А. Самарџиски

ХОМОТЕТИЈА, ИНВЕРЗИЈА И ЗАДАЧИТЕ НА АПОЛОНИЈ

Природно-математички факултет — Скопје
Скопје, 1988

Издание на Природно-математичкиот факултет при Универзитетот
„Кирил и Методиј" - Скопје

Редакциски одбор

Д-р Александар Самарџиски
Д-р Дончо Димовски
Д-р Наум Целакоски

Рецензенти

Д-р Наум Целакоски
Д-р Дончо Димовски

Дактилограф

Кирил Наков

Во финансирањето учествува Републичката
заедница за научни дејности на СРМ

Печатено во печатницата ЗГРО „Нова книга" - Скопје
Тираж 1500 примероци

Книшкава ги содржи формулациите на познатите задачи на Аполониј. Сите задачи се решени со линијар и шестар на неколку различни начини. Во првите две глави задачите се решени со методи, чии теоретски основи не излегуваат од рамките на програмите по математика за средното образование. Во третата, пак, глава се дадени теоретски основи за комплетно решавање на овие задачи. Имено, со помош на инверзијата задачите се решени многу кратко и јасно.

Книшкава е наменета, главно, за учениците во средното образование, коишто се интересираат повеќе за математиката, за наставниците по математика во средното и основното образование, како и за студентите по математика. Веруваме дека читателите ќе најдат во оваа книшка многу интересна и корисна материја.

Изложениот материјал беше презентиран пред учениците на летната математичка школа што се одржа во Охрид во јули 1988 година.

Авторот

В о в е д

З А Д А Ч И Т Е
Н А
А П О Л О Н И Ј

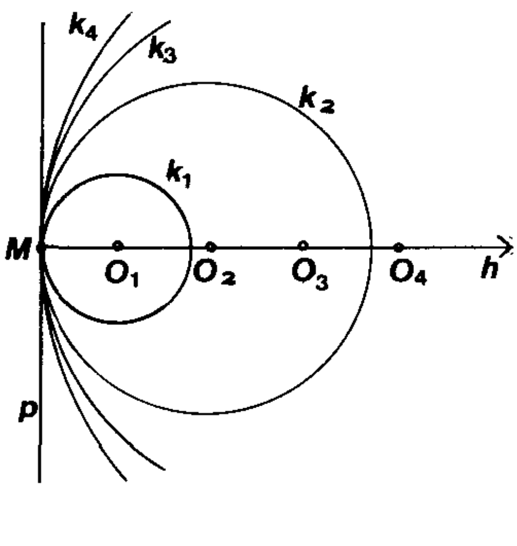
Аполониј Пергски (околу 265-170 г.пр.н.е.), еден од големите грчки математичари, живеел по смртта на Александар Македонски. Учел и творел во Александрија и Пергам при учениците на Евклид. Тој ја напишал работата „За допирањата" за која се знае само од записите на Пап. Некои автори тврдат дека Аполониј за прв пат бара геометриските конструкции да се изведуваат само со линијар и шестар. Во работата „За допирањата" тој ја поставил и решил следнава задача:

A. Да се конструира кружница, којашто допира три дадени кружници,

но не е познат методот со кој тој ја решил задачата.

Како специјални случаи од оваа задача може да се формулираат и други задачи. Но, претходно да видиме зошто секоја права и секоја точка може да се разгледуваат како кружници.

Нека е дадена права p, точка M на неа и полуправа h со почеток во M и нормална на p (црт. 1). Да конструираме кружница k со центар O на h, којашто ја допира правата p во M.



Црт. 1

Нека точката се движи по полуправата h и последователно ги зазема положбите $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, како на црт. 1; соодветните кружници да ги означиме со $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ Тогаш, може да се каже, дека секоја наредна кружница се повеќе се исправа, зашто секоја наредна кружница има помала кривина. Притоа, под кривина се подразбира вредноста на изразот $\frac{1}{r}$, каде што r е радиусот на кружницата. Ова дава за право секоја права да ја разгледуваме како кружница, имено како „кружница со бесконечно голем радиус".

Исто така, и секоја точка може да се разгледува како кружница и тоа како „кружница со радиус нула" коешто следува директно од дефиницијата на кружница.

Според овој договор, како гранични случаи од задачата на Аполониј (понатаму задачата A) се следниве задачи:

1. Да се конструира кружница, којашто минува низ три дадени точки.

2. Да се конструира кружница, којашто допира три дадени прави.

3. Да се конструира кружница, којашто минува низ две дадени точки и допира дадена права.

4. Да се конструира кружница, којашто минува низ две дадени точки и допира дадена кружница.

5. Да се конструира кружница, којашто минува низ дадена точка и допира две дадени прави.

6. Да се конструира кружница, којашто минува низ дадена точка и допира дадена права и дадена кружница.

7. Да се конструира кружница, којашто минува низ дадена точка и допира две дадени кружници.

8. Да се конструира кружница, којашто допира две дадени прави и дадена кружница.

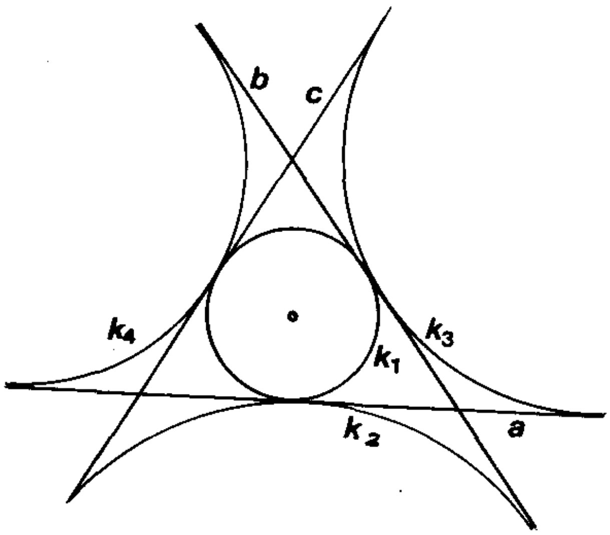
9. Да се конструира кружница, којашто допира дадена права и две дадени кружници.

Ако во задачите A и 1-9 се разгледуваат сите можни заемни положби на дадените елементи, се добиваат многу повеќе задачи.

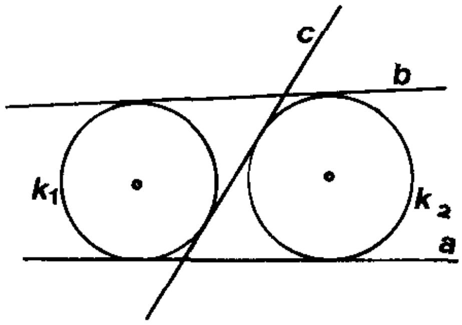
Во елементарната геометрија задачите A и 1-9 се познати како задачи на Аполониј. Понатаму, за пократко, овие задачи ќе ги означуваме на следниов начин: A. k_1, k_2, k_3; 1. A,B,C; 2. a,b,c; 3. A,B,c; 4. A,B,k_1; 5. A,b,c; 6. A,b,k_1; 7. A,k_1,k_2; 8. a,b,k_1; 9. a,k_1,k_2. Бараната, пак, кружница секогаш ќе ја означуваме со k или k^i, i=1,2,..., во случај кога задачата има повеќе од едно решение.

Оваа книшка е посветена на овие задачи и, ќе се трудиме, да укажеме на методите со кои тие може да се решат, да ги решиме, разгледувајќи ги сите можни случаи на заемна положба на елементите. Ќе ги користиме следниве методи: Геометриски места на точки, хомотетија, степен на точка во однос на кружница и инверзија.

Задачите 1 и 2 се познати уште од основното училиште. Имено, познат е начинот на решавање на задачата 1, т.е. конструкција на кружница што минува низ три дадени точки. Ако точките A,B и C не се колинеарни, тогаш бараната кружница k е кружницата опишана околу триаголникот ABC. Ако, пак, точките A,B и C се колинеарни, тогаш, според направениот договор, бараната кружница е правата на која лежат тие точки. Исто така, познат е начинот на решавање на задачата 2, т.е. конструкција на кружница којашто допира три дадени прави a,b и c. Ако било две од правите a,b и c се сечат и сите три не минуваат низ иста точка, тогаш задачата има четири решенија; една од кружниците е кружницата впишана во триаголникот чии страни лежат на дадените прави, а другите три се однадвор впишаните кружници на тој триаголник (црт. 2). Ако две од правите a,b,c се меѓусебно паралелни, а третата ги сече, тогаш задачата има две решенија (црт. 3). Ако правите a,b,c минуваат низ една иста точка M, тогаш, според направениот договор, решение на задачата е точката M. На крајот, ако правите a,b,c се меѓусебно паралелни, тогаш задачата има бесконечно многу решенија, зашто секоја права x, паралелна со a,b и c, е решение на задачата.



Црт. 2



Црт. 3

Следните разгледувања имаат за цел да создадат теориска основа за решавање на задачата A во општ случај, а и да се дадат различни начини за решавање на некои од останатите задачи на Аполониј.

Глава I

ГЕОМЕТРИСКИ КОНСТРУКЦИИ

1. Што е тоа „конструктивна задача"?

Конструктивна задача, всушност, претставува барање да се нацрта некоја геометриска фигура со помош на дадени инструменти за цртање. Старогрчките геометри сметале дека „вистински геометриски конструкции" се оние, што можат да се изведат самo со линијар и шестар.

Во школите отсекогаш се посветувало посебно внимание на такви конструкции, што се изводливи само со линијар и шестар; *во оваа книшка ќе сретнуваме само такви конструкции.*

Решавањето на една конструктивна задача се состои не само во цртежот, во конструкцијата на фигурата, туку, најчесто, во одговорот на прашањето **како** да се изведе таа конструкција и во доказот дека таа е **можна**.

Инаку, под решение на една конструктивна задача ќе подразбираме секоја фигура што ги задоволува условите на задачата

2. Како се решава една конструктивна задача

Посебно важен момент во теоријата на геометриските конструкции се можностите на инструментите со кои тие се изведуваат.

Обично, за линијарот и шестарот, следниве конструкции се земаат како основни и тие ни укажуваат на можностите на овие инструменти:

1^o конструкција на отсечка ако се зададени нејзините крајни точки,

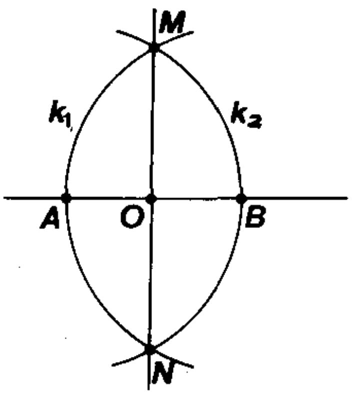
2^o конструкција на права што минува низ две зададени точки,

3° конструкција на кружница, ако се зададени центарот и радиусот,

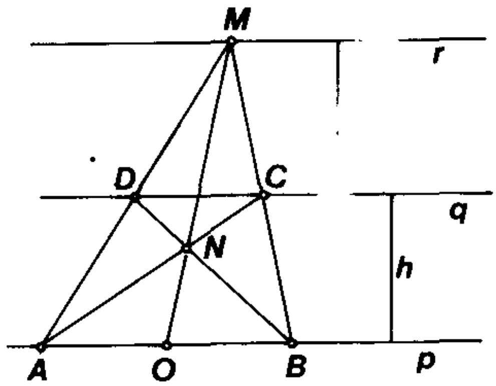
4° конструкција на пресечна точка: на две прави, на права и кружница, на две кружници (ако таква точка постои).

Сега можеме да речеме дека самиот процес на решавање на конструктивна задача се состои во тоа, задачата да се сведе на една конечна низа основни конструкции, по чие извршување ќе можеме да сметаме дека бараната фигура е конструирана.

Следнава задача ќе ја решиме на четири различни начини во зависност од инструментите со кои се изведува конструкцијата.



Црт. 1



Црт. 2

Пример 1. Да се конструира средината на отсечката што е зададена со своите крајни точки A и B.

Решение. С о л и н и ј а р и ш е с т а р. Бараната точка ќе ја добиеме по овие основни конструкции (црт. 1):

-цртаме права низ точките A и B;

-цртаме кружница $к_1(A,\overline{AB})$;

-цртаме кружница $к_2(B,\overline{BA})$;

-ги означуваме со M и N пресечните точки на кружниците $к_1$ и $к_2$;

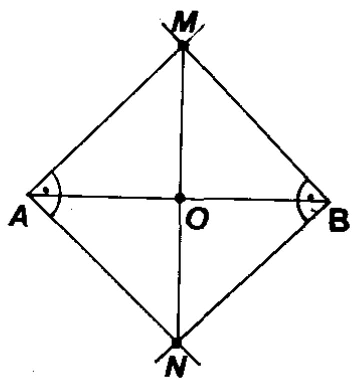
-цртаме права низ точките M и N.

Бараната точка е $O = AB \cap MN$.

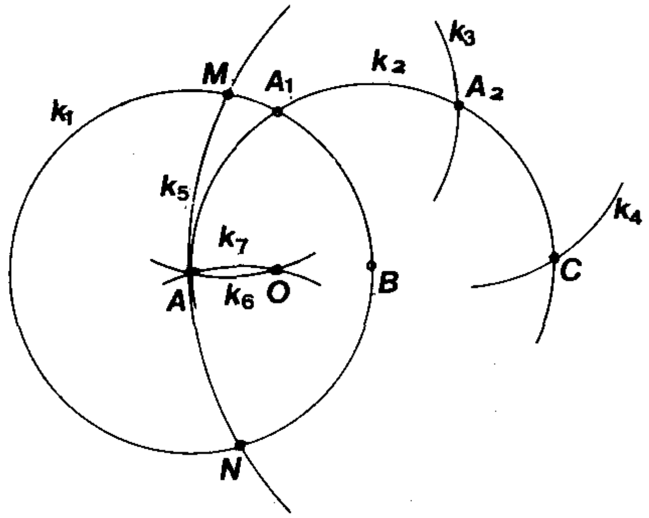
С о д в о с т р а н л и н и ј а р (црт. 2). 1) $p=AB$; 2) прави q и r паралелни со p и на растојание h една од друга колку што е ширината на линијарот; 3) произволна точка M од r; 4) $C=q\cap MB$, $D=q\cap MA$; 5) $N=AC\cap BD$; 6) бараната точка $O=p\cap MN$.

Навистина, AC и BD се тежишни линии во триаголникот ABM, па N е тежиштето, од каде што следува дека MN е тежишна линија, т.е. O е средина на отсечката AB.

С о п р а в а г о л (црт. 3). Со прав агол го конструираме правоаголникот $AMBN$. Бидејќи дијагоналите во правоаголникот се преполовуваат, следува дека бараната точка е $O=MN\cap AB$.



Црт. 3



Црт. 4

С а м о с о ш е с т а р (црт. 4). 1) $k_1(A,\overline{AB})$; 2) $k_2(B,\overline{AB})$; 3) $A_1\in k_1\cap k_2$; 4) $k_3(A_1,\overline{AB})$; 5) $A_2\in k_2\cap k_3$, $A_2\neq B$; 6) $k_4(A_2,\overline{AB})$; 7) $C\in k_2\cap k_4$, $C\neq B$; 8) $k_5(C,\overline{AC})$; 9) $k_1\cap k_5=\{M,N\}$; 10) $k_6(M,\overline{MA})$; 11) $k_7(N,\overline{NA})$; 12) $O\in k_5\cap k_6$, $O\neq A$.

Точката O е средина на отсечката AB. Навистина, според конструкцијата, точките A,B и C се колинеарни и $\overline{AC}=2\overline{AB}$. Триаголниците AOM и AMC се рамнокраки со заеднички агол кај темето A, што значи дека тие се слични, од каде што следува дека:

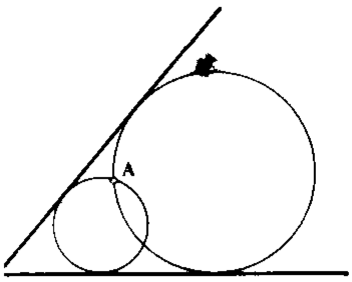
$$\overline{AO}:\overline{AM} = \overline{AM}:\overline{AC},$$
$$\overline{AO}:\overline{AB} = \overline{AB}:2\overline{AB},$$
$$\overline{AO} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}.$$

3. Колку решенија има една конструктивна задача

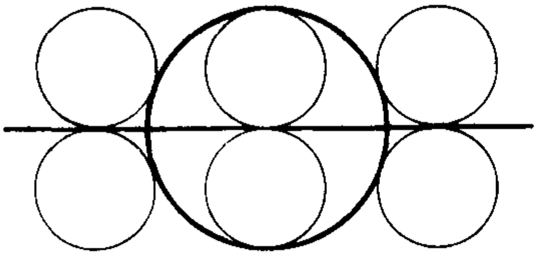
Обично, во конструктивните задачи се бара конструкција на:

-точка; на пример, конструкција на точка што е еднакво оддалечена од три зададени точки (едно решение),

-права или кружница; на пример, конструкција тангенти на дадена кружница, паралелни со дадена права (2 решенија), конструкција на кружница што минува низ зададена точка и ги допира краците на зададен агол (црт. 5, две решенија).



Црт. 5



Црт. 6

Но, може да се бара да се најдат различни положби на некоја фигура; така, на пример, ако треба да се нацрта кружница со зададен радиус r што допира дадена кружница со радиус R=2r и што допира дадена права а што минува низ нејзиниот центар (црт. 6, шест решенија).

Една конструктивна задача, во некои случаи, може и да нема решенија. На пример, не постои кружница што ги допира сите страни на правоаголникот, ако тој не е квадрат.

4. Елементарни конструктивни задачи

Тука ќе дадеме еден список од попрости конструкции кои се среќаваат и се користат во решавањето на повеќе конструктивни задачи. Некои од нив само ќе ги спомнеме, за некои ќе дадеме само скица, а некои ќе ги изведеме целосно.

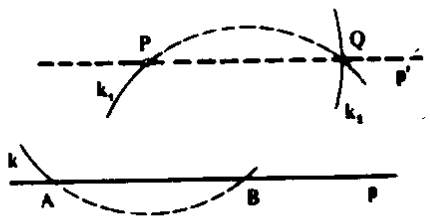
1° Преполовување на зададена отсечка, т.е. конструкција на средна точка (пример 1 од §2).

2° Преполовување на зададен агол, т.е. конструкција на симетралата на тој агол.

3° Нанесување дадена отсечка на полуправа.

4° Конструкција на агол еднаков со зададен агол, т.е. нанесување агол од дадена полуправа.

5° Конструкција на права низ дадена точка P што е паралелна со зададена права p (црт. 7). Цртаме, по ред: 1) $к(P,r)$, r погодно избран; 2) $A=к\cap p$, $B=к\cap p$; 3) $к_1(B,\overline{BP})$, $к_2(P,\overline{AB})$; 4) $Q=к_1\cap к_2$; тогаш $PQ \parallel p$.



Црт. 7

6° Конструкција на права низ зададена точка P што е нормална на зададена права (црт. 8 и 9). Цртаме, по ред:

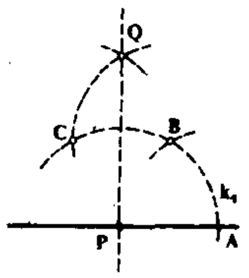
а) $к_1(P,r)$, $к_1\cap p=A$, $к_2(A,r)$, $к_2\cap к_1=B$, $к_3(B,r)$, $к_3\cap к_1=C$, $к_4(C,r)$, $к_4\cap к_3=Q$; $PQ\perp p$.

б) $к(P,r)$, $к\cap p=\{A,B\}$, $к_1(A,r)$, $к_2(B,r)$, $к_1\cap к_2=Q$; $PQ\perp p$.

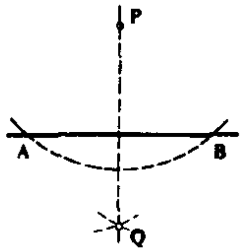
7° Конструкција на збирот и разликата на две отсечки.

8° Делење на отсечка во даден однос.

9° Конструкција на триаголник ако се зададени а) три страни, б) страна и два агла, в) две страни и зафатен агол.

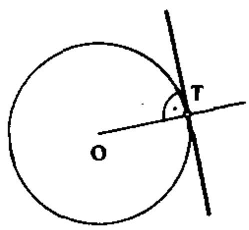


Црт. 8

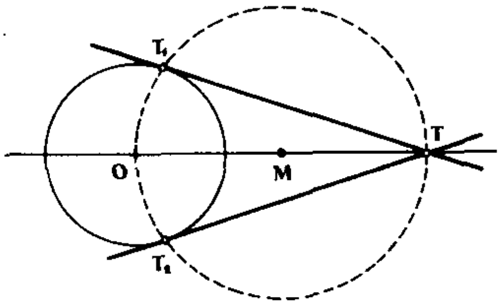


Црт. 9

10° Конструкција на тангента на зададена кружница к што минува низ зададена точка T (црт. 10 и 11):



Црт. 10



Црт. 11

а) Ако T е точка од кружницата, тогаш се конструира нормала во T на правата OT (види 6°);

б) Ако T е надворешна точка за кружницата к, тогаш на кружницата к треба да се определи таква точка T_1, што $\sphericalangle TT_1O$ да е прав агол; според Талесовата теорема, точката T_1 ќе лежи и на кружницата $к_1$ за која отсечката OT е дијаметар. Сега, конструкцијата ќе оди по овој редослед: се конструира средината M на отсечката OT; кружницата $к_1(M,\overline{OM})$; пресечните точки T_1 и T_2 на $к_1$ и к; правите TT_1 и TT_2 се бараните тангенти.

11° Конструкција на правоаголен триаголник ако се зададени хипотенузата и едната катета.

12° Конструкција на тангента на зададена кружница што е паралелна со зададена права.

√ 13° Конструкција на четврта геометриска пропорционала $(x = \frac{ab}{c})$.

14^{o} Конструкција на средна геометриска пропорционала ($x = \sqrt{ab}$).

15^{o} Конструкција на отсечката $x = \sqrt{a^2+b^2}$.

5. Решавање на конструктивна задача

При решавањето на една конструктивна задача најпрво треба да се согледаат случаите со кои се исцрпуваат сите можни избори на зададените елементи од задачата, т.е. да се согледаат сите можни фигури (ситуации) што ги овозможуваат тие елементи. Потоа, за секој од овие случаи, по можност, да се согледа дали задачата има решение.

На пример, елементите на задачата: „да се конструира тангента на зададена кружница што минува низ зададена точка", дозволуваат три случаи (ситуации):

-точката лежи на кружницата; задачата има едно решение;

-точката е надворешна за кружницата; задачата има две решенија; и

-точката е внатрешна за кружницата; задачата нема решение.

Инаку, се препорачува процесот на решавањето на една конструктивна задача да ги има овие етапи: анализа, конструкција, доказ и дискусија.

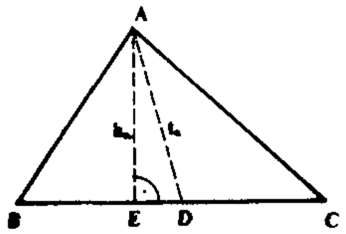
А н а л и з а. Анализата на задачата е подготвителна етапа, но, исто така, и најважна, бидејќи ја подготвува конструкцијата, односно, го дава клучот на решението.

Анализата има за цел да се согледаат можните зависности (врски) меѓу бараната фигура и дадените елементи. Тоа се постигнува со помош на скициран цртеж (со слободна рака), на кој се претставени и зададената фигура и бараната фигура во таква положба, како што ја дозволуваат условите на задачата.

Обично, анализата почнува со правење на цртежот и тоа, речиси секогаш, со зборовите: „Да претпоставиме дека задачата е решена". Потоа, внимателно го посматраме цртежот на бараната фигура, стремејќи се да ги изнајдеме зависностите меѓу дадените елементи и фигурата што би овозможила задачата да се сведе на попроста, веќе позната задача.

Пример 2. Да се конструира триаголник со зададени a, t_a, h_a.

Нека задачата е решена и нека ΔABC (црт. 12) е бараниот триаголник. Да го разгледаме цртежот, на кој се нацртани t_a и h_a. Лесно се уочува дека правоаголниот триаголник AED може да



Црт. 12

се конструира, зашто се познати хипотенузата t_a и катетата h_a. Значи, од зададените t_a и h_a може да се конструира помошна слика, т.е. ΔAED, а потоа и триаголникот ABC (треба само на правата ED, од точката D, да се нанесе во двете насоки растојанието $\frac{a}{2}$ и ќе се добијат темиња B и C).

Конструкција. По извршената анализа се согледуваат кои основни конструкции (или некои веќе познати) треба да се направат и се пристапува кон нивното реализирање.

Доказ. Со доказот сакаме да потврдиме дека конструираната фигура навистина ги задоволува сите услови на задачата.

Дискусија. Обично, уште во анализата се определуваме кој метод ќе го употребиме при конструкцијата на бараната фигура. При таа конструкција најчесто се ограничуваме да бараме едно решение. За потполно решавање на задачата секогаш треба да се продискутираат следниве прашања:

-дали при различен избор на дадените елементи, т.е. дали секогаш, може да се изведе конструкцијата,

-колку решенија има задачата при секој можен избор на зададените елементи.

Дискусијата има за цел да ги изнајде условите при кои задачата е решлива, како и да го определи бројот на решенијата.

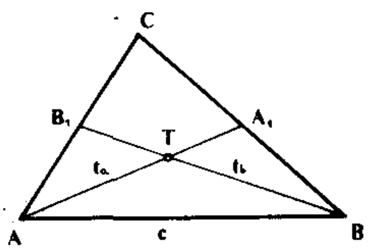
Обично, дискусијата се спроведува така, што конструкцијата се проследува чекор по чекор и секој чекор посебно се разгледува: дали е можен, на колку начини може да се изведе, итн.

Со наредниов пример ќе ги илустрираме спомнатите етапи на решавање на конструктивна задача. Притоа ќе ги наведеме сите нужни подробности на процесот на решавањето.

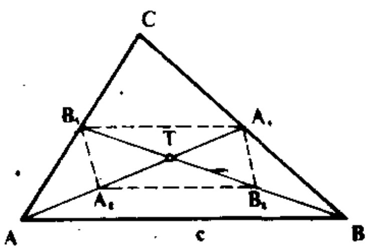
Пример 3. Да се конструира триаголник од зададените елементи: една страна и тежишните линии на другите две страни, т.е. c, t_a, t_b.

Решение. А н а л и з а. Нека задачата е решена (црт. 13) и притоа $\overline{AB}=c$, $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$, т.е. A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC, соодветно. Тежишните линии AA_1 и BB_1 се сечат во тежиштето T, и притоа $\overline{AT}=\frac{2}{3}\overline{AA_1}$, $\overline{BT}=\frac{2}{3}\overline{BB_1}$.

Триаголникот ABC ќе биде конструиран ако се определат неговите темиња. Бидејќи е зададена страната c, лесно може да се конструираат двете темиња A и B (ако се конструира отсечката $c=\overline{AB}$). Останува уште темето C.



Црт. 13



Црт. 14

Разгледувајќи го црт. 13, можеме да согледаме дека:

-C е пресек на полуправите AB_1 и BA_1;

-A_1 и B_1 лежат на полуправите AT и BT и притоа $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$.

Значи, треба да се конструира точката T;

-точката T може да се определи како теме на триаголникот ABT со страни $\overline{AB}=c$, $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{BT}=\frac{2}{3}t_b$.

К о н с т р у к ц и ј а. Значи,

-конструираме ΔABT со страни $\overline{AB}=c$, $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{BT}=\frac{2}{3}t_b$;

-ги цртаме полуправите AT и BT и ги определуваме точките A_1 и B_1, со $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$,

-ги цртаме полуправите AB_1 и BA_1,

-полуправите AB_1 и BA_1 се сечат во C и го определуваат третото теме на бараниот триаголник.

Д о к а з. Да го разгледаме црт. 14, каде што точките A_2 и B_2 се средини на AT, односно на BT, т.е. $\overline{A_2T}=\frac{1}{3}t_a$; $\overline{B_2T}=\frac{1}{3}t_b$. Четириаголникот $A_1B_1A_2B_2$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се преполовуваат со пресечната точка T. Од тоа следува

$$\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1}, \quad \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_1B_1}. \tag{1}$$

Отсечката A_2B_2 ги поврзува средините на две страни на ΔABT, па, според тоа, имаме

$$\overline{A_2B_2} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}, \quad A_2B_2 \parallel AB \tag{2}$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека

$$\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}, \quad A_1B_1 \parallel AB,$$

од каде што следува дека точките A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC на ΔABC, односно дека отсечките $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$ се навистина зададените тежишни линии.

Д и с к у с и ј а. Триаголникот ABT со страни c, $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ може да се конструира ако и само ако $c<\frac{2}{3}(t_a+t_b)$ и $c>\frac{2}{3}|t_a-t_b|$, додека другите конструкции секогаш се изведливи.

Значи, задачата ќе има единствено решение, ако зададените отсечки c, t_a, t_b, го задоволуваат условот

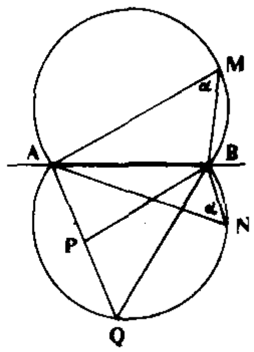
$$\frac{2}{3}|t_a-t_b| < c < \frac{2}{3}(t_a + t_b).$$

6. Геометриско место на точки

Една геометриска фигура се дефинира како множество точки; секое множество точки можеме да го наречеме и геометриско место на точки. Значи, определување на едно геометриско место на точки (геометриска фигура) всушност, е една задача за образување на множество точки според некој признак.

Пример 4. Да се најде геометриско место на точки од кои една зададена отсечка „се гледа" под даден агол.

Решение. А н а л и з а. Нека зададената отсечка AB и аголот α се нацртани така, што ∡AMB=α (црт. 15). Според теоремата за периферииските агли во кружницата, секоја точка, различна од A и од B, на лакот ABM на кружницата што минува низ точките A, M и B, може да е теме на периферииски агол еднаков со α.



Црт. 15

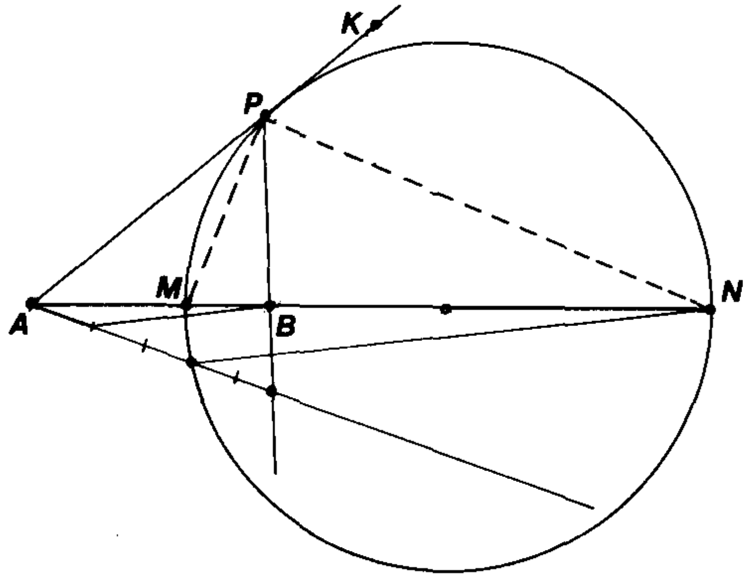
Исто така, ако се конструира аголот α и во другата полурамнина, определена со правата AB, како на црт. 15, α=∡ANB, тогаш отсечката AB ќе се гледа под агол α и од секоја точка, различна од A и B, на лакот ANB на кружницата што минува низ точките A,N,B.

Д о к а з. Од анализата се гледа дека секоја точка од лаците AMB и ANB (различна од A и B) припаѓа на бараното геометриско место. Ќе покажеме дека од секоја друга точка, отсечката AB се гледа под агол различен од α. Нека P е една внатрешна точка (црт. 15); да ја определиме точката Q како пресек на AP и лакот. Аголот APB е надворешен за ΔPQB, па, според тоа, ∡APB > ∡AQB=α. На ист начин се покажува дека ∡APB < α и во случајот кога P е надворешна точка.

Значи, геометриското место на точки од кои зададената отсечка AB се гледа под даден агол α е фигурата образувана од два лака на кружниците што минуваат низ точките A и B и се симетрично расположени во двете полурамнини, образувани од правата AB; точките A и B не му припаѓаат на тоа геометриско место.

Пример 5. Да се најде геометриското место на точки, за кои односот на растојанијата до две дадени точки A и B е еднаков на даден број $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

Решение. Нека M и N се точки од правата AB, така што важи $\overline{AM}:\overline{BM}=\lambda$ и $\overline{AN}:\overline{BN}=\lambda$ (црт. 16) и нека P припаѓа на бараното геометриско место, т.е. $\overline{AP}:\overline{BP}=\lambda$.



Црт. 16

Од $\overline{AM}:\overline{BM}=\overline{AP}:\overline{BP}$ следува дека MP е симетрална на аголот APB, а од $\overline{AN}:\overline{BN}=\overline{AP}:\overline{BP}$ следува дека NP е симетрала на аголот KPB, т.е. $\measuredangle MPN=90^{\circ}$. Значи, бараното геометриско место на точки е кружница со дијаметар MN. Оваа кружница се вика Аполониева кружница за точките A и B.

7. Метод на геометриски места

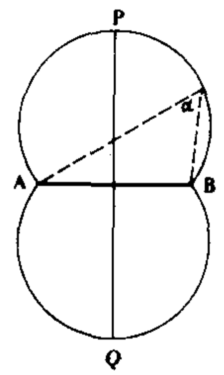
Суштината на овој метод за решавање на конструктивни задачи е во следново: ако бараното решение е точка и ако е подложено на два или повеќе услови, тогаш ги бараме геометриските места на точки за секој услов посебно. Бидејќи секое од геометриските места ќе бидат претставени со фигура, заедничките точки на овие фигури (ако постојат) ќе бидат решенија на задачата.

Прим.р 6. Да се определат точките што се еднакво оддалечени од точките A и B и од кои отсечката AB се гледа под даден агол α.

Решение. Ќе формираме две геометриски места:

1° Точките што се еднакво оддалечени од A и B лежат на права што е нормална на правата AB и што минува низ средината на отсечката AB, т.е. лежат на симетралата на отсечката AB.

2° Точките од кои отсечката AB се гледа под агол α; таа конструкција ја изведовме во претходниот раздел.



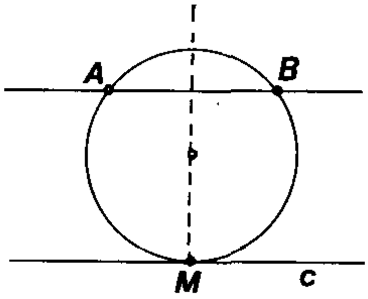
Црт. 17

На црт. 17 се нацртани и двете геометриски места; решенијата на задачата се точките P и Q.

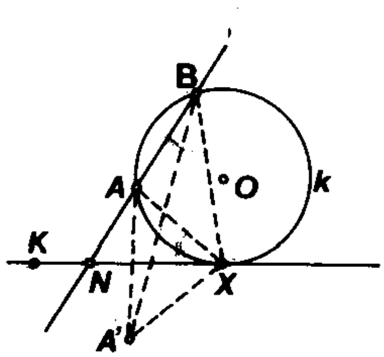
Сега ќе преминеме на решавање на задачите на Аполониј, т.е. на оние специјални случаи, коишто може да се решат со помош на методот на геометриски места.

Задача 3 (A,B,c). Очигледно е дека ако точките A и B лежат во различни полурамнини во однос на правата c или и двете лежат на правата c, тогаш задачата нема решение. Ако $A \in c$, а $B \notin c$, тогаш задачата има единствено решение. Центарот O на бараната кружница ќе лежи на симетралата s на отсечката AB и на правата p што минува низ A и е нормална на c.

Затоа, да претпоставиме дека $A,B \notin c$ и дека A,B лежат во иста полурамнина во однос на правата c. Ако правата AB е паралелна со правата c, задачата има две решенија. Едното решение е кружницата опишана околу триаголникот ABM, каде што M е пресечната точка на симетралата s на отсечката AB со правата c, а другото решение е правата AB (црт. 18 а)). Останува да го разгледаме случајот кога правата AB не е паралелна со правата c.



Црт. 18 а)

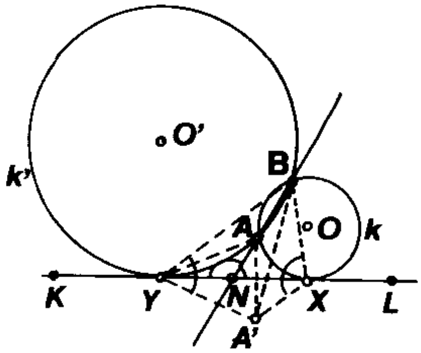


Црт. 18 б)

Да претпоставиме дека задачата е решена и нека k(O,r) е бараната кружница, којашто правата c ја допира во точката X (црт. 18 б)). Ако A' е симетричната точка на A во однос на правата c, тогаш:

$$\measuredangle A'XB = \measuredangle A'XN + \measuredangle NXB = \measuredangle AXN + \measuredangle NXB =$$
$$= \measuredangle ABX + \measuredangle NXB = \measuredangle KNB.$$

Значи, точката X лежи на геометриското место на точки Г од кои отсечката A'B се гледа под агол $\alpha=\measuredangle KNB$ и тоа на оној лак $\overline{k}$ од Г кој лежи во полурамнината во однос на правата A'B која не ја содржи точката K. Следствено, $X=\overline{k}\cap c$.



Црт. 19

Ако Y е пресечната точка на правата с со лакот кој лакот $\bar{k}$ го дополнува до кружница (црт. 19), тогаш

$$\measuredangle A'YB = 180^\circ - \measuredangle A'XB = 180^\circ - \measuredangle KNB = \measuredangle LNB,$$

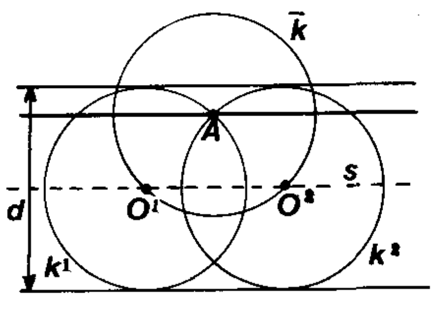
од каде што следува дека и кружницата што минуваниз точките A,B и Y е исто така решение на задачата.

Следствено, задачата во овој случај има точно две решенија.

Задача 4 (A,B,k_1). Очигледно дека, ако една од точките е внатрешна, а другата надворешна за кружницата k_1 или, пак, и двете лежат на k_1, тогаш задачата нема решение.

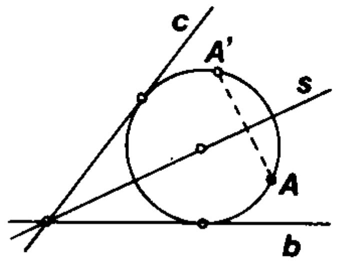
Овде ќе го разгледаме специјалниот случај кога $A\in k_1$, а $B\notin k_1$. Ако $k(O,r)$ е бараната кружница, тогаш O лежи на правата O_1A и на симетралата s на отсечката AB. Значи, ако s и O_1A не се меѓусебно паралелни, т.е. ако AB не е тангента на k_1, тогаш задачата има единствено решение и $O=s\cap O_1A$; ако, пак, правата AB е тангента на k_1, тогаш решение на задачата е правата AB.

Задача 5 (A,b,c). Да го разгледаме прво случајот кога правите b и c се меѓусебно паралелни и точката A лежи меѓу нив (црт. 20). Ако d е растојанието меѓу b и c, тогаш геометриското место Γ_1 на центрите на кружниците што ги допираат правите b и c е правата s паралелна со b и c и на растојание $\frac{d}{2}$ од нив; геометриско место, пак, место Γ_2 на центрите на кружниците со радиус $r=\frac{d}{2}$ и што минуваат низ точката A е кружницата $\bar{k}(A,r=\frac{d}{2})$. Значи, центарот O на бараната кружница припаѓа на Γ_1 Γ_2. Задачата има три решенија. Случајот кога A не лежи меѓу b и c разгледај го сам (задачата има единствено решение).



Црт. 20

Нека сега правите b и c се сечат. Ако $A=b\cap c$, тогаш решение е точката A. Ако $A\in b$, $A\notin c$, тогаш задачата има две решенија; центрите O^1 и O^2 на бараните кружници се пресечните точки на нормалата p на b во A и симетралите s_1 и s_2 на аглите образувани со правите b и c. Затоа, да претпоставиме дека $A\notin b$ и $A\notin c$ (црт. 21). Ако $к(O,r)$ е бараната кружница, тогаш



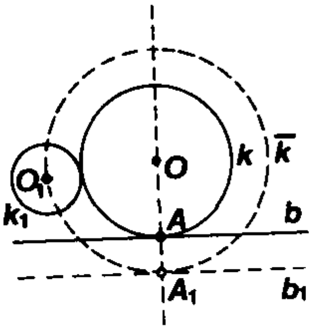
Црт. 21

нејзиниот центар O ќе лежи на симетралата s на аголот образуван од b и c каде што лежи точката A, а ќе минува и низ точката A' симетрична на A во однос на s. Значи, во овој случај задачата се сведува на задачата 3, конструкција на кружница што минува низ точките A,A' и ја допира правата b.

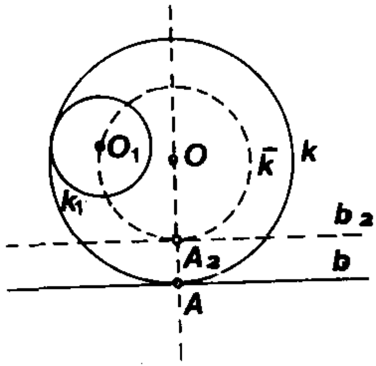
Задача 6 $(A,b,к_1)$. Ќе разгледаме два специјални случаи.

Нека $A\in к_1$ и нека t е тангентата на $к_1$ во A; задачата се сведува на задача 5 (A,b,t). Ако правата b минува низ A и ја сече кружницата $к_1$, решение е точката A; ако b и t се меѓусебно паралелни и $b\neq t$, задачата има едно решение; ако $b = t$, задачата има бесконечно многу решенија; во останатите случаи задачата има две решенија.

Нека $A\in b$, $A\notin к_1$ и нека бараната кружница $к(O,r)$ ја допира кружницата $к_1$ однадвор (црт. 22); тогаш кружницата $\bar{к}(O,r+r_1)$ ќе минува низ точката O_1 и ќе ја допира правата b_1 во точката A_1, каде што b_1 е права паралелна со b и на растојание r_1 од b, а $A_1=OA\cap b_1$. Конструкцијата на кружницата $\bar{к}$ се сведува на задачата 3 (O_1,A_1,b_1), а потоа лесно се конструира и бараната кружница.



Црт. 22



Црт. 23

Слично се решава и случајот кога $A \in b$, $A \notin k_1$ и бараната кружница $k(O,r)$ ја допира кружницата k_1 однатре (црт. 23).

Задача 7 (A,k_1,k_2). Очигледно дека задачата нема решение кога точката A е внатрешна за една од кружниците k_1,k_2, а надворешна за другата или, пак, кога кружниците k_1 и k_2 се сечат во точката A. Ако k_1 и k_2 се допираат во точката A, задачата има бесконечно многу решенија.

Ќе разгледаме два други специјални случаи.

Нека кружниците k_1 и k_2 се расположени произволно и нека $A \in k_1$, $A \notin k_2$; ако t е тангентата на k_1 во A, тогаш задачата се сведува на задачата 6 (A,t,k_2).

Нека, сега, k_1 и k_2 се концентрични со центар во точката O_1 и нека $r_1 > r_2$. Геометриското место Γ_1 од центрите на кружниците коишто ги допираат кружниците k_1 и k_2 се состои од две кружници концентрични со дадените и радиуси $r' = \frac{1}{2}(r_1+r_2)$ односно $r'' = \frac{1}{2}(r_1-r_2)$. Геометриското, пак, место Γ_2 од центрите на кружниците со даден радиус (r' или r'') и минуваат низ точката A е кружница со центар A и радиус $r'(r'')$. Тогаш центарот O на бараната кружница, ако таква постои, ќе припаѓа на множеството $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

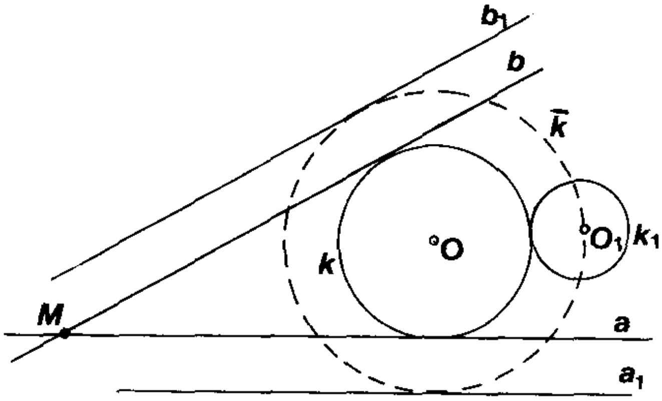
Задачата може да има најмногу четири решенија. Ако $d=\overline{AO}_1$, тогаш: при $d > r_1$ или $0 \leq d < r_2$ задачата нема решение; при $d=r_1$

или $d=r_2$ задачата има две решенија; при $r_2 < d < r_1$ задачата има четири решенија.

Задача 8 (a,b,k_1). Нека правите a и b се меѓусебно паралелни и нека d е нивното растојание. Геометриското место Γ_1 на центрите на кружниците коишто го допираат правите a и b е права s паралелна со a и b и на растојание $\frac{d}{2}$ од a; геометриското, пак, место Γ_2 на центрите на кружниците со даден радиус $\frac{d}{2}$ и кои ја допираат кружницата k_1 се состои од две концентрични кружници (со центар O_1) и радиуси $r_1 + \frac{d}{2}$ односно $\left|r_1 - \frac{d}{2}\right|$. Центарот O на бараната кружница, ако таква постои, ќе припаѓа на множеството $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Задачата може да има најмногу четири решенија. Ако d_1 е растојанието од O_1 до правата s, тогаш: при $d_1 > r_1 + \frac{d}{2}$ задачата нема решение; при $d_1 = r_1 + \frac{d}{2}$ задачата има едно решение; при $r_1 - \frac{d}{2} < d_1 < r_1 + \frac{d}{2}$ задачата има две решенија; при $d_1 = r_1 - \frac{d}{2}$ задачата има три решенија; при $0 \le d_1 < r_1 - \frac{d}{2}$ задачата има четири решенија.

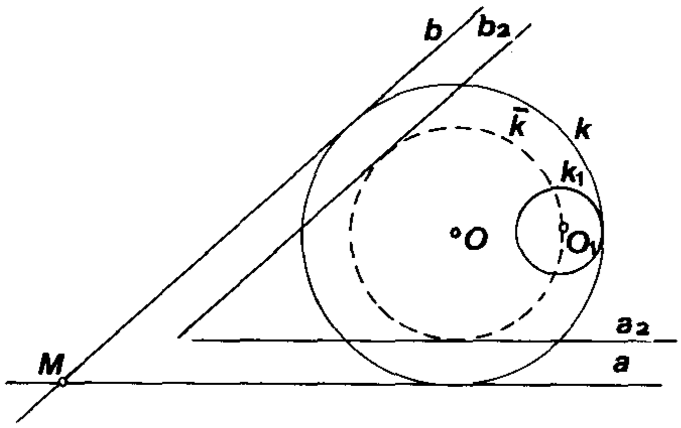
Слично се разгледува случајот $r_1 < \frac{d}{2}$ (задачата има најмногу четири решенија) и случајот $r_1 = \frac{d}{2}$ задачата има најмногу две решенија.



Црт. 24

Нека, сега, правите a и b се сечат во точката M и нека бараната кружница $k(O,r)$ ја допира кружницата $k_1(O_1,r_1)$ однадвор (црт. 24); тогаш кружницата $\bar{k}(O,r+r_1)$ ќе минува низ O_1

и ќе ги допира правите a_1 и b_1 или a_1 и b_2 или a_2 и b_1 или a_2 и b_2, коишто се паралелни со a и b соодветно и на растојание r_1 од нив. Во случајот кога бараната кружница $k(O,r)$ ја допира кружницата $k_1(O_1,r_1)$ однатре (црт. 25), тогаш кружницата $\bar{k}_1(O,r-r_1)$ ќе минува низ точката O_1 и ќе ги допира правите a_1 и b_1 или a_1 и b_2 или a_2 и b_1 или a_2 и b_2. Конструкцијата на кружницата $\bar{k}(O,r+r_1)$ односно $\bar{k}_1(O,r-r_1)$ е всушност задачата 5: (O_1,a_1,b_1), (O_1,a_1,b_2), (O_1,a_2,b_1), (O_1,a_2,b_2), а потоа лесно се конструира и бараната кружница $k(O,r)$.



Црт. 25

Задачата може да има најмногу осум решенија.

Задача 9 (a,k_1,k_2). Ќе разгледаме два специјални случаи.

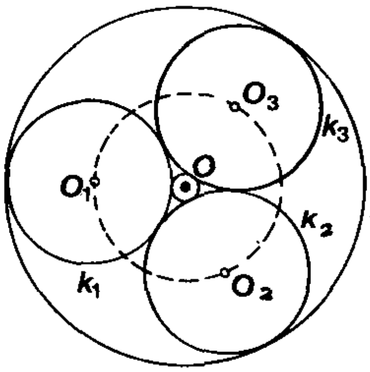
Нека кружниците k_1 и k_2 се концентрични со центар O_1 и радиуси r_1 и r_2 соодветно при што $r_1 > r_2$. Геометриското место Γ_1 од центрите на кружниците коишто ги допираат кружниците k_1 и k_2 се состои од две концентрични кружници со центар O_1 и радиуси $r' = \frac{1}{2}(r_1+r_2)$ и $r'' = \frac{1}{2}(r_1-r_2)$ соодветно. Геометриското, пак, место Γ_2 од центрите на кружниците со даден радиус (r' или r'') и кои ја допираат правата a се состои од две прави p и q паралелни со a и на растојание r' или r'' од неа. Тогаш центарот O на бараната кружница припаѓа на множеството $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Во овој случај задачата може да има четири, две или ниедно решение.

Вториот специјален случај кога $r_1=r_2$ може да се сведе на задачата 3 и за решавање го оставаме на читателот.

Задача $\underline{A}$ $(к_1,к_2,к_3)$. Ќе разгледаме неколку специјални случаи. Јасно е дека, ако две од кружниците $к_1,к_2,к_3$ се соодветно внатрешна и надворешна за третата, тогаш задачата нема решение. Ако, пак, трите кружници минуваат низ иста точка и две по две се допираат во неа, тогаш задачата има бесконечно многу решенија.

Нека кружниците $к_1,к_2,к_3$ се со ист радиус r_1 и нека секоја од нив ги допира другите две (се разбира центрите да не им се колинеарни, црт. 26). Да претпоставиме дека сме конструирале



Црт. 26

кружница $к(O,r)$, којашто ги допира сите три (како на цртежот); тогаш кружницата $\bar{к}(O,R=r-r_1)$ ќе минува низ центрите O_1,O_2,O_3. Кружницата $\bar{к}$ е опишаната кружница околу триаголникот $O_1O_2O_3$, којашто лесно се конструира, а потоа и бараната кружница $к(O,R+r_1)$. Решение на задачата е, исто така, и кружницата $к'(O,R-r_1)$.

Нека две од кружниците се допираат, а третата не минува низ допирната точка. На пример, нека $к_1$ и $к_2$ се допираат во точката M, а $к_3$ не минува низ M. Ако t е тангентата на $к_1$ и $к_2$ во M, тогаш задачата се сведува на задачата 6 $(M,t,к_3)$. Притоа, нè интересираат само оние решенија на оваа задача, коишто се различни од $к_1$ и $к_2$, па задачата ќе има најмногу две решенија.

На крајот, да го разгледаме и случајот кога $к_1(O_1,r_1)$ и $к_2(O_1,r_2)$, $r_1 > r_2$, се концентрични, а $к_3$ е расположена произволно во однос на $к_1$ и $к_2$. Геометриското место $Г_1$ на центрите на кружниците, коишто ги допираат кружниците $к_1$ и $к_2$ се состои од две концентрични кружници со центар во O_1 и радиуси $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ и $\frac{1}{2}(r_1-r_2)$ соодветно. Геометриското, пак, место $Г_2$ од центрите на кружниците со даден радиус $\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ односно $\frac{1}{2}(r_1-r_2)$ се состои од четири концентрични кружници со центар во точката O_3 и радиуси $r_3 + \frac{1}{2}(r_1+r_2)$, $r_3 - \frac{1}{2}(r_1+r_2)$, $r_3 + \frac{1}{2}(r_1-r_2)$ и $r_3 - \frac{1}{2}(r_1-r_2)$ соодветно. Центарот на бараната кружница ќе припаѓа на множеството $Г_1 \cap Г_2$. Задачата може да има најмногу осум решенија.

Глава II

ХОМОТЕТИЈА

1. Дефиниција и својства

Нека O е фиксирана точка во рамнината и $k \neq 0$ даден реален број. Ако A е произволна точка во рамнината, тогаш точката A' што го задоволува условот

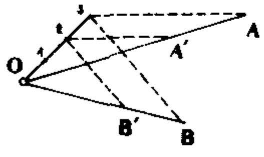
$$\vec{OA'} = k\vec{OA} \qquad (1)$$

е еднозначно определена. Со тоа добиваме една трансформација во рамнината, која се вика <u>хомотетија со центар</u> O и <u>коефициент</u> k. Ќе ја означуваме со $\chi_{O,k}$ или, само, со χ (читај хи). Значи,

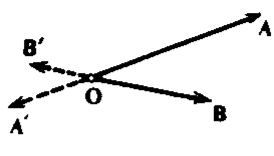
$$\chi_{O,k}(A) = A' \iff \vec{OA'} = k\vec{OA}. \qquad (2)$$

Нека $\chi_{O,k}(O)=O'$; тогаш имаме $\vec{OO'}=k\vec{OO}=k\vec{o}=\vec{o}$, а тоа значи дека $O'=O$, т.е. центарот O е неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,k}$.

Ако $k>0$, тогаш векторите $\vec{OA'}$ и $\vec{OA}$ се исто насочени. Тоа значи дека точката A' лежи на полуправата OA. На пример, ако $k = \frac{2}{3}$, тогаш имаме $\vec{OA'} = \frac{2}{3}\vec{OA}$. Притоа, A' е онаа точка од отсечката OA, која ја дели во однос 2:1 (црт. 1).



Црт. 1



Црт. 2

Ако $k<0$, тогаш векторите $\vec{OA'}$ и $\vec{OA}$ се спротивно насочени. Тоа значи дека точката O е меѓу точките A и A'. На црт. 2 се најдени точките $A' = \chi_{O,-1/2}(A)$ и $B' = \chi_{O,-1/2}(B)$ при дадени A и B.

Специјално, ако $к=-1$ и ако $\chi_{O,-1}(A)=A'$, тогаш имаме $\vec{OA'}=-\vec{OA}$, т.е. О е средина на отсечката AA'. Значи, ако σ_O е централна симетрија со центар во точката О, тогаш $\chi_{O,-1}=\sigma_O$, т.е. хомотетија со коефициент -1 е централна симетрија. Ако, пак, $к=1$, тогаш $\chi_{O,1}=\varepsilon$ - идентичната трансформација.

Значи, идентичноста ε и секоја централна симетрија се хомотетии. Како што знаеме, тие се биекции. Ќе покажеме дека секоја хомотетија е биекција.

Навистина, нека A и B се две точки и нека $\chi_{O,к}(A)=A'$, $\chi_{O,к}(B)=B'$; тогаш имаме $\vec{OA'}=к\vec{OA}$, $\vec{OB'}=к\vec{OB}$, а потоа

$$\vec{A'B'} = \vec{OB'} - \vec{OA'} = к\vec{OB} - к\vec{OA} = к(\vec{OB}-\vec{OA}) = к\vec{AB}.$$

Ако $A \neq B$, тогаш $\vec{AB}\neq\vec{o}$, па од равенството $\vec{A'B'}=к\vec{AB}$, следува $\vec{A'B'}\neq\vec{o}$, т.е. $A'\neq B'$. Значи, хомотетијата $\chi_{O,к}$ е инјекција.

Ако, пак A' е произволна точка и точката A е определена со условот $\vec{OA} = \frac{1}{к}\vec{OA'}$, тогаш имаме $\vec{OA}=к\vec{OA}$, т.е. $\chi_{O,к}(A)=A'$. Значи, хомотетијата $\chi_{O,к}$ е и сурјекција. Според тоа:

<u>Теорема 1</u>. Секоја хомотетија $\chi_{O,к}$ е бијекција и притоа

$$\chi^{-1}_{O,к} = \chi_{O,1/к} \tag{3}$$

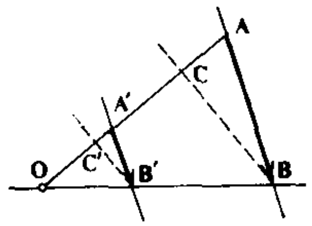
Со доказот дека хомотетијата $\chi_{O,к}$ е инјекција, ја докажавме и следнава теорема:

<u>Теорема 2</u>. Ако $\chi_{O,к}(A)=A'$, $\chi_{O,к}(B)=B'$, тогаш $\vec{A'B'}=к\vec{AB}$, т.е. векторите $\vec{A'B'}$ и $\vec{AB}$ се колинеарни и, притоа, ако $к > o$ тогаш тие се исто насочени, а ако $к < o$, тогаш тие се спротивно насочени.

Од оваа теорема следува дека: секоја хомотетија е еднозначно определена со центарот и со еден пар точки, колинеарни со него.

Навистина, нека O,A и A' се три различни колинеарни точки. Тогаш, векторите $\vec{OA}$ и $\vec{OA'}$ се колинеарни, па постои реален број $к\neq o$ таков што $\vec{OA'}=к\vec{OA}$. Тоа значи дека $\chi_{O,к}(A)=A'$.

Да видиме сега како ќе ја најдеме сликата на произволна точка B при $\chi_{O,к}$. Нека B е точка што не е колинеарна со O и A (црт. 3). За да ја најдеме точката $B'=\chi_{O,к}(B)$, ја повлекуваме правата OB, зашто B′ е колинеарна со O и B. Векторите $\vec{AB}$ и $\vec{A'B'}$ се колинеарни, па значи точката B′ лежи и на правата a′



Црт. 3

што минува низ A′ и е паралелна со правата AB. Од тоа следува дека $B'=OB\cap a'$. Ако, пак, C е колинеарна со точките O и A, тогаш претходно избираме точка B неколинеарна со O и A, ја наоѓаме $B'=\chi_{O,k}(B)$, а потоа, користејќи ја неа, ја наоѓаме и точката $C'=\chi_{O,k}(C)$, (црт. 3).

Задачи

1. Ако $k\neq 1$, тогаш точката O е единствена неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,k}$.

Решение. Нека A е произволна точка за која $\chi_{O,k}(A)=A$; според дефиницијата на хомотетија, ќе имаме $\vec{OA}=k\vec{OA}$, т.е. $(k-1)\vec{OA}=\vec{o}$. Од $k\neq 1$ следува $\vec{OA}=\vec{o}$, т.е. A=O, што значи дека O е единствена неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,k}$.

2. Нека A и A′ се две различни точки. Дали постои хомотетија χ, така што χ(A)=A′?

Решение. Да претпоставиме дека таква хомотетија постои; тогаш нејзиниот центар O е колинеарен со A и A′, а од $A\neq A'$ и од задачата 1, следува дека $O\neq A,A'$.

Обратно, нека O е произволна точка од правата AA′ различна од A и A′ и нека $k=\vec{OA'}:\vec{OA}$; тогаш имаме $\vec{OA'}=k\vec{OA}$, па ако χ е хомотетија со центар O и коефициент k ќе имаме χ(A)=A′.

Следствено, секоја точка O од правата AA′, различна од A и A′ е центар на една таква хомотетија.

3. Нека A,B,A′,B′ се четири различни точки. Дали постои хомотетија χ, така што χ(A)=A′, χ(B)=B′.

Решение. Да претпоставиме дека таква хомотетија χ постои. Ако O е центарот, а к коефициентот на χ, тогаш $O \neq A, B, A', B'$, $k \neq 1$, и, притоа,

$$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}. \tag{4}$$

Обратно, да претпоставиме дека постои реален број $k \neq 0$ и $k \neq 1$, така што важи (4); тогаш правите AA' и BB' се сечат, па нека $O = AA' \cap BB'$. Триаголниците OAB и OA'B' се слични, па следува дека

$$\overline{OA'} : \overline{OA} = \overline{OB'} : \overline{OB} = \overline{A'B'} : \overline{AB} = |k|.$$

Уште повеќе, ќе важи и

$$\overrightarrow{OA'} : \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB'} : \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{AB} = k,$$

што значи дека ако χ е хомотетија со центар O и коефициент к, тогаш $\chi(A)=A'$, $\chi(B)=B'$.

Следствено, постои хомотетија χ, таква што $\chi(A)=A'$, $\chi(B)=B'$ ако и само ако постои реален број $k \neq 0$ и $k \neq 1$, така што важи (4), т.е. ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ се колинеарни но различни.

Да претпоставиме, сега, дека $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$; тогаш четириаголникот A'B'BA е паралелограм, од каде што следува дека $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Ако $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$ и τ е транслација за вектор $\vec{a}$, тогаш $\tau(A)=A'$, $\tau(B)=B'$

2. Слики на некои фигури при хомотетија

Во претходниот дел видовме дека, ако $\chi_{O,k}$ е дадена хомотетија, и ако $\chi_{O,k}(A)=A'$, $\chi_{O,k}(B)=B'$, тогаш $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ (теорема 2), т.е. векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ се колинеарни. Според тоа:

-колинеарни точки при хомотетија се пресликуваат во колинеарни точки,

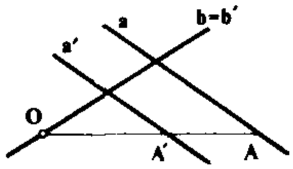
-права при хомотетија се пресликува во права, паралелна со дадената.

Тоа значи, дека ако a е дадена права и $\chi_{O,k}(a)=a'$, тогаш правите a и a' се паралелни. Ако правата a минува низ центарот O на хомотетијата, тогаш, бидејќи $\chi_{O,k}(O)=O$, правата a' ќе минува исто така, низ точката O, т.е. $a'=a$. Значи, секоја права што минува низ центарот O на хомотетијата $X_{O,k}$ се пресликува во себе, т.е.

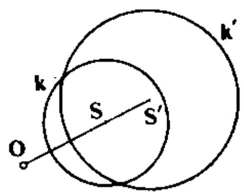
$$O\in a \Longrightarrow X_{O,k}(a) = a.$$

За да ја најдеме правата $a'=X_{O,k}(a)$ доволно е да ја најдеме сликата A' на една точка A од a и потоа да ја конструираме правата што минува низ A' и е паралелна со правата a (црт. 4).

Да видиме сега што претставува сликата на кружницата при хомотетија.



Црт. 4



Црт. 5

Нека $k(S,r)$ е дадена кружница и $X_{O,k}$ дадена хомотетија. Ако M е произволна точка од кружницата $k(S,r)$ и $X_{O,k}(M)=M'$, $X_{O,k}(S)=S'$, тогаш

$$\overline{S'M'} = |k|\overline{SM} = |k|r.$$

Од ова следува дека M' лежи на кружницата $(S',|k|r)$. Значи, сликата на кружницата $k(S,r)$ при хомотетијата $X_{O,k}$ е кружницата со центар $S'=X_{O,k}(S)$ и радиус $|k|r$.

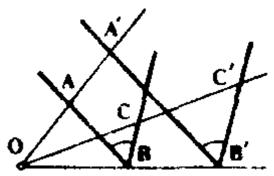
На црт. 5 е претставена сликата на кружницата $k(S,r)$ при хомотетијата $X_{O,3/2}$.

Нека сега е даден агол $\alpha=\measuredangle ABC$ и хомотетија $X_{O,k}$. Ако $X_{O,k}(A)=A'$, $X_{O,k}(B)=B'$, $X_{O,k}(C)=C'$ (црт. 6 и 7), тогаш имаме $\overrightarrow{B'A'}=k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B'C'}=k\overrightarrow{BC}$, т.е. полуправите $B'A'$ и BA, односно $B'C'$ и BC се паралелни и притоа или се исто насочени (ако $k>0$, како на црт. 6) или се спротивно насочени (ако $k<0$, како на црт. 7). Значи, во секој случај $\measuredangle A'B'C'=\measuredangle ABC$, т.е. агол при хомотетија се пресликува во нему еднаков агол.

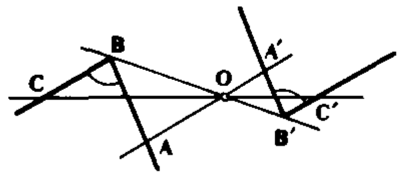
Од тоа, пак, следува:

-заемно нормални прави при хомотетија се пресликуваат во заемно нормални прави,

-секој триаголник при хомотетија се пресликува во нему сличен триаголник.



Црт. 6



Црт. 7

Задачи

1. Дали постојат кружници кои се неподвижни при хомотетијата $\chi_{O,k}$, $k\neq 1$?

Решение. Ако кружницата (S,r) е неподвижна при хомотетијата $\chi_{O,k}$, $k\neq 1$, тогаш мора да биде $\chi(S)=S$ и $r'=|k|r=r$, што значи дека $S=O$ и $k=-1$, т.е. хомотетијата χ е централната симетрија σ_O.

Обратно, при секоја централна симетрија σ_O кружниците (O,r) се неподвижни.

2. Нека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се слични. Во кој случај постои хомотетија χ при која триаголникот ABC се пресликува во $A'B'C'$?

Одговор. Според задача 3 од претходниот параграф, таква хомотетија постои ако и само ако правите AA', BB' и CC' минуваат низ една иста точка.

3. Состав на две хомотетии

Нека χ_1 и χ_2 се хомотетии со центри O_1, O_2 и коефициенти k_1, k_2 соодветно. Се прашуваме што претставува трансформацијата ϕ дефинирана со

$$\phi(A) = \chi_2(\chi_1(A)). \tag{3}$$

Трансформацијата ϕ уште се нарекува и состав на хомотетиите χ_1 и χ_2 и се означува со $\chi_1 \circ \chi_2$.

Прво, да претпоставиме дека $O_1=O_2=O$. Ако $\chi_1(A)=A_1$, $\chi_2(A_1)=A'$, тогаш $\phi(A)=A'$ и, притоа,

$$\vec{OA'} = k_2\vec{OA_1} = k_1k_2\vec{OA}.$$

Значи, ако χ е хомотетија со центар O и коефициент k_1k_2, тогаш $\chi(A)=A'$, т.е. за секоја точка A важи

$$\phi(A) = \chi(A),$$

што значи $\phi=\chi$.

Следствено, состав на две хомотетии χ_1,χ_2 со ист центар O и коефициенти k_1,k_2 соодветно е хомотетија со истиот центар O и коефициент k_1k_2.

Нека, сега, $O_1\neq O_2$ и нека A и B се две различни точки. Ако $\chi_1(A)=A_1$, $\chi_1(B)=B_1$, $\chi_2(A_1)=A'$, $\chi_2(B_1)=B'$, тогаш $\phi(A)=A'$, $\phi(B)=B'$ и, притоа,

$$\vec{A'B'} = k_2\vec{A_1B_1} = k_1k_2\vec{A'B'}.$$

Според задачата 3 од §2, следува дека:

-ако $k_1k_2\neq 1$, тогаш постои хомотетија χ, таква што $\chi(A)=A'$, $\chi(B)=B'$, што значи $\phi=\chi$;

-ако $k_1k_2=1$, тогаш ϕ е транслација.

Следствено, составот $\phi=\chi_1\circ\chi_2$ при $O_1\neq O_2$ е хомотетија ако и само ако $k_1k_2\neq 1$.

Задачи

1. Нека χ_1,χ_2 се две хомотетии со центри O_1,O_2 $(O_1\neq O_2)$ и коефициенти k_1,k_2 $(k_1k_2\neq 1)$ соодветно. Да се најде центарот O_3 на хомотетијата $\chi_3=\chi_1\circ\chi_2$.

Решение. Нека $\chi_2(O_1)=O_1'$; тогаш ќе имаме

$$\chi_3(O_1) = \chi_2(\chi_1(O_1)) = \chi_2(O_1) = O_1'.$$

Од $\chi_2(O_1)=O_1'$ следува дека точките O_2,O_1 и O_1' се колинеарни, а од $\chi_3(O_1)=O_1'$ следува дека точките O_3,O_1 и O_1' се колинеарни. Значи, точките O_1,O_2 и O_3 се колинеарни и, притоа, важи $\vec{O_3O_1'} = k_1k_2\vec{O_3O_1}$. Понатаму имаме:

$$O_1\vec{O}_1' = O_2\vec{O}_1' - O_2\vec{O}_1 = \kappa_2 O_2\vec{O}_1 - O_2\vec{O}_1 = (\kappa_2-1)O_2\vec{O}_1,$$

$$O_1\vec{O}_1' = O_3\vec{O}_1' - O_3\vec{O}_1 = \kappa_1\kappa_2 O_3\vec{O}_1 - \vec{O_3O}_1 = (\kappa_1\kappa_2-1)O_3\vec{O}_1,$$

од каде што следува дека

$$(\kappa_2-1)O_2\vec{O}_1 = (\kappa_1\kappa_2-1)O_3\vec{O}_1,$$

т.е.

$$O_3\vec{O}_1 = \frac{\kappa_2-1}{\kappa_1\kappa_2-1}\,O_2\vec{O}_1.$$

4. Хомотетија на кружници

Во претходниот дел видовме дека при хомотетија, кружница се пресликува во кружница, т.е. ако X е хомотетија со центар O и коефициент κ тогаш кружницата (S,r) се пресликува во кружницата (S',r') каде што

$$S' = X(S), \quad r' = |\kappa| r. \tag{6}$$

Овде ќе покажеме дека кои било две кружници се хомотетични, т.е. дека постои хомотетија која едната кружница ја пресликува во другата.

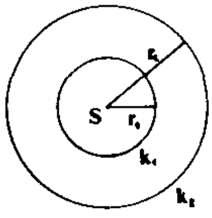
Нека $\kappa_1(S_1,r_1)$ и $\kappa_2(S_2,r_2)$ се две дадени кружници. Ако постои хомотетија X при која кружницата κ_1 се пресликува во κ_2, тогаш нејзиниот коефициент, според (6), мора да биде или r_2/r_1 или $-r_2/r_1$. Од $S_2=X(S_1)$, пак, следува дека центарот O на хомотетијата X мора да лежи на централната линија S_1S_2.

Да ги разгледаме двата случаја кога кружниците: 1° се концентрични и 2° не се концентрични.

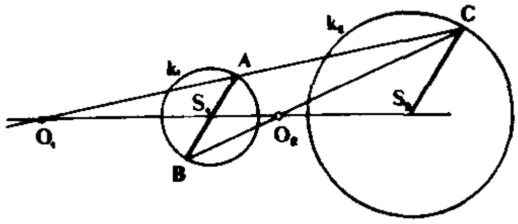
1° Ако $S_1 = S_2 = S$ (црт. 8), тогаш хомотетијата X со центар S и коефициент r_2/r_1 ја пресликува кружницата κ_1 во κ_2.

2° Да претпоставиме, сега, дека $S_1 \neq S_2$ и $r_1 \neq r_2$ (црт. 9). Нека C е произволна точка од кружницата κ_2, а AB дијаметарот на κ_1 што е паралелен со правата S_2C и нека $O_1=S_1S_2\cap AC$, $O_2=S_1S_2\cap BC$. Тогаш хомотетијата X_1 со центар O_1 и коефициент r_2/r_1, односно хомотетијата X_2 со центар O_2 и коефициент $-r_2/r_1$, ја пресликува кружницата κ_1 во кружницата κ_2.

Ако, пак, $r_1=r_2$, тогаш правата AC ќе биде паралелна со правата S_1S_2, но правата BC ја сече S_1S_2, па при хомотетијата χ_2 кружницата k_1 ќе се преслика во кружницата k_2.



Црт. 8



Црт. 9

Со тоа покажавме дека кои било две кружници се хомотетични. Центарот на хомотетијата, во тој случај, се вика и <u>центар на сличност</u> (или центар на хомотетија) на тие кружници.

Од горното разгледување следува дека две концентрични кружници имаат само еден центар на сличност, а неконцентричните кружници може да имаат или два или еден центар на сличност. Во случајот кога кружниците имаат два центра на сличност, едниот се вика <u>надворешен</u> (O_1 на црт. 9), а другиот <u>внатрешен</u> центар на сличност (O_2 на црт. 9).

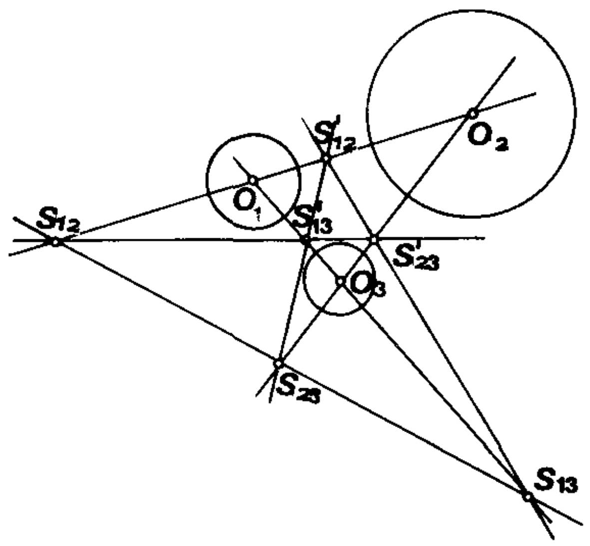
Интересно е да се забележи, дека, ако t е заедничка тангента на две кружници, тогаш таа е или паралелна со централната линија или минува низ еден од центрите на сличноста. Според тоа, за да ги конструираме заедничките тангенти на две кружници, треба да ги најдеме нивните центри на сличност и од нив да ги повлечеме тангентите на едната од кружниците.

Сега, ќе разгледаме една многу интересна задача, иако тешка, која ќе ја користиме во наредната глава за решавање на некои од задачите на Аполониј.

Имено, нека кружниците $k_i(O_i,r_i)$, $i=1,2,3$, се со различни неколинеарни центри и со различни радиуси. Ќе ги определиме заемните положби на центрите на сличност на тие кружници земени две по две.

<u>Решение</u>. Бидејќи $O_1\neq O_2$ и $r_1\neq r_2$ постојат хомотетиите χ_{12} и χ'_{12} со центри S_{12} и S'_{12} и коефициенти r_2/r_1 и $-r_2/r_1$ соодветно при кои кружницата k_1 се пресликува во кружницата k_2.

Слично, постојат хомотетиите χ_{23} и χ'_{23} со центри S_{23} и S'_{23} и коефициенти r_3/r_2 и $-r_3/r_2$ при кои кружницата k_2 се пресликува во кружницата k_3, а при хомотетиите χ_{13} и χ'_{13} со центри S_{13} и S'_{13} и коефициенти r_3/r_1 и $-r_3/r_1$ соодветно кружницата k_1 се пресликува во кружницата k_3 (црт. 10). Точките S_{12} и S'_{12} лежат на правата O_1O_2, S_{23} и S'_{23} на O_2O_3, а S_{13} и S'_{13} на O_1O_3.



Црт. 10

Бидејќи $\frac{r_2}{r_1}\cdot\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_3}{r_1} \neq 1$, следува дека составот $\phi=\chi_{12}\circ\chi_{23}$ е хомотетија со позитивен коефициент $\frac{r_3}{r_1}$ и, притоа, $\phi(k_1)=k_3$, т.е. $\phi=\chi_{13}$, а според задача 1 од претходниот параграф, следува дека точките S_{12}, S_{23} и S_{13} се колинеарни. На ист начин се докажува дека:

-точките S_{12}, S'_{23} и S'_{13} се колинеарни,

-точките S'_{12}, S_{23} и S'_{13} се колинеарни,

-точките S'_{12}, S'_{23} и S_{13} се колинеарни.

Следствено, S_{12}, S'_{12}, S_{23}, S'_{23}, S_{13} и S'_{13} се шест точки кои формираат четири прави, така што на секоја од тие прави лежат по три точки.

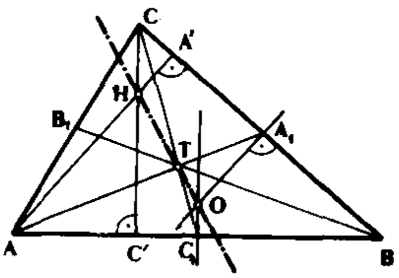
5. Примена на хомотетијата

Ќе решиме неколку задачи кои, во извесна мера ќе ја илустрираат примената на хомотетијата и, посебно, примената на хомотетијата за решавање на некои од задачите на Аполониј.

1. Да се покаже дека тежиштето T, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница за кој било триаголник ABC се колинеарни.

Решение. Нека ABC (црт. 11) е произволен триаголник. Како што знаеме, тежиштето T ги дели тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос 2:1. Од тоа следува дека

$$\vec{TA} = -2\vec{TA_1},\quad \vec{TB} = -2\vec{TB_1},\quad \vec{TC} = -2\vec{TC_1}.$$



Црт. 11

Тоа значи дека, ако X е хомотетија со центар T и коефициент $-\frac{1}{2}$, тогаш

$$X(A) = A_1,\quad X(B) = B_1,\quad X(C) = C_1,$$

т.е. триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се хомотетични со коефициент $-\frac{1}{2}$.

Да ја најдеме точката X(H). Ако CC' е висина на триаголникот ABC, спуштена од темето C, тогаш правата CC' ќе се пресликa со X во права што е паралелна со неа и минува низ точката C_1, т.е. во симетралата на страната AB (зошто?). Аналогно важи и за височините AA′ и BB′. Од тоа следува дека $\chi(H)=O$, што значи $\vec{TO}=-\frac{1}{2}\vec{TH}$, т.е.

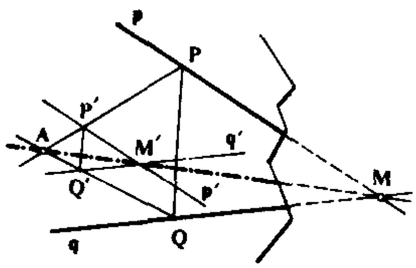
$$\vec{TH} = 2\vec{OT}. \tag{1}$$

Од равенството (1) следува дека точките T, O и H се колинеарни. Уште повеќе, точката T ја дели отсечката HO во однос 2:1.

Правата на која лежат точките T,O и H се вика Ојлерова права.

2. Дадена е точка A и две прави p,q кои се сечат надвор од листот на кој цртаме. Да се конструира правата a=AM, каде што $M=p\cap q$.

Решение. За да ја нацртаме правата a доволно е, на листот на кој цртаме да најдеме една точка, којашто е колинеарна со точките A и M. При секоја хомотетија со центар A, правата a се пресликува во себе, па, значи, ако избереме хомотетија χ со центар во A и таков коефициент што точката $\chi(M)=M'$ е на листот на кој цртаме, тогаш бараната права ќе биде правата AM′. Секако, коефициентот на хомотетијата треба да биде помал од 1.



Црт. 12

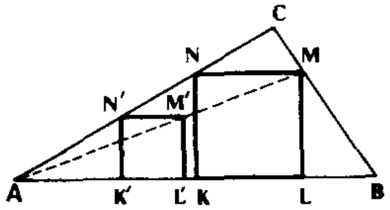
Да избереме произволна точка P од правата p и точка P′ колинеарна со A и P (црт. 12). Нека χ е хомотетија со центар A и коефициент $\frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}}$. Ако $\chi(p)=p'$, $\chi(q)=q'$, тогаш $\chi(M)=M'$ ќе биде точката $p'\cap q'$.

3. Во даден триаголник ABC да се впише квадрат, така што две негови темиња да лежат на основата AB, а другите две на BC и CA соодветно.

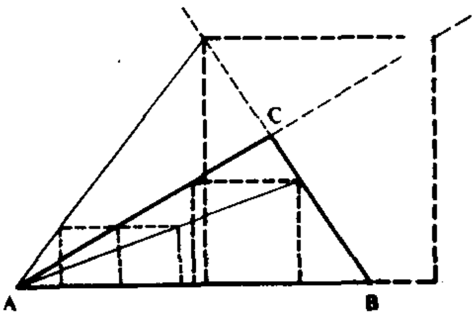
Решение. А н а л и з а. Да претпоставиме дека задачата е решена и KLMN е бараниот квадрат (црт. 13). Ако χ е хомотетија со центар во A и некој коефициент $k\neq 1$, тогаш квадратот KLMN ќе се преслика во квадратот K'L'M'N' при што K' и L' ќе лежат на правата AB, а N' ќе лежи на правата AC (зошто?). Точката, пак, M' нема да лежи на правата BC (зошто?). Ако точката N' ја избереме произволно на страната AC, квадратот K'L'M'N' може лесно да се конструира (црт. 13). Бидејќи M,M' и центарот A на хомотетијата се колинеарни, следува дека M е пресечната точка на правите AM' и BC.

К о н с т р у к ц и ј а. Да избереме произволна точка N' на страните AC. Нека K' е ортогоналната проекција од N' на правата AB, и нека K'L'M'N' е квадрат со страна K'N'. Ако M е пресечната точка на правите AM и BC, а L е ортогоналната проекција на M врз AB, тогаш бараниот квадрат е квадратот KLMN со страна MN.

Д о к а з. Дека конструкцијата е правилна следува од тоа, што хомотетијата со центар A и коефициентот $\overline{AM}:\overline{AM'}$ о пресликува квадратот K'L'M'N' во квадратот KLMN.



Црт. 13



Црт. 14

Д и с к у с и ј а. За да можеме да ја спроведеме дискусијата за тоа кога задачата има решенија, а кога не, треба претходно да се договориме што ќе ни значат зборовите „квадрат впишан во триаголник".

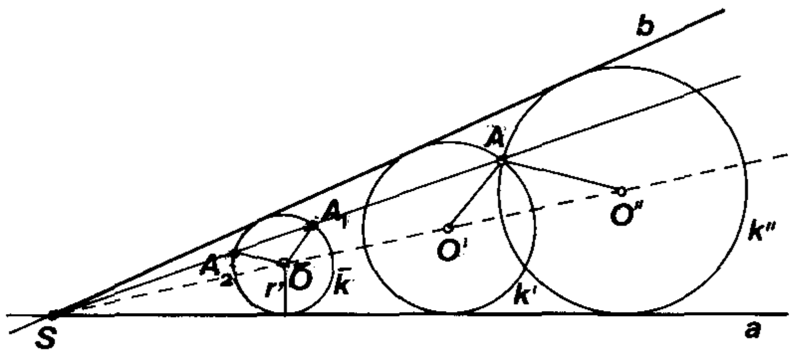
Вообичаено е, под тие зборови да се подразбира квадрат со темиња на страните од триаголникот. Во тој случај, задачата има единствено решение, ако ниеден од аглите $\alpha=\sphericalangle A$, $\beta=\sphericalangle B$ не е тап, а ќе нема решение, ако некој од тие агли е тап (зошто?).

Но, под „квадрат впишан во триаголник" може да се подразбере и „квадрат, чии темиња лежат на страните од триаголникот или на нивните продолженија" (според тоа, квадратот не мора да лежи во триаголникот). Во овој случај, задачата секогаш има решение; притоа, таа има, обично, две решенија (црт. 14), но може да има и само едно (кој е тој случај?).

Да забележиме дека под „многуаголник $\mathbb{F}_1$ впишан во многуаголник $\mathbb{F}_2$" често се подразбира многуаголник $\mathbb{F}_1$, таков, што сите негови темиња да лежат на страните или на продолженијата од страните на многуаголникот $\mathbb{F}_2$; притоа, $\mathbb{F}_1$ не мора да лежи во $\mathbb{F}_2$.

Сега ќе ги решиме оние задачи од задачите на Аполониј, коишто можат да се решат со помош на хомотетија. Притоа, нумерацијата на задачите е иста со онаа од стр. 2.

Задача 5 (A,b,c). Овде ќе го разгледаме само најопштиот случај кога правите b и c се сечат, а точката A не лежи на ниедна од правите b и c и не лежи на симетралите од аглите што ги образуваат правите b и c (црт. 15).



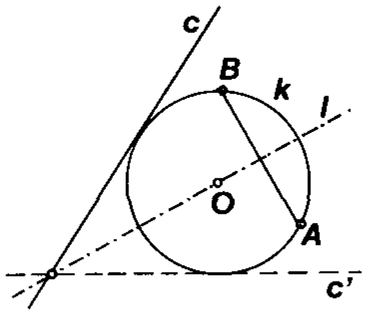
Црт. 15

Нека $S=b\cap c$ и нека $k(O,r)$ е бараната кружница. Бидејќи k ги допира правите b и c нејзиниот центар O ќе лежи на симетралата s на оној агол образуван од правите b и c во кој лежи точката A. Ако χ е хомотетија со центар во S и произволен коефициент, тогаш $\chi(a)=a$, $\chi(b)=b$, а $\chi(k)=\bar{k}$ ќе биде кружница што ги допира правите $a=\chi(a)$ и $b=\chi(b)$. Значи, за да ја конструираме кружницата к, доволно е да конструираме произволна кружница $\bar{k}$ што ги допира правите b и c, а потоа да го определиме коефициентот на хомотетијата χ, така што $\chi^{-1}(\bar{k})=k$. Од оваа дискусија произлегува следнава конструкција.

На симетралата s на оној агол образуван од правите b и c во кој лежи точката избираме произволна точка $\bar{O}$ и ја конструираме кружницата $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ којашто ги допира правите b и c. Нека A_1 и A_2 се пресечните точки на кружницата $\bar{k}$ со правата SA. Ако χ_1 и χ_2 се хомотетиите со центар во S и коефициенти $\overline{OA}:\overline{OA}_1$ и $\overline{OA}:\overline{OA}_2$ соодветно, тогаш ќе имаме $\chi_1(A_1)=A$ и $\chi_2(A_2)=A$. Значи, кружниците $\chi_1(\bar{k})=k'$ и $\chi_2(\bar{k})=k''$ ќе минуваат низ точката A и ќе ги допираат правите b и c. Нивните центри ќе бидат точките $O'=\chi_1(\bar{O})$ и $O''=\chi_2(\bar{O})$. Доволно е низ точката да се повлечат прави паралелни со правите $\overline{OA}_1$ и $\overline{OA}_2$ соодветно и нивните пресечни точки со правата s ќе бидат точките O' и O".

Задачата има точно две решенија.

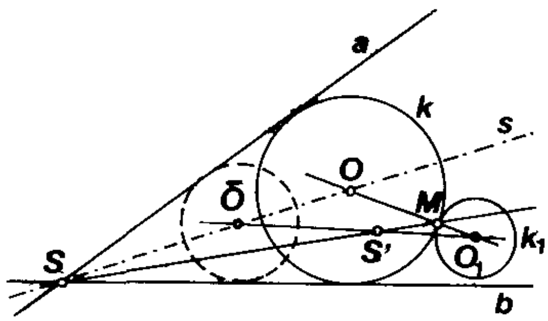
Задача 3 (A,B,c). Ќе го разгледаме најопштиот случај кога точките A и B лежат во иста полурамнина во однос на правата c и правата AB не е паралелна со правата c (црт. 16).



Црт. 16

Бидејќи бараната кружница k(O,r) минува низ точките A и B нејзиниот центар O ќе лежи на симетралата s на отсечката AB. Значи, s е оска на симетрија на кружницата k, па ако σ_s е осната симетрија со оска s, тогаш $\sigma_s(к)=к$, а $\sigma_s(c)=c'$ ќе биде тангента на к. Значи, задачата се сведува на задачата 5 (A,c'c). Во случајот кога c' и c се меѓусебно паралелни задачата се решава без хомотетија (види задача 5, стр. 19).

Задача 8 $(a,b,к_1)$. И овде ќе го разгледаме најопштиот случај кога правите a и b се сечат и центарот O_1 на кружницата $к_1$ не лежи на симетралите на аглите образувани од правите a и b (црт. 17).



Црт. 17

Да претпоставиме дека задачата е решена и к(O,r) е бараната кружница којашто кружницата $к_1(O_1,r_1)$ ја допира во точката M. Точката M е центар на сличност за кружниците к и $к_1$, т.е. постои хомотетија χ со центар во M при која кружницата к се пресликува во $к_1$. За да го најдеме коефициентот на χ доволно е да ја најдеме точката χ(S), $S=a\cap b$. Правите a и b се тангентни на кружницата к, па правите $a'=\chi(a)$ и $b'=\chi(b)$ ќе бидат тангенти на $к_1$ паралелни со правите a и b соодветно. Нивната пресечна точка S' може да биде точката χ(S), па коефициентот на хомотетијата χ ќе биде $\overline{MS'}:\overline{MS}$. Значи, точката S' може да ја најдеме, а потоа точката M (допирната точка на к и $к_1$) ќе припаѓа на пресекот на кружницата $к_1$ со правата SS'. Центарот O на бараната кружница к ќе биде точката $O_1M\cap s$, каде што s е една од симетралите на аглите образувани од правите a и b.

Бидејќи на кружницата k_1 може да се конструираат две тангенти паралелни со правата a и две тангенти паралелни со правата b, за точката S' може да избереме четири различни точки. Правите SS' ја сечат кружницата k_1 во најмногу две точки, што значи дека задачата ќе има најмногу осум решенија.

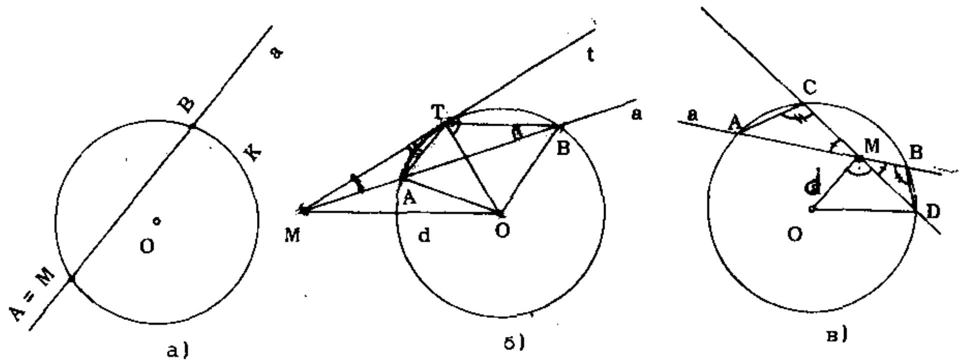
Глава III

ГЕОМЕТРИЈА НА КРУЖНИЦА

1. Степен на точка во однос на кружница

Нека е дадена кружница к(O,r) и една произволна точка M. Низ M повлекуваме произволна права, којашто ја сече кружницата к во точките A и B. Ќе покажеме дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата а низ точката M, т.е. дека има константна вредност.

На црт. 1 се претставени трите можни положби на точката M во однос на кружницата к. Ќе ги разгледаме посебно сите три случаи.



Црт. 1

Ако точката M лежи на кружницата к(O,r) (црт. 1 а)), тогаш M се совпаѓа со една од точките A и B, па еден од броевите $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ е нула, што значи дека $\overline{MA}\cdot\overline{MB} = 0 = \text{const}$.

Нека M е надворешна точка за кружницата к(O,r) и нека t е една од тангентите на к повлечени од M, којашто ја допира кружницата к во точката T (црт. 1 б)). Триаголниците MAT и MTB имаат заеднички агол кај темето M, а аглите MTA и MBT се перифериски над лакот TA, што значи дека и тие се еднакви. Според тоа, $\Delta MAT \sim \Delta MTB$, од каде што следува

$$\overline{MA}:\overline{MT} = \overline{MT}:\overline{MB},$$

т.е.

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \overline{MT}^2 = d^2-r^2 = const.$$

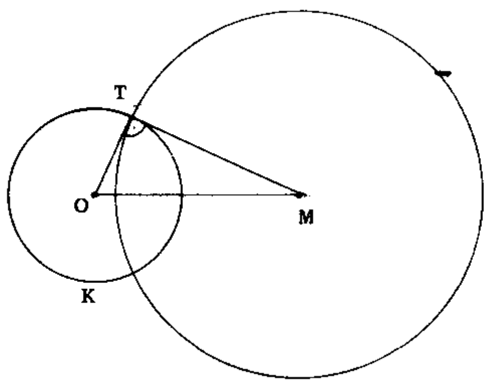
На крајот, нека точката M е внатрешна за кружницата $k(O,r)$ (црт. 1 в)). Низ точката M да повлечеме тетива CD нормална на правата OM. За триаголниците MCA и MBD имаме: $\measuredangle AMC=\measuredangle BMD$, како вкрстени агли, и $\measuredangle MCA=\measuredangle MBD$, како перифериски агли над лакот AD. Значи, овие триаголници се слични, од каде што следува

$$\overline{MA}:\overline{MC} = \overline{MD}:\overline{MB},$$

т.е.

$$\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \overline{MC}\cdot\overline{MD} = \overline{MD}^2 = r^2-d^2 = const.$$

Следствено, производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата a низ точката M, туку зависи само од радиусот r на кружницата $k(O,r)$ и од растојанието $d=\overline{OM}$ од точката M до центарот O на кружницата $k(O,r)$, т.е. зависи само од точката M и кружницата $k(O,r)$. Бројот d^2-r^2 ќе го наречеме <u>степен</u> на точката M во однос на кружницата $k(O,r)$. Ако M лежи на k, тогаш степенот е нула; ако M е надворешна за k, тогаш степенот е позитивен, а ако M е внатрешна за k, тогаш степенот е негативен.



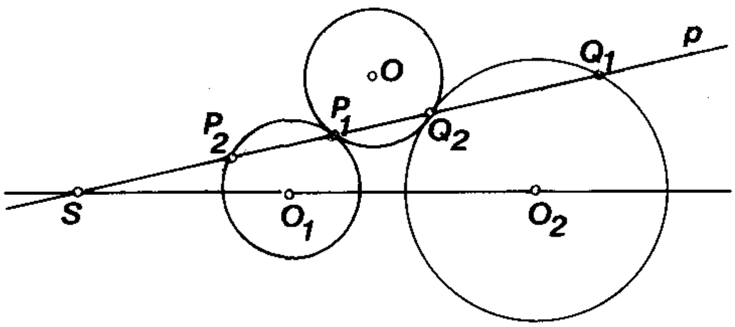
Црт. 2

Да забележиме дека во случајот кога точката M е надворешна за кружницата $k(O,r)$ степенот на M во однос на k е еднаков со $\overline{MT}^2$ и, притоа, кружницата $(M,\overline{MT})$ ортогонално ја сече кружницата $k(O,r)$, (црт. 2).

Задачи

За поедноставна формулација на задачите што овде ќе ги решиме, а кои подоцна ќе ги користиме за решавање на некои од задачите на Аполониј, ќе воведеме два поима.

Нека $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ се две кружници, нека S е центар на сличност на k_1 и k_2 и нека X е хомотетијата со центар во S, така што $X(k_1)=k_2$. Ако p е права низ S која ги сече кружниците k_1 и k_2 во точките P_1,P_2 и Q_1,Q_2 соодветно и ако $X(P_1)=Q_1$, $X(P_2)=Q_2$, тогаш точките P_1 и Q_2 (P_2 и Q_1) се викаат антихомотетични во однос на центарот S (црт. 3)



Црт. 3

Нека $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ се две кружници и нека $k(O,r)$ е кружница што ги допира k_1 и k_2. Ќе велиме дека k ги допира k_1 и k_2 на ист начин ако k ги допира и двете однадвор или и двете однатре. Ако, пак, k ја допира едната кружница однадвор, а другата однатре, тогаш ќе велиме дека k ги допира k_1 и k_2 на различен начин.

1. Производот на растојанијата од центарот на сличност на две кружници до две антихомотетични точки е константен.

Решение. Нека S е надворешниот центар на сличност на кружниците $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$, $r_1 \neq r_2$, и нека P_1 и Q_2 (P_2 и Q_1) се антихомотетични точки (црт. 3); тогаш коефициентот на хомотетијата X, така што $X(k_1)=k_2$, е

$$m = \frac{\overline{SQ}_1}{\overline{SP}_1} = \frac{\overline{SQ}_2}{\overline{SP}_2},$$

па ќе имаме

$$\overline{SP}_1 \cdot \overline{SQ}_2 = \overline{SP}_1 \cdot \overline{SP}_2 \cdot \frac{\overline{SQ}_2}{\overline{SP}_2} = \overline{SP}_1 \cdot \overline{SP}_2 \cdot m = \text{const},$$

зашто $\overline{SP}_1 \cdot \overline{SP}_2$ е степенот на точката S во однос на кружницата k_1.

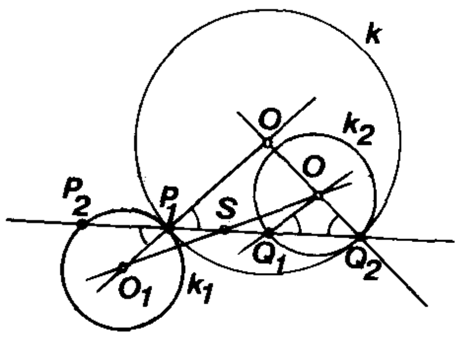
Слично добиваме дека $\overline{SP}_2 \cdot \overline{SQ}_1 = \text{const}$, а со исти расудувања се докажува и во случајот кога S е внатрешниот центар на сличност.

2. Нека $k(O,r)$ е кружница што ги допира кружниците $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$;

а) ако k ги допира k_1 и k_2 на ист начин, тогаш допирните точки на k со k_1 и k_2 се антихомотетични во однос на надворешниот центар на сличност на k_1 и k_2;

б) ако k ги допира k_1 и k_2 на различен начин, тогаш допирните точки на k со k_1 и k_2 се антихомотетични во однос на внатрешниот центар на сличност на k_1 и k_2.

Решение. б) Нека кружницата k ги допира кружниците k_1 и k_2 соодветно во точките P_1 и Q_2 на различен начин (црт. 4).



Црт. 4

Тогаш $\measuredangle O_1P_1P_2=\measuredangle O\ P_1Q_2=\measuredangle O_2Q_2Q_1=\measuredangle O_2Q_1Q_2$, од каде што следува дека правите O_1P_1 и O_2Q_2 се меѓусебно паралелни, па точките P_1 и Q_1 се хомотетични, а P_1 и Q_2 антихомотетични во однос на внатрешниот центар на сличност.

3. Секој центар на сличност на кружниците $к_1$ и $к_2$ има ист степен во однос на секоја кружница к што ги допира кружниците $к_1$ и $к_2$.

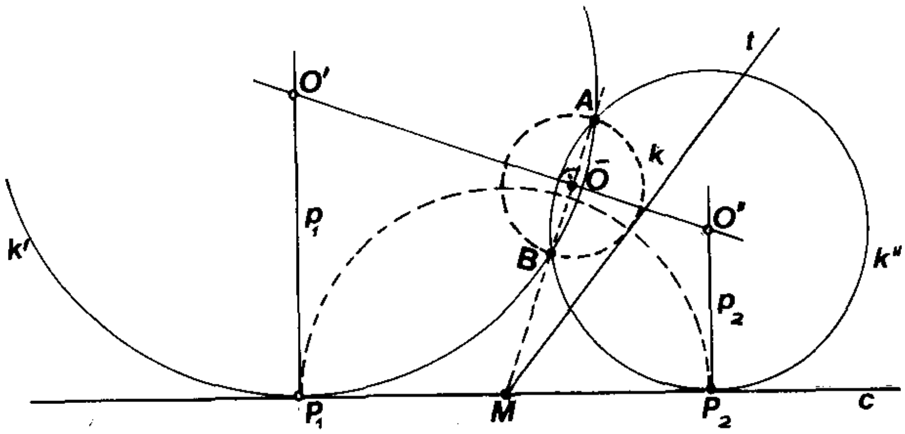
Решение. Според претходната задача, ако допирните точки на к со $к_1$ и $к_2$ се P_1 и Q_2 соодветно, тогаш P_1 и Q_2 се антихомотетични во однос на центарот на сличноста S (црт. 3 и 4). Според задачата 1, производот $\overline{SP}_1\cdot\overline{SQ}_2$ е константен, а тоа е степенот на точката S во однос на кружницата к.

Овде е претпоставено дека $r_1\neq r_2$, т.е. дека надворешниот центар на сличност на $к_1$ и $к_2$ постои.

4. Ако кружницата к минува низ антихомотетички точки во однос на центар на сличност на кружниците $к_1$ и $к_2$ и к ја допира едната, тогаш к ја допира и другата.

Решението на оваа задача го оставаме на читателот.

Задача 3 (A,B,c). Ќе го разгледаме најопштиот случај кога точките A,B лежат во иста полурамнина во однос на правата c и кога правата AB не е паралелна со правата c (црт. 5).



Црт. 5

Степенот на точката $M=AB\cap c$ во однос на произволна кружница што минува низ точките A и B е $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$. Ако $\overline{k}(\overline{O},\frac{1}{2}\overline{AB})$ и ако t е тангента $\bar{k}$ повлечена од М, тогаш $\overline{MT}^2$ е степенот на М во однос на $\bar{k}$, а според тоа, и степенот на М во однос на бараната кружница. Тоа значи дека пресечните точки P_1 и P_2 на правата с со кружницата $(M,\overline{MT})$ ќе бидат допирни точки на правата с со кружници што минуваат низ точките А и В. Ако p_1 и p_2 се прави нормални на с во точките P_1 и P_2 соодветно и ако s е симетралата на отсечката АВ, тогаш $s\cap p_1=0'$ и $s\cap p_2=0''$ се центри на бараните кружници. Во овој случај задачата има две решенија.

2. Радикална оска и радикален центар

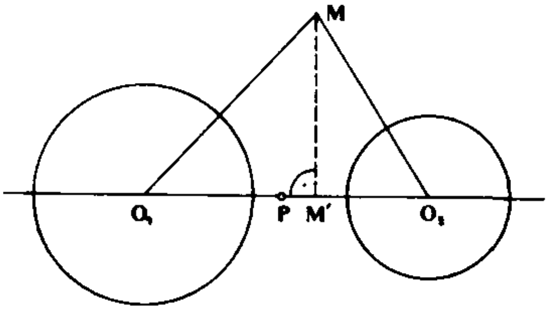
Нека се дадени две кружници $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$. Го бараме геометриското место Г од точки кои имаат ист степен во однос на двете кружници k_1 и k_2.

Ако $M\in\Gamma$, тогаш $\overline{O_1M}^2-r_1^2 = \overline{O_2M}^2-r_2^2$, т.е.

$$\overline{OM}_1^2 - \overline{OM}_2^2 = r_1^2-r_2^2. \tag{1}$$

Обратно, ако за точката М е исполнето равенството (1), тогаш $M\in\Gamma$. Значи, $M\in\Gamma$ ако и само ако е исполнето равенството (1).

Ако $O_1=O_2$, тогаш од (1) следува дека и $r_1=r_2$, т.е. кружниците k_1 и k_2 се совпаѓаат. Затоа, ќе претпоставиме дека $O_1\neq O_2$ (црт. 6).



Црт. 6

Прво да видиме дали постои точка Р од правата O_1O_2 којашто има ист степен во однос на k_1 и k_2, т.е. која припаѓа на Г.

Нека P е точка од правата O_1O_2, нека $r_1 \geq 2$ и нека $m=\overline{O_1O_2}$, $\overline{O_1P}$ ... Ако $P\in\Gamma$, тогаш

$$\overline{O_1P}^2 - \overline{O_2P}^2 = r_1^2-r_2^2. \qquad (2)$$

Од $r_1 \geq r_2$ следува дека $\overline{O_1P} \geq \overline{O_2P}$, што значи дека P лежи на полуправата O_1O_2 со почеток во O_1. Од (2) добиваме

$$x^2 - (m-x)^2 = r_1^2-r_2^2,$$

$$2mx = m^2 + r_1^2-r_2^2.$$

Бидејќи $O_1 \neq O_2$, следува $m \neq 0$, па последната равенка има единствено решение

$$x = \frac{1}{2m}(m^2+r_1^2-r_2^2).$$

Ова означува дека на полуправата O_1O_2 постои единствена точка P што припаѓа на Г, а според тоа, точката P е единствена и од правата O_1O_2.

Нека, сега, M е произволна точка што не лежи на правата O_1O_2 и нека M' е ортогоналната проекција од M врз O_1O_2. Од правоаголните триаголници $MM'O_1$ и $MM'O_2$ следува

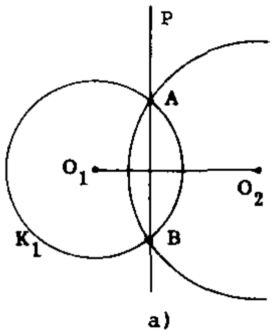
$$\overline{O_1M}^2 - \overline{O_1M'}^2 = \overline{O_2M}^2 - \overline{O_2M'}^2,$$

т.е.

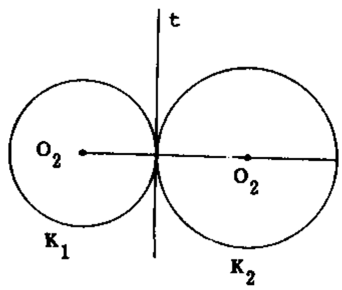
$$\overline{O_1M}^2 - \overline{O_2M}^2 = \overline{O_1M'}^2 - \overline{O_2M'}^2,$$

што значи дека $M\in\Gamma$ ако и само ако $M'\in\Gamma$. Но, на правата O_1O_2 постои единствена точка $P\in\Gamma$, па, значи, геометриското место Г е права што минува низ точката P и е нормална на правата O_1O_2. Оваа права се нарекува радикална оска за кружниците k_1 и k_2.

Во случај кружниците k_1 и k_2 да се сечат во точките A и B, радикалната оска ќе биде правата AB (црт. 7), а во случај кога кружниците се допираат во точката T радикалната оска ќе биде заедничката тангента t на k_1 и k_2 во точката T (црт. 8). Ако k_1 и k_2 немаат заеднички точки, тогаш нивната радикална оска ќе нема заеднички точки со ниедна од кружниците. Подоцна ќе дадеме едноставен начин за конструкција на радикалната оска на две кружници што немаат заеднички точки.



Црт. 7



Црт. 8

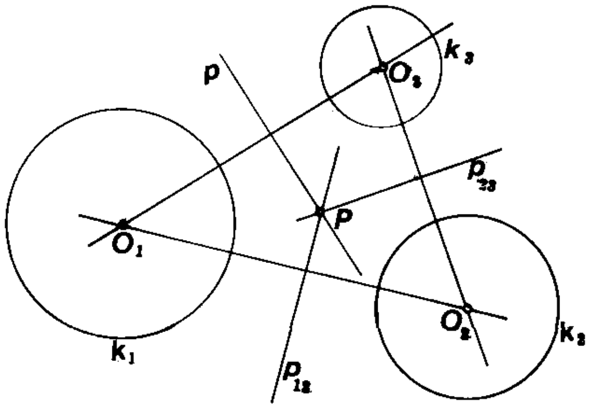
Да забележиме уште тоа дека радикалната оска на две точки O_1 и O_2, како кружници со радиус нула, е симетралата на отсечката O_1O_2, а, исто така, радикалната оска на две кружници со центар O_1 и O_2 и со ист радиус е симетралата на отсечката O_1O_2.

Нека, сега, се дадени три кружници k_i (O_i, r_i), $i=1,2,3$. Да ги најдеме точките од рамнината, ако такви постојат, кои имаат ист степен во однос на трите кружници. Да ги означиме со p_{12}, p_{23}, p_{31} радикалните оски на k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_1 соодветно. Значи, ако постои точка P која има ист степен во однос на k_1,k_2 и k_3, таа мора да лежи на радикалните оски p_{12} и p_{23}.

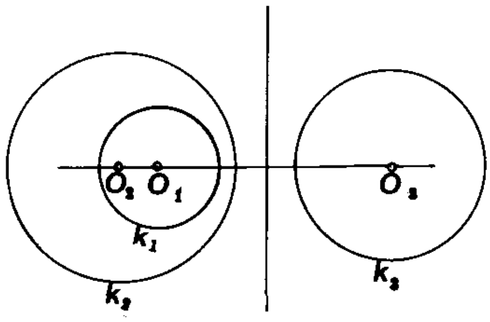
Ако центрите O_1,O_2,O_3 на кружниците не се колинеарни (црт. 9), тогаш p_{12} и p_{23} се сечат; ако $P=p_{12}\cap p_{23}$ таа ќе има ист степен во однос на k_1,k_2 и k_3, што значи дека и p_{31} минува низ P. Следствено, во овој случај постои единствена точка P која има ист степен во однос на k_1,k_2 и k_3 и таа точка се нарекува <u>радикален центар</u> на k_1,k_2 и k_3.

Ако центрите O_1,O_2 и O_3 на кружниците се колинеарни, тогаш сите три радикални оски се меѓусебно паралелни и, притоа, или сите три се меѓусебно различни или, пак, сите три се совпаѓаат (црт. 10).

Да забележиме дека наместо за радикален центар на три кружници може да зборуваме за радикален центар на две кружници

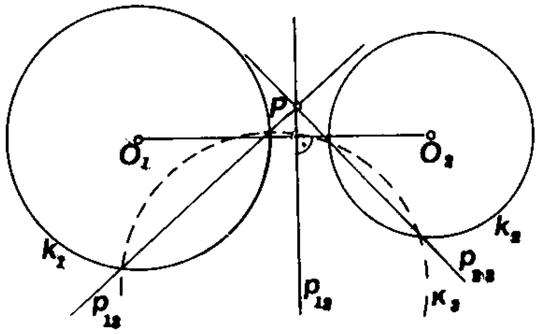


Црт. 9

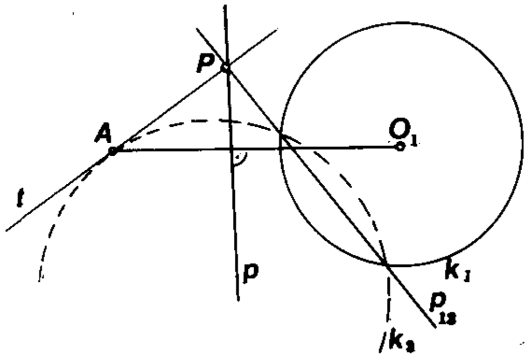


Црт. 10

и точка, на една кружница и две точки како и за радикален центар на три неколинеарни точки. Во последниот случај, радикалниот центар на трите неколинеарни точки A,B,C ќе биде центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC.



Црт. 11



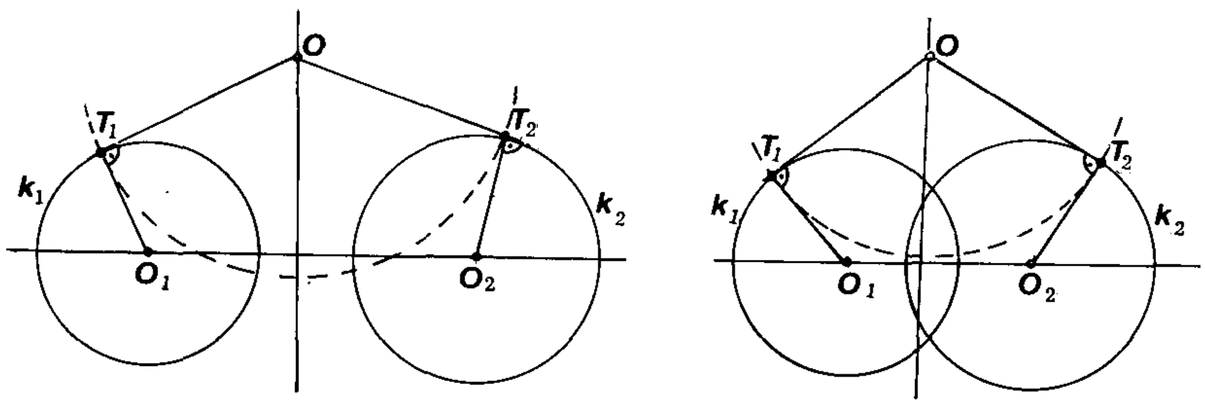
Црт. 12

Радикалниот центар на три кружници ќе го искористиме за конструкција на радикалната оска на две кружници што немаат заедничка точка. Нека $к_1$ и $к_2$ се две кружници што немаат заедничка точка (црт. 11). Да нацртаме произволна кружница $к_3$ која ги сече кружниците $к_1$ и $к_2$. Пресечната точка на радикалните оски p_{13} и p_{23} е радикалниот центар P на $к_1$,$к_2$ и $к_3$, па радикалната оска p_{12} ќе биде правата низ P нормална на O_1O_2. Ако, пак, е дадена кружницата $к_1(O_1,r_1)$ и точка A што не лежи на $к_1$, тогаш радикалната оска р на $к_1$ и А ја конструираме на следниов начин. Низ точката цртаме произволна кружница $к_3$ што ја сече кружницата $к_1$ (црт. 12). Радикалната оска на А и $к_3$ ќе биде тангентата t на $к_3$ во А, па радикалниот центар Р на $к_1, к_3$ и А ќе биде точката $p_{13} \cap t$. Сега, радикалната оска р на $к_1$ и А ќе биде правата низ Р нормална на правата O_1A.

Задачи

1. Да се докаже дека радикалната оска на две кружници што немаат заеднички точки и делот од радикалната оска на две кружници што се сечат, а е надворешен за нив, е геометриското место на центрите на кружниците коишто ортогонално ги сечат дадените кружници.

Решение. Нека к(О,r) е кружница чиј центар О лежи на радикалната оска р на кружниците $к_1$ и $к_2$ и радиус $r=\overline{OT_1}=\overline{OT_2}$ (црт. 13). Бидејќи радиусите на к, повлечени во T_1 (T_2) се тангенти на $к_1$ ($к_2$) следува дека к и $к_1$ (к и $к_2$) се сечат под прав агол, т.е. к ги сече ортогонално кружниците $к_1$ и $к_2$.



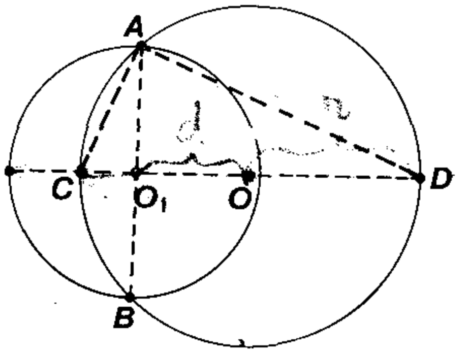
Црт. 13

Обратно, ако кружницата к(О,r) ги сече ортогонално $к_1$ и $к_2$, тогаш тангентните растојанија од О до $к_1$ и $к_2$ се еднакви, т.е. О има ист степен во однос на $к_1$ и $к_2$. Значи, О лежи на радикалната оска р на $к_1$ и $к_2$.

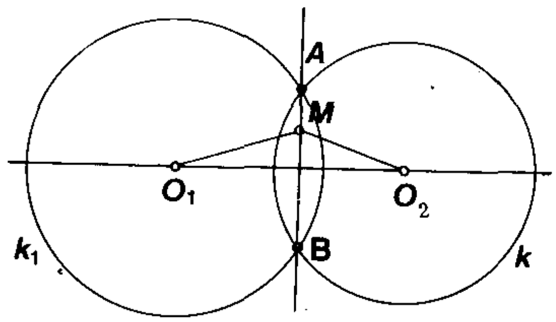
2. Ќе велиме дека кружницата к ја преполовува кружницата к′, ако к ја сече к′ во дијаметрално спротивни точки. Да се докаже дека внатрешниот дел од радикалната оска р на кружниците $к_1$ и $к_2$ што се сечат е геометриското место на центрите на кружниците, секоја од кои кружниците $к_1$ и $к_2$ ја половат (црт. 14 б)).

Решение. Нека кружницата (O,r) ја сече кружницата $к_1(O_1,r$ во дијаметрално спротивни точки A и B (црт. 14 a)). Тогаш од правоаголниот триаголник CAD имаме $\overline{O_1C}\cdot\overline{O_1D}=\overline{OA}^2$, т.е. $(r-d)(r+d)=r_1^2$, од каде што добиваме

$$r^2 = d^2+r_1^2, \qquad d = \overline{O_1O_2}.$$



a)



б)

Црт. 14

Да го најдеме сега геометриското место на центрите на кружниците коишто се половени од две дадени кружници $к_1$ и $к_2$. Пред се, јасно е дека ако M е центар на таква кружница, тогаш M мора да биде внатрешна точка за $к_1$ и $к_2$, па такви кружници ќе постојат ако и само ако $к_1$ и $к_2$ се сечат. Според претходното, ќе имаме

$$r_1^2 = d_1^2 + r^2, \qquad r_2^2 = d_2^2 + r^2,$$

од каде добиваме:

$$r^2 = r_1^2 - d_1^2 = r_2^2 - d_2^2,$$

т.е.

$$d_1^2 - r_1^2 = d_2^2 - r_2^2.$$

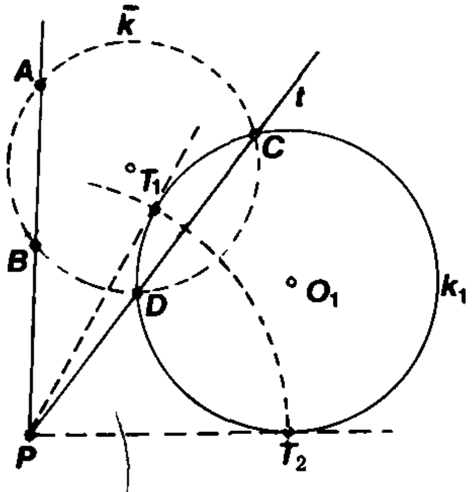
Последното равенство значи дека точката M има ист степен во однос на $к_1$ и $к_2$, т.е. M лежи на радикалната оска на $к_1$ и $к_2$.

Следствено, бараното геометриско место е отсечката AB без точките A и B.

3. Нека $к_1, к_2$ и $к_3$ се три кружници коишто не минуваат низ една иста точка и центрите не им се колинеарни. Да се докаже дека постои единствена кружница којашто сите три ги сече ортогонално или, пак, сите три ја преполовуваат.

Решение. Нека P е радикалниот центар на кружниците $к_1$, $к_2$ и $к_3$; тогаш или P е надворешна точка за сите три кружници или, пак, е внатрешна. Во првиот случај, степенот на P во однос на $к_1, к_2$ и $к_3$ е позитивен; да го означиме со m^2; тогаш, според задачата 1, кружницата (P,m) ги сече сите три кружници ортогонално. Во вториот случај, степенот на P во однос на $к_1$, $к_2$ и $к_3$ е негативен; да го означиме со $-m^2$; тогаш според задачата 2, кружницата (P,m) сите три кружници $к_1$, $к_2, к_3$ ја половат.

Задача 4 $(A,B,к_1)$. Низ точките A и B да повлечеме произволна кружница $\bar{к}$, којашто кружницата $к_1$ ја сече, на пример, во точките C и D (црт. 15); тогаш радикалната оска на $\bar{к}$ и $к_1$

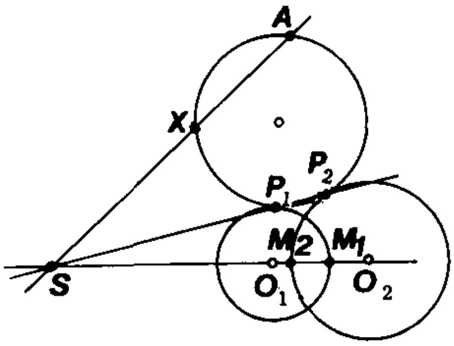


Црт. 15

е правата CD, а радикалната оска на $\bar{к}$ и бараната кружница к е правата AB. Значи, пресечната точка P на правите AB и CD, ако постои, е радикалниот центар на $к, \bar{к}$ и $к_1$, од каде што следува дека радикалната оска на к и $к_1$ ќе биде тангентата на $к_2$ што минува низ P.

Следствено, ако ги повлечеме тангентите t_1 и t_2 (ако такви постојат) од P на $к_1$, тогаш допирните точки T_1 и T_2 ќе бидат допирните точки на бараните кружници со $к_1$. Задачата може да има најмногу две решенија.

Задача 7 $(A,к_1,к_2)$. Нека бараната кружница $к(O,r)$ ги допира кружниците $к_1$ и $к_2$, $r_1 \neq r_2$ на ист начин (црт. 16); тогаш



Црт. 16

допирните точки P_1 и P_2 се антихомотетични во однос на надворешниот центар на сличност S за $к_1$ и $к_2$. Според задача 2 од §1, следува дека

$$\overline{SA}\cdot\overline{SX} = \overline{SP}_1\cdot\overline{SP}_2.$$

Но, за две антихомотетични точки во однос на S можеме да ги земеме пресечните точки M_1 и M_2 на правата O_1O_2 со кружниците $к_1$ и $к_2$. Така, ќе имаме

$$\overline{SA}\cdot\overline{SX} = \overline{SM}_1\cdot\overline{SM}_2,$$

што значи дека точките A,X,M_1 и M_2 лежат на иста кружница $к_0$, т.е. ако низ точките M_1,M_2 и A повлечеме кружница $к_0$, тогаш X е втората пресечна точка на правата AX и кружницата $к_0$.

Во случајот $X\neq A$, задачата се сведува на задачата $4(A,X,к_1)$, а во случајот $A=X$, задачата се сведува на задачата 6 $(A,SA,к_1)$.

Во случајот кога бараната кружница к ги допира на различен начин кружниците $к_1$ и $к_2$, разгледувањата се слични, само што наместо надворешниот центар на сличност, треба да се земе внатрешниот центар на сличност на кружниците $к_1$ и $к_2$.

3. Прамен и сноп кружници

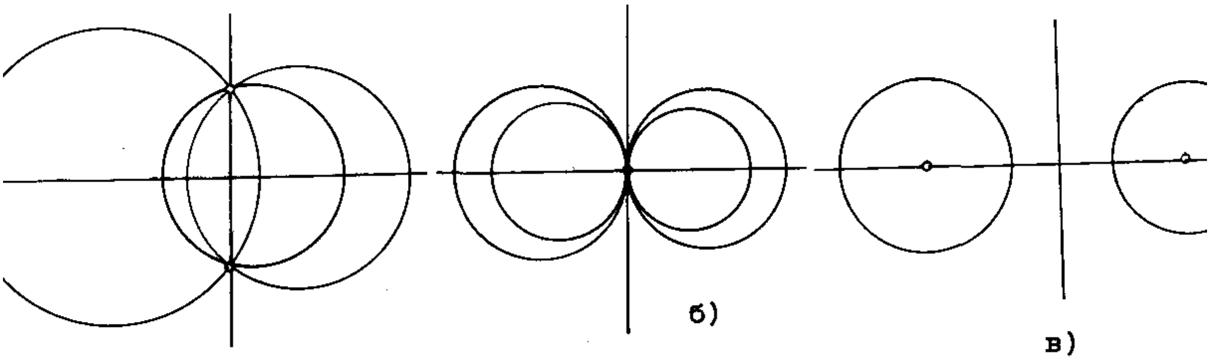
Нека е дадена права р. Множеството на сите кружници, такви што кои било две од нив за радикална оска ја имаат правата и правата р, се нарекува прамен кружници. Правата р се нарекува радикална оска на праменот.

Еден прамен кружници е наполно определен со радикалната оска и една кружница или, пак, со две кружници. Центрите на сите кружници од праменот ќе лежат на права q нормална на радикалната оска р; правата q се нарекува централна права или, само, централа на праменот.

Нека праменот П (читај пи) е зададен со радикалната оска р и една кружница $к_0$. Ќе разгледаме три вида прамени, во зависност од заемниот однос на правата р и кружницата $к_0$.

а) Ако $к_0$ ја сече р во точките А и В (црт. 17 а)), тогаш и секоја друга кружница к од П ќе ја сече правата р во точките А и В и, обратно, секоја кружница што минува низ точките А и В ќе припаѓа на П. Според тоа, праменот П се состои од сите кружници што минуваат низ точките А и В. Таков е случајот и со правата АВ, разгледувана како кружница. Во овој случај П се нарекува прамен со две базни точки или хиперболичен прамен.

б) Ако $к_0$ ја допира р во точката А (црт. 17 б)), тогаш и секоја друга кружница од П ја допира р во А и, обратно, секоја кружница што ја допира р во А припаѓа на П. Според тоа, во овој случај, праменот П се состои од сите кружници кои правата р ја допираат во точката А. Точката А, како кружница со радиус нула, и правата р, како кружница, припаѓаат на праменот. Праменот се нарекува прамен со една базна (гранична) точка или параболичен прамен.



Црт. 17

в) Ако k_0 нема заеднички точки со p (црт. 17 в)), тогаш и секоја друга кружница од П нема заедничка точка со p. Уште повеќе кои било две кружници од праменот П немаат заедничка точка. Праменот се нарекува елиптичен прамен.

Да забележиме дека низ секоја точка M од рамнината минува единствена кружница што припаѓа на даден прамен. За да го докажеме ова ќе ги разгледаме посебно сите три случаи.

а) Ако праменот П е хиперболичен со базни точки A и B и ако M е произволна точка од рамнината, тогаш или правата AB (ако A,B и M се колинеарни) или, пак, кружницата опишана околу триаголникот ABM, минува низ M и припаѓа на праменот П.

б) Ако праменот П е параболичен со радикална оска p и базна (гранична) точка A, и ако M е произволна точка, тогаш или правата p (ако $M \in p$) или, пак, кружницата што минува низ M и ја допира правата p во точката A (а таа е единствена кога $M \notin p$) ќе припаѓа на праменот.

в) Нека, сега, праменот П е елиптичен и нека точката M не лежи на радикалната оска p. Ако $M \in q$ (q-централата), (црт. 17 в)), тогаш постои единствена точка $M' \in q$, така што важи $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}$, па, значи, кружницата со дијаметар MM' ќе биде единствена што минува низ M и што припаѓа на П. Специјално, ако M=M', тогаш кружницата ќе има радиус нула. Според тоа, праменот содржи две точки N_1 и N_2 што лежат на централата q и што припаѓаат на П. Затоа, овој прамен се вика уште и прамен со две гранични точки. Нека точката M не лежи на q; тогаш радикалната оска r на M и k_0 ќе ја сече радикалната оска p во некоја точка R. Постои единствена кружница k со центар на централата q и што ја допира правата RM во точката M. Значи, точката R има ист степен во однос на k и k_0, па p е нивна радикална оска, т.е. k минува низ точката M и припаѓа на П.

Множеството од сите кружници, така што кои било три од нив имаат ист радикален центар P и сите прави низ точката P се нарекува сноп кружници. Точката P се нарекува радикален центар на снопот, а степенот m на точката P во однос на произволна кружница од снопот се нарекува степен на снопот.

Еден сноп Г е наполно определен со:

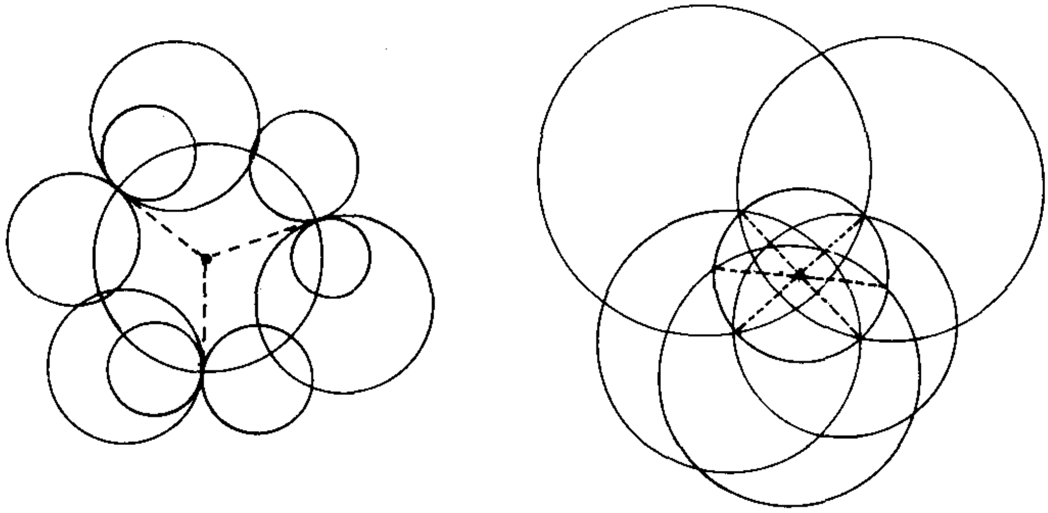
-центарот и степенот,
-центарот и една кружница,
-степенот и две кружници, или
-три кружници.

Во зависност од заемната положба на центарот P во однос на кружниците од снопот Г, ќе разликуваме три вида снопови.

Ако $m = a^2 > 0$, тогаш центарот P е надворешна точка од снопот Г и, според задача 3 од §2, кружницата (P,a) ги сече сите кружници од Г ортогонално. Во овој случај може да кажеме дека снопот Г се состои од сите кружници и прави кои ја сечат ортогонално кружницата (P,a).

Ако $m = 0$, тогаш снопот Г се состои од сите кружници и прави што минуваат низ точката P; специјално, точката P како кружница припаѓа на снопот.

Ако $m = -a^2 < 0$, тогаш точката P е внатрешна за сите кружници од Г и, според задачата 3 од §2, сите кружници од Г ја половат кружницата (P,a). Во овој случај може да кажеме дека Г се состои од сите кружници и прави кои кружницата (P,a) ја сечат во дијаметрално спротивни точки.



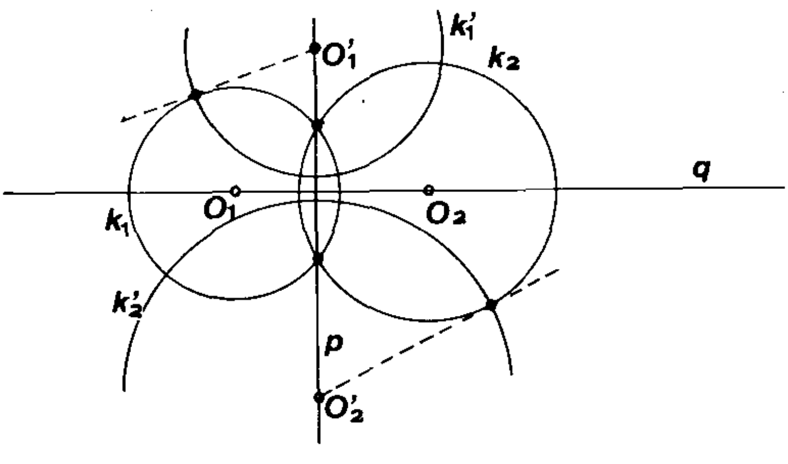
Црт. 18

Да забележиме дека понекогаш за сноп кружници се подразбира и множеството на сите кружници чии центри лежат на дадена права р и сите прави нормални на правата р, т.е. множеството од сите кружници и прави кои ортогонално ја сечат правата р. Овој сноп кружници би бил од првиот тип, зашто правата р може да се разгледува како кружница.

Задачи

1. Да се докаже дека множеството $П_1$ од сите кружници ортогонални на кружниците од праменот П е прамен кружници.

Решение. Нека $к_1(O_1,r_1)$ и $к_2(O_2,r_2)$ се две произволни кружници од праменот П со радикална оска р и централа q, а $к_1'(O_1',r_1')$ и $к_2'(O_2',r_2')$ се две произволни кружници од множеството $П_1$ (црт. 19). Бидејќи $к_1'$ и $к_2'$ се ортогонални на $к_1$ и $к_2$,



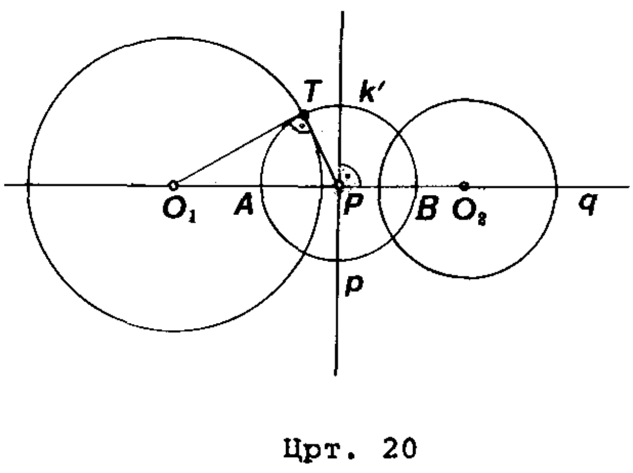
Црт. 19

следува дека нивните центри O_1' и O_2' лежат на радикалната оска p на $к_1$ и $к_2$ (види задача 1 од §2). Од друга страна, точките O_1, O_2 имаат ист степен во однос на $к_1'$ и $к_2'$, што значи дека правата q е радикална оска на $к_1'$ и $к_2'$. Кружниците $к_1'$ и $к_2'$ се произволни од множеството $П_1$, што значи дека сите кружници од $П_1$ имаат иста радикална оска, правата q, т.е. $П_1$ е прамен кружници со радикална оска q и централа p.

Ако секоја кружница од еден прамен е ортогонална на секоја кружница од друг прамен, прамените се нарекуваат <u>конјугирани</u>.

2. *Ако едниот од два конјугирани прамена е елиптичен, тогаш другиот е хиперболичен и обратно. Ако, пак, едниот од два коњугирани прамени е параболичен, тогаш и другиот е параболичен. Докажи!*

<u>Решение</u>. Нека П е елиптичен прамен кружници со радикална оска p и централна q (црт. 20). Пресечната точка P на p и q е надворешна за кружниците од П и, значи, е центар на кружница $к'$ од конјугираниот прамен $П_1$. Бидејќи $к'$ ја сече q (радикалната оска на $П_1$) во две точки A и B, следува дека праменот $П_1$ е хиперболичен.



Црт. 20

Обратно, нека $П_1$ е хиперболичен прамен кружници со радикална оска q и централа p (црт. 20). Кружницата од $П_1$ со центар во точката $P=p\cap q$ ја сече радикалната оска q во точките

А и В. Ако $к_1(O_1,r_1)$ е произволна кружница од П, а Т пресечната точка на $к_1$ и $к'$, тогаш имаме $\overline{O_1T} < \overline{O_1P}$, па $к_1$ не ја сече радикалната оска р на П. Значи, праменот П е елиптичен.

Во случај кога едниот од прамените П и $П_1$ е параболичен, тврдењето е очигледно.

3. Даден е праменот П со радикалната оска р и една кружница $к_1(O_1,r_1)$. Да се конструира кружница $к(O,r)$ која припаѓа на праменот П и допира дадена кружница $к_2(O_2,r_2)$.

Решение. Нека p_{12} е радикалната оска на кружниците $к_1$ и $к_2$. Бидејќи бараната кружница к припаѓа на праменот П, радикалната оска на $к_1$ и к ќе биде правата р. Значи, радикалниот центар на $к_1,к_2$ и к ќе биде точката $P=p_{12}\cap p$, па радикалната оска на $к_2$ и к ќе биде тангента на $к_2$ што минува низ точката Р. Бидејќи тангентите на $к_2$ што минуваат низ точката Р, ако такви постојат, може да се конструираат, лесно може да се конструира и бараната кружница к.

4. Даден е прамен П со радикалната оска р и една кружница $к_1(O_1,r_1)$. Да се конструира кружница $к(O,r)$ која припаѓа на П и која допира дадена права а различна од р.

Решение. Ако а е паралелна со р, тогаш задачата се сведува на конструкција на кружница која минува низ точката $a\cap q$ (q-централата на П) и да припаѓа на праменот П.

Затоа, да претпоставиме дека правата а ја сече правата р. Пресечната точка да ја означиме со М. Тангентното растојание од М до бараната кружница е исто со тангентното растојание од М до $к_1$, па бараната кружница може да се конструира.

5. Да се докаже дека пресекот на два снопа кружници е прамен кружници или прамен прави.

Решение. Нека $Г_1$ и $Г_2$ се два снопа кружници со центри O_1,O_2 и степени m_1,m_2 соодветно. Ако $O_1\neq O_2$, тогаш $Г_1\cap Г_2$ е прамен кружници со радикална оска O_1O_2, а ако $O_1=O_2=O$, е праменот прави со центар во О. Да разгледаме некои случаи при $O_1\neq O_2$.

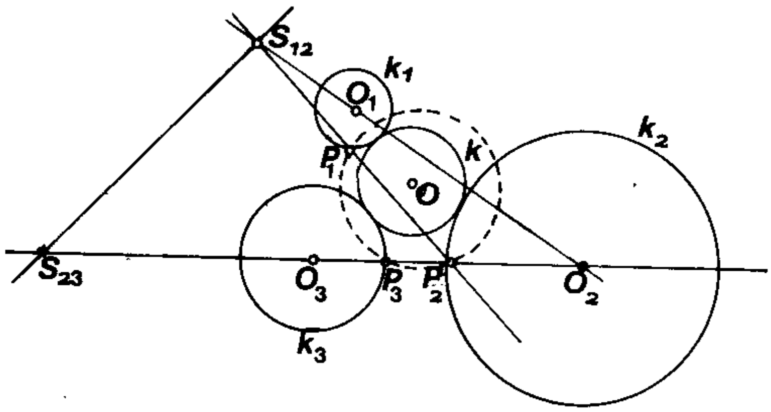
а) Нека $m_1=m_2=0$; тогаш Γ_i, $i=1,2$, е множеството на сите кружници коишто минуваат низ точката O_i, $i=1,2$, па, значи, $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ е множеството на сите кружници коишто минуваат низ точките O_1 и O_2, т.е. хиперболичен прамен кружници со базни точки O_1 и O_2.

б) Нека $m_1=a_1^2$, $m_2=a_2^2$; тогаш $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ е множеството од сите кружници коишто кружниците (O_1,a_1) и (O_2,a_2) ги сечат ортогонално. Според задача 1, $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ е прамен кружници.

в) Нека $m_1=0$, $m_2=a_2^2$; тогаш $\Gamma_1\cap\Gamma_2$ е множеството на сите кружници коишто минуваат низ точката O_1 и кои (O_2,a_2) ја сечат ортогонално, а тоа е прамен кружници со барем една базна точка, т.е. хиперболичен или параболичен во зависност од тоа дали $O_1\notin(O_2,a_2)$ или $O_1\in(O_2,a_2)$.

Другите случаи ги оставаме на читателот.

<u>Задача $A(k_1,k_2,k_3)$.</u> Да го разгледаме најопштиот случај кога центрите O_1,O_2,O_3 не се колинеарни и радиусите се меѓусебно различни (црт. 21).



Црт. 21

Нека бараната кружница $k(O,r)$ ги допира кружниците k_1, k_2,k_3 на ист начин, на пример, надворешно. Според задача 2 од §1, k ги допира k_1 и k_2 во антихомотетични точки во однос на надворешниот центар на сличност S_{12} на k_1 и k_2. Две антихомотетични точки во однос на S_{12} можеме да најдеме; на пример, пресечните точки P_1 и P_2 на O_1O_2 со k_1 и k_2 соодветно. Низ точката S_{12} минува радикалната оска на кружницата к и произволна кружница низ P_1 и P_2. На ист начин, ако P_3 е антихомотетична точка на P_2 во однос на надворешниот центар на сличност S_{23} на $к_2$ и $к_3$, тогаш низ S_{23} минува радикалната оска на к и произволна кружница низ P_2 и P_3.

Следствено, правата $S_{12}S_{23}$ е радикалната оска на к и кружницата низ точките P_1, P_2, P_3. Ако $\overline{к}$ е кружницата што минува низ точките P_1, P_2 и P_3, тогаш задачата се сведува на конструкција на кружница што припаѓа на праменот П определен со радикалната оска $S_{12}S_{23}$ и кружницата $\overline{к}$, и која ја допира, на пример, кружницата $к_1$ (види задача 3).

Според задачата од стр. 34, задачата може да има најмногу осум решенија.

На читателот му оставаме да ги разгледа и случаите $r_1 \neq r_2 = r_3$, односно $r_1 = r_2 = r_3$.

4. Инверзија

Нека $m = r^2$ е позитивен реален број, а O фиксирана точка во рамнината. На секоја точка $A \neq O$ ја придружуваме точката A' што лежи на полуправата OA и за која е исполнет условот

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = m. \tag{1}$$

Точката A' е еднозначно определена, па, значи, добиваме едно пресликување од $П \setminus \{O\}$ во П. Од условот (1) следува дека ова пресликување е инјекција но не е сурјекција. Имено, не постои точка која се пресликува во точката O. Затоа, ако пресликувањето го разгледуваме како пресликување од $П \setminus \{O\}$ во $П \setminus \{O\}$, тоа ќе биде биекција што се вика <u>инверзија со центар</u> O <u>и</u> <u>коефициент</u> m; ќе ја означуваме со $\zeta(O,m)$ или, само со ζ. Значи,

$$(\forall A \in П \setminus \{O\})\, \zeta(A) = A' \iff A' \text{ лежи на полуправата } OA \text{ и } \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = m.$$

Ќе наведеме и ќе докажеме некои својства на инверзијата.

<u>Теорема 1</u>. Ако $\zeta(A) = A'$, тогаш $\zeta(A') = A$, т.е. $\zeta^2 = \varepsilon$.

<u>Доказ</u>. Од $\zeta(A) = A'$ следува дека A' лежи на полуправата OA и, притоа, $\overline{OA}\cdot\overline{OA}'=m$. Ако $\zeta(A')=A_1$, тогаш A_1 ќе лежи на полуправата OA', која се совпаѓа со полуправата OA и, притоа,

$$\overline{OA}_1'\cdot\overline{OA} = m = \overline{OA}\cdot\overline{OA}',$$

од каде што следува дека $A_1=A$, т.е. $\zeta(A')=A$.

<u>Теорема 2</u>. Ако A е точка од кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$, тогаш $\zeta(A)=A$ и, обратно, ако $\zeta(A)=A$, тогаш A лежи на кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$.

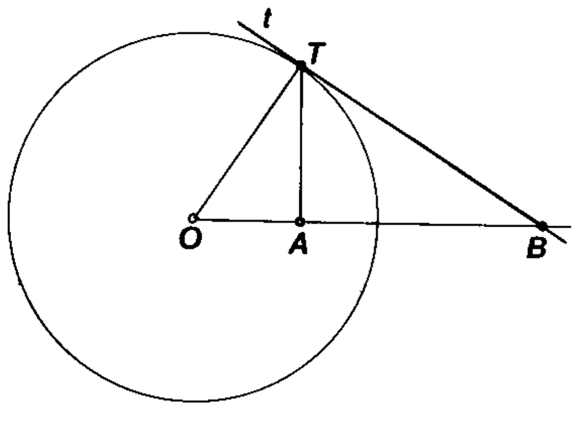
Значи, точките од кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$ се единствени неподвижни точки за инверзијата ζ. Затоа, ова кружница се нарекува <u>кружница на инверзијата</u> ζ. Од ова, пак, следува дека една инверзија ζ е определена или со центарот и коефициентот или со кружницата на инверзијата.

<u>Теорема 3</u>. Секоја внатрешна точка за кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$ се пресликува при инверзијата во надворешна, а секоја надворешна се пресликува во внатрешна.

<u>Доказ</u>. Ако A е внатрешна точка за кружницата $k_0(O,\sqrt{m})$, тогаш $\overline{OA} < \sqrt{m}$, па ако $\zeta(A)=A'$, тогаш од $\overline{OA}\cdot\overline{OA}'= m$ следува дека $\overline{OA}' > \sqrt{m}$.

Да видиме како ќе ја конструираме сликата A' на произволна точка A при инверзијата ζ, ако е позната кружницата k_0.

Нека A е внатрешна точка за кружницата k_0 (црт. 22). Низ



Црт. 22

точката A повлекуваме нормала на OA, којашто ја сече кружницата k_0 во точка T. Нека t е тангентата на k_0 во точката T и нека $B=t\cap OA$. Триаголниците OTB и OAT се правоаголни со заеднички агол кај темето O, па тие се слични, од каде што следува $\overline{OA}:\overline{OT}=\overline{OT}:\overline{OB}$, т.е.

$$\overline{OA}\ \overline{OB} = \overline{OT}^2 = m.$$

Значи, $B=A'=\zeta(A)$.

Ако, пак, точката A е надворешна за кружницата k_0, тогаш од $\zeta^2=\varepsilon$ (T.1) следува следнава конструкција на точката $A'=\zeta(A)$. Низ точката A ја повлекуваме едната тангента t на кружницата k_0 и ортогоналната проекција од допирната точка T на t и k_0 врз OA ќе биде точката $A'=\zeta(A)$.

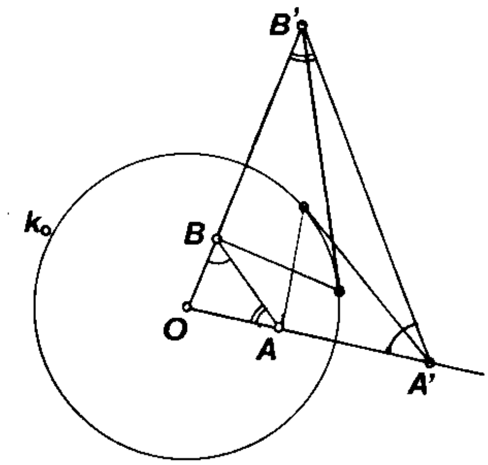
<u>Теорема 4</u>. Ако $\zeta(A)=A'$, $\zeta(B)=B'$, тогаш

$$\measuredangle OA'B' = \measuredangle OBA \text{ и } \measuredangle OB'A' = \measuredangle OAB. \qquad (2)$$

<u>Доказ</u>. Ако точките A,B и O се колинеарни, тогаш тврдењето е јасно. Затоа, да претпоставиме дека точките A,B и O не се колинеарни и нека се распоредени, на пример, како на црт. 23. Од равенствата $\overline{OA}\cdot\overline{OA}'=m$ и $\overline{OB}\cdot\overline{OB}'=m$ добиваме

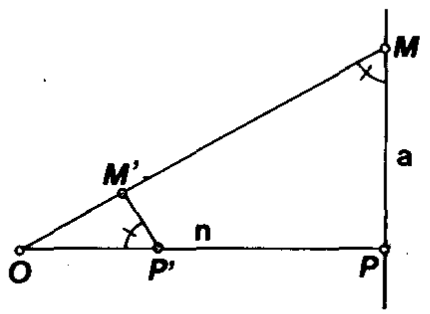
$$\overline{OA}:\overline{OB} = \overline{OB}':\overline{OA}'.$$

Ова значи дека триаголниците OAB и OB'A' се слични, т.е. важат равенствата (2).



Црт. 23

Да видиме сега во што се пресликува права при инверзија. Нека a е дадена права и ζ инверзија со кружница k_0. Ако a минува низ центарот O, тогаш, директно од дефиницијата, следува дека $\zeta(a)=a$. (Се разбира дека правата a се разгледува без точката O.) Затоа, да претпоставиме дека правата a не минува низ центарот O на инверзијата ζ (црт. 24). Низ точката O повлекуваме нормала n на правата a. Нека $P=a\cap n$ и нека $P'=\zeta(P)$, $M'=\zeta(M)$, каде што M е произволна точка од a. Според Т.4, триаголниците OPM и OM'P' се слични. Но, триаголникот OPM е правоаголен со прав агол кај темето P, па, следствено, триаголникот OM'P' ќе биде правоаголен со прав агол кај темето M'.



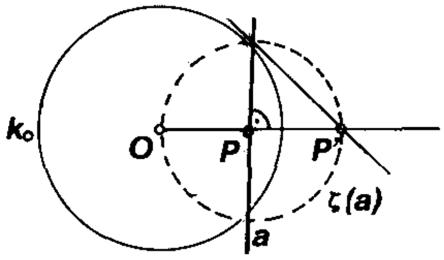
Црт. 24

Според тоа, отсечката OP' од точката M' се гледа под прав агол, т.е. M' лежи на кружницата со дијаметар OP'. Бидејќи точката M беше произволна од правата a, заклучуваме дека сликата на правата a при инверзијата ζ е кружницата со дијаметар OP' (се подразбира без точката O).

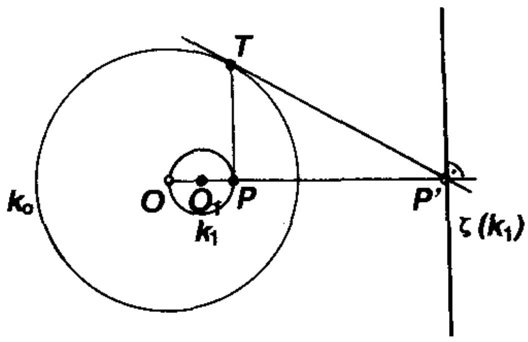
Со тоа ја докажавме следнава теорема.

<u>Теорема 5</u> Секоја права што минува низ центарот O на инверзијата ζ се пресликува сама во себе, а секоја права што не минува низ O се пресликува во кружница што минува низ O.

Од самиот доказ на оваа теорема следува и ефективна конструкција на кружницата $\zeta(a)$ кога правата a не минува низ центарот O на инверзијата ζ (црт. 25).



Црт. 25



Црт. 26

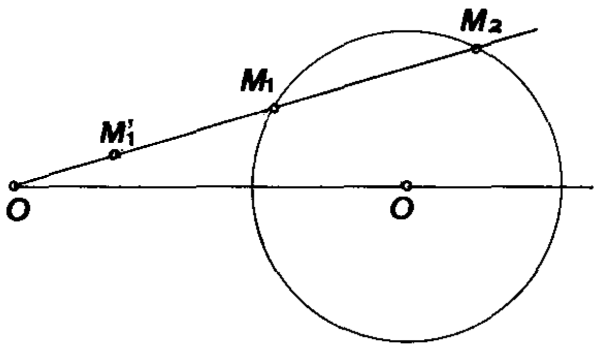
Како последица од Т.4 и Т.1 ја добиваме и следнава теорема.

<u>Теорема 6</u>. Ако кружницата $к_1$ минува низ центарот О на инверзијата ζ, тогаш $\zeta(к_1)$ е права што не минува низ О.

Ефективната конструкција на правата $\zeta(к_1)$ е прикажана на црт. 26.

Останува да видиме во што ќе се пресликува кружницата $к_1$ при инверзијата ζ ако $к_1$ не минува низ центарот О на ζ.

Нека кружницата $к_1$ не минува низ центарот О на инверзијата ζ (црт. 27) и нека $\zeta(M_1)=M_1'$; тогаш $\overline{OM}_1\cdot\overline{OM}_1'=m$. Ако n е степенот на точката О во однос на кружницата $к_1$, тогаш $\overline{OM}_1\cdot\overline{OM}_2=|n|$, па ќе имаме:



Црт. 27

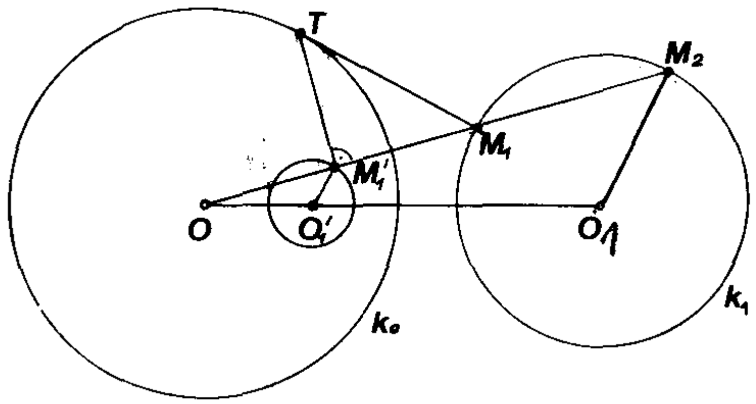
$$\overline{OM}_1' = \frac{\overline{OM}_1'\cdot\overline{OM}_1\cdot\overline{OM}_2}{\overline{OM}_1\cdot\overline{OM}_2} = \frac{m}{|n|}\cdot\overline{OM}_2,$$

т.е. $\vec{OM}_1' = \frac{m}{n}\vec{OM}_2$. Значи, ако χ е хомотетијата со центар O и коефициент m/n, тогаш $M_1'=\chi(M_2)$. Според тоа, $\zeta(M_1)=\chi(M_2)$, т.е. $\zeta(k_1)=\chi(k_1)$. Но кружница при хомотетија се пресликува во кружница, па, значи, $\zeta(k_1)$ ќе биде кружница што не минува низ центарот O на инверзијата ζ.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 7. Кружница што не минува низ центарот O на инверзијата ζ се пресликува пак во кружница што не минува низ центарот O.

Ефективната конструкција на кружницата $\zeta(k_1)$ е како конструкцијата на кружницата $\chi(k_1)$ (црт. 28). Имено, низ



Црт. 28

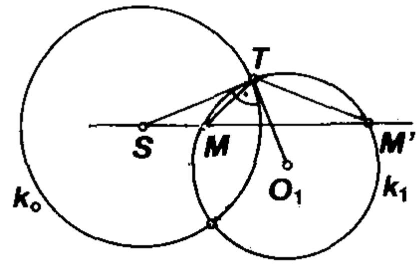
центарот O на инверзијата ζ повлекуваме произволна права a, различна од правата OO_1, која кружницата k_1 ја сече во точките M_1 и M_2. Ја наоѓаме точката $M_1'=\zeta(M_1)$ и низ неа повлекуваме права паралелна со правата O_1M_2. Пресечната точка O_1' на оваа права со правата OO_1 ќе биде центарот на кружницата $\zeta(k_1)$. Значи, кружницата $\zeta(k_1)$ ќе биде кружницата $(O_1', \overline{O_1'M_1'})$.

Да забележиме дека $O_1'=\chi(O_1)$, но $O_1'\neq\zeta(O_1)$.

Порано видовме дека неподвижни точки при инверзијата ζ со кружница k_0 се само точките од k_0, па кружницата k_0 е точкасто неподвижна за ζ. Интересно е да видиме дали постојат и други кружници, различни од $к_0$, коишто се неподвижни при инверзијата ζ. За таа цел ќе ја докажеме следнава теорема.

Теорема 8. Кружницата $к_1$, различна од $к_0$, е неподвижна за инверзијата ζ ако и само ако $к_1$ ортогонално ја сече $к_0$.

Доказ. Нека кружницата $к_1(O_1, r_1)$ ортогонално ја сече кружницата $к_0$ на инверзијата ζ (црт. 29). Нека $M \in к_1$, $M \notin к_0$;



Црт. 29

значи $\zeta(M)=M' \neq M$ и $M' \in \zeta(к_1)=к_1$. Бидејќи едната од точките M, M' е надворешна, а другата внатрешна за кружницата $к_0$, следува дека $к_1$ и $к_0$ се сечат. Едната пресечна точка да ја означиме со T. Тогаш триаголниците SMT и STM' се слични (види доказот на Т.4), од каде што следува дека

$$\sphericalangle OTM = \sphericalangle OM'T = \frac{1}{2}\sphericalangle TO_1M,$$

од каде што следува дека $\sphericalangle OTM$ е периферискиi за кружницата $к_1$, т.е. OT е тангента на $к_1$, а тоа значи дека $к_1$ е ортогонална на $к_0$.

Обратното е јасно, зашто при хомотетија агли се запазуваат, па ако $к_1$ ортогонално ја сече кружницата $к_0$ на инверзијата ζ тогаш и кружницата $\chi(к_1)=\zeta(к_1)$ ќе ја сече ортогонално $к_0$ и ќе минува низ точките $к_1 \cap к_0$. Значи, $\zeta(к_1)=к_1$.

Од тоа што секоја инверзија е биекција, следува точноста на следнава теорема.

Теорема 9. Ако две прави, односно права и кружница, односно две кружници се допираат, тогаш и нивните слики при инверзијата ζ се допираат.

Иако за решавање на задачите на Аполониј ќе ја користиме само Т.9, сепак, за потполност, без доказ ќе ја наведеме и следнава теорема.

Теорема 10. Агол меѓу две прави, меѓу права и кружница или меѓу две кружници се запазува при секоја инверзија.

Тоа значи, дека ако правите а и b, правата а и кружницата к односно кружниците $к_1$ и $к_2$ се сечат под агол α, тогаш и $\zeta(a)$ и $\zeta(b)$, $\zeta(a)$ и $\zeta(к)$ односно $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се сечат, исто така, под агол α.

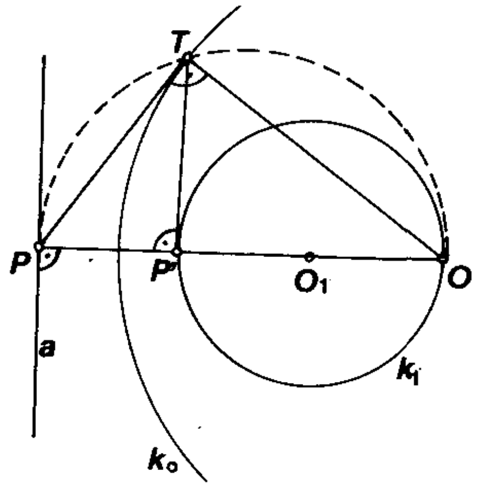
Задачи

1. Дадени се правите а и b. Дали постои инверзија ζ, така што $\zeta(a)=b$?

Решение. Според Т.5, таква инверзија постои ако и само ако $a = b$.

2. Дадени се правата а и кружницата $к_1(O_1, \ )$. Дали постои инверзија ζ, така што $\zeta(a)=к_1$?

Решение. Да, таква инверзија секогаш постои; конструкцијата на кружницата $к_0$, во случајот кога правата а и кружницата $к_1$ немаат заеднички точки, е дадена на црт. 30. Другите случаи се поедноставни и ги оставаме на читателот.



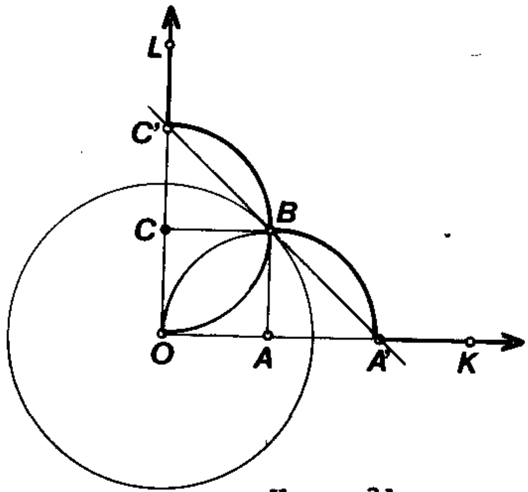
Црт. 30

3. Дадени се две кружници $к_1$ и $к_2$. Дали постои инверзија ζ, така што $\zeta(к_1)=к_2$?

Решение. Кои било две кружници се хомотетични (имаат барем еден центар на сличност), па, значи, ако центарот на сличност не лежи на кружниците k_1 и k_2, тогаш тој е центар на таква инверзија.

4. Дадена е инверзија ζ со кружница $k_0(O,r)$ и квадрат OABC, така што $B\in k_0$. Да се конструира фигурата што е слика од квадратот OABC при инверзијата ζ.

Решение. Правите OA и OC минуваат низ центарот O на инверзијата ζ, па тие се пресликуваат со ζ сами во себе. Ако ја



Црт. 31

повлечеме тангентата на k во B, тогаш нејзините пресечни точки со полуправите OA и OC се точките $A'=\zeta(A)$ и $C'=\zeta(C)$, па страните OA и OC ќе се пресликаат со ζ во полуправите A'K и C'L соодветно. Правата AB не минува низ центарот O на инверзијата ζ, па тоа ќе се преслика со ζ во кружницата со дијаметар OA', а страната AB ќе се преслика во лакот A'B; слично, страната BC ќе се преслика во лакот BC' од кружницата со дијаметар OC'. Бараната фигура е дадена на црт. 31.

Сега ќе преминеме на решавање на задачите на Аполониј.

Задача 3 (A,B,c). Нека точките A,B лежат во една иста полурамнина во однос правата c и нека правите AB и c не се меѓусебно паралелни.

Нека ζ е инверзијата со центар A и коефициент $\overline{AB}^2$, т.е. кружницата k_0 на ζ е со центар A и минува низ B; тогаш $\zeta(B)=B$.

Правата c не минува низ точката A, па $\zeta(c)$ ќе биде кружница што минува низ A. Бараната кружница к минува низ точката A, па $\zeta(к)$ ќе биде права што минува низ точката $B=\zeta(B)$ и што ја допира кружницата $\bar{к}=\zeta(c)$, па, значи, правата $\zeta(к)$ може да ја конструираме. Според тоа, следува следнава конструкција.

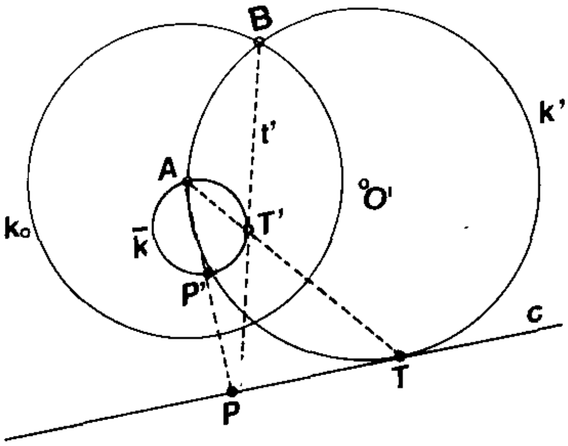
1) Ја избираме инверзијата ζ со кружница $к_0(A,\overline{AB})$.

2) Ја конструираме кружницата $\bar{к}=\zeta(c)$.

3) Низ точката $B=\zeta(B)$ ги повлекуваме тангентите t' и t'' на кружницата $\bar{к}$.

4) Бараните кружници се кружниците $к'=\zeta(t')$ и $к''=\zeta(t'')$.

На црт. 32 е дадено само едното решение.



Црт. 32

Задача 4 $(A,B,к_1)$. Нека точките A и B се или надворешни или внатрешни за кружницата $к_1$.

Слично како во претходната задача, ако ζ е инверзија со кружница $к_0(A,\overline{AB})$, тогаш $\zeta(B)=B$, $\zeta(к_1)$ е кружница што не минува низ A и, притоа, точката B е надворешна за $\zeta(к_1)$. Ако $к(O,r)$ е бараната кружница, тогаш $\zeta(к)$ ќе биде тангента на $\zeta(к_1)$ што минува низ точката B.

Задачата има две решенија.

Задача 5 (A,b,c). Нека точката A не лежи на ниедна од правите b,c и нека ζ е инверзија со центар во A и произволен коефициент m; тогаш $\zeta(b)$ и $\zeta(c)$ ќе бидат кружници, а $\zeta(к)$ ќе биде заедничка тангента t на кружниците $\zeta(b)$ и $\zeta(c)$, којашто може да се конструира. На крајот, $к=\zeta(t)$.

Задачата има две решенија.

Задача 6 $(A,b,к_1)$. Нека точката А не лежи на правата b и на кружницата $к_1$ и нека ζ е инверзија со центар во А и произволен коефициент m; тогаш $\zeta(b)$ и $\zeta(к_1)$ се кружници, а $\zeta(к)$ ќе биде заедничка тангента t на $\zeta(b)$ и $\zeta(к\ )$, која може да се конструира. На крајот, $к=\zeta(t)$.

Задачата може да има најмногу четири решенија.

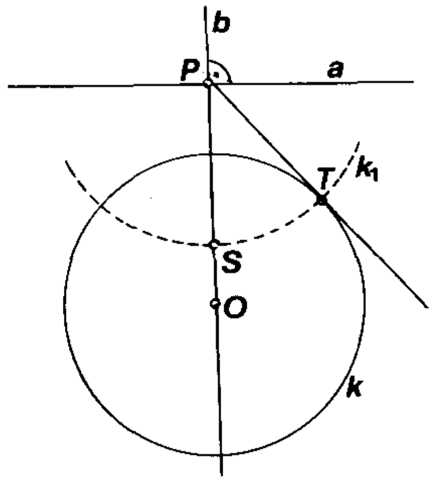
Во случајот кога точката А е надворешна за кружницата $к_1$, коефициентот m на инверзијата ζ избери го така што кружниците $к_0$ и $к_1$ се сечат ортогонално; тогаш ќе имаме $\zeta(к_1)=к_1$.

Задача 7 $(A,к_1,к_2)$. Нека точката А не лежи на ниедна од кружниците $к_1,к_2$. Како во претходната задача, ако ζ е инверзија со центар во А и произволен коефициент m, тогаш $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се кружници, а $\zeta(к)$ е заедничка тангента на $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$.

Пред да ги решиме задачите 8,9 и А ќе решиме две помошни задачи.

I. Нека правата а и кружницата к немаат заеднички точки. Да се докаже дека постои инверзија ζ, така што $\zeta(a)$ и $\zeta(к)$ се концентрични кружници.

Решение. Нека b е права низ O нормална на a и нека $P=a\cap b$ (црт. 33). Една од пресечните точки на кружницата $к_1(P,\overline{PT})$ со



Црт. 33

правата b нека биде точката S и нека ζ е инверзија со центар S и произволен коефициент. Тогаш $\zeta(a)$ и $\zeta(к)$ се кружници. Да ги најдеме нивните центри.

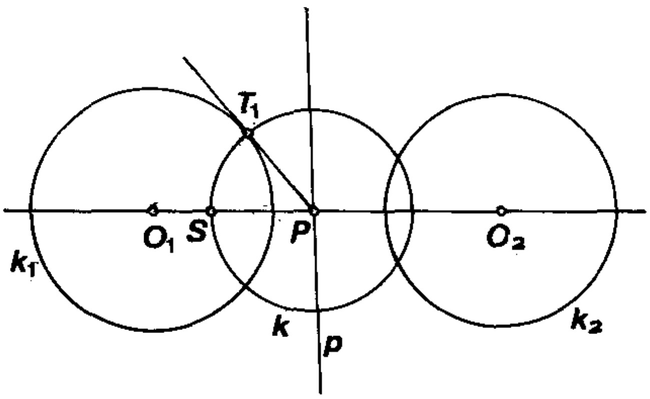
Правата а ортогонално ги сече правата b и кружницата $к_1$, што значи дека кружницата $\zeta(a)$ ортогонално ќе ги сече $\zeta(b)$ и $\zeta(к_1)$. Но, $\zeta(b)=b$, а $\zeta(к_1)$ ќе биде права. Значи, центарот O_1 на кружницата $\zeta(a)$ ќе биде точката $b\cap\zeta(к_1)$.

Кружницата к ортогонално ги сече правата b и кружницата $к_1$, што значи дека кружницата $\zeta(к)$ ортогонално ќе ги сече правите $\zeta(b)=b$ и $\zeta(к_1)$. Значи, центарот O_2 на кружницата $\zeta(к_1)$ ќе биде точката $b\cap\zeta(к_1)$.

Следствено, кружниците $\zeta(a)$ и $\zeta(к)$ се концентрични.

6. Нека кружниците $к_1$ и $к_2$ немаат заедничка точка. Да се докаже дека постои инверзија ζ, така што $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се две концентрични кружници.

Решение. Нека $к_1(O_1,r_1)$ и $к_2(O_2,r_2)$ се две кружници што немаат заедничка точка, нека p е радикалната оска на $к_1$ и $к_2$ и нека $P=p\cap O_1O_2$ (црт. 34). Кружницата $к(P,\overline{PT}_1)$ ортогонално



Црт. 34

ги сече кружниците $к_1$ и $к_2$. Нека S е точка од $к\cap O_1O_2$ и нека ζ е инверзија со центар во S и произволен коефициент. Како во претходната задача, се докажува дека $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се концентрични кружници со центар $O_1O_2\cap\zeta(к)$.

Задача 8 $(a,b,к_1)$. Овде ќе го разгледаме само случајот кога една од правите a,b, на пример правата a, нема заеднички со кружницата $к_1$. Тогаш постои инверзија ζ, така што $\zeta(a)$ и $\zeta(к_1)$ се концентрични кружници, а $\zeta(b)$ е кружница или права. Задачата се сведува на конструкција на кружница $к'$ којашто ги допира концентричните кружници $\zeta(a)$ и $\zeta(к_1)$ и ја допира кружницата (правата) $\zeta(b)$, специјални случаи од задача А $(\zeta(a), \zeta(к_1), \zeta(b))$ или од задача 9 $(\zeta(b), \zeta(a), \zeta(к_1))$.

Задача 9 $(a,к_1,к_2)$. И овде, како во претходната задача, разгледај ги само случаите: а) a и $к_1$ (или a и $к_2$) немаат заедничка точка и б) $к_1$ и $к_2$ немаат заедничка точка.

Задача А $(к_1,к_2,к_3)$. Според заемниот однос на кружниците $к_1,к_2$ и $к_3$, можни се следниве случаи.

а) Две од кружниците $к_1,к_2,к_3$, на пример $к_1$ и $к_2$ се допираат во точката T.

Ако и кружницата $к_3$ ги допира $к_1$ и $к_2$ во точката T, тогаш центрите O_1,O_2 и O_3 се колинеарни, па секоја кружница $к$ со центар на правата O_1O_2 и што минува низ точката T е решение на задачата.

Ако $к_3$ минува низ T и ги сече $к_1$ и $к_2$, тогаш ќе избереме инверзија ζ со центар во T и произволен коефициент. Во овој случај $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се две паралелни прави а $\zeta(к_3)$ е права што ги сече правите $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$. Бараната кружница $к$ не може да минува низ T, па $\zeta(к)=к'$ ќе биде кружница што ги допира правите $\zeta(к_1)$, $\zeta(к_2)$ и $\zeta(к_3)$. Значи, кружницата $к'=\zeta(к)$ може лесно да се конструира, зашто $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се меѓусебно паралелни. На крајот кружницата $к=\zeta(к')$ е бараната. Задачата има две решенија.

Ако $к_3$ не минува низ точката T, пак избираме инверзија ζ со центар во точката T и произволен коефициент. Тогаш $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се две паралелни прави, а $\zeta(к_3)$ ќе биде кружница. Сликата $\zeta(к)$ на бараната кружница $к$ е или права или кружница. Ако $\zeta(к)=к'$ е права, тогаш таа ќе биде тангента на кружницата

$\zeta(к_3)$ паралелна со правите $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$, па таа може лесно да се конструира. Ако $\zeta(к)=к'$ е кружница, тогаш таа ќе ги допира паралелните прави $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ и ќе ја допира кружницата $\zeta(к_3)$, па може лесно да се конструира. На крајот $к=\zeta(к')$ е бараната кружница.

б) Кои било две од кружниците $к_1,к_2,к_3$ не се допираат, а на пример кружниците $к_1$ и $к_2$ се сечат во точката А.

Ако $к_3$ минува низ А, тогаш, според направената претпоставка, $к_3$ ги сече $к_1$ и $к_2$ во точката А, па ако ζ е инверзија со центар А и произволен коефициент, тогаш $\zeta(к_1)$, $\zeta(к_2)$ и $\zeta(к_3)$ се три прави кои формираат триаголник. Бараната кружница к не може да минува низ точката А, па $\zeta(к)=к'$ ќе биде кружница што ги допира правите $\zeta(к_1)$, $\zeta(к_2)$ и $\zeta(к_3)$. Кружницата $к'=\zeta(к)$ може лесно да се конструира, па $к=\zeta(к')$ ќе биде бараната кружница.

Ако $к_3$ не минува низ А и ако ζ е инверзија со центар А и произволен коефициент, тогаш $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се две прави што се сечат, а $\zeta(к_3)$ ќе биде кружница. Бараната кружница к не минува низ точката А, па $к'=\zeta(к)$ ќе биде кружница што ги допира пресечните прави $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ и што ја допира кружницата $\zeta(к_3)$. Значи, к' може да се конструира, па $к=\zeta(к')$ ќе биде бараната кружница.

в) Две од кружниците $к_1,к_2,к_3$, на пример $к_1$ и $к_2$, немаат заедничка точка; тогаш постои инверзија ζ, така што $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ се две концентрични кружници, а $\zeta(к_3)$ ќе биде права или кружница. Ако к е бараната кружница, тогаш $к'=\zeta(к)$ ќе биде кружница што ги допира концентричните кружници $\zeta(к_1)$ и $\zeta(к_2)$ и ја допира правата (кружницата) $\zeta(к_3)$. Значи, кружницата $к'=\zeta(к)$ може лесно да се конструира, па $к=\zeta(к')$ ќе биде бараната кружница.

Додаток

Глава I

ЗБИРКА ЗАДАЧИ

ГЕОМЕТРИСКИ КОНСТРУКЦИИ

Да се конструира триаголник ако се познати (1-26):

1. t_a, t_b, t_c;
2. b, c, h_a;
3. a, h_b, h_c;
4. a, t_a, h_a;
5. a, h_a, α;
6. h_a, s_a, α;
7. h_a, s_a, t_a;
8. a, $b+c$, α;
9. β, γ, $2s$;
10. a, $c-b$, β;
11. a, $c-b$, α;
12. b, c, $\gamma-\beta$;
13. a, $c-b$, $\gamma-\beta$;
14. a, $b+c$, $\gamma-\beta$;
15. a, $b+c$, β;
16. $b+c$, β, h_c;
17. $b+c$, α, β;
18. a, $b+c$, h_b;
19. $b+c$, h_c, $\beta-\gamma$;
20. $b-a$, h_b, γ;
21. $b-c$, h_b, $\beta-\gamma$;
22. $b-c$, α, β;
23. $b-c$, h_b, α;
24. a, $b-c$, h_c;
25. a, α, h_b+h_c;
26. a, α, h_c-h_b.

27. Да се конструира паралелограм ако е познат еден агол и дијагоналите.

28. Да се конструира трапез ако му се познати четирите страни.

29. Да се конструира трапез ако се познати основите и дијагоналите.

30. Да се конструира четириаголник ако се познати три страни и аглите што лежат на четвртата страна.

31. Да се конструира четириаголник ако се познати страните и аголот меѓу две спротивни страни.

32. Да се конструира четириаголник ако се познати дијагоналите, аголот помеѓу нив и две страни.

33. Да се конструира четириаголник ако се познати страните и една од средните линии.

34. Да се најде ГМЦ на кружниците со даден радиус, коишто минуваат низ дадена точка.

35. Да се најде ГМЦ на кружниците со даден радиус, коишто допираат дадена права.

36. Да се најде ГМЦ на кружниците со даден радиус, коишто допираат дадена кружница.

37. Да се конструира кружница со даден радиус која минува низ дадена точка и допира:

а) дадена права;

б) дадена кружница.

38. Да се конструира кружница со даден радиус којашто допира дадена права и дадена кружница.

39. Да се најде ГМЦ на кружниците, коишто допираат две дадени паралелни прави.

40. Да се најде ГМЦ на кружниците, коишто допираат две дадени концентрични кружници.

41. Да се најде ГМТ од кои една дадена кружница се гледа под даден агол.

42. Да се најде точка, од која една дадена кружница и една дадена отсечка се гледаат под даден агол.

43. Да се најде ГМТ од кои две дадени кружници се гледаат под еден ист агол.

44. Нека точката A е надворешна за кружницата k. Низ точката A да се повлече права, којашто ја сече кружницата k во точките M и N, така што $\overline{AM}=\overline{MN}$ (точката M е меѓу A и N).

45. Низ пресечната точка на две дадени кружници да се повлече секанта, така што нејзиниот внатрешен дел е еднаков со дадена отсечка.

46. Да се најде геометриското место на средините на тетивите коишто дадена кружница ги отсечува од правите што минуваат низ дадена точка.

47. Да се најде ГМТ за кои разликата од квадратите на растојанијата до две дадени точки е константна.

48. Даден е квадрат ABCD со страна a. Да се најде ГМТ за кои збирот на растојанијата до правите AB,BC,CD и DA е константен.

49. Да се најде ГМТ, така што односот на нивните растојанија до две дадени прави е m:n.

50. Да се конструира права, којашто:

а) минува низ дадена точка и дадена кружница ја сече под даден агол;

б) две дадени кружници ги сече под даден агол.

Глава II

ХОМОТЕТИЈА

1. Дадени се кружници k_1,k_2 што се допираат во точката T. Низ точката T се повлечени две прави a и b кои кружницата k_1 ја сечат во точките A и B, а кружницата k_2 во точките C и D, соодветно. Докажи дека:

а) правите AB и CD се паралелни;

б) тангентите на k_1 и k_2 соодветно во точките A и C, односно B и D, се паралелни.

2. Нека Q е пресечната точка на продолженијата од краците AD и BC на трапезот ABCD, а P пресекот на неговите дијагонали. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците: а) ABQ и CDQ; б) ABP и CDP се допираат.

3. Дадена е кружницата (O,r) и точка A на неа. Да се определи геометриското место на средините од тетивите повлечени од A.

4. Дадена е кружница (O,r) и точки A,B,C на неа. На кружницата (O,r) да се најде точка X, така што тетивата BC ја дели на половина тетивата AX.

5. Над основите AB и DC од трапезот ABCD на иста страна од нив, конструирани се рамнострани триаголници ABM и DCN. Докажи дека правата MN минува низ пресечната точка O од продолженијата на краците.

6. Над основите AB и DC на трапезот ABCD, надвор од него, конструирани се квадрати. Докажи дека правата што ги поврзува центрите на квадратите минува низ пресекот P од дијагоналите на трапезот.

7. Нека ABCD е трапез со основа AB и CD и нека M е средината на AB, N средината на CD, P пресекот на дијагоналите и Q пресекот од продолженијата на краците. Докажи дека точките M,N,P,Q се колинеарни.

8. Правата p, паралелна со страната AB на триаголникот ABC, ги сече страните AC и BC во точките M и N соодветно. Нека S_1 и S_2 се центрите на кружниците опишани соодветно околу триаголниците ABC и MNC. Докажи дека точките S_1 и S_2 и C се колинеарни.

9. На страната AB од триаголникот ABC положени се две еднакви отсечки AM и BN; низ точките M и N повлечени се прави p и q паралелни со AC и BC соодветно. Докажи дека точката $P=p\ \ q$ лежи на тежишната линија t_c.

10. Нека C,D и E се три колинеарни точки, а T_1,T_2 и T_3 тежиштата на триаголниците ABC, ABD и ABE. Докажи дека точките T_1,T_2 и T_3 се, исто така, колинеарни.

11. Дадени се две концентрични кружници $k_1(O,r_1)$ и $k_2(O,r_2)$, $r_1>r_2$. Да се повлече права p која ги сече тие кружници последователно во точките A,B,C и D, така што $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$.

12. Дадени се три концентрични кружници k_1,k_2 и k_3. Да се повлече права p, којашто ги сече кружниците последователно во точките A,B,C,D,E,F така што $\overline{AB}=\overline{BC}$.

13. Да се конструира триаголник ABC ако се дадени α,β и h_c.

14. Да се конструира правоаголен триаголник, ако е позната висината, спуштена од темето на правиот агол и ако едната катета е двапати поголема од другата.

15. Да се конструира триаголник ABC ако е дадена симетралата на најмалиот од неговите агли, а неговите страни се однесуваат како $m:n:p$ $(m<n<p)$.

16. Да се конструира триаголник ABC, ако се познати: темето A, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница.

17. Во триаголникот ABC да се впише триаголник PQR чии страни се нормални на страните од триаголникот ABC.

18. Во даден триаголник ABC да се впише ромб со остар агол $\alpha=60^{\circ}$, така што две негови соседни темиња да лежат на AB, а другите две соодветно на BC и CA.

19. Нека AB е дијаметар на кружницата (O,r). Да се конструира квадрат KLMN, такашто K и L да лежат на дијаметарот AB, а M и N на кружницата (O,r).

20. Во дадена кружница K(O,r) да се впише триаголник ABC сличен со даден триаголник PQR.

21. Правите a и b односно c и d се сечат надвор од листот на кој цртаме. Низ дадена точка S да се повлече права p паралелна со правата MN, каде што $M=a\cap b$, $N=c\cap d$.

Глава III

ГЕОМЕТРИЈА НА КРУЖНИЦА

1. Да се докаже дека трите секанти на три кружници кои попарно се сечат, минуваат низ една иста точка.

2. Да се докаже дека секантата на две кружници што се сечат ја полови отсечката, од нивната заедничка надворешна тангента, меѓу допирните точки.

3. Дадена е кружница k_1 и точка M надворешна за k_1. Нека k е променлива кружница низ точката M и нека A,B се пресечните точки на k и k_1. Да се најде ГМТ $AB\cap t$, каде што t е тангентата на k во M.

4. Да се конструира кружница, којашто ортогонално ги сече две дадени кружници и допира:
   а) дадена права;
   б) дадена кружница.

5. Да се конструира кружница, којашто минува низ дадена точка и ортогонално сече две дадени кружници.

6. Да се најде ГМЦ на кружниците, коишто две дадени кружници ги преполовуваат.

7. Да се конструира кружница, којашто минува низ дадена точка M, кружницата k_1 ја сече ортогонално, а кружницата k_2 ја преполовува.

8. Да се конструира кружница, којашто минува низ дадена точка M, а кружниците k_1 и k_2 ги преполовува.

9. Дадени се две кружници k_1 и k_2. Да се најде ГМТ M, така што разликата од квадратите на тангентите повлечени од M на k_1 и k_2 има константна вредност m.

10. Даден е квадрат, на кој две темиња лежат на кружницата $к_0$ на инверзијата ζ, а третото теме е центарот О на инверзијата ζ. Да се најде фигурата во која се пресликува квадратот при инверзијата ζ.

11. Во кружницата $к_0$ на инверзијата ζ е впишан триаголник АВС. Да се најде фигурата во која се пресликува триаголникот АВС при инверзијата ζ.

12. Кружниците $к_1$ и $к_2$ се допираат во центарот О на инверзијата ζ. Во што се пресликуваат кружниците $к_1, к_2$ при инверзијата ζ?

13. Да се конструира кружница, којашто минува низ две дадени точки А,В и ортогонално ја сече кружницата $к_1$.

14. Со помош на инверзија да се реши задачата 5.

15. Дадена е точка О и две прави a,b (две кружници $к_1$, $к_2$) кои не минуваат низ О. Низ точката О да се повлече права p, којашто ги сече правите a и b (кружниците $к_1$ и $к_2$) во точките А и В соодветно, така што $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=m^2$, m - даден број.

16. Да се конструира кружница, којашто минува низ две дадени точки и сече дадена права (кружница) под даден агол α, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

17. Да се конструира кружница која минува низ една дадена точка и сече две дадени кружници под даден агол α, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Л и т е р а т у р а

[1] Аргунов Б.И., Балк М.Б.: Геометрические постоения на плоскости, Москва, 1957

[2] Делоне Б., Житомирский О.: Задачник по геометрии, Москва-Ленинград, 1952

[3] Моденов П.С.: Сбррник задач по специальномуькурсу Элементарнои математики

[4] Петров К.: Аполониеви задачи, София, 1969

[5] Яглом И.М.: Геометрические преобразования, Москва, 1956

С О Д Р Ж И Н А