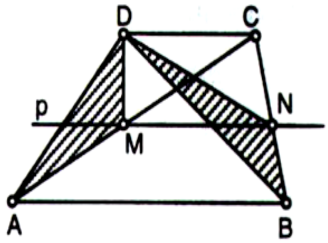
XXIII РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII-1. Второто издание на некоја книга се продава по цена која е 120% од цената на првото издание. Цената на третото издание е помала за 20% од цената на второто издание.

Одреди кое издание е поевтино, првото или третото, и за колку проценти.

Решение: Нека цената на првото издание е x денари, тогаш на второто издание е $x+\frac{20\ x}{100}=x+0{,}2x=1{,}2x$, а на третото издание е $1{,}2x+\frac{20\cdot 1{,}2x}{100}=$ $=1{,}2x-0{,}24x=0{,}96x$. Значи третото издание е поевтино за 4%.

VII-2. Даден е трапез ABCD (AB||CD) и права p што е паралелна со неговите основи. Правата p ја сече дијагоналата AC во точката M и кракот BC во точките N.



Докажи дека триаголниците AMD и BND имаат еднакви плоштини.

Решение: Триаголниците ACD и BCD имаат иста основа CD и еднакви висини (висината на трапезот), па според тоа имаме

$$P_{\Delta ACD}=P_{\Delta BCD}.$$

Триаголниците DMC и DNC имаат иста основа CD и иста висина (растојанието меѓу p и основата CD). Значи $P_{\Delta DMC}=P_{\Delta DNC}$. Според тоа:

$$P_{\Delta AMD}=P_{\Delta ACD}-P_{\Delta DMC}=P_{\Delta BCD}-P_{\Delta DNC}=P_{\Delta BND}.$$

VII-3. Даден е паралелограм ABCD. Дијагоналата AC го дели $\angle BAD$ на два дела што се разликуваат за 20°. Висината на паралелограмот повлечена од темето D кон страната BC ја сече дијагоналата AC во точка H и притоа $\angle AHD=50^\circ$.

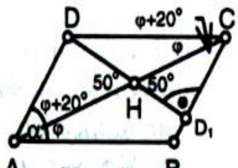
Одреди ги аглите на паралелограмот.

Решение: Спротивните агли во паралелограмот се еднакви, па и деловите на кои ги дели дијагоналата се еднакви. Ако φ е бараниот агол, тогаш $\alpha=\varphi+\varphi+20^\circ=2\varphi+20^\circ$.

Ќе разгледаме три случаи:

а) $\alpha<90^\circ$, а D_1 е подножна точка на висината, тогаш ΔHD_1C е правоаголен, па $\varphi+20^\circ=40^\circ$. Значи аглите на паралелограмот се 60° и 120° (црт. 1).

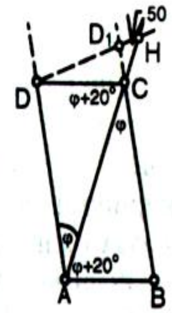
а) $\alpha<90^\circ$, а D_1 е подножна точка на висината, тогаш ΔHD_1C е правоаголен, па $\varphi+20^\circ=40^\circ$. Значи аглите на паралелограмот се 60° и 120° (црт. 1).



Црт. 1

б) Ако $\alpha=90^\circ$, тогаш DD_1 се совпаѓа со DC, па аглите се по 90° - овој случај не е можен.

в) Ако $\alpha>90^\circ$, тогаш D_1 е на продолжението на BC. ΔD_1CH е правоаголен, па $\angle D_1CH=\varphi=40^\circ$, т.е. аглите на паралелограмот се 100° и 80° (црт. 2).



Црт. 2

VII-4. Разликата на некој двоцифрен природен број и бројот запишан со исти цифри, но во обратен ред е квадрат на природен број или нула. Одреди ги сите двоцифрени природни броеви што го имаат ова својство.

Решение: Според условот на задачата имаме:

$\overline{ab}-\overline{ba}=k^2$, т.е. $10a+b-(10b-a)=k^2$, $a, b\in\{1, 2, ..., 9\}$. $9(a-b)=k^2$.

Бидејќи $9=3^2$, следува $a-b$ е точен квадрат на некој број.

Значи, $a-b=0$, $a-b=1$, $a-b=4$ или $a-b=9$.

1° Ако $a-b=0$, т.е. $a=b$, броевите се: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

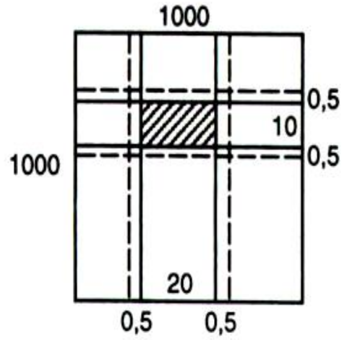
2° Ако $a-b=1$, т.е. $a=b+1$, броевите се: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.

3° Ако $a-b=4$, т.е. $a=b+4$, броевите се: 40, 51, 62, 73, 84, 95.

4° Ако $a-b=9$, т.е. $a=b+9$, бројот е: 90. Значи вкупно има 9+9+6+1=25 броја.

VII-5. Една рамна површина е во форма на квадрат со плоштина 1 km^2. На таа површина има 4500 елки. Сите елки се со иста дебелина и имаат дијаметар во подножјето 50 cm.

Докажи дека во квадратот постои барем една правоаголна површина со должина 20 m и ширина 10 m во која нема ниту една елка.



Решение: Ако дадената површина ја поделиме на правоаголници со димензии 10 m x 20 m и притоа меѓу нив да оставиме лента широка 0,5 m, тогаш имаме 1000:10,5=95,2 и 1000:20,5=48,7.

Значи имаме вкупно 95x48=4560 такви правоаголни површини.

Како и да се распоредени елките, според

принципот на Дирихле постои барем една правоаголна површина во која нема ниту една елка.

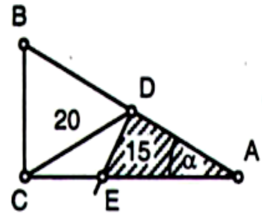
VIII-1. Климе стрелал во мета и за секој погодок добивал 5 поени, а за секое промашување губел 3 поени. Тој ден Климе немал многу среќа, па по испукување на повеќе од 10, а помалку од 20 куршуми тој има 0 поени. Колку куршуми испукал Климе и со колку од нив ја погодил метата?

Решение: Ако Климе ја погодил метата со m куршуми, а ја промашил со n, тогаш $5m-3n=0$ и $10<m+n<20$. Решението на равенката е $m=6$ и $n=10$. Значи Климе испукал 16 куршуми, а метата ја погодил со 6 куршуми.

VIII-2. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle C=90^\circ$) и кружница со дијаметар BC. Кружницата ја сече хипотенузата AB во точка E. Во таа точка повлечена е тангента на кружницата која страната AC ја сече во точката D. Докажи дека триаголникот AED е рамнокрак.

Решение: Триаголникот OEB е рамнокрак $\overline{OB}=\overline{OE}=r$, па $\angle OEB=\beta$. $\angle AED=180^\circ-(90^\circ+\beta)= = 90^\circ-\beta=\alpha$, следува дека триаголникот AED е рамнокрак.

VIII-3. Даден е правоаголен триаголник ABC ($\angle C=90^\circ$), чија тежишна линија кон хипотенузата е еднаква на 20 cm. Од средишната точка D на хипотенузата повлечена е нормала на хипотенузата што ја сече едната катета во точката E и притоа $\overline{DE}=15$ cm. Пресметај ги катетите на триаголникот.



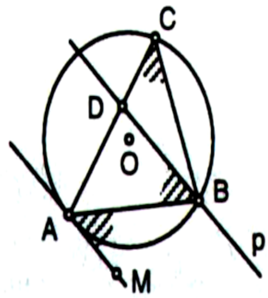
Решение: Ако $\overline{CD}=20\,\text{cm}$, тогаш $\overline{AB}=40\,\text{cm}$.

Од ΔADE: $\overline{AE}^2=\overline{DE}^2+\overline{AD}^2$,

$\overline{AE}=\sqrt{15^2+20^2}=25\,\text{cm}$. $\Delta ABC\sim\Delta ADE$, α е заеднички агол, па $\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{AC}:\overline{AD}$; $40:25=\overline{AC}:20$; $\overline{AC}=32\,\text{cm}$, а $\overline{BC}=24\,\text{cm}$.

VIII-4. Околу ΔABC опишана е кружница. Во точката A повлечена е тангента на кружницата. Низ темето B повлечена е права r која е паралелна со тангентата. Правата r ја сече страната AC во точката D.

Докажи дека страната AB е геометриска средина на отсечките AC и AD.



Решение: $\angle ABD=\angle BAM$-како наизменични агли; $\angle ACB=\angle BAM$ - како периферен агол и агол меѓу тангента и тетива, па: $\angle ABD=\angle ACB$ и $\angle ADB=\angle ABC$. Оттука следува дека $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

па $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AC}$, т.е. $\overline{AB}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AC}$.

VIII-5. Одреди ги сите трицифрени природни броеви што се деливи истовремено со 9 и со 5 и разликата од цифрата на десетките и цифрата на стотките е еднаква на разликата од цифрата на единиците и цифрата на десетките.

Решение: Нека бараниот број е $\overline{xyz}$. Бидејќи бројот е делив со 5, следува $z=0$ или $z=5$ и $x+y+z=9k$, $k\in N$. Од условот $y-x=z-y$ имаме $y=\frac{x+z}{2}$. а) Ако $z=0$, тогаш $y=\frac{x}{2}$, па $x+\frac{x}{2}=9k$, $x=6k$. За $k=0$, $x=6$, $y=3$,

па бројот е 630.

б) Ако $z=5$, тогаш $y=\frac{x+5}{2}$, па $x+\frac{x+5}{2}+5=9k$, $x=6k-5$.

За $k=1$, $x=1$, $y=3$, па бројот е 135.

За $k=2$, $x=7$, $y=6$, па бројот е 765.

Според тоа бараните броеви се 135, 630 и 765.