

Алија Муминагиќ, Nykøbing F., Данска

## ЗА ЕДНА ИНТЕРЕСНА МАТЕМАТИЧКА ЗАДАЧА СО КОРЕНИ

Во овој труд ќе дадеме повеќе решенија на „познатата“ задача:  
Да се докаже равенството:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}. \quad (1)$$

Задачата е од категоријата „ни тешка - ни лесна“ (сепак повеќе „тешка“), а ќе ја наречеме рутинска, затоа што дава пракса за примена само за куб на збир и разлика на два броеви и пресметковни операции со корени (дека тоа е така ќе се увериме од Решението 1.).

**Решение 1.** Равенството (1) е еквивалентно со равенството

$$\left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right)^3 = \sqrt[3]{2}-1. \quad (2)$$

Ќе го докажеме равенството (2) „од лево на десно“:

$$\left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right)^3 = \left[ \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right) + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right]^3 =$$

(со примена на  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ )

$$= \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right)^3 + 3 \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} + 3 \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right) \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right)^2 + \left( \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right)^3 =$$

(со примена на  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ )

$$\begin{aligned} &= \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \right)^3 - 3 \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right)^2 - \left( \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right)^3 + \\ &\quad + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \left( \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \right)^2 - 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \left( \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right)^2 \right) + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4^2}{9^2}} \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right) + \left( \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right)^3 = \\ &= \frac{1}{9} - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{9^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2^2}{9^3}} - \frac{2}{9} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{9^3}} - 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{9^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{9^3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{9^3}} - 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{32}{9^3}} + \frac{4}{9} = \\ &= \frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{9} \sqrt[3]{2} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{4} + \frac{3}{9} \sqrt[3]{4} - \frac{12}{9} + \frac{6}{9} \sqrt[3]{2} + \frac{6}{9} \sqrt[3]{2} - \frac{6}{9} \sqrt[3]{4} = \\ &= -\frac{9}{9} + \frac{9}{9} \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}-1 \end{aligned}$$

Ова решение е „tour de force” (мачна работа), но во наставата потребни се и вакви решенија.

Меѓу решенијата на учениците сигурно ќе се најдат и решенија од облик:

**Решение 2.**

$$\begin{aligned} \left( \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \right)^3 &= \left( \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{9}} + \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \right)^3 = \left( \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \right)^3 = \frac{(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3}{9} = \\ &= \frac{[(1 - \sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{4}]^3}{9} = \dots = \sqrt[3]{2} - 1, \end{aligned}$$

што во однос на решението 1, е и полесно и поелегантно.

**Решение 3.** Нека е  $x = \sqrt[3]{2}$ . Тогаш даденото равенство (1) е еквивалентно со

$$\sqrt[3]{x-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} - \frac{x}{\sqrt[3]{9}} + \frac{x^2}{\sqrt[3]{9}} \Leftrightarrow 9x-9 = [(1-x)+x^2]^3.$$

Сага е уште полесно да се утврди, дека за  $x = \sqrt[3]{2}$  ( $x^3 = 2$ ,  $x^6 = 4$ ), последното

равенство е точно, па точно е и неговото еквивалентно равенство (1).

Тешко е да се очекува вакво решение.

**Решение 4.** Десната страна во даденото равенство (1), со користење на формулите

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad (3)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \quad (4)$$

го трансформираме на начин што следува:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} &= \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2} + 1} \stackrel{(3)}{=} \frac{(\sqrt[3]{2})^3 + 1^3}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{3}{\sqrt[3]{9}(\sqrt[3]{2} + 1)} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \\ &= \frac{3 \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}(\sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt[3]{2} + 1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 1}} = \sqrt[3]{\frac{3}{3(1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1}} \stackrel{(4)}{=} \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}. \end{aligned}$$

Слично се докажува дека се точни и следните равенства:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{9}} - \sqrt[3]{\frac{4}{9}} + \sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{16} - 2},$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{8}{9}} + \sqrt[3]{\frac{16}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{128} - 4}.$$

**Решение 5.** Нека е  $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$  и  $y = \sqrt[3]{2}$ . Тогаш  $y^3 = 2$  и  $x = \sqrt[3]{y-1}$ . Сега имаме

$$y^3 = 2 \Leftrightarrow 1 = y^3 - 1 \Leftrightarrow 1 = (y-1)(y^2 + y + 1), \quad (5)$$

па од  $y^3 + 1 = 3$ :

$$y^2 + y + 1 = \frac{1}{3}(3y^2 + 3y + 3) = \frac{1}{3}(3y^2 + 3y + y^3 + 1) = \frac{1}{3}(y+1)^3. \quad (6)$$

Сега од (5) и (6) добиваме:

$$x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{3}{(y+1)^3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1}. \quad (7)$$

Исто така:

$$3 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1),$$

а оттука

$$\frac{1}{y+1} = \frac{y^2 - y + 1}{3}. \quad (8)$$

Конечно од (7) и (8) следува:

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}(y^2 - y + 1) = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}\left((\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1\right) = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{3}),$$

односно

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{12}{27}} - \sqrt[3]{\frac{6}{27}} + \sqrt[3]{\frac{3}{27}} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}, \text{ т.е.} \\ \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} &= \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}, \end{aligned}$$

а ова е равенството (1).

Насетуваме дека важи

$$\sqrt[3]{\frac{2^{n-1}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2^n}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{n+1}}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3n-2}} - 2^{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}?. \quad (9)$$

**Доказ:** Тврдењето (9) ќе го докажеме со математичка идукција. Имаме:

1<sup>0</sup> За  $n = 1$  тврдењето е точно (види ги претходните решенија).

2<sup>0</sup> Нека тврдењето е точно за некое  $n = k \geq 1$ , па имаме

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3k-2}} - 2^{k-1}} &= \sqrt[3]{\frac{2^{k-1}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2^k}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{k+1}}{9}} / \cdot \sqrt[3]{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2^{3k-2}} - 2 \cdot 2^{k-1}} &= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2^{k-1}}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2^k}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2^{k+1}}{9}}, \text{ т.е.} \\ \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^{3k+1}} - 2^k} &= \sqrt[3]{\frac{2^k}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2^{k+1}}{9}} + \sqrt[3]{\frac{2^{k+2}}{9}}, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

Тврдењето важи за  $n = k + 1$ , ако важи за  $n = k \geq 1$ . Значи, важи за секое  $n \in \mathbb{N}$ .

Решенијата 4. и 5. као и обопштувањето се надвор од рутинското решавање и овозможуваат креативност и оригиналност при решавањето.

Ако некој од читателите се запрашал како доаѓаме до рационалните броеви  $\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}$

во равенството (1), може да формулираме и ваква задача:

Одреди ги рационалните броеви  $a, b$  и  $c$  така што

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c};$$

тогаш овој труд во потполност ја оправдува својата цел.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Časopis "Matematika Magasinet"*, (Danska), Nr. 45, april 2009.
- [2] **Krečmar, V.A.**, *Zadačnik po algebre*, Nauka, Moskva, 1968.
- [3] **Sivašinskij, I.H.**, *Teoremi i zadači po algebre i elementarnim funkcijam*, Nauka, Moskva, 1971.

Статијата првпат е објавена во списанието СИГМА на СММ