Abdulah Hodžić (Tuzla)

IZRAČUNAVANJE POVRŠINE MNOGOUGLA POMOĆU DETERMINANATA DRUGOG REDA

Determinanta drugog reda je šema brojeva $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, kojoj se, po definiciji, dodjeljuje vrijednost

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Realni brojevi a_1, b_1, a_2, b_2 su elementi determinante. Brojevi a_1 i b_1 čine prvu vrstu, brojevi a_2 i b_2 čine drugu vrstu; brojevi a_1 i a_2 čine prvu kolonu a brojevi b_1 i b_2 drugu kolonu. Elementi a_1 i b_2 čine glavnu a elementi a_2 i b_1 sporednu dijagonalu. Koristeći se definicijom lako nalazimo vrijednosti determinanata drugog reda:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10;$

2. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 8 - (-5) \cdot 4 = -24 + 20 = -4;$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - (-3)\,(-2) = 6 - 6 = 0.$

Površinu trougla, a onda i četvorougla, petougla itd. u planimetriji smo izračunavali na različite načine. Ovdje ćemo se baviti izračunavanjem površine trougla, četvorougla, petougla u koordinatnoj ravni xOy, kada su nam poznate koordinate njihovih tjemena, pomoću determinanata drugog reda. Mnogim je učenicima poznata formula za površinu trougla ako su poznate koordinate tjemena: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Ona glasi:

$$P = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|, \tag{1}$$

ili

$$2P = |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|, \tag{1'}$$

pri čemu pišemo odgovarajuće izraze pod znakom apsolutne vrijednosti jer oni mogu da budu i negativni, a površina ne može biti negativna. Ovu formulu nećemo izvoditi ovdje, ali ćemo se njome u daljem koristiti. Uradićemo sada jedan primjer pomoću ove formule i pomoću nama od ranije poznate metode.

Primjer. Izračunati površinu trougla čije su koordinate tjemena: $A(-2, -1)$, $B(-6, 1)$, $C(-5, -7)$.

Rješenje. Formule (1) i (1′) nam daju:

$$2P=|(-2)(1+7)+(-6)(-7+1)+(-5)(-1-1)|$$

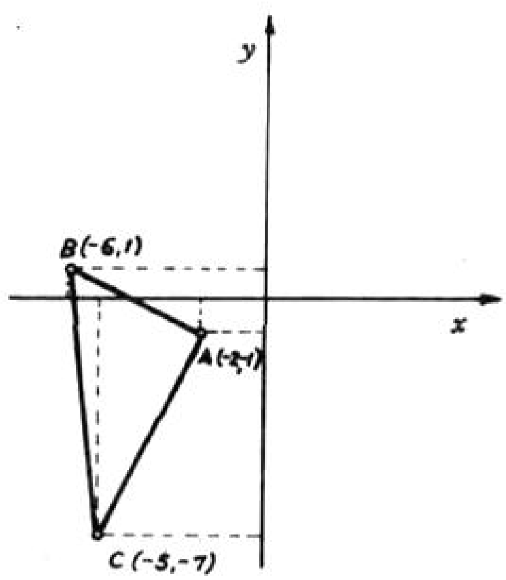
$$2P=|-16+36+10|$$

$$P=15.$$

Lako je pokazati da je trougao ABC pravougli, pa se njegova površina može izračunati pomoću poznate formule

$$P=\frac{1}{2}ab,$$

gdje su a i b dužine kateta tog trougla. Uvjerimo se u to.



Slika 1.

Nađimo dužine stranica trougla ABC i pokažimo da je zadovoljena Pitagorina teorema. Imamo da je

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(-6+2)^2+(1+1)^2}$$

$$=\sqrt{20}.$$

Na isti način nalazimo

$$\overline{AC}=\sqrt{(-5+2)^2+(-7+1)^2}$$

$$=\sqrt{45},$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(-5+6)^2+(-7-1)^2}$$

$$=\sqrt{65}.$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=20+45=65,$$

$$\overline{BC}^2=65.$$

Dakle

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2,$$

odakle zaključujemo da je trougao ABC pravougli i da su mu duži AB i AC katete a duž BC hipotenuza. Pomoću već navedene formule nalazimo da je njegova površina

$$P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{2}=\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}}{2}=\frac{\sqrt{900}}{2}=\frac{30}{2}=15.$$

Dobili smo isti rezultat; primjer smo riješili na drugi način.

Zanimljivo je da se formula (1) može transformisati u zbir determinanata drugog reda. To se postiže na slijedeći način:

$$\begin{aligned}2P&=|\,x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\,|\\&=|\,x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2\,|\\&=|\,x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3\,|,\end{aligned}$$

što pomoću determinanata drugog reda možemo pisati u obliku

$$2P=\left|\,\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_1 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\,\right| \tag{2}$$

odnosno

$$P=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x_3 & y_3\\ x_1 & y_1\end{vmatrix}\,\right| \tag{2'}$$

Relacije (2) i (2′) za izračunavanje površine trougla pomoću koordinata njegovih tjemena lako se pamte jer su indeksi koordinata pogodno raspoređeni. Već posmatrani primjer riješićemo sada pomoću formule (2). Nalazimo da je

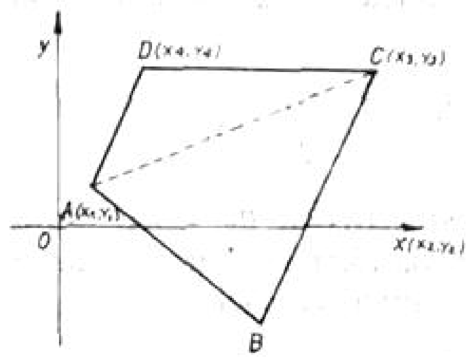
$$2P=\left|\,\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -6 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-6 & 1\\ -5 & -7\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-5 & -7\\ -2 & -1\end{vmatrix}\,\right|=|-2-6+42+5+5-$$

$$-14|=30,$$

$$P=15.$$

Primijetimo da je formula (2) pogodnija od formule (1) i da je pri rješavanju zadataka pomoću nje mala mogućnost da se pogriješi prilikom zamjenjivanja koordinata.

Za nas je ovdje od posebne važnosti što se ova formula može primijeniti za izračunavanje površine četvorougla, petougla itd. ako su nam poznate koordinate tjemena tih mnogouglova.



Slika 2.

Neka je $ABCD$ četverougao za koji su nam poznate koordinate tjemena: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$. Dijagonala AC dijeli taj četverougao na trouglove ABC i ACD, pa je njegova površina P jednaka:

$$P = P_{ABC} + P_{ACD}.$$

U daljem će nam trebati jedna jednostavna činjenica. Dokažimo da je tačna slijedeća jednakost:

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Zaista,

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = x_3 y_1 - x_1 y_3 = -(x_1 y_3 - x_3 y_1) = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Naglasimo da je redoslijed kojim se tjemena trougla ređaju (čime je određeno koji će indeks njihove koordinate nositi) za nas u daljem bitan. Posmatrano sa izabrane strane ravni kojoj trouglovi pripadaju, ako tjemena trougla obilazimo redom, od prvog ka drugom, od drugog ka trećem, od trećeg ka prvom, taj se obilazak može vršiti u smjeru koji se poklapa sa smjerom kazaljke na satu ili se može vršiti u smjeru koji je suprotan smjeru kretanja kazaljke na satu. Ako se za dva trougla obilazak vrši u istom smjeru, reći ćemo da su oni jednako orijentisani. Na slici 2 su trouglovi ABC i ACD jednako orijentisani, oba u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu.

Pokazuje se da su za jednako orijentisane trouglove izrazi pod znakom apsolutne vrijednosti u formuli (2) istog znaka; time ćemo se u daljem koristiti. Uvjerite se u tačnost ovakvog tvrđenja na nekoliko primjera. Za dva suprotno orijentisana trougla ti su izrazi suprotnog znaka.

Na osnovu izloženog nalazimo da je

$$P=P_{ABC}+P_{ACD}$$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|$$

$$(3)\qquad P=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Relacija (3) je formula za izračunavanje površine četverougla ako su poznate koordinate njegovih tjemena.

Primjer. Izračunati površinu četverougla ako su mu date koordinate tjemena: $A(3,1)$, $B(4,6)$, $C(6,3)$, $D(5,-2)$.

Uvjeravamo se pomoću slike u koordinatnom sistemu da je redoslijed kojim su tjemena navedena takav da su trouglovi ABC i ACD jednako orijentisani (oba u smjeru kretanja kazaljke na satu) pa se možemo koristiti formulom (3). Nalazimo

$$P=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\,|\,14-24-27+11\,|=13.$$

Na isti način, vodeći opet računa o redoslijedu tjemena (dakle, o orijentaciji trouglova), možemo izračunati površinu petougla koristeći se njegovim razlaganjem na trouglove. Dobijamo formulu

$$(4)\qquad P=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|$$

ako su tjemena tog petougla $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$, $E(x_5, y_5)$ i, obilazeći ih redom, obilazimo petougao u jednom od mogućna dva smjera.

Zadaci

1. Izračunati površinu trougla ako su mu data tjemena:
   a) $A(-4,2)$, $B(-7,-3)$, $C(3,2)$; $[P=35/2]$.
   b) $A(1,3)$, $B(5,5)$, $C(7,-4)$; $[P=20]$.
2. Izračunati površinu četverougla ako su mu data tjemena:
   $A(2,4)$, $B(4,6)$, $C(1,6)$, $D(-1,3)$; $[P=13/2]$.
3. Izračunati površinu petougla ako su mu data tjemena:
   $A(-5,-2)$, $B(-1,4)$, $C(4,5)$, $D(5,-2)$, $E(-1,-6)$; $[P=68]$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија