O posljedicama Hadwiger–Finslerove nejednakosti

Predrag Lončar[1], *Varaždin*

Uvod

U ovom članku ocijenit ćemo površinu bilo kojeg trokuta ABC i odozgo i odozdo s izrazima $a^2+b^2+c^2$ i $ab+bc+ca$, (a, b i c su duljine stranica trokuta). Zbog toga moramo napraviti pripremu koja je i sadržaj ovog uvoda. Koristit ćemo već poznatu Hadwiger–Finslerovu nejednakost za nenegativne brojeve u, v i w,

$$uv+vw+wu \geqslant \sqrt{3uvw(u+v+w)}. \tag{1}$$

Dokaz se nalazi u [1], napomena 3, str. 208, ili [2], primjer 6, str. 181.

Neka je s poluopseg trokuta ABC,

$$s=\frac{a+b+c}{2}. \tag{2}$$

Stranice a, b i c zadovoljavaju nejednakosti trokuta

$$a<b+c, \quad b<c+a, \quad c<a+b,$$

ili ekvivalentno

$$a<s, \quad b<s, \quad c<s. \tag{3}$$

Neka je P površina trokuta, R polumjer opisane i r polumjer upisane kružnice. Uvedimo još neke korisne oznake,

$$\begin{aligned} H &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}, \\ K &= ab+bc+ca, \\ Q &= (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \end{aligned}$$

Nenegativna veličina Q je mjera "neistostraničnosti" trokuta ABC a uveo ju je Gerretsen, [3].
Vrijedi

$$Q=2(2H-K).$$

Neka je

$$q=\sqrt{\frac{Q}{2}}.$$

[1] Autor je predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu, e-mail: ivan.loncar1@vz.htnet.hr

U daljem ćemo koristiti veličine s, q, a neki put H, K. Veze između njih dane su ovim relacijama

$$s^2 = \frac{H+K}{2}, \quad q^2 = 2H - K,$$

odnosno

$$H = \frac{2s^2 + q^2}{3}, \quad K = \frac{4s^2 - q^2}{3}. \tag{4}$$

S x, y i z označavamo $s-a$, $s-b$ odnosno $s-c$. Veličine x, y i z su zbog (3) pozitivni brojevi bez ikakvih uvjeta jer vrijedi

$$a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y. \tag{5}$$

Formule (5) omogućuju da jednakosti i nejednakosti s a, b i c svedemo na jednakosti i nejednakosti s pozitivnim brojevima x, y i z. Tako npr. vrijede relacije

$$\begin{aligned} K &= x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx), \\ H &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx, \\ K - H &= 2(xy + yz + zx), \\ q^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx). \end{aligned} \tag{6}$$

Lema 1. U trokutu vrijedi identitet

$$\frac{s}{3}(s^2 - q^2) = \frac{P^2}{s} + abc. \tag{7}$$

Dokaz. Iz Heronove formule za površinu trokuta

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

slijedi

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{s} + abc &= (s-a)(s-b)(s-c) + abc \\ &= s^3 - (a+b+c)s^2 + Ks \\ &= \frac{s}{3}(s^2 - q^2). \end{aligned}$$

Pritom smo koristili formulu (2) i drugu formulu iz (4).

Zadatak 1. Pokažite, uz pomoć formula $P = rs$ i $abc = 4RP$, da identitet (7) možemo pisati u obliku:

a)
$$K - H = 2r\,(4R + r) \tag{*}$$

ili, zbog relacije (6) u obliku

$$xy + yz + zx = r\,(4R + r);$$

b)
$$K = s^2 + r\,(4R + r), \quad \text{ili} \quad H = s^2 - r\,(4R + r);$$

c)
$$q^2 = s^2 - 3r(4R + r).$$

Odatle izvedite nejednakost u trokutu $s \geqslant 3\sqrt{3}r$.

Iz relacije (6) slijedi $H < K \leqslant 2H$, a iz identiteta (7) u lemi 1 slijedi $s > q$.

Lema 2. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$8P^2 \le abcs.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Koristit ćemo nejednakost

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc,$$

koja se dobiva množenjem nejednakosti

$$\sqrt{(a+(b-c))\cdot(a-(b-c))} = \sqrt{a^2-(b-c)^2} \leqslant a,$$

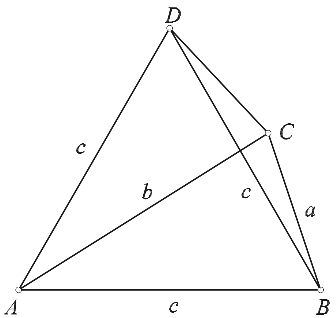
i još dviju dobivenih iz nje cikličkom zamjenom varijabla a, b i c. Sada dana nejednakost slijedi iz Heronove formule. Jednakosti vrijede ako i samo ako je $b=c$, $c=a$ i $a=b$, tj. ako i samo ako je $a=b=c$.

Teorem 1. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}P. \tag{8}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC konstruiramo jednakostranični trokut ABD tako da su C i D s iste strane pravca AB. Po kosinusovom poučku za trokute BCD i ABC imamo:



$$\begin{aligned}|CD|^2 &= a^2+c^2-2ac\cdot\cos(\beta-60^\circ),\\ &= a^2+c^2-ac\cdot(\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta),\\ &= a^2+c^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}-2\sqrt{3}P,\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{2}-2\sqrt{3}P \geqslant 0.\end{aligned}$$

Odavde slijedi tražena nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $C=D$, tj. ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Posljedica 1. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma \geqslant \sqrt{3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Primjenom kosinusovog poučka i formule za površinu trokuta dobivamo

$$b^2+c^2-a^2 = 2bc\cos\alpha = 4P\operatorname{ctg}\alpha.$$

Napišemo li još dvije takve jednakosti za kutove β i γ i potom ih zbrojimo, dobijemo relaciju

$$a^2+b^2+c^2 = 4P(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma).$$

Iz ove jednakosti i teorema 1 slijedi tražena nejednakost.

Poznati matematičari Hadwiger i Finsler su 1938. godine pomoću nejednakosti (1) poboljšali nejednakost (8).

Teorem 2. ([2], str.181) U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}P + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2. \tag{9}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Stavimo li u nejednakost (1) $u = x = \dfrac{-a+b+c}{2}$, $v = y = \dfrac{a-b+c}{2}$ i $w = z = \dfrac{a+b-c}{2}$, imamo

$$xy + yz + zx \geqslant \sqrt{3}P.$$

Koristeći relaciju (6), ovu nejednakost pišemo u obliku

$$K - H \geqslant 2\sqrt{3}P. \tag{**}$$

Uvrstimo li jednakost $2K = 4H - Q$, koja je navedena na početku, imamo

$$2H \geqslant 4\sqrt{3}P + Q.$$

Posljedica 2. Nejednakost (9) je ekvivalentna nejednakosti

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}. \tag{10}$$

Dokaz. Imamo

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Iz kosinusovog poučka za stranicu a i formule za površinu trokuta vrijedi

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\dfrac{2P}{bc}},$$

tj.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4P}.$$

Odavde imamo

$$a^2 = (b-c)^2 + 4P\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Zbrajanjem ove formule i još dviju njoj analognih, slijedi

$$K - H = 2P(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}). \tag{11}$$

Iz dokaza teorema 2, nejednakost (9) je ekvivalentna s

$$K - H \geqslant 2\sqrt{3}P,$$

što zajedno s (11) daje (10).

Zadatak 2. Pokažite, koristeći relaciju (*), da je nejednakost (9) ekvivalentna s

$$s\sqrt{3} \leqslant 4R + r.$$

Potom pokažite, pomoću Eulerove nejednakosti, $R \geqslant 2r$, sljedeću nejednakost

$$a + b + c \leqslant 3\sqrt{3}R.$$

Zadatak 3. Pokažite da je nejednakost (9) ekvivalentna s nejednakošću

$$\sqrt{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leqslant 3 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

Hadwiger je 1939. godine ocijenio odozgo izraz $a^2 + b^2 + c^2$ uz pomoć veličina P i Q.

Teorem 3. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4\sqrt{3}P + 3Q. \tag{12}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Zbog $Q = 2(2H - K)$, nejednakost (12) je ekvivalentna s

$$3K - 5H \leqslant 2\sqrt{3}P. \tag{13}$$

Primijetimo da je ova nejednakost netrivijalna samo ako je $3K - 5H > 0$. Pretpostavimo da vrijedi

$$3K - 5H > 0, \tag{14}$$

i izrazimo sve veličine u nejednakosti (13) pomoću x, y i z. Ona time postaje,

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \leqslant \sqrt{3}\sqrt{xyz(x + y + z)}, \tag{15}$$

uz pretpostavku (14) zapisanu kao

$$2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2) > 0. \tag{16}$$

Znamo da pretpostavka (16) osigurava postojanje trokuta s duljinama stranica $A = \sqrt{x}$, $B = \sqrt{y}$ i $C = \sqrt{z}$, i da je

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)} \tag{1}$$

njegova, po pretpostavci (16), površina. Nejednakost (15) možemo sada pisati kao nejednakost za trokut s duljinama stranica A, B, C i površinom F,

$$16F^2 \leqslant \sqrt{3}ABC\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{17}$$

Po lemi 2, primijenjenoj na trokut s duljinama stranica A, B i C, imamo

$$16F^2 \leqslant ABC(A + B + C). \tag{18}$$

Upotrebom nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine imamo

$$\frac{A + B + C}{3} \leqslant \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}},$$

odnosno

$$A + B + C \leqslant \sqrt{3}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{19}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $A = B = C$, tj. $a = b = c$. Iz nejednakosti (18) i (19) slijedi nejednakost (17). Time je (12) dokazano.

Iz teorema 2 i 3 slijedi

Posljedica 3. U svakom trokutu vrijedi nejednakost

$$4\sqrt{3}P + Q \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 4\sqrt{3}P + 3Q,$$

ili ekvivalentno,

$$K - H \geqslant 2\sqrt{3}P \geqslant 3K - 5H.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

S. Beatty je 1954. godine poboljšao nejednakost (12), odnosno (13).

Teorem 4. [4] U svakom trokutu vrijedi

$$(K - H)^2 \geqslant 12P^2 \geqslant (K - H)(3K - 5H). \tag{20}$$

Svaka od jednakosti vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Lijeva nejednakost u (20) odmah izlazi kvadriranjem nejednakosti (**), koja je ekvivalentna nejednakosti (9). Desna nejednakost u (20) je nova, tj. samo ako je ispunjeno $3K - 5H > 0$, netrivijalna samo ako je $s > 2q$. U tom slučaju ta je nejednakost jača od nejednakosti (13) jer je $K - H \geqslant 3K - 5H$.

Zadatak 4. Pokažite, da nejednakost (20) možemo zapisati ovako

$$(s^2 - q^2)^2 \geqslant 27P^2 \geqslant (s^2 - q^2)(s^2 - 4q^2). \tag{21}$$

Potom dokažite desnu nejednakost u (21) svodeći je pomoću (3) na nejednakost

$$xy(x - y)^2 + yz(y - z)^2 + zx(z - x)^2 \geqslant 0.$$

R. Frucht je 1957. godine poboljšao obje nejednakosti u (21). Ako su u trokutu zadani s i q, njegove ocjene su najbolje moguće, jer se može pokazati da daju minimum $s(s + q)^2(s - 2q)$ za P^2, odnosno maksimum $s(s - q)^2(s + 2q)$ za P^2, kada je P^2 zapisan pomoću s, q i još jednog parametra. Dokaz Fruchtove nejednakosti izvodi se pomoću zanimljivog identiteta u trokutu koji je naveden u sljedećoj lemi.

Lema 3. U svakom trokutu vrijedi identitet

$$\left[27P^2 - s^2(s^2 - 3q^2)\right]^2 = s^2\left[4q^6 - 27(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2\right]. \tag{22}$$

Dokaz. Koristeći identitet iz zadatka 1 c), ovaj identitet možemo zapisati kao poznatu Blundonovu jednakost.

$$4r^2\left[-s^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)s^2 - r(4R + r)^3\right] = (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2.$$

Da je dokažemo, koristimo sljedeće relacije (vidjeti relaciju u zadatku 1 b)),

$$a + b + c = 2s,\ K = s^2 + r(4R + r),\ abc = 4Rrs. \tag{23}$$

Pomoću Viètovih formula i relacija (23), vidimo da su a, b i c nultočke kubne jednadžbe

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrs = 0. \tag{24}$$

Jednadžbu (24) zamjenom $x = z + \dfrac{2s}{3}$ svodimo na oblik

$$z^3 - \frac{1}{3}\left[s^2 - 3r(4R + r)\right] z + \frac{2}{27} s \left[s^2 - 9r(2R - r)\right] = 0. \tag{25}$$

S jedne strane diskriminanta D kubne jednadžbe (24) odnosno (25) je

$$D = (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2. \tag{26}$$

S druge strane, koristeći koeficijente kubne jednadžbe (25), diskriminanta D je

$$D = \frac{4}{27}\{\left[s^2 - 3r(4R + r)\right]^3 - s^2(s^2 - 18Rr + 9r^2)^2\}. \tag{27}$$

Nakon pregrupiranja članova u izrazu (27) dobivamo poznati oblik diskriminante

$$D = 4r^2\left[4R(R - 2r)^3 - (s^2 + r^2 - 10Rr - 2R^2)^2\right]. \tag{28}$$

Iz relacija (28) i (26) slijedi identitet (22).

Teorem 5. [5] U svakom trokutu vrijedi

$$s(s + q)^2(s - 2q) \leqslant 27P^2 \leqslant s(s - q)^2(s + 2q). \tag{29}$$

Obje jednakosti vrijede ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Dokaz. Iz identiteta (22) u lemi 3 slijedi nejednakost

$$\left[27P^2 - s^2(s^2 - 3q^2)\right]^2 \leqslant 4s^2q^6.$$

Dobivamo

$$\left|27P^2 - s^2(s^2 - 3q^2)\right| \leqslant 2sq^3$$

Posljednja nejednakost ekvivalentna je nejednakosti (29). Obje vrijede ako i samo ako je

$$(s + q)^2(s - 2q) = (s - q)^2(s + 2q).$$

No, to je onda i samo onda kada je $q = 0$, tj. $Q = 0$, odnosno jedino u slučaju $a = b = c$.

Literatura

[1] Šefket Arslanagić, *Jedna algebarska nejednakost i njezina primjena*, Matematičko-fizički list 4/220, str. 207–212.

[2] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike 2*, HMD, Element, Zagreb 1994.

[3] J. C. H. Gerretsen, *Ongelijkheden in de driehoek*, Niew Tijdschr. Wiskunde 41(1953), 1–7.

[4] S. Beatty, *Upper and lower estimates for the area of a triangle*, Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. 48, 1–5 (1954).

[5] R. Frucht, *Upper and lower bounds for the area of a triangle for whose sides two symmetric functions are known*, Can. J. Math. 9, 227–231 (1957).