Osječki matematički list **7**(2007), 81–87

Nejednakosti s faktorijelima

Ilija Ilišević*

Sažetak. *Opisane su tehnike kako se mogu dokazati nejednakosti koje sadrže faktorijele. Spomenute tehnike su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *faktorijeli, nejednakosti*

Inequalities with Factorials

Abstract. *The methods for proving inequalities with factorials are described. Those methods are demonstrated on a number of interesting exercises which have been adapted to high school pupils.*

Key words: *factorial, inequalities*

Umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do n označava se s $n!$ i čita "n faktorijel". Dakle,

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Također se definira da je $0! = 1$ i $1! = 1$.

Umnožak prvih n parnih prirodnih brojeva označava se sa $(2n)!!$ i čita "$2n$ dvostruki faktorijel", tj.

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot 2n,$$

a umnožak prvih n neparnih prirodnih brojeva se označava sa $(2n-1)!!$ i čita "$2n-1$ dvostruki faktorijel", dakle

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1).$$

Također se definira da je $0!! = 1$ i $1!! = 1$. Jasno je da je

$$\big((2n)!\big)! = \big(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)\big)! \neq (2n)!!$$

te da je

$$\big((2n-1)!\big)! = \big(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1)\big)! \neq (2n-1)!!.$$

Riješimo sada nekoliko zadataka o nejednakostima s faktorijelima. Pritom nam je potrebno, poglavito, poznavanje aritmetičko-geometrijske nejednakosti i metode matematičke indukcije.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Zadatak 1. *Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{2007}{2008!}<1.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{2007}{2008!}\\
=\ &\left(\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{2008}{2008!}-\frac{1}{2008!}\right)\\
=\ &\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2007!}-\frac{1}{2008!}\right)\\
=\ &1-\frac{1}{2008!}<1.
\end{aligned}$$

Zadatak 2. *Dokažite da za svaki prirodni broj n veći od 1 vrijedi nejednakost*

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\left(2-\frac{5}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{2n-1}{n}\right)>\frac{1}{n!}.$$

Rješenje. Kako je

$$2-\frac{2k-1}{n}-\frac{1}{k}=\frac{2nk-2k^2+k-n}{nk}=\frac{(2k-1)(n-k)}{nk}\geq 0$$

za $1\leq k\leq n$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $k=n$, to je

$$2-\frac{2k-1}{n}\geq\frac{1}{k}$$

(za $k=1$ vrijedi stroga nejednakost). Uvrštavanjem u ovu nejednakost $k=1,2,\ldots,n$ dobivamo, redom,

$$2-\frac{2\cdot 1-1}{n}>\frac{1}{1},\quad 2-\frac{2\cdot 2-1}{n}\geq\frac{1}{2},\quad \ldots,\quad 2-\frac{2n-1}{n}\geq\frac{1}{n},$$

a odatle

$$\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(2-\frac{2n-1}{n}\right)>\frac{1}{n!}.$$

Zadatak 3. *Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost*

$$2^n\cdot n!<(n+1)^n.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je sa

$$2\cdot\sqrt[n]{n!}<n+1,\qquad \text{tj. sa}\qquad \sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{2}.$$

Dokažimo ovu nejednakost. Kako je prema aritmetičko-geometrijskoj (AG) nejednakosti

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n},$$

to je

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} > \sqrt[n]{n!}, \quad \text{pa je} \quad \frac{n+1}{2} > \sqrt[n]{n!}.$$

Zadatak 4. *Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost*

$$\frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{6} \geq (n!)^{\frac{2}{n}}.$$

Rješenje. Prema AG-nejednakosti je

$$\begin{aligned} & (n!)^{\frac{2}{n}} = \left((1\cdot 2\cdots n)^{\frac{1}{n}}\right)^2 \leq \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n}\right)^2 \\ = & \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{6}-\frac{n^2}{12}+\frac{1}{12} \\ = & \frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{6}-\frac{n^2-1}{12} \leq \frac{n^2}{3}+\frac{n}{2}+\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $n=1$.

Zadatak 5. *Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geq 2$ vrijedi nejednakost*

$$(n!)^2 \geq n^n.$$

Rješenje. Lijevu stranu nejednakosti napišimo u obliku

$$\begin{aligned} & (n!)^2 = \big(1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)n\big)^2 \\ = & \big(1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)n\big)\cdot\big(n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\big) \\ = & (1\cdot n)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots(n\cdot 1). \end{aligned}$$

Sada dokažimo da za $k\in\mathbb{N}$ i $1\leq k\leq n$ vrijedi $k\big(n-(k-1)\big)\geq n$:

$$\begin{aligned} & k\big(n-(k-1)\big) \geq n \Longleftrightarrow nk-k(k-1)-n \geq 0 \\ \Longleftrightarrow\ & n(k-1)-k(k-1) \geq 0 \Longleftrightarrow (n-k)(k-1) \geq 0. \end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost točna, to je $k\big(n-(k-1)\big)\geq n$. Ako u ovu nejednakost uvrstimo $k=1,2,3,\ldots,n$ dobivamo, redom, $1\cdot n\geq n$, $2\cdot(n-1)\geq n$, $3\cdot(n-2)\geq n$, $\ldots$, $n\cdot 1\geq n$, a odatle $(n!)^2\geq n\cdot n\cdot n\cdots n = n^n$.

Zadatak 6. *Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost*

$$n^n \geq 2^{n-1}\cdot n!.$$

Rješenje. Dana nejednakost ekvivalentna je sa

$$n^{n-1} \geq 2^{n-1} \cdot (n-1)!, \quad \text{tj. sa} \quad (n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

Dokažimo posljednju nejednakost. Za $n = 1$ i $n = 2$ vrijedi jednakost. Za svaki prirodni broj $n \geq 3$ je, prema AG-nejednakosti,

$$\begin{aligned} & (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (n-2) \cdot (n-1) \\ < \; & \left(\frac{1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)}{n-1}\right)^{n-1} \\ = \; & \left(\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Zadatak 7. *Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost*

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Rješenje. Nejednakost ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$ nejednakost vrijedi jer je $1 \geq 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n i dokažimo da vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n+1$, tj. da je $(n+1)! \geq 2^n$. Kako je $n + 1 \geq 2$, to je

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \geq 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

Zadatak 8. *Dokažite da za svaki prirodni broj $n \geq 6$ vrijedi nejednakost*

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Rješenje. Za $n = 6$ tvrdnja vrijedi jer je $6! = 720 < 729 = \left(\frac{6}{2}\right)^6$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj $n \geq 6$ i dokažimo da vrijedi i za sljedeći prirodni broj $n + 1$ tj. da je

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}. \tag{1}$$

Nejednakost (1) ćemo dokazati ako dokažemo da vrijedi

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}, \tag{2}$$

jer iz induktivne pretpostavke $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ i nejednakosti (2) slijedi (1).

Pretpostavimo da nejednakost (2) nije točna, tj. da za neki prirodni broj $n \geq 6$ vrijedi

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}. \tag{3}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
& (3) \Longleftrightarrow \frac{n^n}{2^n} \cdot (n+1) \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \Longleftrightarrow 2n^n \geq (n+1)^n \\
\Longleftrightarrow \quad & 2n^n \geq n^n + \binom{n}{1} n^{n-1} + \binom{n}{2} n^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} n + 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \geq \binom{n}{2} n^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} n + 1.
\end{aligned}$$

Kako posljednja nejednakost ne vrijedi ni za jedan prirodni broj $n \geq 6$, to je (2) dokazano, a s tim i (1).

Zadatak 9. *Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi nejednakost*

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Rješenje. Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi jer je $\frac{4^2}{3} = \frac{16}{3} < 6 = \frac{4!}{(2!)^2}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \geq 2$ i dokažimo da vrijedi i za sljedeći prirodan broj $n+1$ tj. da je

$$\frac{4^{n+1}}{n+2} < \frac{\big(2(n+1)\big)!}{\big((n+1)!\big)^2}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
& \frac{4^{n+1}}{n+2} = \frac{4^n \cdot 4(n+1)}{(n+2)(n+1)} = \frac{4^n}{n+1} \cdot \frac{(2n+2) \cdot 2}{n+2} \\
< \quad & \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+2) \cdot 2}{n+2} = \frac{(2n)! \cdot (2n+2) \cdot 2 \cdot (2n+1)}{(n!)^2 \cdot (n+2) \cdot (2n+1)} \\
= \quad & \frac{(2n+2)! \cdot 2}{(n!)^2 \cdot (2n^2+5n+2)} < \frac{(2n+2)! \cdot 2}{(n!)^2 \cdot (2n^2+4n+2)} \\
= \quad & \frac{(2n+2)! \cdot 2}{(n!)^2 \cdot 2 \cdot (n+1)^2} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{\big((n+1)!\big)^2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 10. *Dokažite da za sve nenegativne cijele brojeve p i q vrijedi nejednakost*

$$p! \cdot (2q)! \leq 2^{2q} \cdot q! \cdot (p+q)!.$$

Rješenje. Nejednakost ćemo dokazati matematičkom indukcijom po q.

Za $q = 0$ tvrdnja vrijedi jer je $p! \leq p!$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $q \in \mathbb{N}_0$ i dokažimo da vrijedi i za $q+1$, tj. da je

$$p! \cdot \big(2(q+1)\big)! \leq 2^{2(q+1)} \cdot (q+1)! \cdot (p+q+1)!.$$

Kako je

$$\begin{aligned} & p! \cdot \big(2(q+1)\big)! = p! \cdot (2q)! \cdot (2q+1) \cdot (2q+2) \\ \leq \;& 2^{2q} \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot (2q+1) \cdot (2q+2) \\ \leq \;& 2^{2q} \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot (2q+2p+2) \cdot (2q+2) \\ = \;& 2^{2q+2} \cdot q! \cdot (p+q)! \cdot (p+q+1) \cdot (q+1) \\ = \;& 2^{2q+2} \cdot (q+1)! \cdot (p+q+1)!, \end{aligned}$$

to nejednakost vrijedi i za $q+1$ (i za proizvoljan $p \in \mathbb{N}_0$). Prema tome, dokazali smo da tvrdnja vrijedi za bilo koje brojeve $p, q \in \mathbb{N}_0$.

Zadatak 11. *Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost*

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Rješenje. Označimo li lijevu stranu nejednakosti sa x, imamo

$$x = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n},$$

pa je

$$\begin{aligned} & x^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} \\ < \;& \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2-1} \\ = \;& \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{5 \cdot 7} \cdots \frac{(2n-1)^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Zadaci za vježbu

1. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2.$$

2. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 4$ vrijedi nejednakost

$$n! \geq 2^n.$$

3. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 3$ vrijedi nejednakost

$$n! < n^{n-1}.$$

4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$n^n \geq 2^{n-1} \cdot n!.$$

5. Dokažite da za svaki prirodan broj $n > 1$ vrijedi nejednakost

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > \big((n+1)!\big)^n.$$

6. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!.$$

7. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$(3n)! > n^{3n}.$$

Literatura

[1] I. Bušek, *Rešené maturitní úlohy z matematiky*, Statni pedagogicke nakladatelstvi, Praha, 1985.

[2] B. Stojanović, *Zbirka zadataka iz matematike*, Svjetlost, Sarajevo, 1985.

[3] M. P. Vasić, R. R. Janić, O. Mitrinović, Đ. D. Tošić, *Matematički priručnik za takmičenja srednjoškolaca i prijemne ispite na fakultetima*, Građevinska knjiga, Beograd, 1987.

[4] M. Željko, *Rešene naloge iz matematike z državnih in izbirnih tekmovanj - IV.del*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1996.