детектор сигнализирует, если его клетка занята кораблём. Какого наименьшего числа детекторов хватит, чтобы по их показаниям гарантированно определить, есть ли на доске корабль, и если да, то какие клетки он занимает?

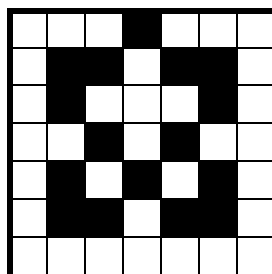
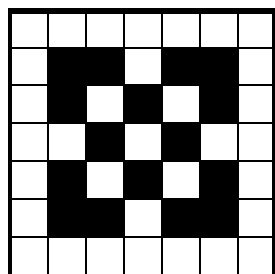
(Р. Женодаров)

Ответ. 16 детекторов. **Решение.** Оценка. В каждом прямоугольнике 2×3 должно быть хотя бы два детектора: прямоугольник состоит из трёх доминошек 1×2 , полосок, и если детектор в крайней доминошке, мы можем не понять, есть ли корабль на двух других доминошках, а если детектор в средней доминошке, мы можем не понять, какую из крайних доминошек занимает корабль вместе со средней доминошкой. Поэтому всего должно быть не менее 16 детекторов (см. рис. слева).



Пример. На правом рисунке чёрным указано расположение 16 детекторов. Всякий корабль пересекается ровно с одним чёрным квадратом 2×2 по одной клетке, по двум соседним или по всем четырём. В любом случае однозначно определяется положение корабля или его отсутствие.

Замечание. 16 детекторов можно расположить только тремя принципиально различными способами. Один указан в решении, остальные два см. на рисунке ниже.



5. [8] Равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O . Прямая BO пересекает отрезок AD в точке E . Пусть O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABE и DBE соответственно. Докажите, что точки O_1 , O_2 , O , C лежат на одной окружности.

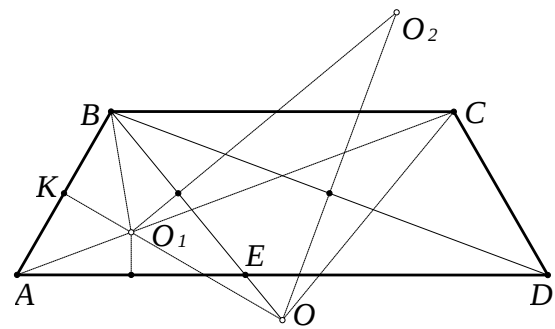
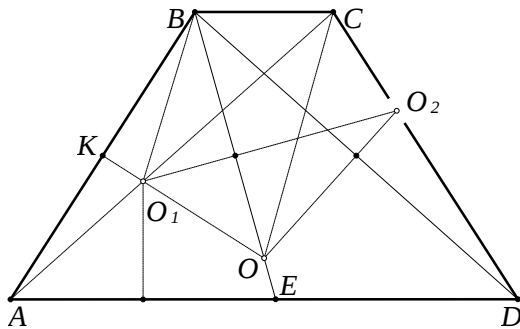
(А. Заславский)

Нетрудно понять, что AD – большее основание, треугольник AEB остроугольный, и точки B , C и O_2 лежат по одну сторону от прямой OO_1 . Прямые OO_1 , O_1O_2 и OO_2 – серединные перпендикуляры к

AB , BE и BD соответственно. Пусть K – середина AB .

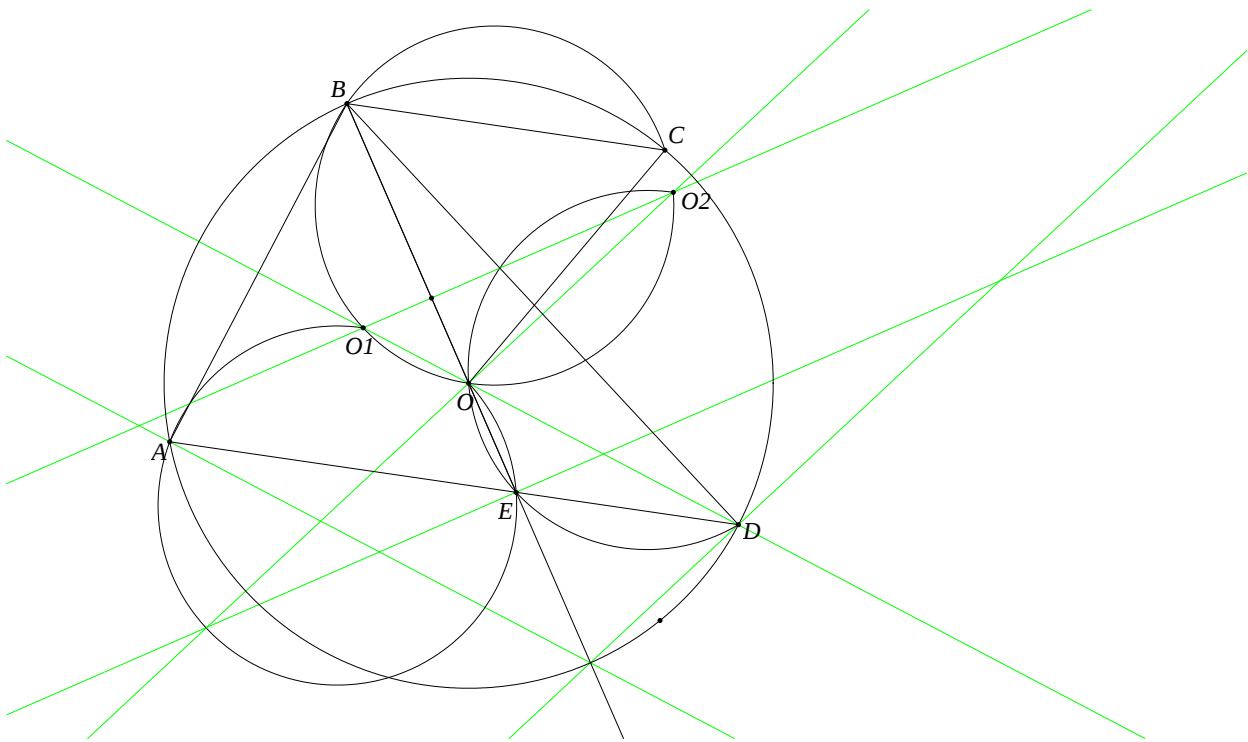
Первый способ. Так как $\angle BO_1O_2 = \angle BAD = \angle BOO_2$ (половина центрального угла равна вписанному для треугольников BAE и BAD), то, четырёхугольник OO_1BO_2 вписанный. Поскольку $\angle KO_1B = \angle AEB = \angle CBE = \angle CBO = \angle BCO$, то четырёхугольник OO_1BC вписанный.

Поэтому точки O, O_1, B, C, O_2 лежат на одной окружности.

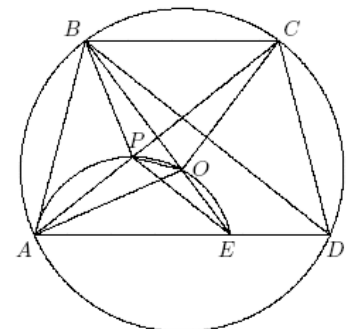


Второй способ. Заметим, что $\angle EAO_1 = 90^\circ - \angle ABE = \angle KOB = \angle ADB = \angle CAD$. Значит, точка O_1 лежит на прямой AC . Поэтому $\angle OCO_1 = \angle EBD = 90^\circ - \angle BOO_2 = \angle OO_2O_1$. Следовательно, точки O, O_1, C, O_2 лежат на одной окружности.

Замечание. Аналогично можно показать, что точка O_2 лежит на луче (но не обязательно на отрезке) DC ; точки A, E, O, O_1 лежат на одной окружности; точки D, E, O, O_2 лежат на одной окружности.



Третий способ. Рассмотрим только случай, когда точка O лежит внутри трапеции. Пусть диагональ AC пересекает описанную окружность треугольника OAE в точке P . Тогда $\angle OEP = \angle OAP = \angle OCP$, поэтому $\angle PEA = \angle BEA - \angle OEP = \angle OCB - \angle OCP = \angle ACB = \angle PAE$. Следовательно, $PA = PE$. С другой стороны, $\angle BOR = \angle PAE = \angle PEA = \angle POA$. Значит, треугольники POB и POA равны, а $PB = PA$. Таким образом, точка P совпадает с O_1 . Аналогично доказывается, что точка O_2 лежит на луче CD . Поэтому $\angle OCO_1 = \angle DBE = \angle OO_2O_1$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), что и требовалось.



6. Докажите, что

а) [7] любое число вида $3k - 2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;

б) [3] любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел.

(Н. Седракан)

а) Достаточно заметить, что $k^3 - (k + 3)^3 + (3k + 5)^2 = 3k - 2$. б) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или -1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт а).

7. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причём из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом можно, начав движение из какого-то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться в этот город, государство называется сложным, иначе – простым. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что

а) [5] в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

б) [7] в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя.

(М. Дидин)

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются города, а рёбрами – дороги.

а) Условие означает, что граф – дерево. Петя выбирает произвольную вершину. От каждой вершины существует ровно один путь в выбранную. Все рёбра на этом пути он ориентирует в сторону выбранной вершины.

Первым ходом Петя перемещает туриста в выбранную вершину. Все ориентированные пути ведут к туристу. Вася разворачивает одно ребро. Турист идёт по нему. Ясно, что все пути снова ведут к нему. Вася снова разворачивает одно ребро и так далее. Поэтому у Пети всегда есть ход и он не проигрывает.

б) По условию граф связан и содержит цикл. Будем доказывать индукцией по количеству вершин, что Вася может гарантировать себе победу, причём для любой изначальной расстановки стрелок перед его ходом (включая «невозможный» случай, когда все стрелки ведут из вершины, где стоит фишка перед первым ходом Васи).

База – простые циклы. Пусть в простом цикле $A_1A_2\dots A_n$ как-то расставлены стрелки на рёбрах и турист смог сделать ход, пойдя из A_1 в A_2 . Вася будет разворачивать стрелки перед ним. Поэтому турист не сможет идти в обратную сторону. Допустим, турист смог дойти до A_1 . Тогда перед ним разворачивают стрелку, и ему некуда идти. Петя проиграл.

Шаг индукции. Граф не является простым циклом. Выберем в нём цикл C минимальной длины. Ясно, что C – простой и не содержит ребёр внутри себя. Поэтому есть вершины вне C . Выберем из них вершину V с максимальным расстоянием до C . Обозначим граф без V буквой G . Ясно, что G связан и содержит цикл.

По предположению индукции в G есть выигрышная стратегия для Васи при любой ориентации рёбер. Внутри G Вася будет следовать ей. Так как в G Петя проигрывает, то турист вынужден будет когда-то пойти в V . Тогда Вася развернёт эту стрелку. Турист выйдет из V , а Вася сделает любой допустимый ход в G . Турист пойдёт внутри G . Сейчас у Васи опять есть выигрышная стратегия в G , которой он и будет следовать. Турист снова будет вынужден зайти в V , уменьшив количество стрелок, идущих из G в V . В конце концов они кончатся, и Петя проиграет в G , если он не проиграл раньше.

Старшие классы Базовый вариант

1. [3] Можно ли внутри правильного пятиугольника разместить отрезок, который из всех вершин виден под одним и тем же углом? (Е. Бакаев, С. Дворянинов)

Ответ. Нельзя. **Решение.** Предположим, что удалось так разместить отрезок XU . По какую-то сторону от прямой XU окажутся три вершины пятиугольника – пусть A, B и C . Тогда точки A, B, C, X, U лежат на одной окружности. Она совпадёт с окружностью, описанной около правильного пятиугольника, поскольку имеет с ней три различные общие точки. Следовательно, точки X и U лежат не внутри пятиугольника. Противоречие.

2. [4] Найдите все натуральные n , удовлетворяющие условию: числа $1, 2, 3, \dots, 2n$ можно разбить на пары так, что если сложить числа в каждой паре и результаты перемножить, получится квадрат натурального числа. (Фольклор)

Ответ: все $n > 1$. **Решение.** $1 + 2$ – не квадрат. Пусть $n > 1$.

1-й способ. Разобьём эти числа на четвёрки подряд идущих, и, если надо, шестёрку первых чисел. Из четвёрок образуем $(a + (a + 3))((a + 1) + (a + 2)) = (2a + 3)^2$, из шестёрки – $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6) = 18^2$.

2-й способ. Если n чётно, то $(1 + 2n)(2 + (2n - 1)) \dots (n + (n + 1)) = (2n + 1)^n$ – квадрат. Если n нечётно, то $(1 + 5)(2 + 4)(3 + 6)(7 + 2n)(8 + (2n - 1)) \dots ((n + 3) + (n + 4)) = 18^2(2n + 7)^{n-3}$ – квадрат.

Замечание. Для $n = 2, 3$ разбиение единственно, в остальных случаях – нет.

3. [5] В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На стороне AB отмечена такая точка N , что $CN = AB$. Оказалось, что описанная окружность треугольника CBN касается прямой AD . Докажите, что она касается её в точке D . (М. Евдокимов)

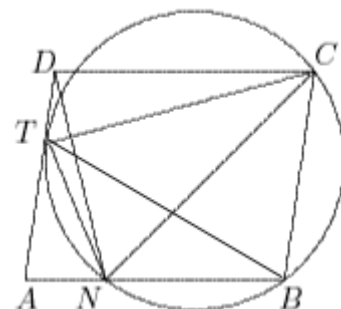
Решение. Пусть она касается её в точке T .

Первый способ. Так как $BC \parallel AD$, то $BT = CT$. Из равенства вписанных углов NBT и NCT получаем равенство треугольников ABT и NCT . Поэтому $\angle TAB = \angle TNC = \angle TBC = \angle TCB$. Значит, $ABCT$ – параллелограмм, то есть T совпадает с D .

Второй способ. Понятно, что точка T лежит на луче AD . Поскольку $CN = AB = CD$, то $\angle CND = \angle CDN = \angle AND$, то есть ND – биссектриса угла ANC .

С другой стороны, $\angle ATN = \angle TCN$, $\angle TAN = 180^\circ - \angle CBN = \angle CTN$, поэтому и $\angle ANT = \angle TNC$, то есть NT – тоже биссектриса угла ANC . Так как прямые NT и ND совпадают, то и точки T и D – тоже.

Замечание. Решение не зависит от расположения точки T .



4. [5] Назовём девятизначное число красивым, если все его цифры различны. Докажите, что существует по крайней мере 2018 красивых чисел, каждое из которых делится на 37. (М. Евдокимов)

Будем записывать красивое число $\overline{a_8 \dots a_0}$ в виде таблицы (см. рис.). Так как $10^6 - 1 = 999999$ делится на 999, то $\overline{a_8 \dots a_0} = 10^8 a_8 + \dots + a_0 \equiv 100(a_8 + a_5 + a_2) + 10(a_7 + a_4 + a_1) + (a_6 + a_3 + a_0) \pmod{999}$.

Поэтому из красивого числа, кратного d , где d – делитель числа 999, перестановками внутри столбцов можно получить $6^3 = 216$ красивых чисел, кратных d (если первый столбец содержит нуль, то на 72 числа меньше).

a_8	a_7	a_6
a_5	a_4	a_3
a_2	a_1	a_0

1-е решение. Рассмотрим таблицу справа. Суммы в её столбцах одинаковые. Поэтому соответствующее красивое число кратно 111. Переставляя столбцы местами, получим $6 \cdot 216$ красивых чисел, кратных 111. Так как по строкам суммы тоже одинаковые, то, отразив эту табличку относительно диагонали, получим ещё столько же чисел, а всего – 2592 красивых числа, кратных 111, а значит, кратных и 37.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Замечание. Приведённая таблица называется *магическим квадратом*. Помимо содержащихся в нём двух способов скомпоновать из различных цифр три равные суммы по три слагаемых есть ещё ровно 6 способов сделать это. И все они получаются из магического квадрата! Покажем это. Уменьшим в нём цифры 1, 2, 3 на единицу. Получим два способа, дающих по $1296 - 2 \cdot 72 = 1152$ числа. После этого уменьшим цифры 4, 5, 6. Получим ещё два способа. Наконец, уменьшим 7, 8, 9, получая ещё два способа. Всего таким методом получается 9504 красивых числа, кратных 111.

Для двух следующих решений нам понадобится следующая

Лемма. Пусть d – делитель числа 999. Если $100x + 10y + z$ кратно d , то и числа $100y + 10z + x$ и $100z + 10x + y$ кратны d .

Доказательство. $100y + 10z + x = 10(100x + 10y + z) - 999x$.

2-е решение. Поищем красивые числа, кратные 999. Заметим, что $100 \cdot 8 + 10 \cdot 18 + 19 = 999$. Легко найти пять разбиений ненулевых цифр на столбцы с суммами 19, 18, 8 справа налево (левый столбец не указываем, он получается автоматически): 982, 765; 973, 864; 964, 873; 874, 963; 865, 972. Учитывая циклические сдвиги столбцов, всего получим $5 \cdot 3 \cdot 216 = 3240$ красивых чисел, кратных 999.

Замечание. Другие красивые числа, кратные 999, можно получить, дополняя все цифры до 9. При этом $5 \cdot 72$ чисел будут начинаться с нуля, их надо отбросить. Всего получится 6120 красивых чисел, кратных 999. Нетрудно показать, что других красивых чисел, кратных 999, нет!

Третий способ (навеею идеей Алиева Рашида, 10 кл., г. Махачкала). Рассмотрим таблицу справа. Числа, читаемые в строках, делятся на 37, поскольку отличаются на 111. Поэтому соответствующее таблице девятизначное число кратно 37. Осуществляя циклические сдвиги внутри строк, получим 27 таблиц, каждая из которых даёт по 216 красивых чисел, кратных 37 (см. лемму). Для девяти из этих таблиц надо вычесть по 72 числа. Всего получается $24 \cdot 216 = 5184$ красивых числа, кратных 37.

0	3	7
1	4	8
2	5	9

Замечания. 1. Ещё столько же красивых чисел получится из таблицы справа. Из указанных шести трёхзначных чисел можно составить ещё две такие таблицы. Следовательно, этот метод даёт 20736 красивых чисел, кратных 37.

0	7	4
1	8	5
2	9	6

2. Всего существует 89712 красивых чисел, кратных 37, из них 34416 чисел кратны 111.

5. [5] Петя расставляет 500 королей на клетках доски 100×50 так, чтобы они не били друг друга. А Вася – 500 королей на белых клетках (в шахматной раскраске) доски 100×100 так, чтобы они не били друг друга. У кого больше способов это сделать? (Е. Бакаев)

Ответ. У Васи больше. **Решение.** Каждой Петиной расстановке поставим в соответствие некоторую расстановку Васи, причём разным расстановкам – разные. Приведём два способа сделать это, для каждого из них найдётся Васина расстановка, которая этим способом не получается. Например, когда короли занимают все белые клетки в каких-то десяти горизонталях, попарно не соседних. Поэтому Васиных расстановок будет больше.

Первый способ. Назовём правую сторону Петиной доски *осью*. Рассмотрим любую расстановку Пети. Отразив всех её королей на чёрных клетках относительно оси, получим какую-то расстановку Васи: 500 королей на белых клетках доски 100×100 . Действительно, короли на одной половине доски не будут бить друг друга, потому что до этого не били. А из разных половин друг друга могут бить только короли, соседние с осью отражения. Но соответствующие «чёрные» короли сдвинулись на одну клетку через ось, поэтому тоже не бьют королей со своей бывшей вертикали.

Второй способ (Алиев Рашид, 10 кл., г. Махачкала). Разобьём каждую горизонталь Васиной доски на доминошки. Доминошки образуют доску 100×50 . Как бы ни расставил Петя 500 королей в центры доминошек, Вася может сдвинуть каждого короля в белую клетку доминошки. Если после этого какие-то два короля будут бить друг друга, то они будут находиться в соседних доминошках, поэтому били друг друга и в Петиной расстановке.

Сложный вариант

1. [5] На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?

(М. Кузнецов)

Ответ. 1009 подпевал. **Решение.** Назовём рыцарей и лжецов *принципиальными* людьми.

Оценка. Первый способ. (Бучаев Абдулкадыр) Будем следить за балансом – разностью количеств

ответов «Да» и «Нет». В начале и в конце баланс нулевой, с каждым ответом он изменяется на 1. Нулевые значения баланса разбивают ряд жителей на группы. Внутри каждой группы баланс сохраняет знак. Подпевалы всегда увеличивают модуль баланса. Поэтому, чтобы сделать баланс нулевым, принципиальных жителей должно быть не меньше чем подпевал. Это справедливо для каждой группы, а значит, и для всех жителей острова.

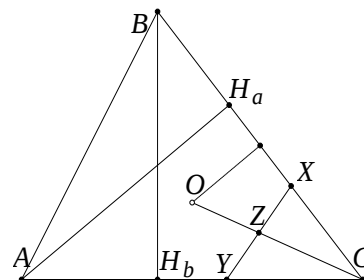
Второй способ. Подпевала не мог увеличивать минимум из текущих количеств «Да» и «Нет». Так как этот минимум увеличился от 0 до 1009, причём с каждым ответом он изменялся не более чем на единицу, то принципиальных жителей хотя бы 1009.

Пример. Сначала все 1009 подпевал сказали «Нет», а потом 1009 рыцарей сказали «Да».

Замечание. Любой строй из 1009 принципиальных жителей можно проредить подпевалами так, чтобы выполнялось условие.

2. [7] В остроугольном неравобедренном треугольнике ABC с центром описанной окружности O проведены высоты AH_a и BH_b . Точки X и Y симметричны точкам H_a и H_b относительно середин сторон BC и CA соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.

(Фольклор)



Решение. Заметим, что $CX : CY = BH_a : AH_b = \cos \angle B : \cos \angle A$.

Кроме того, $\sin \angle OCX = \cos \angle A$, $\sin \angle OCY = \cos \angle B$. Отсюда $ZX : ZY = S_{CZX} : S_{CZY} = CX \sin \angle OCX : CY \sin \angle OCY = 1 : 1$, ч. т. д.

3. Докажите, что

- а) [6] любое число вида $3k - 2$, где k целое, есть сумма одного квадрата и двух кубов целых чисел;
- б) [2] любое целое число есть сумма одного квадрата и трёх кубов целых чисел. (Н. Седракан)

а) Достаточно заметить, что $k^3 - (k + 3)^3 + (3k + 5)^2 = 3k - 2$. б) Вычтем из числа, которое нужно представить, такой куб (0, 1 или -1), чтобы результат имел вид $3k - 2$, и применим пункт а).

4. [8] Изначально на белой клетчатой плоскости конечное число клеток окрашено в чёрный цвет. На плоскости лежит бумажный клетчатый многоугольник M , в котором больше одной клетки. Его можно сдвигать, не поворачивая, в любом направлении на любое расстояние, но так, чтобы после сдвига он лежал «по клеткам». Если после очередного сдвига ровно одна клетка у M лежит на белой клетке плоскости, эту белую клетку окрашивают в чёрный цвет и делают следующий сдвиг. Докажите, что существует такая белая клетка, которая никогда не будет окрашена в чёрный цвет, сколько бы раз мы ни сдвигали M по описанным правилам. (Д. Захаров)

Решение 1. Вместо клеток будем рассматривать их центры, которые назовём узлами. Проведём вертикальную прямую через самый левый узел бумажной фигуры. Если эта прямая не содержит других узлов фигуры, то будем поворачивать прямую по часовой стрелке до тех пор, пока на неё не попадёт ещё один узел фигуры. Мы нашли такую прямую l , содержащую не менее двух узлов фигуры, что все узлы фигуры лежат по одну сторону от l .

Каждый узел плоскости находится на каком-то ориентированном расстоянии от l (расстояния до узлов, лежащих в той же полуплоскости, что и фигура, берём со знаком минус). Пусть r – максимальное из таких расстояний до чёрных узлов. Докажем, что все узлы с расстоянием, большим r , останутся белыми. Предположим противное и рассмотрим первый такой узел, который стал чёрным. Значит, он накрыт сдвигом фигуры. Но тогда фигура накрывает ещё хотя бы один узел с таким же расстоянием (l фиксирована, расстояния – тоже, фигура сдвигается). Так как фигура накрывает хотя бы два белых узла, то окрашивать узел нельзя. Противоречие.

Решение 2. Построим клетчатый прямоугольник, содержащий все черные клетки. Обозначим прямую, содержащую правую сторону прямоугольника за p . Аналогично определим прямые l («левая»), v («верхняя»), n («нижняя»). Заметим теперь, что у M ровно одна самая верхняя клетка, иначе ни одна клетка выше v не будет покрашена (рассмотрим первый момент, когда многоугольник вышел за v , тогда у него выше v хотя бы две точки и они обе белые). Аналогично есть одна самая правая, левая и нижняя. Обозначим их V, P, L, N соответственно (ясно, что они все различны).

Покажем теперь, что если была покрашена клетка выше v , то она была покрашена клеткой V фигуры M . Предположим противное и возьмём первый момент, когда это не так. Тогда некая клетка

выше v была закрашена другой клеткой фигуры M . Посмотрим на клетку, где в этот момент находилась V . Она тоже выше v , и при этом уже чёрная (иначе условие покраски не выполняется), значит была покрашена нами ранее. Но тогда она была покрашена клеткой V и фигура M лежала на плоскости так же. Но такого быть не может, так как тогда в M было бы не менее, чем две белые клетки. Аналогично доказываются утверждения про клетки правее p , левее l и ниже n . Рассмотрим теперь любую клетку, которая лежит и выше v , и правее p . С одной стороны она могла быть покрашена только клеткой V , с другой – только клеткой P . Значит покрасить мы её не можем.

