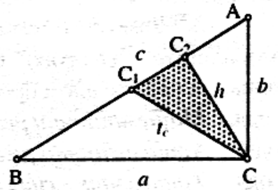
Драгољуб Милошевиќ - Г. Милановац
Коста Мишовски - Скопје

ЕДНО ДВОЈНО НЕРАВЕНСТВО ЗА ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Изучувајќи некои својства на триаголникот, учениците се среќаваат со равенства и неравенства што важат за елементите на триаголникот. Едно од нив е: *која и да било страна на триаголникот е помала од збирот на другите две страни, а е поголема од нивната разлика.*

Овде ќе стане збор за следнота двојно неравенство за страните на правоаголен триаголник: $1<\frac{c+h}{a+b}\le\frac{3\sqrt{2}}{4}$, каде a и b се катети, c е хипотенуза, а h висината кон хипотенузата кај правоаголен триаголник. Ако правоаголниот триаголник е рамнокрак, тогаш важи равенството.

Доказ: Бидејќи хипотенузата е најголема страна во правоаголниот триаголник, имаме: $c>a$ и $c>b$, па $c-a>0$ и $c-b>0$, а $(c-a)\cdot(c-b)>0$, $c^2+ab>c(a+b)$, т.е. $c+\frac{a\cdot b}{c}>a+b$. Од $P=\frac{a\cdot b}{2}=\frac{ch}{2}$ следи дека $h=\frac{a\cdot b}{c}$, па со замена во последното неравенство добиваме: $c+h>a+b$, т.е. $\frac{c+h}{a+b}>1$.



Познато е дека $\overline{CC_1}=\frac{1}{2}c$. Во ΔCC_2C_1 имаме $h<\overline{CC_1}$; $h<\frac{1}{2}c$ или $c>2h$. Ако ΔABC е рамнокрак правоаголен, тогаш $c=2h$. Значи, за правоаголен триаголник важи $c\ge 2h$. Ако на левата и десната страна на неравенството $c\ge 2h$ додадеме h, а потоа го степенуваме неравенството ќе добиеме:

$$(c+h)^2\ge(2h+h)^2;\ c^2+2ch+h^2\ge 9h^2;\ \text{или}\ c^2+2ch\ge 8h^2.$$

користејќи ја Питагоровата теорема $c^2=a^2+b^2$ и равенството $a\cdot b = ch = 2P$, левата страна на неравенството е:
$c^2+2ch = a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$ па $(a+b)^2\geq 8h^2$, т.е. $h^2\leq\frac{1}{8}(a+b)^2$.

Ако ги собереме $c^2+2ch = (a+b)^2$ и $h^2\leq\frac{1}{8}(a+b)^2$ ќе добиеме:
$c^2+2ch+h^2\leq(a+b)^2+\frac{1}{8}(a+b)^2$, $\quad (c+h)^2\leq\frac{9}{8}(a+b)^2$, $\quad c+h\leq\frac{3}{2\sqrt{2}}(a+b)$, т.е. $\frac{c+h}{a+b}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Од $\frac{c+h}{a+b}>1$ и $\frac{c+h}{a+b}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}$ следува тврдењето $1<\frac{c+h}{a+b}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Задача: Докажи дека во правоаголен триаголник важи: **а)** $c<a+b\leq c\sqrt{2}$; **б)** $\frac{c^4}{2}<a^4+b^4<c^4$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус