

КАД ЈЕ ПРЕКЛУЧЕ БИЛО СУТРА

Ратко Тошић, Нови Сад

У једној збирци сам нашао следећи задатак:

Ја имам два пута више година него што си имао ти тада кад сам ја имао толико година колико ти имаш сада. Колико ја имам година ако оба заједно имамо 70 година?

Обично овакви задаци збуњују ученике, јер их сама формулација задатка наводи да се врте у круг, као пас који покушава да ухвати сопствени реп. А у суштини, потребно је само да јасно одредимо шта су у тој причи „тада“ и „сада“.

У нашем случају, „тада“ се односи на време кад сам ја имао толико година колико ти имаш сада.

Решење. Саставимо таблицу:

	моје године	твоје године
сада	x	y
тада	y	$\frac{x}{2}$

Израчунавајући на два начина време од „сада“ до „тада“, састављамо једначину

$$x - y = y - \frac{x}{2},$$

одакле је $3x = 4y$. С друге стране је $x + y = 70$, тј. $y = 70 - x$, па уврштавањем у прву једначину добијамо да је $3x = 4(70 - x)$, тј. $7x = 280$. Сад лако налазимо да је $x = 40$, $y = 30$. Мени је сада 40 година.

Применићемо описану технику у неколико следећих задатака. При решавању задатака, читалац по потреби може да саставља таблице, имајући као узор решење горњег задатка.

Задатак 1. Игњат сада има четири пута више година него што је његова сестра имала кад је била два пута млађа од њега. Колико година Игњат има сада ако се зна да ће за 15 година њих двоје заједно имати 100 година?

Решење. Означимо са x број година Игњатове сестре у време кад је била два пута млађа од брата. Игњат је тада имао $2x$ година. По услови задатка, сада Игњат има $4x$ година, што значи да је од „тада“ до „сада“ прошло $2x$ година. То значи да сада Игњатова сестра има $3x$ година, па њих двоје заједно имају $7x$ година. За 15 година њих двоје ће имати заједно 100 година, што значи да сада заједно имају 70 година. Дакле, $7x = 70$, одакле је $x = 10$. Игњат сада има 40 година.

У задацима овог типа, не ради се увек о „сада“ и „тада“, али су неки услови задатка и сличној узајамној вези. Следе примери таквих задатака. Пођимо од најједноставнијих.

Задатак 2. Књига кошта 1 евро и још половину своје цене. Која је цена књиге?

Решење. Нека је x цена књиге. Тада је $x = 1 + \frac{x}{2}$, па је $x = 2$. Дакле, цена књиге је 2 евра.

Задатак 3. На један тас теразија стављен је колут сира, а на други $\frac{3}{4}$ таквог колута и теж од 1 kg. Ако су теразије у равнотежи, одреди масу колута сира.

Решење. Четвртина колута сира има масу од 1 kg. Дакле, маса целог колута сира је 4 kg.

Задатак 4. Утакмица у рукомету између Звезде и Партизана завршила се резултатом 23 : 21 у корист Звезде. У току утакмице постојао је тренутак кад је Звезда постигла толико голова колико је Партизану остало да постигне до краја утакмице. Колико су голова постигла оба тима заједно до тог тренутка?

Решење. Нека је Звезда до тада постигла x голова, а Партизан y голова. Из услова задатка следи да је $x = 21 - y$, тј. $x + y = 21$.

Задатак 5. За књигу је плаћен 1 евро, а остало је да се доплати још толико колико би требало доплатити ако би за њу било плаћено толико колико је остало да се доплати. Одреди цену књиге.

Решење. Нека је x износ који је требало доплатити кад је за књигу плаћено 1 евро. Тада је цена књиге $1 + x$. С друге стране, ако је за књигу плаћено x евра, а y је износ који у том случају треба доплатити, онда је цена књиге $x + y$. Следи да је $y = 1$. Из услова задатка следи да је и $x = 1$, па је цена књиге 2 евра.

Задатак 6. Сваки учесник шаховског турнира постигао је толико победа белим фигурама колико сви остали заједно црним. Докажи да су сви учесници остварили исти број победа.

Решење. Сваки је постигао толико победа (укупно – играјући и белим и црним фигурама), колико сви заједно (укључујући и њега) играјући црним фигурама.

Задатак 7. Ако сте пре неколико година ви имали толико година колико ја сада, онда је сада двоструки број мојих година већи од броја ваших година. Докажи.

Решење. Нека је разлика наших година y . Кад сам ја имао x година, ви сте имали $x + y$ година. Сада ја имам $x + y$, а ви $y + (x + y) = x + 2y$ година. Јасно је да је $2(x + y) = 2x + 2y > x + 2y$.

Задатак 8. Тања има више година него што ће имати Вања када Ирина напуни толико година колико Тања има сада. Која је од њих три најстарија, а која најмлађа?