Замечание. Связность фигуры-шаблона не важна. Если фигура не помещается ни в горизонталь, ни в вертикаль, то окрашено будет конечное число клеток.

5. [8] Три медианы треугольника разделили его углы на шесть углов, среди которых ровно k больше 30° . Каково наибольшее возможное значение k ? (Н. Седракан)

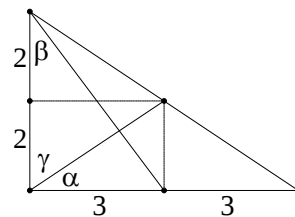
Ответ. $k = 3$.

Оценка. Первый способ. Пусть $h_1 \leq h_2 \leq h_3$ – высоты треугольника, m_1, m_2, m_3 – медианы из соответствующих вершин (на самом деле $m_1 \leq m_2 \leq m_3$, но это не будет использовано). Имеем тогда $m_3 \geq h_i$ для $i = 1, 2, 3$. Из конца m_3 опустим перпендикуляры на смежные стороны. Каждый из них равен половине соответствующей высоты и, значит, не больше $m_3/2$. Поэтому прилегающие к m_3 углы не больше 30° . Аналогично один из углов при m_2 не больше 30° .

Второй способ. Пусть дан треугольник ABC с медианами AH, BV, CZ . Оба угла BAH и BCZ не могут быть больше 30° : иначе точки A и C лежат внутри окружности с хордой ZH и диаметром, в два раза большим ZH , но при этом $AC=2ZH$, то есть отрезок, равный диаметру, лежит строго внутри окружности – противоречие. Аналогично в каждой из двух других пар максимум один угол больше 30° .

Пример 1. Рассмотрим сначала треугольник ABC , в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Пусть BK и CL – его медианы. Тогда $\angle ACL = 30^\circ$, $\angle BCL = 60^\circ$, $\angle CBK > 30^\circ$ (поскольку биссектриса угла B проходит между катетом и медианой). Теперь чуть уменьшим катет AC . При этом угол ACL немного увеличится (то есть станет больше 30°), а углы BCL и CBK немного уменьшатся, но останутся больше 30° .

Пример 2. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6 (см. рис.). Имеем $\tan 30^\circ < \tan \alpha < \tan \beta < \tan \gamma$, поскольку $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$.



6. [9] На числовой оси отмечено бесконечно много точек с натуральными координатами. Когда по оси катится колесо, каждая отмеченная точка, по которой проехало колесо, оставляет на нём точечный след. Докажите, что можно выбрать такое действительное R , что если прокатить по оси, начиная из нуля, колесо радиуса R , то на каждой дуге колеса величиной в 1° будет след хотя бы одной отмеченной точки. (И. Митрофанов)

Решение 1. Разделим колесо на 360 дуг и занумеруем их, начиная с точки O в порядке «прокатывания». Докажем индукцией по k , что можно выбрать окружность длины $360s_k$, прокатив которую по прямой, мы получим следы внутри первых k дуг.

База ($k = 1$). Достаточно выбрать s , большее координаты первой отмеченной точки.

Шаг индукции. По предположению индукции найдётся s_k , при котором следы оставлены на первых дугах. Пусть они оставлены точками с координатами $n_1, \dots, n_k$.

Заметим, что незначительное изменение s не повлияет на ситуацию: те же точки оставят следы на тех же дугах. Пусть это происходит для всех $s \in (s_k(1 - \varepsilon), s_k(1 + \varepsilon))$. Рассмотрим отмеченную точку с координатой n_{k+1} , большей всех $n_1, \dots, n_k$, а также $360s_k(\varepsilon^{-1} + 1)$. Пусть $m \leq \frac{n_{k+1}}{360s_k} < m + 1$ (m – целое число). Тогда $m > \varepsilon^{-1}$.

Найдём такое $s_{k+1} \in (s_k(1 - \varepsilon), s_k(1 + \varepsilon))$, чтобы точка n_{k+1} оставила след на данном расстоянии (по окружности) $360ts_{k+1}$ от O (число $t < 1$ выберем так, чтобы этот след оказался на $(k+1)$ -й дуге окружности, соответствующей s_{k+1}). Иными словами, $n_{k+1} = 360(ms_{k+1} + ts_{k+1})$, откуда

$$s_{k+1} = \frac{n_{k+1}}{360(m+t)} = \frac{r}{m+t}, \text{ где } r = \frac{n_{k+1}}{360} < (m+1)s_k. \text{ Это значение подходит, поскольку}$$

$$-\frac{r}{m(m+1)} < r\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+t}\right) < s_k - s_{k+1} \leq r\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+t}\right) < \frac{r}{m(m+1)}, \text{ а } \frac{r}{m(m+1)} < \frac{s_k}{m} < \varepsilon s_k.$$

Решение 2. Пусть на числовой прямой отмечено бесконечное число натуральных точек $t_1, t_2, t_3, \dots$

Докажем индукцией по n такое утверждение: для любого набора положительных чисел $a_1, \dots, a_n$ с суммой 1 найдётся колесо такой длины S , что разделив его на дуги длин $a_1 S, \dots, a_n S$ (именно в таком порядке) и запустив из 0 (поставив в 0 началом первой дуги), мы обязательно получим строго внутри каждой из дуг след какой-то отмеченной точки.

Для наглядности покрасим каждую дугу в свой цвет и прокатим колесо по прямой, считая, что каждая точка прямой окрашивается в цвет дуги, которая по точке проезжает. Тогда прямая разобьётся на отрезки n разных цветов, соответствующих дугам. Нам надо найти такую длину колеса, чтобы для каждого цвета нашлась отмеченная точка, попавшая внутрь отрезка этого цвета.

Сначала заметим, что если для данного набора нужное S найдено, то подойдёт также любое колесо чуть меньшей или чуть большей длины. В самом деле, колесо длины S соберёт по отметке на каждую дугу, пройдя определённое расстояние. Это соответствует тому, что некоторые отмеченные точки $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ лежат на прямой каждая строго внутри отрезка своего цвета (цвета все различны). Небольшое изменение длины колеса соответствует гомотетии прямой с центром в 0 и коэффициентом, близким к 1. Ясно, что можно выбрать коэффициент гомотетии настолько близким к 1, что картина не изменится: все точки $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ останутся внутри своих «растянутых» отрезков.

Перейдём к доказательству.

База $n = 1$ очевидна: можно взять колесо иррациональной или просто достаточно большой длины.

Шаг индукции. Пусть для всех наборов из n чисел утверждение доказано. Докажем его для набора $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$. Рассмотрим набор $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + a_{n+1}$. Для него нужное S найдётся. Рассмотрим момент, когда в каждой из дуг для этого набора образуется след от отмеченной точки.

Это соответствует тому, что отмеченные точки $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ лежат на прямой строго внутри отрезков n разных цветов, точка t_{i_n} лежит на отрезке длины $(a_n + a_{n+1})S$. Если точка t_{i_n} делит свой отрезок как раз в отношении $a_n : a_{n+1}$, увеличим немного S , чтобы все точки $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ попали на свои же «растянутые» отрезки, но точка t_{i_n} уже делила бы свой отрезок в другом отношении.

Теперь вернёмся к набору $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$, прокатим колесо найденной длины S по прямой.

Точки $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ попадут в отрезки разных цветов, и только отрезки одного, скажем, зелёного цвета (соответствующие одной из дуг $a_n S, a_{n+1} S$, пусть дуге $a_n + a_{n+1} S$), возможно, не содержат ни одной отмеченной точки.

Заметим, что есть сколь угодно большие отмеченные точки, на расстоянии не более чем S слева от которых есть зелёный отрезок. Пусть мы можем делать гомотетию с коэффициентом, не большим $1 + \varepsilon$ так, чтобы точки $t_{i_1}, \dots, t_{i_n}$ остались внутри своих «растянутых» отрезков.

Проедем колесом настолько большое расстояние K , чтобы колесо сделало целое число оборотов (последний окрашенный отрезок Z зелёный), уже собрало отметки на все дуги, кроме последней, чтобы $K\varepsilon$ было больше S , и чтобы на расстоянии не более S после точки K нашлась отмеченная точка $t_{i_{n+1}}$.

Увеличим длину колеса, сделав гомотетию с коэффициентом $1 + x$, где $x < \varepsilon$. Тогда зелёный отрезок Z растянется, его новыми концами будут точки $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ и $K + xK$ соответственно. Очевидно, можно подобрать $x < \varepsilon$ так, чтобы $K + xK$ стало больше $t_{i_{n+1}}$ (ведь $K\varepsilon > S$), но при этом больше на величину, меньшую Sa_{n+1} . Тогда $K + xK - (1 + x)Sa_{n+1}$ будет меньше $t_{i_{n+1}}$, то есть точка $t_{i_{n+1}}$ попадёт на «растянутый» зелёный отрезок Z .

7. Рокфеллер и Маркс играют в такую игру. Имеется $n > 1$ городов, во всех одно и то же число жителей. Сначала у каждого жителя есть ровно одна монета (монеты одинаковы). За ход Рокфеллер выбирает по одному жителю из каждого города, а Маркс перераспределяет между ними их деньги произвольным образом с единственным условием, чтобы распределение не осталось таким, каким только что было. Рокфеллер выигрывает, если в какой-то момент в каждом городе будет хотя бы один человек без денег. Докажите, что Рокфеллер может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл Маркс, если в каждом городе

- а) [10] ровно $2n$ жителей;
б) [4] ровно $2n - 1$ житель.

(Г. Погудин)

Пусть k – количество жителей в городе. Будем изображать ситуацию в игре таблицей с n строками и k столбцами: в i -й строке будут перечислены благосостояния $a_{i1}, \dots, a_{ik}$ всех жителей i -го города в порядке неубывания. Пусть S_j – сумма чисел в j -м столбце.

а) *Стратегия Рокфеллера*. Если $S_j = S_{j+1}$, выбрать всех жителей из j -го столбца.

Предположим, что $S_j = S_{j+1}$; тогда $a_{ij} = a_{i,j+1}$ при всех i . После марковского перераспределения числа $S_{j+1}, \dots, S_k$ не уменьшаются. С другой стороны, у одного из выбранных жителей (пусть он в i -м городе) благосостояние станет больше чем a_{ij} . Это значит, что одна из сумм S_k при $k \geq j + 1$ увеличится (та, в которую попало новое число). Поэтому последовательность $S_k, S_{k-1}, \dots, S_1$ лексикографически увеличится. Это не может продолжаться бесконечно долго (ибо наборов из k чисел с фиксированной суммой конечное количество), так что в некоторый момент все числа $S_1, \dots, S_k$ окажутся различными.

Пусть $S_1 \geq 1$. Тогда $S_i \geq i$ при всех i , откуда $nk = S_1 + \dots + S_k \geq 1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, то есть $k \leq 2n - 1$. Противоречие.

Значит, $S_1 = 0$, и Рокфеллер победил..

б) Пусть $k = 2n - 1$. Применяя стратегию из пункта а), Рокфеллер либо выиграет, либо добьётся состояния $S_i = i$ при всех $i = 1, \dots, k$. Покажем, как ему выиграть, начиная с такой позиции.

Скажем, что игра находится в i -й ситуации ($1 \leq i \leq n + 1$), если (возможно, после перенумерации строк) выполнены следующие условия:

- 1) при $j = 1, 2, \dots, i - 1$ в j -м столбце стоят j единиц в верхних клетках, а остальные числа – нули;
- 2) в i -м столбце нижние $n + 1 - i$ элементов – нули.

Покажем, что в рассматриваемый момент игра находится в i -й ситуации при некотором i . Переставим строки так, чтобы количества нулей в них не убывали сверху вниз. Пусть при некотором $i \leq n$ в i -м столбце не стоит i единиц; выберем наименьшее такое i . Тогда (из условия на нули в строках) в предыдущих столбцах единицы стоят «треугольником», а в i -м столбце есть $n + 1 - i$ нулей, то есть игра в i -й ситуации. Если же такого i нет, то в первых n столбцах единицы стоят «треугольником», и игра в $(n+1)$ -й ситуации.

Покажем, что при $i > 1$, если игра в i -й ситуации, Рокфеллер может уменьшить номер ситуации одним ходом. Так он рано или поздно добьётся 1-й ситуации, то есть своего выигрыша.

Действительно, Рокфеллер выбирает $(i-1)$ -й столбец. Пусть j – наименьший индекс, при котором число в j -й строке уменьшится (т.е. превратится в 0) в результате действия Маркса. Поскольку $j \leq i-1$, то после этого хода (и упорядочивания строк, при котором этот 0 переместится в начало строки) будет наблюдаться j -я ситуация (здесь мы уже не требуем равенств $S_k = k$), что и требовалось.

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 3 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 3 1. В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

Александр Шаповалов

- 4 2. По кругу лежат $2n + 1$ монет орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n + 1$ переворотов: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

Владимир Расторгуев

- 4 3. Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m + n \leq n^2$.

Борис Френкин

- 5 4. В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противоположащей основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC , а концы основания — на отрезках AB и CD . Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

Игорь Жижилкин

- 5 5. Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника — открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

Константин Кноп

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 3 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 4 1. Расстояние от некоторой точки внутри правильного шестиугольника до трёх его последовательных вершин равны 1, 1 и 2 соответственно. Чему равна сторона этого шестиугольника?

Михаил Еёдокимов

- 4 2. Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n . Обязательно ли тогда $a = b$?

Борис Френкин

- 4 3. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 2019 четырёхугольников, каждый из которых одновременно вписанный и описанный.

Наири Седракян

- 5 4. Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника — открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

Константин Кноп

- 5 5. В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 2019. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 40. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

Александр Шаповалов

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 17 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 5 1. Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает 7 различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

Михаил Евдокимов

- 7 2. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Сергей Дориченко

- 7 3. К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера – серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами, всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.

Егор Бакаев, Павел Кожеевников, Владимир Расторгуев

- 8 4. Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий – в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

Илья Богданов

- 9 5. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n , – в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

Александр Грибалко

- 9 6. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и $\angle KAC = 30^\circ$. Найдите угол AKB .

Егор Бакаев

- 12 7. Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

Максим Дидин

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 17 марта 2019 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 5 1. На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если её впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, получится число, делящееся на 7.

Александр Галочкин

- 6 2. На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

Сергей Дориченко

- 7 3. К плоскости приклеены два непересекающихся не обязательно одинаковых деревянных круга — серый и чёрный. Дан бесконечный деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая — чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная — чёрного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

Егор Бакаев, Илья Богданов, Павел Кожеевников, Владимир Расторгуев

- 8 4. В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n , — в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

Александр Грибалко

- 4 5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1.

- 4 а) Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1?

- 4 б) А квадрат площади $1/2019$?

Михаил Евдокимов

- 8 6. Петя и Вася играют в игру. Для каждого пяти различных переменных из набора $x_1, \dots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

Илья Богданов

- 12 7. Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0; 0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* — фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

Ильке Чанакчи, Ральф Шиффлер

40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач весеннего тура

Базовый вариант

Младшие классы

1. [3] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 20. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 3. Могло ли быть выписано больше 10 чисел?

А. Шаповалов

Ответ: могло.

Решение. Пример с 11 числами: 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1, 4, 1, 1. Можно доказать, что больше 11 чисел не могло быть выписано. См. также более общую задачу 5 старших классов.

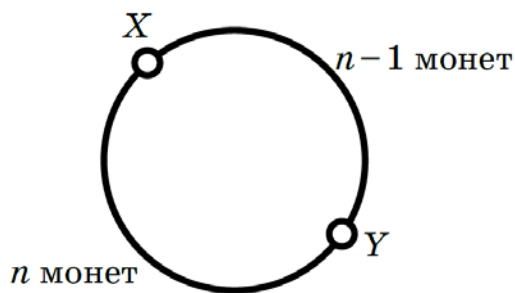
2. [4] По кругу лежит $2n + 1$ монета орлом вверх. Двигаясь по часовой стрелке, делают $2n + 1$ переворот: переворачивают какую-то монету, одну монету пропускают и переворачивают следующую, две монеты пропускают и переворачивают следующую, три монеты пропускают и переворачивают следующую, и т.д., наконец пропускают $2n$ монет и переворачивают следующую. Докажите, что теперь ровно одна монета лежит решкой вверх.

В. Расторгуев

Решение. Пусть $(n - 1)$ -я перевёрнутая монета – X , а n -я – Y . Тогда между X и Y по часовой стрелке лежит $n - 1$ монет, а раз всего монет в круге $2n + 1$, то между Y и X по часовой стрелке лежит n монет (см. рисунок). Это значит, что $(n + 1)$ -й мы снова перевернём монету X .

И далее мы будем переворачивать уже переворачивавшиеся монеты, но в обратном порядке: ведь пропустить по часовой стрелке $n + 1$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки $n - 2$ монет, ..., пропустить по часовой стрелке $2n - 2$ монет – всё равно, что пропустить против часовой стрелки 1 монету. А на последних двух шагах мы перевернём одну и ту же монету.

В итоге решкой вверх будет лежать только монета Y – она переворачивалась нечётное число раз, а все остальные монеты – чётное.



3. [4] Произведение натуральных чисел m и n делится на их сумму. Докажите, что $m + n \leq n^2$.

Б. Френкин

Решение 1. Поскольку $n^2 = n(m + n) - mn$, из условия следует, что n^2 делится на $m + n$. Значит, $n^2 \geq m + n$.

Решение 2. Пусть $d = \text{НОД}(m, n)$, $m = ad$, $n = bd$. По условию, abd^2 делится на $d(a+b)$, откуда abd делится на $a+b$. Но так как числа a и b взаимно просты, каждое из них взаимно просто с $a+b$. Значит, d делится на $a+b$, откуда d^2 делится на $d(a+b) = m+n$ и, следовательно, $d^2 \geq m+n$. Осталось заметить, что $n^2 \geq d^2$.

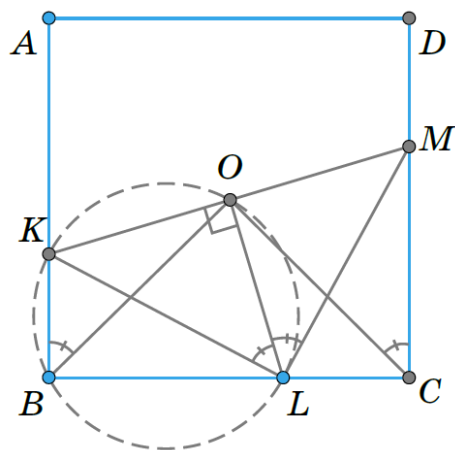
4. [5] В прямоугольник $ABCD$ вписывают равнобедренные треугольники с заданным углом α при вершине, противоположной основанию, так, что эта вершина лежит на отрезке BC , а концы основания – на отрезках AB и CD . Докажите, что середины оснований у всех таких треугольников совпадают.

И. Жижилкин

Решение. Пусть KLM – один из таких треугольников, O – середина его основания KM (см. рисунок).

Тогда LO – медиана, а значит, и биссектриса, и высота треугольника KLM . Поскольку углы KBL и LOK прямые, точки B и O лежат на окружности с диаметром KL , откуда $\angle KBO = \angle KLO = \alpha/2$. Аналогично получаем, что $\angle MCO = \angle MLO = \alpha/2$.

Тогда O – точка пересечения прямых, проведённых из вершин B и C под углом $\alpha/2$ к сторонам прямоугольника BA и CD соответственно, то есть она не зависит от положения треугольника KLM .



5. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 12 закрытых пустых шкатулочек. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулочки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулочку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулочки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулочки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп

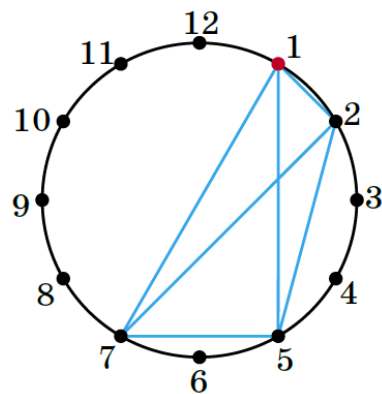
Решение. Мысленно расположим шкатулочки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 12 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулочками в дугах. Между любыми двумя шкатулочками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырёхугольник с вершинами в шкатулочках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке справа (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.

Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулочки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулочку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулочкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулочки остатками по модулю 12. Если помощник открывает шкатулочку с номером k , то фокусник открывает шкатулочки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$ по модулю 12. Поскольку любая пара шкатулочек имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулочек нужного вида, содержащую пару шкатулочек с монетами.

Существуют и другие шаблоны – например, четырёхугольник с вершинами 1, 2, 4, 8.

См. также задачу 4 старших классов, где шкатулочек 13.



Старшие классы

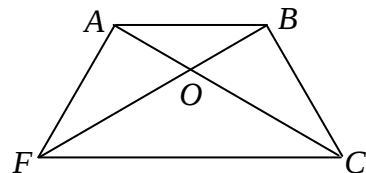
1. [4] Расстояние от некоторой точки внутри правильного шестиугольника до трёх его последовательных вершин равны 1, 1 и 2 соответственно. Чему равна сторона этого шестиугольника?

М. Евдокимов

Ответ: $\sqrt{3}$.

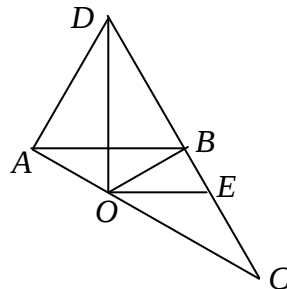
Пусть A, B, C – последовательные вершины шестиугольника, O – точка внутри него, и пусть $OA = OB = 1$, $OC = 2$.

Решение 1. Рассмотрим другую соседнюю с A вершину F . Тогда $FABC$ – равнобедренная трапеция (см. рисунок). Точка O лежит на общем серединном перпендикуляре её оснований FC и AB , поэтому $OF = OC = 2$. Но $FC = 2AB$ (в правильном



шестиугольнике главная диагональ в 2 раза больше стороны), откуда треугольники AOB и FOC подобны с коэффициентом 2. Поскольку AB и FC параллельны и $\angle BAO = \angle OCF$, точка O лежит на диагонали AC (и, аналогично, точка O лежит на диагонали BF). Тогда $\angle OBC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, и $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника OBC .

Решение 2. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB . Построим вне шестиугольника равносторонний треугольник ABD (рис. справа). Ясно, что тогда OD – серединный перпендикуляр к отрезку AB . Кроме того, так как $DB : DC = 1 : 2 = OB : OC$, то OD – биссектриса внешнего угла O треугольника BOC . Значит, она перпендикулярна биссектрисе OE угла BOC . В силу равенства $\angle BAO = \angle ABO = \angle BOE = \angle EOC$, точки A, O, C лежат на одной прямой. В треугольнике ADC , $\angle D = 60^\circ$, $DC = 2DA$, откуда угол DAC прямой, а $AB = AD = AC \operatorname{ctg} \angle D = 3 \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3}$.



2. [4] Натуральные числа a и b таковы, что $a^{n+1} + b^{n+1}$ делится на $a^n + b^n$ для бесконечного множества различных натуральных n . Обязательно ли тогда $a = b$?

Б. Френкин

Ответ: обязательно.

Решение 1. Пусть, например, $a > b$. Дробь $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$ меньше a при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель), но стремится к a при $n \rightarrow \infty$ (в самом деле, поделив числитель и знаменатель на a^n и заметив, что $\left(\frac{b}{a}\right)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, получим, что числитель дроби стремится к a , а знаменатель – к 1). Значит, $a - 1 < \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} < a$ при достаточно больших n и не может быть целым. Противоречие.

Решение 2. Пусть, например, $a > b$. Тогда $b < \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} < a$ при всех натуральных n (очевидно после умножения на знаменатель). Так как между b и a конечное число целых чисел, найдутся такие различные натуральные m и k , что $\frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a^m + b^m} = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}$. Умножив на знаменатели и приводя подобные, получим $a^m b^k (a - b) = a^k b^m (a - b)$. Сократив на $a - b$, имеем $\left(\frac{a}{b}\right)^{m-k} = 1$, откуда либо $a = b$, либо $m = k$ – противоречие.

Решение 3. Пусть наибольший общий делитель чисел a и b равен d , то есть $a = ud$, $b = vd$, где u и v взаимно просты. Из условия, сократив на d , получаем, что $d(u^{n+1} + v^{n+1})$ делится на $u^n + v^n$ для бесконечного множества натуральных n . Поскольку u и v взаимно просты, числа $u^{n+1} + v^{n+1}$ и $u^n + v^n$ взаимно просты с u и v , а кроме того, могут иметь общим множителем максимум $|v - u|$ (это следует из того, что $u^{n+1} + v^{n+1} - u(u^n + v^n) = v^n(v - u)$).

Но ненулевое число, не превосходящее $d \cdot |v - u|$, не может делиться на $u^n + v^n$ для бесконечно многих n . Значит, $u = v$, откуда $a = b$.

3. [4] Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 2019 четырёхугольников, каждый из которых одновременно вписанный и описанный.

Н. Седракан

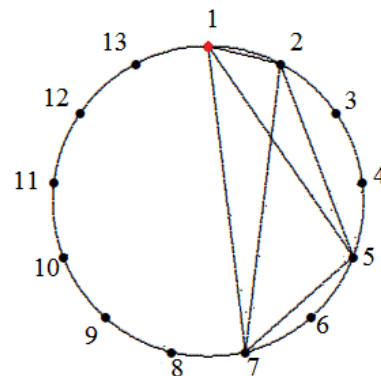
Решение. Признак вписанности четырёхугольника — равенство сумм противоположных углов, признак описанности — равенство сумм противоположных сторон. Если из центра вписанной в треугольник окружности опустить перпендикуляры на стороны треугольника, он разобьётся на три четырёхугольника, обладающих обоими этим свойствами. Чтобы разбить треугольник на 2019

таких четырёхугольников, достаточно разбить его на $2019:3 = 673$ треугольника (например, отрезками, исходящими из одной вершины), а потом каждый из них — на три четырёхугольника, как показано выше.

4. [5] Фокусник с помощником показывают фокус. В ряд стоят 13 закрытых пустых шкатулок. Фокусник уходит, а зритель на виду у помощника прячет по монетке в любые две шкатулки по своему выбору. Затем возвращается фокусник. Помощник открывает одну шкатулку, в которой нет монетки. Далее фокусник указывает на 4 шкатулки, и их одновременно открывают. Цель фокусника – открыть обе шкатулки с монетками. Предложите способ, как договориться фокуснику с помощником, чтобы этот фокус всегда удавался.

К. Кноп

Решение. Мысленно расположим шкатулки по кругу, изобразив их точками, делящими окружность на 13 равных дуг длины 1, и будем выражать расстояния между шкатулками в дугах. Между любыми двумя шкатулками с одной из сторон круга находится не более 6 дуг длины 1. Тогда нам достаточно придумать «шаблон» – четырёхугольник с вершинами в шкатулках, – между вершинами которого реализуются все расстояния от 1 до 6. Пример такого шаблона изображён на рисунке (четырёхугольник с вершинами 1, 2, 5, 7), одна из его вершин помечена красным.



Этот шаблон всегда можно повернуть так, чтобы он «накрыл» обе шкатулки с монетами. Помощник так и делает, а открывает шкатулку перед красной вершиной шаблона. Фокусник поворачивает шаблон так, чтобы красная вершина шла сразу за шкатулкой, открытой помощником, и находит монеты.

Это же решение можно изложить другими словами. Занумеруем шкатулки остатками по модулю 13. Если помощник открывает шкатулку с номером k , то фокусник открывает шкатулки с номерами $k + 1$, $k + 2$, $k + 5$ и $k + 7$. Поскольку любая пара шкатулок имеет вид $\{n, n + 1\}$, $\{n, n + 2\}$, $\{n, n + 3\}$, $\{n, n + 4\}$, $\{n, n + 5\}$ или $\{n, n + 6\}$, то помощник всегда найдёт четвёрку шкатулок нужного вида, содержащую пару шкатулок с монетами.

Для знатоков. Мы описали конечную проективную плоскость над полем $\mathbb{Z}_3$, где шкатулки выступают в роли точек, а шаблоны — в роли прямых. На этой плоскости как раз 13 точек и 13 прямых, причём на каждой прямой лежит по 4 точки.

5. [5] В ряд выписаны несколько натуральных чисел с суммой 2019. Никакое число и никакая сумма нескольких подряд записанных чисел не равна 40. Какое наибольшее количество чисел могло быть выписано?

А. Шаповалов

Ответ: 1019 чисел.

Лемма. Сумма любых сорока подряд записанных чисел не меньше 80.

Доказательство. Пусть числа $a_1, \dots, a_{40}$ записаны подряд. Среди чисел $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$, ..., $b_{40} = a_1 + a_2 + \dots + a_{40}$ найдутся два b_i и b_j ($i < j$) с одинаковым остатком при делении на 40. Тогда сумма $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ кратна 40, а значит, не меньше 80.

Решение. Оценка. Пусть выписано $n > 1019$ чисел. По лемме, сумма первых $1000 = 25 \cdot 40$ из них не меньше $25 \cdot 80 = 2000$. Сумма оставшихся чисел (их по крайней мере 20) не меньше 20. Значит, вся сумма не меньше 2020. Противоречие.

Пример. 25 групп 1, ..., 1, 41 (в каждой группе 39 единиц и число 41) и затем 19 единиц.

40-й Международный математический Турнир городов

Решения задач весеннего тура

Сложный вариант

Младшие классы

1. [5] Король вызвал двух мудрецов и объявил им задание: первый задумывает семь различных натуральных чисел с суммой 100, тайно сообщает их королю, а второму мудрецу называет лишь четвёртое по величине из этих чисел, после чего второй должен отгадать задуманные числа. У мудрецов нет возможности сговориться. Могут ли мудрецы гарантированно справиться с заданием?

М. Евдокимов

Ответ: могут. **Решение.** Пусть первый мудрец задумает числа 1, 2, 3, 22, 23, 24, 25 и назовёт число 22. Тогда второй однозначно определит все числа, так как сумму 100 при этом можно получить лишь одним способом — взяв наименьшие возможные числа: 1, 2, 3, 22, 23, 24 и 25.

Замечание: если первый задумает другие числа, то второй не сможет гарантированно угадать.

2. [7] На прямой сидят 2019 точечных кузнечиков. За ход какой-нибудь из кузнечиков прыгает через какого-нибудь другого так, чтобы оказаться на прежнем расстоянии от него. Прыгая только вправо, кузнечики могут добиться того, чтобы какие-то двое из них оказались на расстоянии ровно 1 мм друг от друга. Докажите, что кузнечики могут добиться того же, прыгая из начального положения только влево.

С. Дориченко

Решение. Назовём самого левого кузнечика Ричардом. Пусть тогда сначала все кузнечики, кроме Ричарда, перепрыгнут через Ричарда. Ясно, что теперь кузнечики находятся в положении, которое симметрично изначальному. Тогда они могут, используя ходы, симметричные тем, которые они бы делали при прыжках вправо, добиться требуемого.

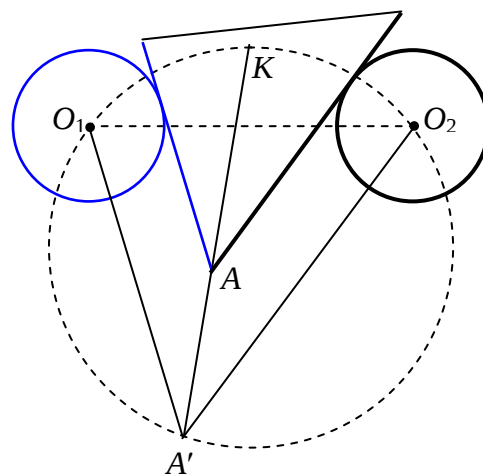
3. [7] К плоскости приклеены два непересекающихся деревянных круга одинакового размера — серый и чёрный. Дан деревянный треугольник, одна сторона которого серая, а другая — чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи треугольника, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная — чёрного (касание происходит не в вершинах). Докажите, что прямая, содержащая биссектрису угла между серой и чёрной сторонами, всегда проходит через одну и ту же точку плоскости.

Е. Бакаев, П. Кожевников, В. Расторгуев

Решение. Точки биссектрисы угла A между серой и чёрной сторонами деревянного треугольника равноудалены от этих сторон (серый цвет изображаем синим). Проведём через центры O_1 и O_2 серого и чёрного кругов прямые, параллельные этим сторонам. Пусть они пересекаются в точке A' . Поскольку угол $O_1A'O_2$, равный углу A , постоянен, описанная окружность Ω треугольника $O_1A'O_2$ не зависит от положения исходного треугольника.

Прямая l , содержащая биссектрису угла $O_1A'O_2$, проходит тогда через фиксированную точку K — середину дуги O_1O_2 окружности Ω .

С другой стороны, точки прямой l равноудалены от прямых O_1A' и O_2A' , а серая и чёрная стороны «отодвинуты» соответственно от O_1A' и O_2A' на одно и то же расстояние в сторону точки K (так как радиусы серого и чёрного кругов равны), откуда прямая l содержит и биссектрису угла A деревянного треугольника.



4. [8] Каждый отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили – в красный цвет, если между его концами чётное число вершин, и в синий – в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках – произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

И. Богданов

Ответ. $\frac{1}{2}$. **Решение.** Пусть в вершинах по кругу расставлены числа $x_1, \dots, x_{100}$, и пусть k – сумма «красных» чисел, а s – «синих». Тогда сумма красных чисел равна сумме всех одночленов вида $x_i x_j$, где i и j разной чётности и $i < j$, а сумма синих равна сумме всех одночленов вида $x_i x_j$, где i и j одной чётности и $i < j$; кроме того, $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_{100})^2 = 1$. Заметим теперь, что выражение $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{99} - x_{100})^2$ равно $1 - 2k + 2s$ и неотрицательно, откуда $k - s \leq \frac{1}{2}$.

Равенство достигается, когда выражение в скобках равно нулю, например, при $x_1 = x_2 = \dots = x_{100} = \frac{1}{10}$.

5. [9] В клетках квадратной таблицы $n \times n$, где $n > 1$, требуется расставить различные целые числа от 1 до n^2 так, чтобы каждые два последовательных числа оказались в соседних по стороне клетках, а каждые два числа, дающие одинаковые остатки при делении на n , – в разных строках и в разных столбцах. При каких n это возможно?

А. Грибалко

Ответ: при всех чётных n .

Решение. Пронумеруем столбцы и строки от 1 до n соответственно слева направо и сверху вниз, а также раскрасим доску в шахматном порядке так, чтобы угловая клетка в первом столбце и первой строке была чёрной.

Пусть n – чётное. Заполним таблицу числами от 1 до n^2 так: ставим их друг за другом, начиная от 1, сначала в первой строке слева направо, а потом – вдоль столбцов: вниз по последнему столбцу, вверх по предпоследнему, и т. д. (получается что-то похожее на змейку). В итоге число n^2 окажется прямо под 1, см. пример для $n = 6$ на рисунке.

1	2	3	4	5	6
36	27	26	17	16	7
35	28	25	18	15	8
34	29	24	19	14	9
33	30	23	20	13	10
32	31	22	21	12	11

Заменим теперь числа на их остатки по модулю n : 0, 1, ..., $n - 1$ (см. рисунок). Нетрудно доказать, что они расставлены следующим образом: для нечётного столбца последнее (нижнее) число совпадает с первым числом следующего чётного столбца и вторым числом следующего нечётного.

Значит, каждый столбец начинается с остатка i , равного своему номеру, кроме n -го, который начинается с нуля, причём в чётных столбцах остатки идут по возрастанию с i до $n - 1$, а потом с нуля до $i - 1$, а в нечётных – по убыванию с i до 0, а потом с $n - 1$ до $i + 1$.

Докажем, что в каждой строке все остатки различны. Пусть в какой-то строке совпали два остатка. Они не могут находиться в столбцах одной чётности – такие столбцы получаются друг из друга циклическим сдвигом. Значит, один остаток находится в чётном столбце, а второй – в нечётном. Но тогда эти два остатка стоят на клетках разного цвета и не могут совпадать, противоречие.

Предположим, что удалось заполнить таблицу при нечётном n . К противоречию можно прийти по-разному.

Первый способ. Заметим, что в нашей шахматной раскраске чёрными окажутся те клетки, сумма номеров строки и столбца которых чётна, а белыми – остальные. В нашей змейке чисел от 1 до n^2 цвета клеток чередуются, поэтому числа одной чётности находятся в чёрных клетках, а другой чётности – в белых.

Рассмотрим клетки таблицы, в которых стоят числа, дающие остаток k при делении на n . Сумма их номеров строк и столбцов по условию равна $(1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$, так как каждая строка и каждый столбец участвуют по одному разу; в частности, эта сумма чётна. Но у

1	2	3	4	5	0
0	3	2	5	4	1
5	4	1	0	3	2
4	5	0	1	2	3
3	0	5	2	1	4
2	1	4	3	0	5

каждой белой клетки сумма «координат» нечётна, а у каждой чёрной – чётна, следовательно, число белых клеток среди рассмотренных чётно.

Взяв $k=1$ и $k=2$, получаем, что среди чисел с остатком 1 чётное количество находится на белых клетках, и среди чисел с остатком 2 – тоже. Но для каждого числа с остатком 1 следующее за ним число имеет остаток 2 и стоит на клетке противоположного цвета. Значит, на чёрных клетках стоит чётное количество чисел с остатком 2 и всего чисел с остатком 2 чётно – противоречие с нечётностью n .

Второй способ. Заменяем числа на их остатки от деления на n и проведём стрелку из каждой клетки с единицей в соседнюю клетку с двойкой. У нас имеется n стрелок, соединяющих единицы и двойки. У некоторых стрелок могут быть *парные* – стрелки противоположного направления, занимающие те же два ряда (рис. слева). Но число стрелок нечётно, поэтому найдётся стрелка без пары.

						i	$i+1$	$i+2$	$i+3$			n
	1 → 2								1 → 2			
							1 → 2					
												1
	2 ← 1							1 → 2				
											1 → 2	
						1 → 2						

Пусть, например, такая стрелка горизонтальна и ведёт из i -го столбца в $(i+1)$ -й (рис. справа). В $(i+1)$ -м столбце тоже есть единица. Поскольку у первой стрелки нет пары, вторая стрелка может вести только в $(i+2)$ -й столбец (двойка в $(i+1)$ -м столбце уже занята). В $(i+2)$ -м столбце тоже есть единица, и стрелка из неё может вести только в $(i+3)$ -й столбец (двойки в $(i+1)$ -м и $(i+2)$ -м столбцах уже заняты). Продолжая, дойдём до единицы в n -м столбце, откуда стрелке идти уже некуда. Противоречие.

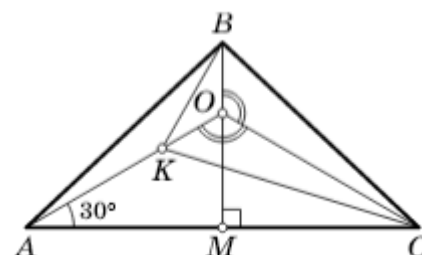
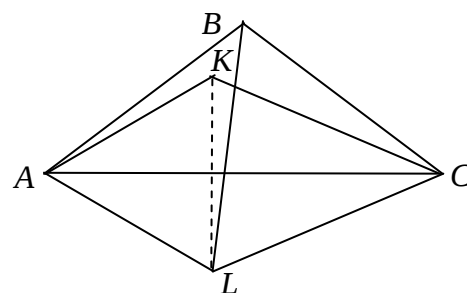
6. [9] Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $CK = AB = BC$ и $\angle KAC = 30^\circ$. Найдите угол AKB .

Е. Бакаев

Ответ. 150° . **Решение 1.** Построим равносторонний треугольник BCL (см. рисунок; точки A и L находятся по одну сторону от прямой BC). Точки A , C и L лежат на окружности радиуса BA с центром в точке B . Поскольку K лежит внутри треугольника ABC , угол ABC больше 60° , откуда L и B лежат по разные стороны от AC и L лежит на меньшей дуге AC . Тогда вписанный угол CAL равен половине центрального угла CBL , то есть 30° .

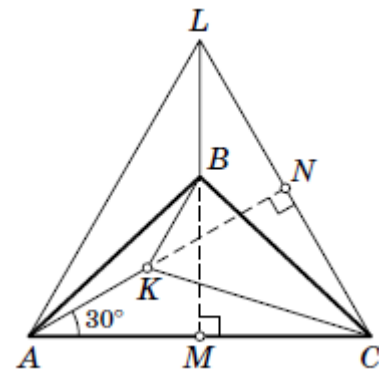
Очевидно, точка K , удовлетворяющая условиям задачи, единственна, следовательно она совпадает с точкой, симметричной L относительно стороны AC . Значит, треугольник AKL равносторонний, точка K , как и точка B , лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AL , откуда $\angle AKB = \angle LKB = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle AKL = 150^\circ$.

Решение 2. Пусть высота BM треугольника ABC пересекается с прямой AK в точке O (см. рисунок). Тогда $\angle COM = \angle AOM = 60^\circ$. Значит, $\angle AOC = 120^\circ$ и $\angle COB = 120^\circ$. Следовательно, треугольники BOC и KOC равны по двум сторонам и углу, лежащей против *большой* из них (так называемый четвёртый признак равенства треугольников). Поэтому $OB = OK$, то есть треугольник BOK равнобедренный с углом 120° при вершине O . Поэтому $\angle OKB = 30^\circ$, а $\angle AKB = 150^\circ$.



Решение 3. Построим на AC равносторонний треугольник ACL так, чтобы точки L и B лежали с одной стороны от AC (см. рис).

Проведем в треугольнике ABC высоту BM , она же серединный перпендикуляр к стороне AC . Так как ALC – равносторонний, точка L также лежит на прямой BM . Кроме этого, проведем в треугольнике ALC высоту AN . Так как AN является биссектрисой угла LAC , то точка K лежит на этой прямой. Отметим также, что K лежит с той же стороны от BM , что и A , так как из-за $CK = CB$ она не может лежать внутри треугольника BMC ; таким образом, K лежит на отрезке AN .



Заметим, что прямоугольные треугольники BMC и KNC равны по катету и гипотенузе (так как $MC = AC/2 = LC/2 = NC$, $BC = KC$). Отсюда следует, во-первых, что $BM = KN$, во-вторых, что B лежит на отрезке LM (так как $BM = KN < AN = LM$), и, наконец, что $LB = LM - BM = AN - KN = AK$.

Теперь рассмотрим четырехугольник $ALBK$. В нем $\angle LAK = \angle ALB = 30^\circ$ и $AK = LB$, то есть это равнобокая трапеция. Отсюда следует, что $\angle AKB = 180^\circ - \angle KAL = 150^\circ$.

Решение 4. Пусть $\angle B = 2\beta$. По теореме синусов $2BC \sin \beta = AC = KC \frac{\sin \angle AKC}{\sin 30^\circ} = 2BC \sin \angle AKC$, и поскольку $\angle AKC > 2\beta > \beta$, то $\angle AKC = 180^\circ - \beta$. Значит, $\angle ACK = \beta - 30^\circ$, откуда $\angle KCB = \angle C - \angle ACK = (90^\circ - \beta) - (\beta - 30^\circ) = 120^\circ - 2\beta$, $\angle BKC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle KCB) = 30^\circ + \beta$, $\angle AKB = 360^\circ - \angle BKC - \angle AKC = 360^\circ - (30^\circ + \beta) - (180^\circ - \beta) = 150^\circ$.

7. [12] Есть 100 кучек по 400 камней в каждой. За ход Петя выбирает две кучки, удаляет из них по одному камню и получает за это столько очков, каков теперь модуль разности числа камней в этих двух кучках. Петя должен удалить все камни. Какое наибольшее суммарное количество очков он может при этом получить?

М. Дидин

Ответ. 3920000. **Решение.** Оценка. Будем считать, что камни в кучках лежат один на другом, причём из выбранных кучек Петя берет верхние (на данный момент) камни. Пронумеруем камни в каждой кучке снизу вверх числами от 1 до 400. Тогда число очков, которое Петя получает на каждом ходу, равно разности номеров удаляемых камней. В результате он получит сумму вида $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{39999} - a_{40000}|$, где a_i – номера соответствующих камней.

Заметим, что после раскрытия скобок получается алгебраическая сумма S ста чисел 400, ста чисел 399, ..., ста двоек и ста единиц, причём ровно перед половиной этих чисел стоит знак минус.

Назовём числа от 1 до 200 *маленькими*, а остальные – *большими*. Если бы разрешалось брать из кучек произвольные камни, то максимальное значение S , очевидно, достигается, когда все большие числа входят в S со знаком плюс, а все маленькие – со знаком минус. Такая сумма равна $100(400 + 399 + \dots + 201 - 200 - 199 - \dots - 1) = 100((400 - 200) + (399 - 199) + \dots + (201 - 1)) = 100 \cdot 200^2$.

Заметим, однако, что каждое большое число хотя бы один раз войдёт в сумму со знаком минус: это произойдёт, например, в тот момент, когда Петя в *первый раз* удалит камень с этим номером. Аналогично каждое из 200 маленьких чисел хотя бы один раз войдёт в сумму в сумму со знаком плюс (в тот момент, когда Петя удалит *последний* камень с этим номером). Поэтому максимальный результат Пети не превышает

$$99 \cdot (400 + 399 + \dots + 201) - 99 \cdot (200 + 199 + \dots + 1) - (400 + 399 + \dots + 201) + (200 + 199 + \dots + 1) = 98 \cdot 200^2.$$

Пример. Добиться указанного результата можно, например, так. За первые 200 ходов Петя забирает по 200 камней из первых двух кучек (при этом 200 больших чисел – каждое по разу – получают знак минус). За следующие 200 ходов он снимает 200 верхних камней из третьей кучки и 200 нижних из первой кучки, далее по 200 камней из второй и четвертой, третьей и шестой, ..., 98-й и 100-й кучек (при этом все числа входят с «правильными» знаками). Наконец остаётся по 200 нижних камней в последних двух кучках, которые и снимаются за последние 200 ходов (и возникает 200 знаков плюс перед числами с 200 по 1).

Старшие классы

1. [5] На экране компьютера напечатано некоторое натуральное число, делящееся на 7, и отмечен курсором промежуток между какими-то двумя его соседними цифрами. Докажите, что существует такая цифра, что если её впечатать в отмеченный промежуток любое число раз, получится число, делящееся на 7.

А. Галочкин

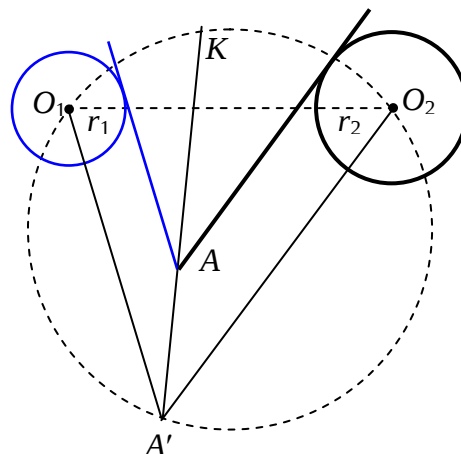
Решение. Пусть исходное число имеет вид $\overline{AB}$, причём A при делении на 7 даёт остаток r . Возьмём такую цифру a , что $2r + a$ делится на 7 (она, очевидно, найдётся). Будем делить число вида $\overline{Aa...aB}$ на 7 в столбик. Когда мы закончим делить A , останется остаток r . На следующем шаге мы будем делить на 7 число $10r + a = 7r + (2r + a) + r$, снова получается остаток r . На следующих шагах это повторяется, пока мы не дойдём до деления на 7 числа $\overline{rB}$, которое делится на 7 по условию.

2. [6] См. задачу 2 младших классов.

3. [7] К плоскости приклеены два непересекающихся не обязательно одинаковых деревянных круга – серый и чёрный. Дан бесконечный деревянный угол, одна сторона которого серая, а другая – чёрная. Его передвигают так, чтобы круги были снаружи угла, причём серая сторона касалась серого круга, а чёрная – чёрного (касание происходит не в вершине). Докажите, что внутри угла можно нарисовать луч, выходящий из вершины, так, чтобы при всевозможных положениях угла этот луч проходил через одну и ту же точку плоскости.

Е. Бакаев, И. Богданов, П. Кожевников, В. Расторгуев

Решение. Искомый луч – геометрическое место лежащих внутри угла точек, для которых отношение расстояний до серой и чёрной сторон равно отношению $\frac{r_1}{r_2}$ радиусов серой и чёрной окружностей. Дальнейшие рассуждения практически повторяют решение задачи 3 младших классов. Ясно, что луч $A'A$ содержит указанный выше луч и обладает тем же свойством по отношению к прямым $A'O_1$ и $A'O_2$. Поэтому этот луч пересекает дугу O_1O_2 в такой точке K , что $O_1K : O_2K = (2R \sin \angle O_1A'K) : (2R \sin \angle O_2A'K) = \sin \angle O_1A'K : \sin \angle O_2A'K = (A'A \sin \angle O_1A'K) : (A'A \sin \angle O_2A'K) = r_1 : r_2$.



4. [8] См. задачу 5 младших классов.

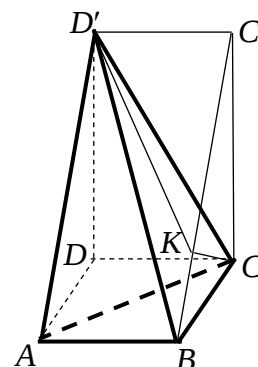
5. Ортогональной проекцией тетраэдра на плоскость одной из его граней является трапеция площади 1. а) [4] Может ли ортогональной проекцией этого тетраэдра на плоскость другой его грани быть квадрат площади 1? б) [4] А квадрат площади $\frac{1}{2019}$?

М. Евдокимов

Ответ: а) не может; б) может. **Решение.** Пусть единичный квадрат $ABCD$ – проекция тетраэдра $ABCD'$ на плоскость грани ABC . Тогда этот тетраэдр «вписан» в прямоугольный параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$.

Из симметрии относительно плоскости DBD' ясно, что проекция тетраэдра на плоскость грани ACD' трапецией быть не может (если две противоположные стороны проекции параллельны, то и две другие тоже), а проекции тетраэдра на плоскости граней ABD' и BCD' равны.

Высота CK тетраэдра, очевидно, совпадает с высотой прямоугольного треугольника BCC' , поэтому проекция на плоскость ABD' – трапеция $ABKD'$.



Так как треугольники BCC' и BKC подобны и $BC = 1$, имеем $BK = \frac{1}{BC'} = \frac{1}{AD'}$. Тогда $S_{ABKD'} = \frac{AD' + BK}{2} = \frac{AD' + \frac{1}{AD'}}{2} \geq 1$. Равенство возможно лишь при $AD' = \frac{1}{AD'} = 1$, но это не так, поскольку гипотенуза AD' больше катета AD , равного 1. Итак, ответ в пункте а) отрицателен.

Ответ в пункте б) положителен: достаточно выбрать DD' так, что $AD' + \frac{1}{AD'} = 2 \cdot 2019$, а потом уменьшить длины всех рёбер тетраэдра в $\sqrt{2019}$ раз.

6. [8] Петя и Вася играют в игру. Для каждого пяти различных переменных из набора $x_1, \dots, x_{10}$ имеется единственная карточка, на которой записано их произведение. Петя и Вася по очереди берут по карточке, начинает Петя. По правилам игры, когда все карточки разобраны, Вася присваивает переменным значения как хочет, но так, что $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{10}$. Может ли Вася гарантированно добиться того, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети?

И. Богданов

Ответ: да. **Решение.** Покажем, как может действовать Вася, чтобы сумма произведений на его карточках была больше, чем у Пети.

Допустим, Петя не взял карточку, на которой написано $x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}$. Тогда Вася может взять эту карточку, а дальше брать любые карточки. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 1$ сумма произведений у Пети будет равна 0, а у Васи будет равна 1.

Если Петя сразу же взял карточку, на которой написано $x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}$, то Вася может взять карточку, на которой написано $x_5 x_7 x_8 x_9 x_{10}$, а следующим ходом одну из карточек $x_4 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ или $x_5 x_6 x_8 x_9 x_{10}$ (хотя бы одна из них останется, поскольку за ход Петя может взять только одну из этих двух карточек). Далее Вася может брать карточки как угодно.

В случае, если Вася взял карточку $x_4 x_7 x_8 x_9 x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5 = x_6 = 1$, $x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 100$.

Тогда только на двадцати одной карточке окажется ненулевое произведение, причём для трёх карточек $x_4 x_7 x_8 x_9 x_{10}$, $x_5 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ и $x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ это произведение будет равно 100 000 000, а для остальных не будет превосходить 1 000 000. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 200 000 000, а у Пети не больше 118 000 000.

В случае, если Вася взял карточку $x_5 x_6 x_8 x_9 x_{10}$, он может присвоить переменным такие значения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = x_6 = x_7 = 1$, $x_8 = x_9 = x_{10} = 10$.

Тогда только на шести карточках окажется ненулевое произведение, причём для трёх карточек $x_5 x_6 x_8 x_9 x_{10}$, $x_5 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ и $x_6 x_7 x_8 x_9 x_{10}$ это произведение будет равно 1000, а для остальных трёх будет равно 100. Таким образом, сумма у Васи будет не меньше 2000, а у Пети не больше 1300.

7. [12] Рассмотрим на клетчатой плоскости такие ломаные с началом в точке $(0, 0)$ и вершинами в целых точках, что каждое очередное звено идёт по сторонам клеток либо вверх, либо вправо. Каждой такой ломаной соответствует *червяк* – фигура, состоящая из клеток плоскости, имеющих хотя бы одну общую точку с этой ломаной. Докажите, что червяков, которые можно разбить на двуклеточные доминошки ровно $n > 2$ различными способами, столько же, сколько натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n . (Червяки разные, если состоят из разных наборов клеток.)

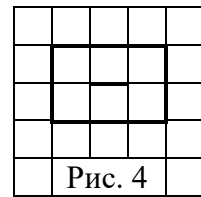
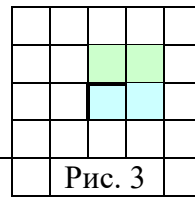
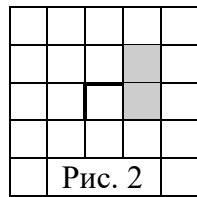
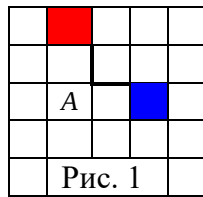
И. Чанакчи, Р. Шиффлер

Решение. Разным ломаным соответствуют разные червяки: если две ломаные совпадают до точки A , а в ней расходятся, то соответствующие червяки содержат разные клетки (рис. 1): синюю, если из A сделан ход вправо, красную – если вверх, ни одной из них, если ломаная в A окончилась.

Будем покрывать червяка доминошками с конца. Две последние клетки червяка можно покрыть двумя способами.

Операция *A*: положим доминошку перпендикулярно последнему звену ломаной (рис. 2); пусть есть a способов покрыть оставшуюся часть червяка.

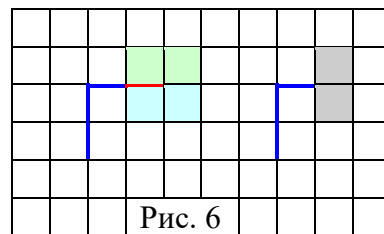
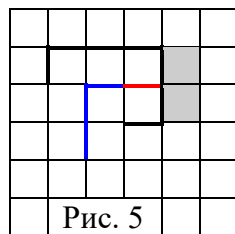
Операция *B*: положим две доминошки параллельно последнему звену ломаной (рис. 3); пусть есть b способов покрыть оставшуюся часть червяка.



Будем говорить, что червяк (и соответствующая ломаная) имеет *тип* (a, b) . Например, простейший червяк, соответствующий ломаной из одного звена, имеет тип $(2, 1)$ (рис. 4). Число способов разбить червяк типа (a, b) на доминошки равно $a + b$. Ясно, что $a > b$.

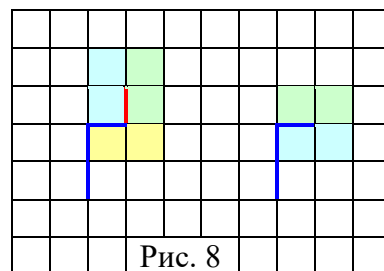
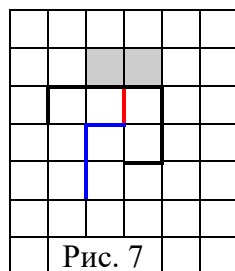
Лемма 1. Если ломаную типа (a, b) продолжить звеном, параллельным её последнему звену, то получится ломаная типа $(a + b, a)$.

Доказательство. Если к новому червяку применить операцию *A*, то останется червяк, соответствующий исходной ломаной (рис 5). А его можно покрыть $a + b$ способами. Если же применить операцию *B*, то останется то же самое, что при применении операции *A* к исходному червяку (рис. 6).



Лемма 2. Если ломаную типа (a, b) продолжить звеном, перпендикулярным её последнему звену, то получится ломаная типа $(a + b, b)$.

Доказательство. Если к новому червяку применить операцию *A*, то, как и в лемме 1, останется червяк, соответствующий исходной ломаной (рис 7). Если же применить операцию *B*, то следующую доминошку можно положить единственным способом, после чего останется то же самое, что при применении операции *B* к исходному червяку (рис 8).



Лемма 3. Если червяк имеет тип (a, b) , то a и b взаимно просты.

Доказательство. Все червяки получаются из простейшего типа $(2, 1)$ добавлением звеньев, а при переходах, описанных в леммах 1 и 2, взаимная простота не нарушается.

Поскольку $\text{НОД}(n, a) = 1 \Leftrightarrow \text{НОД}(n, n - a) = 1$, то для решения задачи осталось доказать, что для каждого натурального $n \geq 3$ и взаимно простого с n числа a , такого что $n/2 < a < n$, существует ровно два червяка типа $(a, n - a)$.

Достаточно рассмотреть червяков, у которых первое звено горизонтально (их вдвое меньше). Проведём индукцию по n . База ($n = 3$) очевидна.

Шаг индукции. Пусть $n > 3$, $n - a = b$, $a - b = c$. Если $b > c$, то ломаную типа (a, b) можно получить только добавлением звена к ломаной типа (b, c) способом, описанным в лемме 1, а такая ломаная единственна по предположению индукции.

Если же $b < c$, то ломаную типа (a, b) можно получить только добавлением звена к ломаной типа (c, b) способом, описанным в лемме 2, а такая ломаная также единственна по предположению индукции.

СОРОКОВОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 24 марта 2019 г.

1. В таблице $n \times n$ стоят все целые числа от 1 до n^2 , по одному в клетке. В каждой строке числа возрастают слева направо, в каждом столбце — снизу вверх. Докажите, что наименьшая возможная сумма чисел на главной диагонали, идущей сверху слева вниз направо, равна $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

Б. Френкин

2. Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии по поверхности не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км?

М. Евдокимов

3. Можно ли замостить плоскость параболоми, среди которых нет равных? (Требуется, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одной параболе и чтобы ни одна парабола не переводилась ни в какую другую параболу движением.)

А. Лопатников

4. Про натуральные числа x , y и z известно, что $\text{НОД}(x, y, z) = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Докажите, что x , y и z — квадраты натуральных чисел.

Ю. Маркелов

5. Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции:
1) съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами;
2) пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).

Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу.

И. Митрофанов

6. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$.

П. Кожеевников, А. Кузнецов

Решения задач.

У-1. В таблице $n \times n$ стоят все целые числа от 1 до n^2 , по одному в клетке. В каждой строке числа возрастают слева направо, в каждом столбце — снизу вверх. Докажите, что наименьшая возможная сумма чисел на главной диагонали, идущей сверху слева вниз направо, равна $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. (Б. Френкин)

Решение. Будем называть *лесенкой* следующую часть таблицы из $n + (n - 1) + \dots + 1$ клеток: самый левый столбец, следующий столбец без верхнего числа, следующий столбец без двух верхних чисел, ..., самый правый столбец без верхних $n - 1$ чисел.

Пример. Двигаясь от самого левого столбца лесенки к самому правому, заполняем их снизу вверх числами 1, 2, ... по возрастанию: в первом столбце лесенки будут стоять числа от 1 до n , во втором — от $n + 1$ до $2n - 1$ и т.д. Заполнив лесенку, заполняем оставшиеся клетки таблицы по тому же принципу: двигаясь от самого левого столбца таблицы к самому правому, заполняем их снизу вверх оставшимися числами по возрастанию. Тогда таблица будет удовлетворять условию, а сумма чисел на главной диагонали будет равна $n + [n + (n - 1)] + [n + (n - 1) + (n - 2)] + \dots + [n + \dots + 1] = n^2 + (n - 1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$, что и требуется.

Оценка. Первый способ. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — числа на главной диагонали (порядок, в котором они там стоят, нам неизвестен). Для каждого a_k покрасим само a_k и все числа, стоящие либо под a_k в том же столбце, либо слева от a_k в той же строке, в цвет номер k . Тогда чисел каждого цвета будет ровно n , и каждое число лесенки, кроме чисел главной диагонали, будет покрашено ровно в два цвета — «цвет строки» и «цвет столбца» (а каждое число на главной диагонали — только в один свой цвет).

Заметим, что a_k больше всех остальных чисел цвета k и больше всех чисел, цвет которых имеет номер меньше k (так как $a_k > a_{k-1} > \dots > a_1$). Тем самым a_k не меньше, чем количество чисел с цветами от 1 до k . Но таких чисел ровно $n + (n - 1) + \dots + (n - (k - 1))$, поскольку чисел цвета 1 — ровно n , чисел цвета 2, но не цвета 1, — ровно $n - 1$, ..., чисел цвета k , но ни одного из цветов 1, 2, ..., $k - 1$, — ровно $n - (k - 1)$.

Отсюда $a_1 + \dots + a_n \geq n + [n + (n - 1)] + \dots + [n + (n - 1) + \dots + 2 + 1] = n^2 + (n - 1)^2 + \dots + 1^2$.

Второй способ. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — числа на главной диагонали. Рассмотрим некоторое a_k . Если число из лесенки находится в одной строке или в одном столбце с одним из диагональных чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, то оно не превосходит его, и значит, не превосходит a_k , числа $x > a_k$ могут находиться только в строках и столбцах с числами $a_{k+1}, \dots, a_n$ — таких чисел всего $1 + 2 + \dots + (n - k)$. Все остальные $(n + k + 1) + \dots + n$ чисел лесенки не больше a_k , то есть $a_k \geq (n + k + 1) + \dots + n$. Складывая, получаем точную оценку на $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Третий способ. Пронумеруем все диагонали, параллельные главной и лежащие не выше её, числами от 1 до n снизу вверх. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — числа на главной диагонали. Проведём из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ единичные стрелки влево или вниз в попарно различные клетки $(n - 1)$ -й диагонали (это, очевидно, возможно). Из a_n же проведём одну из двух стрелок на $(n - 1)$ -ю диагональ.

Далее действуем аналогично. Именно, пусть мы уже провели стрелки в клетки k -й диагонали так, что пути по стрелкам из $a_1, \dots, a_k$ не имеют общих клеток. Берём клетки k -й диагонали, в которые приходят пути из $a_1, \dots, a_{k-1}$, и проводим из них стрелки в попарно различные клетки $(k - 1)$ -й диагонали. Из оставшейся клетки проводим любую стрелку на $(k - 1)$ -ю диагональ.

Теперь нетрудно доказать оценку. Из клеток $a_1, \dots, a_k$ ведут k путей, причём их начала длины $n, n - 1, \dots, n - k + 1$ соответственно не имеют общих клеток. Число a_k не меньше всех чисел, встречающихся на этих путях; поэтому $a_k \geq n + (n - 1) + \dots + (n - k + 1)$. Суммируя, получаем

$$a_1 + \dots + a_n \geq n + (n + (n - 1)) + \dots + (n + (n - 1) + \dots + 1) = n \cdot n + (n - 1) \cdot (n - 1) + \dots + 1 \cdot 1.$$

Замечание. Это же решение можно оформить по-другому. Рассмотрим только расстановку различных натуральных чисел в диагоналях $1, 2, \dots, n$. Докажем, что если в каждой диагонали поставить числа сверху вниз по возрастанию, то расстановка чисел в этом треугольнике по-прежнему будет удовлетворять условиям. Для этого, если $b_1 < \dots < b_k$ и $c_1 < \dots < c_{k-1}$ — числа в k -й и $(k - 1)$ -й диагоналях, надо доказать, что $b_i \geq c_i$ при всех $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Это доказывается, например, тем же проведением стрелок; есть и другие способы.

После этого в новой расстановке число a_k не меньше, чем все числа в первых k столбцах треугольника, то есть $a_k \geq n + (n - 1) + \dots + (n - k + 1)$, откуда и следует оценка.

У-2. Луноход ездит по поверхности планеты, имеющей форму шара с длиной экватора 400 км. Планета считается полностью исследованной, если луноход побывал на расстоянии не более 50 км от каждой точки поверхности и вернулся на базу (в исходную точку). Может ли луноход полностью исследовать планету, преодолев не более 600 км? (М. Евдокимов)

Ответ. Может.

Решение. Отметим на планете полюсы N и S , и пусть точки A, B, C и D делят соответствующий экватор на четыре равных дуги, как на рисунке 1.

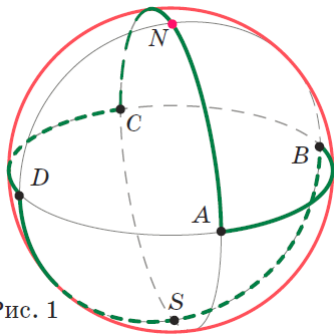


Рис. 1

Рассмотрим замкнутый путь $A \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow N \rightarrow A$ по поверхности, состоящий из дуг больших окружностей с центрами в центре планеты. Этот путь состоит из 6 одинаковых дуг длиной в $1/4$ экватора, поэтому длина пути составляет 600 км.

Покажем, что луноход побывал на расстоянии не более 50 км от каждой точки. Поверхность планеты разобьём на 8 одинаковых сферических треугольников с вершинами в отмеченных точках. Луноход побывал во всех вершинах и во всех точках хотя бы одной стороны каждого треугольника. Так как расстояние по поверхности от полюса до экватора 100 км, то поверхность планеты разбивается на экваториальный пояс — точки, удалённые от экватора на расстояние не более 50 км, — и две полярные шапки — точки, удалённые от полюсов на расстояние не более 50 км. На рисунке 2 зелёная часть треугольника исследована луноходом, так как он проехал вдоль стороны, а красная исследована, так как он побывал в вершине.

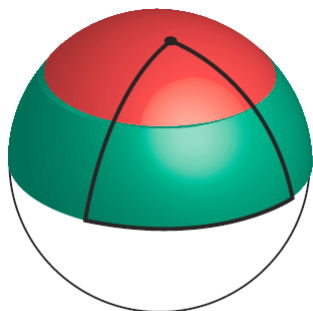


Рис. 2

Замечание. Докажем более сильное утверждение: луноход может полностью исследовать планету, преодолев не более 570 км.

Снова разобьём поверхность планеты на 8 равных треугольников. Средней параллелью треугольника назовём часть линии, параллельной стороне треугольника и соединяющей середины двух других сторон. На рисунке 2 средняя параллель треугольника лежит на границе красной и зелёной областей. Пусть луноход прошёл по средним параллелям всех треугольников, как на рисунке 3. Вся поверхность планеты будет исследована, потому что любая точка треугольника находится на расстоянии не более 50 км от некоторой точки средней параллели, что видно из рисунка 2.

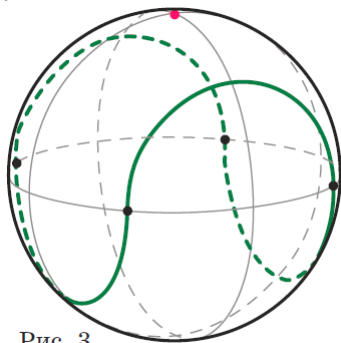


Рис. 3

Наконец, докажем, что длина окружности, на которой лежит средняя параллель, в $\sqrt{2}$ раз меньше длины экватора. Из этого будет следовать, что длина пути равна $\frac{800}{\sqrt{2}}$, что примерно равно 566.

Пусть N и E — вершины треугольника, O — центр планеты. Радиус окружности, на которой лежит средняя параллель, равен расстоянию r от середины M дуги NE до прямой ON . Из рисунка 4 видно, что $r = \frac{OE}{\sqrt{2}}$. Значит, радиус меньшей окружности в $\sqrt{2}$ меньше радиуса планеты, что и требовалось.

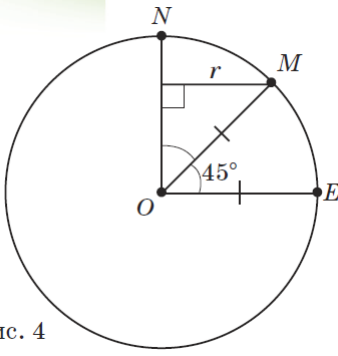


Рис. 4

Интересно было бы узнать, какова наименьшая возможная длина такого пути. Можно доказать (правда, не совсем элементарно), что она заведомо больше 500.

У-3. Можно ли замостить плоскость параболом, среди которых нет равных? (Требуется, чтобы каждая точка плоскости принадлежала ровно одной параболе и чтобы ни одна парабола не переводилась ни в какую другую параболу движением.) (А. Лопатников)

Ответ. Да.

Решение. Введём на плоскости декартовы координаты $(x; y)$ и рассмотрим всевозможные параболы с уравнениями вида $y = ax^2 + \ln a$, где a — произвольное положительное число. Среди этих парабол нет одинаковых, так как коэффициенты при x^2 различны. (Если совместить вершины двух парабол, а также их оси с учётом направления, то парабола, у которой a больше, пойдёт между «рогами» другой.)

Зафиксируем произвольное x , и пусть a пробегает положительную полуось. Тогда $y = ax^2 + \ln a$ является непрерывной функцией от a . Поскольку $x^2 \geq 0$, величина ax^2 не убывает с ростом a . Функция $\ln a$ строго возрастает. Поэтому y строго возрастает по a как сумма неубывающей и строго возрастающей функций. При $a \rightarrow +\infty$ имеем $y \rightarrow +\infty$, а при $a \rightarrow 0$ имеем $y \rightarrow -\infty$. Значит, каждое значение y при данном x появится ровно один раз. Поэтому любая точка плоскости принадлежит ровно одной параболе.

Комментарий. Вместо $\ln a$ можно взять любую непрерывную строго возрастающую функцию от a , которая отображает положительную полуось на всю вещественную ось.

У-4. Про натуральные числа x, y и z известно, что $\text{НОД}(x, y, z) = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$. Докажите, что x, y и z — квадраты натуральных чисел. (Ю. Маркелов)

Решение 1. Заметим, что любые два из чисел x, y, z взаимно просты. Действительно, пусть, например, x и y имеют общий простой делитель p . Тогда $z^2 = 2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2$ также делится на p , а потому на p делится и z . Значит, $\text{НОД}(x, y, z)$ делится на p , но это противоречит условию.

Теперь заметим, что

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2zx) - 4xy = (x + y - z)^2 - 4xy.$$

Таким образом, $4xy$ является полным квадратом. Так как 4 — полный квадрат, то и xy — полный квадрат. А так как x и y взаимно просты, то каждое из них — полный квадрат. Аналогично и z — полный квадрат.

Решение 2. Пусть p — простое число. Заметим, что если два из чисел x, y, z делятся на p , то из равенства в условии третье число тоже делится на p , что противоречит взаимной простоте x, y, z .

Докажем, что любой простой делитель p числа x входит в каноническое разложение x в чётной степени. Заметим, что $y^2 + z^2 - 2yz = 2xy + 2xz - x^2$, то есть

$$(y - z)^2 = x(2(y + z) - x).$$

Так как x делится на p , то и $y - z$ тоже. Если при этом $2(y + z)$ не делится на p , то степень вхождения p в разложение x такая же, как и у $(y - z)^2$, то есть чётная, и всё доказано.

Пусть $2(y + z)$ делится на p . Поскольку и $2(y - z)$ делится на p , получаем, что $4y$ и $4z$ делятся на p . Если $p \neq 2$, сразу имеем противоречие с взаимной простотой x, y, z .

Разберём случай $p = 2$. Пусть $x = 2t$, тогда $y = 2k + 1$, $z = 2l + 1$ и $4(k - l)^2 = 2t(4(k + l + 1) - 2t)$, откуда

$$(k - l)^2 = t(2(k + l + 1) - t).$$

Если $k - l$ нечётно, то t — нечётно, и, по доказанному выше, t — квадрат нечётного числа. Тогда и $2(k + l + 1) - t$ — квадрат нечётного числа, но при этом имеет остаток 3 от деления на 4 (поскольку $2(k + l + 1)$ делится на 4, а t имеет остаток 1 от деления на 4), что невозможно.

Пусть $k - l$ чётно. Пусть 2 входит в разложение t в степени α . Если $\alpha = 1$, то 2 входит в разложение x во второй (то есть, чётной) степени, что и требовалось. Если $\alpha > 1$, то поскольку $k + l + 1$ нечётно, 2 входит в разложение числа $2(k + l + 1) - t$ в первой степени, а значит, 2 входит в разложение $(k - l)^2$ в степени $\alpha + 1$, то есть $\alpha + 1$ чётно. Но это и есть степень вхождения 2 в x .

У-5. Перед Шариком лежит бесконечное число котлет, на каждой сидит по мухе. На каждом ходу Шарик последовательно делает две операции:

1) съедает какую-то котлету вместе со всеми сидящими на ней мухами;

2) пересаживает одну муху с одной котлеты на другую (на котлете может быть сколько угодно мух).

Шарик хочет съесть не более миллиона мух. Докажите, что он не может действовать так, чтобы каждая котлета была съедена на каком-то ходу. (И. Митрфанов)

Решение 1. Предположим противное. Заметим, что тогда с какого-то момента Шарик будет есть только котлеты без мух. С этого момента число котлет без мух не может увеличиться после хода Шарика: если он и образовал какую-то новую котлету без мух (переложив с неё муху), то перед этим съел какую-то котлету без мухи. Тогда с какого-то дальнейшего момента число котлет без мух стабилизируется. Далее Шарик каждым ходом съедает котлету без мухи и перекладывает муху с котлеты, на которой ровно одна муха, на котлету, где уже есть мухи. Тем самым появится котлета, на которой хотя бы две мухи, и эту котлету Шарик уже никогда не съест (с таких котлет он мух уже не снимает, а котлеты с мухами уже не ест).

Решение 2. Предположим противное. Пронумеруем котлеты в том порядке, в каком Шарик будет их есть. За первый миллион шагов Шарик переложит некоторых мух на какие-то котлеты. Пусть n — наибольший среди номеров этих котлет. Рассмотрим первые n котлет. За первый миллион шагов суммарное количество мух на них не уменьшалось (не считая мух, которые Шарик съел). Значит, перед тем, как съесть последнюю из n котлет, Шарик успеет переложить на котлеты с большими номерами максимум $n - 1 - 1\,000\,000$ мух, и потому за первые n шагов он съест хотя бы $1\,000\,001$ муху.

Решение 3. Пусть Шарик съел не более $1\,000\,000$ мух, съев все котлеты. Тогда каждую не съеденную муху он перемещал бесконечное число раз, иначе он не съел котлету, на которой она остановилась. Рассмотрим момент, когда он переместил какую-то муху M в $1\,000\,002$ -й раз. Пусть до этого он съел N котлет (и переместил максимум $N - 1$ мух). Хотя бы с $N - 1\,000\,000$ из них он переместил муху, которая там была изначально, и лишь одна из них могла быть M . Значит, до этого он перемещал мух хотя бы $(N - 1\,000\,000) + 1\,000\,000 = N$ раз, что невозможно.

У-6. Внутри треугольника ABC на биссектрисе угла A выбрана произвольная точка J . Лучи BJ и CJ пересекают стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Касательная к описанной окружности треугольника AKL в точке A пересекает прямую BC в точке P . Докажите, что $PA = PJ$. (П. Кожеевников, А. Кузнецов)

Решение. Пусть AM , AN — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника, а T — точка пересечения AM и KL . Тогда KL проходит через N . Кроме того, непосредственный счет углов показывает, что прямые AP и KL образуют равные углы с AM . (Например, при $AB < AC$ имеем $\angle MAP = \angle MAB + \angle BAP = \angle CAM + \angle LKA = \angle LTA$.) Поэтому надо доказать, что прямая, проходящая через J и параллельная KL , пересекает BC в той же точке, что и прямая, проходящая через середину U отрезка AJ и параллельная AN , то есть, что $MJ/JT = MU/UA$. А это равенство следует из того, что четверка A, J, T, M гармоническая (то есть $MJ/MA = TJ/TA$).