ММО 2016

1. Во множеството природни броеви решени ја равенката

$$1+x^z+y^z=\mathrm{NZS}(x^z,y^z).$$

Решение. Нека $d=\mathrm{NZD}(x,y)$. Тогаш $d\,|\,\mathrm{NZS}(x^z,y^z)$, $d\,|\,x^z$ и $d\,|\,y^z$, од каде следува $d=1$. Равенката преминува во облик

$$1+x^z+y^z=x^z y^z,$$

односно

$$(x^z-1)(y^z-1)=2.$$

Добиваме

$$x^z-1=1, y^z-1=2$$

или

$$x^z-1=2, y^z-1=1,$$

од што следи $x=2, y=3, z=1$ или $x=3, y=2, z=1$.

2. Магичен квадрат со димензии 3×3 е квадрат со страна 3, составен од 9 единечни квадрати, така што реалните броеви запишани во единечните квадрати (по еден број во секој единечен квадрат) го задоволуваат својството: збирот на броевите од единечните квадрати во било која редица е еднаков на збирот на броевите од единечните квадрати во било која колона и е еднаков на збирот на броевите во единечните квадрати во двете дијагонали.

Даден е правоаголник со димензии $m\times n$, $m\geq 3, n\geq 3$, составен од mn единечни квадрати. Во секој единечен квадрат од правоаголникот е запишан по еден број така што секој квадрат со димензии 3×3 е магичен. Колку најмногу различни броеви можат да се употребат за пополнување на правоаголникот?

Решение. Да го разгледаме магичниот квадрат прикажан на цртежот десно. Тогаш

A_1	A_2	A_3
B_1	B_2	B_3
C_1	C_2	C_3

$$\begin{aligned}A_1+A_2+A_3&=B_1+B_2+B_3=C_1+C_2+C_3=A_1+B_1+C_1\\&=A_2+B_2+C_2=A_3+B_3+C_3=A_1+B_2+C_3\\&=C_1+B_2+A_3=S,\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}4S&=(B_1+B_2+B_3)+(A_2+B_2+C_2)+(A_1+B_2+C_3)+(C_1+B_2+A_3)\\&=(A_1+A_2+A_3)+(B_1+B_2+B_3)+(C_1+C_2+C_3)+3B_2=3S+3B_2.\end{aligned}$$

Добиваме $S=3B_2$. Во продолжение централниот елемент B_2 го означуваме со x. Докажавме дека ако централниот елемент во магичниот квадрат е x, тогаш

$$S=3x \qquad (1)$$

Ако правоаголникот е со димензии 3×3, тогаш тој е магичен квадрат и постои пополнување со 9 различни броеви, на пример види цртеж десно.

1	10	4
8	5	2
6	0	9

Цртеж 1

Ќе докажеме дека правоаголник со димензии $n=3, m>3$ мора да се пополни со единствен број. Нека $n=3, m>3$ и нека во првиот централен квадрат е бројот x (цртеж 1).

Од (1) добиваме дека ако е пополнет единечниот квадрат од правоаголникот како на цртеж 1, тогаш S на означениот квадрат на сликата

Цртеж 2

	x	x	x	...	...	x	x	x	

Цртеж 3

изнесува $3x$. Го разгледуваме квадратот означен на цртеж 2. Тогаш неговиот централен единечен квадрат мора да биде повторно x, бидејќи втората колона има сума $3x$. Аналогно, со поместување на квадратот на десно добиваме правоаголник кој мора да е пополнет како на цртеж 3.

Од квадратите кои се обоени, следува дека целата втора редица е пополнета со *x*. Нека претпоставиме дека пополнувањето е како на цртеж 4.

a	c								
x	x	x	x	...	...	x	x	x	x
b	d								

Цртеж 4

a	c	a							
x	x	x	x	...	...	x	x	x	x
b	d	b							

Цртеж 5

Бидејќи збирот на броевите по првата редица од обоениот квадрат е ист со збирот на броевите по дијагоналите, пополнувањето мора да биде како што е прикажано на цртеж 5. Понатаму, го разгледуваме обоениот квадрат на цртеж 6. Заради $2a+c=3x$ и $2b+d=3x$ го добиваме пополнувањето прикажано на цртеж 6.

a	c	a	a						
x	x	x	x	...	...	x	x	x	x
b	d	b	b						

Цртеж 6

a	a	a	a						
x	x	x	x	...	...	x	x	x	x
b	b	b	b						

Цртеж 7

Аналогно на пополнувањето на цртеж 5 на обоениот квадрат, добиваме дека $c=a, b=d$, што е прикажано на цртеж 7, од каде следува $a=b=c=d=x$ односно сите елементи од пополнувањето мора да бидат еднакви.

Нека $n>3, m>3$. Тогаш заради претходната дискусија, правоаголникот со ширина 3 и должина m мора да е пополнет со еден број. Од исти причини и секој правоаголник кој се добива со поместување по вертикала мора да е пополнет со еден број.

Конечно, ако $n=m=3$, тогаш постои пополнување со 9 различни броеви. Ако $n>3$ или $m>3$, тогаш единственото можно пополнување е со само еден број.

3. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$xyz + yzt + xzt + xyt = xyzt + 3.$$

Решение. По делење на равенката со $xyzt$ добиваме

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1+\frac{3}{xyzt}.$$

Заради симетрија, без губење од општост, претпоставуваме дека

$$x \le y \le z \le t \qquad (1)$$

од каде следува

$$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{z} \ge \frac{1}{t}.$$

Добиваме

$$\frac{4}{x} \ge \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=1+\frac{3}{xyzt}>1,$$

од каде следува $x<4$.

Случај 1. Нека $x=3$. Тогаш равенката е од облик

$$3yz + yzt + 3zt + 3yt = 3yzt + 3,$$

односно $3(yz+zt+yt)=2yzt+3$. По делење на оваа равенка со yzt добиваме

$$3(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=2+\frac{3}{xyzt}>2,\ \frac{9}{y}>2,$$

од каде $y \le 4$. Можни вредности за y се 3 и 4.

а) За $y=4$ добиваме

$$3(4z+zt+4t)=8zt+3, 12(z+t)=5zt+3, 12(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=5+\frac{3}{zt}>5, \frac{24}{z}>5,$$

од каде $z \le 4$. Од (1) следува $z=4$ и равенката го добива обликот $12(4+t)=20t+3,$ односно $8t=45$, па t не е природен број.

б) За $y=3$, добиваме

$$3(3z+zt+3t)=6zt+3,\ 3(z+t)=zt+1, 3(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{1}{zx}>1,\ \frac{6}{z}>1, z<6.$$

Можни вредности за z се $3,4,5$.

- Нека $z=3$. Тогаш $3(3+t)=3t+1$ што не е можно.
- Ако $z=4$, тогаш $3(4+t)=4t+1,\ \ t=11$.
- Ако $z=5$, тогаш $3(5+t)=5t+1, t=7$.

Решенија се четворките $(3,3,4,11)$, $(3,3,5,7)$.

Случај 2. Нека $x=2$. Тогаш равенката е од облик

$$2yz + yzt + 2zt + 2yt = 2yzt + 3, \text{ т.е.}$$

$$2(yz+zt+yt)=yzt+3 \ldots. \qquad (2)$$

Тогаш секој од броевите y,z,t е непарен. По делење на оваа равенка со yzt добиваме $2(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{3}{xyzt}>1$ од каде $\frac{6}{y}>1$, односно $y<6$.

а) Ако $y=5$ тогаш (2) е од облик $2(5z+zt+5t)=5zt+3$, т.е. $10(z+t)=3zt+3$. Оттука $10(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=3+\frac{3}{zt}>3$ значи $\frac{1}{z}>\frac{3}{20}$, односно $z\le 6$. Единствена можност е $z=5$. Добиваме $10(5+t)=15t+3$, односно $5t=47$ од каде t не е природен број.

б) Ако $y=3$, (2) е од облик $2(3z+zt+3t)=3zt+3$, односно $6\left(z+t\right)=zt+3$. Тогаш $6(\frac{1}{z}+\frac{1}{t})=1+\frac{3}{zt}>1$, од каде $\frac{12}{z}>1$, односно $z<12$. Можности за z се $3,5,7,9,11$.

- Ако $z=3$, тогаш $6(3+t)=3t+3$, од каде $3t=-15$, односно $t=-5\notin\mathbb{N}$.
- Ако $z=5$, тогаш $6(5+t)=5t+3$, $t=-27\notin\mathbb{N}$.
- Ако $z=7$, тогаш $6(7+t)=7t+3$, $t=39$.
- Ако $z=9$, тогаш $6(9+t)=9t+3$, од каде $3t=51$, односно $t=17$.

Значи во овој случај решенија се четворките $(2,3,7,39)$, $(2,3,9,17)$.

Случај 3. Нека $x=1$. Тогаш равенката е од облик

$$yz+yzt+zt+yt=yzt+3,$$

односно

$$yz+zt+yt=3.$$

Од (1) добиваме $3yz\le 3$, односно $yz\le 1$, од каде $y=1$ и $z=1$. Тогаш $1+2t=3$, односно $t=1$. Решение е четворката $(1,1,1,1)$.

Конечно, решенија на почетната равенка се

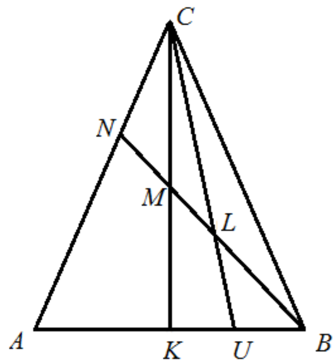
$$(3,3,4,11),\ (3,3,5,7),\ (2,3,7,39),\ (2,3,9,17),\ (1,1,1,1)$$

и сите нивни пермутации.

4. Дадена е отсечка AB и нејзината средна точка K. На нормалата на AB повлечена низ K избрана е произволна точка C, различна од K. Нека N е пресечната точка на AC со правата што минува низ B и средината на отсечката CK. Нека U е пресечната точка на AB со правата што минува низ C и средината L на отсечката BN. Докажи дека односот на плоштините на триаголниците CNL и BUL не зависи од изборот на точката C.

Решение. Нека ја означиме со M средината на отсечката CK. Од теорема на Менелај за триаголникот AKC и правата BN имаме

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{BK}}\cdot\frac{\overline{KM}}{\overline{MC}}=1.$$



Од ова добиваме $\overline{NA}=2\overline{NC}$, од што следи дека $\overline{AC}=3\overline{NC}$. Следува $P_{BNC}=\frac{1}{3}P_{ABC}$. Од теоремата на Менелај за триаголникот ABN и правата CU имаме

$$\frac{\overline{AU}}{\overline{UB}}\cdot\frac{\overline{BL}}{\overline{LN}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{CA}}=1.$$

Па добиваме $\overline{AU}=3\overline{UB}$. Значи U е средина на отсечката BK. Следува дека $P_{BUC}=\frac{1}{4}P_{ABC}$. Нека $x=P_{CNL}$ и $y=P_{BLU}$. Бидејќи L е средина на BN, имаме $P_{BLC}=x$. Сега

$$x+y=P_{BLC}+P_{BLU}=P_{BUC}=\frac{1}{4}P_{ABC},$$

од друга страна

$$2x=P_{CNL}+P_{BLC}=P_{BNC}=\frac{1}{3}P_{ABC}.$$

Ако ги поделиме овие две равенства, добиваме $\frac{1}{2}+\frac{y}{2x}=\frac{3}{4}$, од каде $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$, од што се добива бараното тврдење.

5. Нека $n\geq 3$ и $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви за кои што важи

$$\frac{1}{1+a_1^4}+\frac{1}{1+a_2^4}+...+\frac{1}{1+a_n^4}=1.$$

Докажи го неравенството

$$a_1a_2\cdot...\cdot a_n\geq (n-1)^{n/4}.$$

Решение. Нека $a_i^2=\operatorname{tg}x_i, x_i\in[0,\frac{\pi}{2}), i=1,2,...,n.$ Тогаш $\sum_{i=1}^{n}\cos^2 x_i=1$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sin^2 x_i=1-\cos^2 x_i\geq (n-1)(\prod_{j=1, j\neq i}^{n}\cos x_j)^{2/(n-1)},\ i=1,2,...,n.$$

Множејќи ги горните n неравенства, добиваме

$$\prod_{i=1}^{n}\sin^2 x_i\geq (n-1)^n\prod_{i=1}^{n}\cos^2 x_i.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\prod_{i=1}^{n}\operatorname{tg}x_i\geq (n-1)^{n/2}.$$

Конечно,

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=(\prod_{i=1}^{n}\operatorname{tg}x_i)^{1/2}\geq (n-1)^{n/4},$$

што требаше и да се докаже.