Ристо Малчески, Македонија
Алија Муминагиќ, Данска

НЕКОИ РЕЛАЦИИ ЗА ФИБОНАЧИЕВИТЕ И ЛУКАСОВИТЕ БРОЕВИ

Во многу области во математиката се појавуваат низата Фибоначиеви броеви (Leonardo Pisano Fibonacci, 1170-1250, италијански математичар) и низата Лукасови броеви (Edonard Lukas, 1842-1891, француски математичар):

1) Броевите определени со $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, за $n = 0,1,2,3,...$ ги нарекуваме Фибоначиеви броеви. Користејќи ги хомогените диференцни равенки од втор ред може да се докаже дека $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$, за $n = 0,1,2,3,...$, (види [3]).

2) Броевите определени со $L_1 = 1, L_2 = 3$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, за $n = 1,2,3,...$ ги нарекуваме Лукасови броеви. Карактеристичната равенка на низата Лукасови броеви е $r^2 - r + 1 = 0$ и нејзини решенија се $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ (види [5]). Значи, општото решение на $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ е

$$L_n = A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Од почетните услови $L_1 = 1, L_2 = 3$ го добиваме системот равенки

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,\ A\frac{3+\sqrt{5}}{2} + B\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3,$$

чие решение е $A = B = 1$. Според тоа, $L_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, за $n = 1,2,3,...$

Задача 1. Докажи дека за низите Фибоначиеви броеви $\{F_n\}$ и Лукасови броеви $\{L_n\}$ важи:

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n,\ \text{за}\ n = 1,2,3,... . \tag{1}$$

Решение. *Прв начин.* За $n = 1,2,3,...$ имаме:

$$\begin{aligned} F_{n+1} + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}] + \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + 1] - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 + 1] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \frac{10+2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \frac{10-2\sqrt{5}}{4} \\ &= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n = L_n. \end{aligned}$$

Втор начин. Ќе користиме математичка индукција. Имаме:

$$F_2+F_0=1+0=1=L_1 \text{ и } F_3+F_1=2+1=3=L_2$$

т.е. равенството (1) е точно за $k=1$ и $k=2$.

Нека претпоставиме дека равенството (1) е точно за k и $k+1$, т.е. дека важи

$$F_{k+1}+F_{k-1}=L_k \text{ и } F_{k+2}+F_k=L_{k+1}.$$

Ги собираме горните равенства и ако ги искористиме рекурентните формули со кои се зададени низите $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$ добиваме

$$\begin{aligned}&F_{k+2}+F_k+F_{k+1}+F_{k-1}=L_{k+1}+L_k\\&(F_{k+2}+F_{k+1})+(F_k+F_{k-1})=L_{k+1}+L_k\\&F_{k+3}+F_{k+1}=L_{k+2},\end{aligned}$$

т.е. (1) важи и за $k+2$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n. ■

Задача 2. Докажи деказа низата Фибоначиеви броеви $\{F_n\}$ важи

$$F_{n+2}+F_{n-2}=3F_n, \tag{2}$$

за $n=0,1,2,3,...$.

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\begin{aligned}F_{n+2}+F_{n-2}&=(F_n+F_{n+1})+F_{n-2}=F_n+(F_{n-1}+F_n)+F_{n-2}\\&=2F_n+(F_{n-1}+F_{n-2})=2F_n+F_n=3F_n.\end{aligned}$$

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}F_{n+2}+F_{n-2}&=\tfrac{1}{\sqrt5}[(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n+2}-(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n+2}]+\tfrac{1}{\sqrt5}[(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-2}-(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-2}]\\
&=\tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-2}[(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^4+1]-\tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-2}[(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^4+1]\\
&=\tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-2}\cdot[(\tfrac{3+\sqrt5}{2})^2+1]-\tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}\cdot[(\tfrac{3-\sqrt5}{2})^2+1]\\
&=\tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-2}(\tfrac{7+3\sqrt5}{2}+1)-\tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-2}(\tfrac{7-3\sqrt5}{2}+1)\\
&=\tfrac{3}{\sqrt5}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-2}\cdot\tfrac{3+\sqrt5}{2}-\tfrac{3}{\sqrt5}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-2}\cdot\tfrac{3-\sqrt5}{2}\\
&=\tfrac{3}{\sqrt5}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-2}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^2-\tfrac{3}{\sqrt5}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-2}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^2\\
&=3\cdot\tfrac{1}{\sqrt5}[(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^n-(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^n]=3F_n,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Задача 3. Докажи дека за низите Фибоначиеви броеви $\{F_n\}$ и Лукасови броеви $\{L_n\}$ важи:

$$L_{n+1}+L_{n-1}=5F_n. \tag{3}$$

Решение. *Прв начин*. Од (1) следува

$$F_{n+2}+F_n=L_{n+1}, \tag{4}$$

$$F_n+F_{n-2}=L_{n-1}. \tag{5}$$

Ги собираме (4) и (5), а потоа ако го искоритиме равенството (2) добиваме

$$L_{n+1}+L_{n-1}=F_{n+2}+F_{n-2}+2F_n=3F_n+2F_n=5F_n,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}
L_{n+1}+L_{n-1}&=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}+(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}\\
&=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2}+1]+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}[(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2}+1]\\
&=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}+1)+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}(\tfrac{3-\sqrt{5}}{2}+1)\\
&=(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}\cdot\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}\cdot\tfrac{5-\sqrt{5}}{2}\\
&=\sqrt{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}]\\
&=5\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}]=5F_n,
\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ■

Во [1] е докажан Касиниевиот идентитет (Jean Dominique Cassini, 1625-1712, француски математичар):

$$F_{n+1}\cdot F_{n-1}=F_n^2+(-1)^n, \tag{6}$$

а во [3] е докажан следнава негова генерализација:

$$F_{n+m}\cdot F_{n-m}=F_n^2+(-1)^{n+m-1}F_m^2,\ n>m. \tag{7}$$

Ќе дадеме докази на (6) и (7), кои се различни од доказите во [1] и [3]. Имаме:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}\cdot F_{n-1}&=\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}-(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2}(\tfrac{1-5}{4})^{n-1}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2}(\tfrac{1-5}{4})^{n-1}]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}+(-1)^n(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}+\tfrac{3-\sqrt{5}}{2})]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}-2(-1)^n]+(-1)^n\\
&=[\tfrac{1}{\sqrt{5}}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n})]^2+(-1)^n\\
&=F_n^2+(-1)^n,
\end{aligned}$$

т.е. точно е равенството (6). ■

$$\begin{aligned}
F_{n+m}\cdot F_{n-m}&=\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+m}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+m}]\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-m}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-m}]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}-(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m}(\tfrac{1-5}{4})^{n-m}-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m}(\tfrac{1-5}{4})^{n-m}]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}+(-1)^{n-m+1}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m})]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}+2(-1)^{n+1}+(-1)^{n-m+1}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m}-2(-1)^m+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m})]\\
&=\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n}-2(-1)^n+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n}]+(-1)^{n-m+1}\tfrac{1}{5}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{2m}-2(-1)^m+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{2m}]
\end{aligned}$$

$$=[\tfrac{1}{\sqrt{5}}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n)]^2+(-1)^{n-m+1}[\tfrac{1}{\sqrt{5}}((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^m-(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^m)]^2$$
$$=F_n^2+(-1)^{n-m+1}F_m^2=F_n^2+(-1)^{n-m+1}(-1)^{2m-2}F_m^2=F_n^2+(-1)^{n+m-1}F_m^2,$$

т.е. точно е равенството (7). ■

Задача 4. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m,n) такви што $m\,|\,(n^2+1)$ и $n\,|\,(m^2+1)$.

Решение. Ќе докажеме, дека сите парови од видот $(n,m)=(F_{2k-1},F_{k+1})$, каде F_s е $s-$тиот Фибоначиев број го задоволува условот на задачата. Ако во (7) земеме $n=2k+1$ и $m=2$, бидејќи $F_2=1$, добиваме

$$F_{2k+1}^2+1=F_{2k-1}F_{2k+3}. \tag{8}$$

Последното може непосредно да се докаже со ндукција. Навистина, $F_3^2+1=F_1F_5$, т.е. идентитетот важи за $k=1$. Нека претпоставиме дека идентитетот важи за $k-1$, т.е. $F_{2k-1}^2+1=F_{2k-3}F_{2k+1}$. Тогаш ако змеме предвид дека според (2) важи $F_{2k+3}=3F_{2k+1}-F_{2k-1}$, добиваме

$$\begin{aligned}F_{2k-1}F_{2k+3}&=F_{2k-1}(3F_{2k+1}-F_{2k-1})=3F_{2k-1}F_{2k+1}-F_{2k-1}^2\\&=3F_{2k-1}F_{2k+1}-(F_{2k-3}F_{2k+1}-1)=F_{2k+1}(3F_{2k-1}-F_{2k-3})+1\\&=F_{2k+1}^2+1,\end{aligned}$$

т.е. идентитетот важи и за k, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број.

Од равенството (8) следува $F_{2k-1}\,|\,(F_{2k+1}^2+1)$ и $F_{2k+1}\,|\,(F_{2k-1}^2+1)$. ■

Задача 5. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $1\le m,n\le 1981$ се такви што $|n^2-mn-m^2|=1$. Определи ја најголемата вредност на изразот m^2+n^2.

Решение. Прво во множеството природни броеви ќе ја решиме равенката $|n^2-mn-m^2|=1$. Ако $m=n$ добиваме $m=n=1$. Ако парот (m,n), $m\ne n$ е решение на горната равенка тогаш важи $n^2-mn-m^2=1$ или $m^2+mn-n^2=1$. Од $n^2=m^2+mn+1$ следува дека $n>m$. Од втората равенка следува $n-m=\frac{mn-1}{m+n}>0$ т.е. $n>m$. Значи, во секој случај постои $k>0$ таков што $n=m+k$ и ако замениме во $n^2-mn-m^2=1$ добиваме дека $k^2+km-m^2=1$, т.е. парот (k,m) е решение на равенката. Според тоа, ако парот $(m,k+m)$ е решение на равенката, тогаш и парот (k,m) е решение на равенката. Важи и обратното, што значи дека ако парот (k,m) е решение на горната равенка, тогаш и парот $(m,k+m)$ е решение на оваа равенка. Ова значи дека парот $(n-m,m)$ индуцира нов пар (m,n). Сега, парот $(1,1)$ е решение на равенката, па затоа последователно добиваме дека паровите

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,2),\ (5,8),\ (8,13),\ \ldots,\ (987,\ 1597),\ (1597,\ 2584),\ \ldots$$

се решенија на дадената равенка.

Според тоа, решенија на дадената равенка се паровите составени од последователните членови на низата на Фибоначи. Јасно, најголемата вредност на изразот m^2+n^2 при дадените услови е 987^2+1597^2. ■

Да ја разгледаме равенката

$$x^2+y^2=3xy-1. \tag{9}$$

Ако во (9) ставиме $x=F_{2k+1}$, тогаш

$$y^2-3F_{2k+1}y+F_{2k+1}^2+1=0. \tag{10}$$

Сега од (8) и $3F_{2k+1}=F_{2k+3}+F_{2k-1}$ со замена во (9) добиваме

$$y^2-(F_{2k+3}+F_{2k-1})y+F_{2k+3}\cdot F_{2k-1}=0. \tag{11}$$

Понатаму, од Виетовите правила следува дека корените на квадратната равенка (11) се F_{2k-1} и F_{2k+3}. Според тоа, ако го знаеме $x=F_{2k+1}$, тогаш од (10) можеме да ги определиме корените F_{2k-1} и F_{2k+3}.

Да ја разгледаме равенката

$$x^2+y^2=3xy+1. \tag{12}$$

Ако во (12) ставиме $x=F_{2k}$, тогаш

$$y^2-3F_{2k}y+F_{2k}^2-1=0. \tag{13}$$

Сега во (7) ставиме $n=2k+2$ и $m=2$, добиваме $F_{2k+4}\cdot F_{2k}=F_{2k+2}^2-1$ и како $3F_{2k+2}=F_{2k+4}+F_{2k}$ со замена во (12) добиваме

$$y^2-(F_{2k+4}+F_{2k})y+F_{2k+4}\cdot F_{2k}=0. \tag{14}$$

Понатаму, од Виетовите правила следува дека корените на квадратната равенка (14) се F_{2k} и F_{2k+4}. Според тоа, ако го знаеме $x=F_{2k+2}$, тогаш од (14) можеме да ги определиме корените F_{2k} и F_{2k+4}.

На крајот од нашите разгледувања на некои својства на Фибоначиевите и Лукасовите броеви на читателот му предлагаме самостојно да ги реши следниве задачи:

1. Докажи дека за секој $n\in\mathbb{N}_0$ важи $\mathrm{NZD}(F_n,F_{n+1})=1$.
2. Докажи дека за секои $m,n\geq 1$ важи $F_m\mid F_{mn}$.
3. Докажи дека ако $m=nq+r$, $m,n>0$, тогаш $\mathrm{NZD}(F_m,F_n)=\mathrm{NZD}(F_n,F_r)$.
4. Докажи дека $\mathrm{NZD}(F_m,F_n)=f_{\mathrm{NZD}(m,n)}$.
5. Нека $m,n\geq 1$. Докажи дека $F_m\mid F_n$ ако и само ако $m\mid n$.
6. Докажи дека бројот F_n е најблизок природен број на бројот $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, каде $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

7. Докажи дека $F_{n+1} = [aF_n + \frac{1}{2}]$, за $n \ge 2$, каде $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
8. Докажи дека $F_{n+1} = \frac{1}{2}(F_n + \sqrt{5F_n^2 + 4 \cdot (-1)^n})$, за секој $n \ge 0$.

Литература

1. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А. (2020). Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, armaganka.org.mk
2. Dujella, A. (2000). Fibonaccijevi brojevi, HMD, Zagreb
3. Малчески, Р. (2009). Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје
4. Veljan, D. (2001). Kombinatorika i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb
5. Малчески, Р., Малческа, В. (2020). Математика 5 – дискретна математика (второ издание), Армаганка, Скопје