Решење. Нека су t, v, i редом године Тање, Вање и Ирине. Ирина ће имати t година (колико Тања има сада) после $t - i$ година. Тада ће Тања имати $2t - i$, а Вања $v + t - i$ година. По услову задатка је $t > i$. С друге стране, такође по услову задатка је $t > v + t - i$, одакле је $v < i$. Дакле, Тања је најстарија, а Вања најмлађа.

Задатак 9. Ана има три пута више година него што је имала Емина кад је Ана имала толико година колико Емина има сада. Кад Емина буде имала толико година колико Ана има сада, оне ће заједно имати 28 година. Колико година има свака од њих две?

Решење. Овде су и игри три момента: „тада“, „сада“ и „онда кад“. Нек је Емина имала x година тада кад је Ана имала толико година колико Емина има сада. Сада Ана има $3x$ година. С друге стране, онда кад Емина буде имала $3x$ година, Ана ће имати $28 - 3x$ година. Разлика година од „онда кад“ и „тада“ иста је за Ану и Емину. Та разлика је за Емину једнака $3x - x = 2x$. Следи да је Ана „тада“ имала $(28 - 3x) - 2x = 28 - 5x$ година. Толико година има и Емина сада. Разлика у годинама Ане и Емине „тада“ је била $(9x - 28) - x = 8x - 28$, а „сада“ је $3x - (9x - 28) = 28 - 6x$. Како је та разлика увек иста, мора бити $8x - 28 = 28 - 6x$, тј. $14x = 56$, одакле је $x = 4$. Дакле, Ана сада има $3x = 3 \cdot 4 = 12$ година.

Задатак 10. Кад је Кића имао толико година колико сада Мића, тетка Пола је имала једну годину мање него што сада имају Кића и Мића заједно. Колико је година имао Кића кад је тетка Пола била млада као Кића сада?

Решење. Означимо садашње године Киће, Миће и тетка Поле са K, M и P редом. Кића је био млад као сада Мића пре $K - M$ година, а тетка Пола млада као сада Кића пре $P - K$ година. Задатак се сада може преформулисати овако:

Пре $K - M$ година је тетка Пола имала $(K + M) - 1$ година. Колико је година имао Кића пре $P - K$ година?

Услов задатка може се записати у облику

$$P - (K - M) = K + M - 1, \quad (1)$$

а тражена величина је $K - (P - K)$, тј. $2K - P$.

Једначина (1) своди се на $P - K = K - 1$, одакле је $2K - P = 1$. Дакле, Кића је имао једну годину кад је тетка Пола била млада као Кића сада.

Задатак 11. Перица је рекао: „Кад ПРЕКОСУТРА постане ЈУЧЕ, онда ће ДАНАС бити далеко од недеље колико и онога дана који је био ДАНАС кад је ПРЕКЈУЧЕ било СУТРА. У који дан недеље је могла бити изречена ова тврдња, ако је она тачна?“

Решење 1. ПРЕКОСУТРА ће постати ЈУЧЕ за три дана, а ПРЕКЈУЧЕ је било СУТРА пре три дана. Дакле, то су два суседна дана седмице (јер седмица има 7 дана). Једина два суседна дана, једнако удаљена од недеље су среда и четвртак (оба по 3 дана). Дакле, тврдња је изречена у недељу.

Решење 2. Анализа по данима:

Ако је реченица изречена у понедељак, онда ће прекосутра бити јуче у четвртак, а прекјуче је било сутра у петак.

Ако је реченица изречена у уторак, онда ће прекосутра бити јуче у петак, а прекјуче је било сутра у суботу.

Ако је реченица изречена у среду, онда ће прекосутра бити јуче у суботу, а прекјуче је било сутра у недељу.

Ако је реченица изречена у четвртак, онда ће прекосутра бити јуче у недељу, а прекјуче је било сутра у понедељак.

Ако је реченица изречена у петак, онда ће прекосутра бити јуче у понедељак, а прекјуче је било сутра у уторак.

Ако је реченица изречена у суботу, онда ће прекосутра бити јуче у уторак, а прекјуче је било сутра у среду.

Ако је реченица изречена у недељу, онда ће прекосутра бити јуче у среду, а прекјуче је било сутра у четвртак.

Једино у последњем случају су дан кад је прекосутра јуче и дан кад је прекјуче било сутра (среда и четвртак), једнако удаљени од недеље (по три дана). Дакле, Перица је дао изјаву у недељу.

Задаци за самостални рад

1. Сваки учесник дводневне олимпијаде првог дана је решио толико задатака колико сви остали заједно другог дана. Докажи да су сви учесници решили исти број задатака.
2. Мој брат ће за две године имати два пута више година него што је имао пре две године, а моја сестра ће за три године имати три пута више година него што је имала пре три године. Ко је од њих двоје старији?
3. Марко и Јула сада имају заједно 27 година, при чему Јула има три пута мање година него што ће имати тада кад њих двоје заједно буду имали пет пута више година него Марко сада. Колико година сада има Марко?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија