Ристо Малчески, Скопје
Марија Попоска, Охрид

УШТЕ НЕШТО ЗА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА

Од редовната настава ни е позната Питагоровата теорема, која гласи:

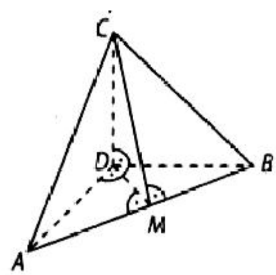
Ако a *и* b *се должините на катетите на правоаголен триаголник, а* c *е должината на неговата хипотенуза, тогаш* $a^2+b^2=c^2$,

пли популарно кажано

Кај правоаголен триаголник збирот на плоштините на квадратите конструирани над катетите е еднаков на плоштината на квадратот конструиран над хипотенузата.

За оваа теорема постојат повеќе од 100 различни докази, а во [1] се дадени 16 докази на истата. Понатаму, во [2] е докажано како од Питагоровата теорема следуваат Карнооовите формули, теоремата на Аполониј, теоремата на Лајбниц и теоремата на Карно, а во [3] се решени поголем број конструктивни задачи со примена на Питагоровата теорема.

Примената на Питагоровата теорема често пати доведува до интересни и на прв поглед неочекувани резултати, а една таква примена е дадена во [4]. Во нашите натамошни разгледувања прво ќе се осврнеме на две обопштувања на Питагоровата теорема. Првото обопштување е во врска со правоаголен тетраедар.



Теорема 1. Нека е даден правоаголен тетраедар $ABCD$, т.е. тристрана пирамида таква што $\measuredangle ADB=\measuredangle BDC=\measuredangle CDA$. Тогаш важи

$$P_{ABC}^2=P_{ADB}^2+P_{BDC}^2+P_{CDA}^2.$$

Доказ. Ја повлекуваме рамнината која го содржи работ DC и е нормална на работ AC. Нека M е пресечната точка на оваа рамнина со работ AB (цртеж десно). За плоштините на ѕидовите на тетраедарот имаме:

$$P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CM}}{2},\ P_{ADB}=\frac{\overline{DA}\cdot\overline{DB}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DM}}{2}, P_{BDC}=\frac{\overline{DB}\cdot\overline{DC}}{2}, P_{CDA}=\frac{\overline{DA}\cdot\overline{DC}}{2}.$$

Бидејќи $\overline{CM}^2=\overline{DC}^2+\overline{DM}^2$, $\overline{AB}^2=\overline{DA}^2+\overline{DB}^2$, добиваме

$$P_{ABC}^2=\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{CM}^2}{4}=\frac{\overline{AB}^2\cdot(\overline{DC}^2+\overline{DM}^2)}{4}$$
$$=\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{DC}^2}{4}+\frac{\overline{AB}^2\cdot\overline{DM}^2}{4}$$

$$= \frac{\overline{DA}^2 \cdot \overline{DC}^2}{4} + \frac{\overline{DB}^2 \cdot \overline{DC}^2}{4} + \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{DM}^2}{4}$$

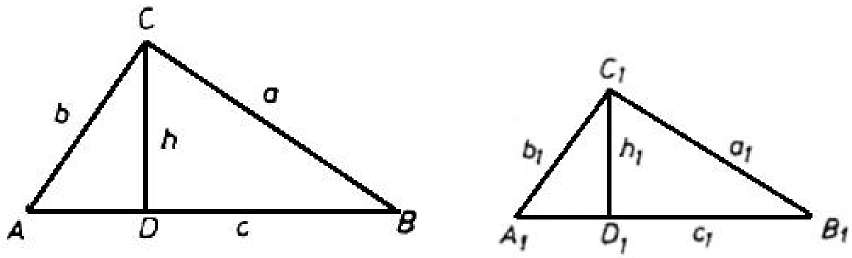
$$= P_{ADB}^2 + P_{BDC}^2 + P_{CDA}^2$$

што и требаше да се докаже. ■

За следното обопштување на Питагоровата теорема прво ќе докажме неколку познати помошни тврдења, а и претпоставуваме дека читателот знае што се тоа слични многуаголници.

Теорема 2. Ако два триаголника се слични, тогаш нивните соодветни висини се пропорционални со нивните соодветни страни.

Доказ. Нека се h и h_1 две соодветни висини на сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ (види цртежи). Бидејќи $\measuredangle B = \measuredangle B_1$, заклучуваме дека и правоаголните триаголници BCD и $B_1C_1D_1$ се слични, па затоа $\frac{a}{a_1} = \frac{h}{h_1}$.



Конечно, од пропорционалноста на соодветните страни на сличните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ следува $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{h}{h_1}$. ■

Теорема 3. Плоштините на два слични триаголници се пропорционални на квадратите на соодветните страни на тие триаголници.

Доказ. Нека ABC и $A_1B_1C_1$ се два слични триаголници и нека h и h_1 се висини кои соодветствуваат на страните c и c_1 на овие триаголници. Тогаш нивните плоштини се

$$P = \frac{ch}{2} \text{ и } P_1 = \frac{c_1h_1}{2}.$$

Оттука и од теорема 2 следува

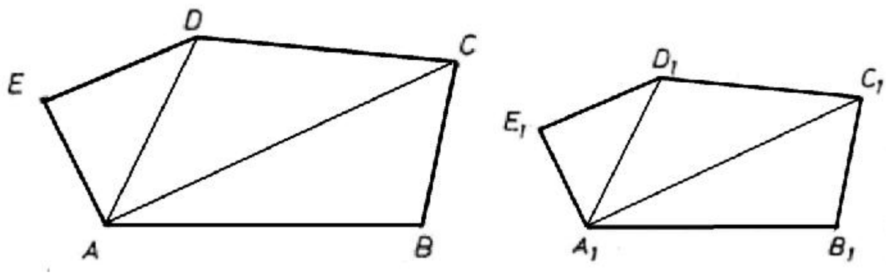
$$\frac{P}{P_1} = \frac{ch}{2} : \frac{c_1h_1}{2} = \frac{c}{c_1} \cdot \frac{h}{h_1} = \frac{c^2}{c_1^2}. \blacksquare$$

Теорема 4. Секои два слични $n-$ аголници може да се поделат на $n-2$ триаголници такви што секои два соодветни триаголници се слични меѓу себе.

Доказ. Теоремата ќе ја докажеме во случај на два слични петаголници, а истата постапка може да се примени и за два слични $n-$ аголници.

Нека $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ се два слични пеаголници (види цртежи), при што $\measuredangle A = \measuredangle A_1$, $\measuredangle B = \measuredangle B_1$, $\measuredangle C = \measuredangle C_1$, $\measuredangle D = \measuredangle D_1$, $\measuredangle E = \measuredangle E_1$ и нека

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D_1E_1}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E_1A_1}} = k .$$



Тогаш од $\measuredangle B = \measuredangle B_1$ и $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B_1C_1}}$ следува $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Затоа $\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = k$ и $\measuredangle ACB = \measuredangle A_1C_1B_1$. Понатаму, $\frac{\overline{AC}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C_1D_1}}$ и

$$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD - \measuredangle ACB = \measuredangle B_1C_1D_1 - \measuredangle A_1C_1B_1 = \measuredangle A_1C_1D_1$$

па затоа $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$. Конечно, слично се докажува дека $\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1$. ■

Теорема 5. Плоштините на два слични многуаголници се пропорционални со квадратите на нивните соодветни страни.

Доказ. Теоремата ќе ја докажеме во случај на два слични петаголници, а истата постапка може да се примени и во случај на два слични $n-$ аголници.

Нека $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ се два слични петаголници. Со P_1, P_2, P_3 да ги означиме плоштините на триаголниците ABC, ACD, ADE, а со p_1, p_2, p_3 да ги означиме плоштините на триаголниците $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1D_1E_1$. Тогаш од теорема 4 следува $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ACD \sim \triangle A_1C_1D_1$ и $\triangle ADE \sim \triangle A_1D_1E_1$, па затоа од теорема 3 добиваме

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3} = k^2, \text{ т.е. } P_1 = k^2 p_1,\ P_2 = k^2 p_2,\ P_3 = k^2 p_3 .$$

Конечно, за плоштините P и p на сличните петаголници $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ важи

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = k^2 p_1 + k^2 p_2 + k^2 p_3 = k^2 (p_1 + p_2 + p_3) = k^2 p ,$$

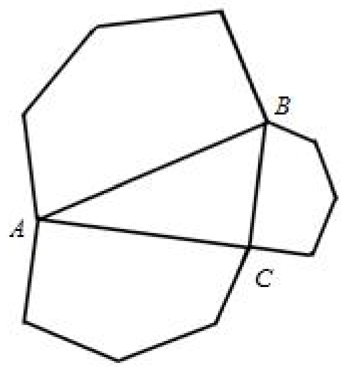
односно $\frac{P}{p} = k^2$, што и требаше да се докаже. ■

Сега користејќи ја теорема 5, ќе докажеме уште едно обопштување на Питагоровата теорема.

Теорема 6. Збирот на плоштините на секои два слични многуаголници кои се конструирани над катетите на правоаголниот триаголник е еднаков на плоштината на ним сличниот многуаголник кој е конструиран над хипотенузата на тој триаголник.

Доказ. Нека P_1, P_2 и P се плоштините на сличните многуаголници конструирани над катетите a, b и хипотенузата c на правоагол-ниот триаголник ABC. Тогаш, од теорема 5 следува $\frac{P_1}{P} = \frac{a^2}{c^2}$ и $\frac{P_2}{P} = \frac{b^2}{c^2}$, од каде добиваме

$$P_1 = \frac{a^2}{c^2} P \text{ и } P_2 = \frac{b^2}{c^2} P .$$



Ако ги собереме последните две равенства и ја искористиме Питагоровата теорема последователно добиваме

$$P_1 + P_2 = \frac{a^2}{c^2} P + \frac{b^2}{c^2} P,$$

$$P_1 + P_2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} P,$$

$$P_1 + P_2 = P,$$

што и требаше да се докаже. ■

Забелешка 1. Во претходните разгледувања дадовме две обопштувања на Питагоровата теорема, при што докажавме уште четири помошни тврдења кои сами по себе се важни за сличните многуаголници. Притоа теоремите 2 и 3 се познати од редовната настава, но истите во редовната настава најчесто се дадени без доказ, па затоа во нашите разгледувања се презен-тирани доказите на овие теореми.

Забелешка 2. а) Во теорема 4 тврдењето го докажавме за слични пет-аголници. Меѓутоа, користејќи ја истата идеја од првиот чекор, теоремата во општ случај лесно се докажува со помош на математичка индукција.

Навистина, тврдењето на теоремата е јасно за $n = 4$.

Нека претпоставиме дека тврдењето на теоремата важи за $k \geq 4$ и нека $A_1A_2A_3A_4...A_{k+1}$ и $B_1B_2B_3B_4...B_{k+1}$ се два слични слични $(k+1)-$аголници. Аналогно како во доказот на теорема 4 се докажува дека триаголниците $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ се слични, од што непосредно следува дека $k-$аголниците $A_1A_3A_4...A_{k+1}$ и $B_1B_3B_4...B_{k+1}$ се слични. Понатаму, од индуктивната претпоставна следува дека овие $k-$аголници може да се поделат на

$k-2$ триаголници такви што секои два соодветни триаголници се слични меѓу себе. Значи, сличните $(k+1)-$аголници $A_1A_2...A_{k+1}$ и $B_1B_2...B_{k+1}$ ги поделивме на $k-1$ триаголници такви што секои два соодветни триаголници се слични меѓу себе. Конечно, од принципот на математичка индукција следува точноста на теоремата 4.

б) Доказите на теоремите 5 и 6 во општ случај се идентични како и доказите за слични петаголници, со таа разлика што наместо со три работиме со $n-2$ триаголници.

На крајот од ова наше дружење ќе ги докажеме обратната теорема на Питагоровата теорема, како и теоремата на Стјуарт која непосредно следува од Питагоровата теорема.

Теорема 7 (обратна Питагорова теорема). Нека е даден триаголник $ABC, \overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$. Ако важи равенството $a^2+b^2=c^2$, тогаш триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето C.

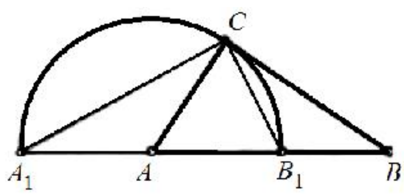
Доказ. *Прв начин*. Нека $A'B'C'$ е правоаголен триаголник со прав агол во темето C', таков што $\overline{A'C'}=\overline{AC}=b$ и $\overline{B'C'}=\overline{BC}=a$. Од Питагоровата теорема иодусловот на теоремата следува

$$\overline{A'B'}^2=\overline{A'C'}^2+\overline{B'C'}^2=a^2+b^2=c^2=\overline{AB}^2,$$

од каде добиваме $\overline{A'B'}=\overline{AB}$. Сега од признакот ССС следува дека $\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$, што значи дека триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето C.

Втор начин. Нека во триаголникот ABC важи $a^2+b^2=c^2$ (цртеж десно). Тогаш $a^2=(c-b)(c+b)$, т.е.

$$(c+b):a=a:(c-b). \qquad (1)$$



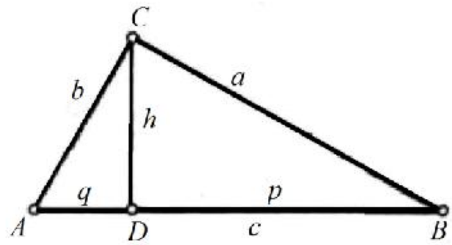
Нека A_1 е точка на продолжението на страната AB и B_1 е точка на страната AB, така што $\overline{AA_1}=\overline{AB_1}=\overline{AC}=b$. Тогаш триаголникот A_1B_1C е правоаголен во кој $\measuredangle A_1CB_1=90^\circ$, како периферски агол над дијаметарот A_1B_1, а триаголниците A_1BC и B_1BC имаат заеднички агол во темето B, односно $\measuredangle B_1BC=\measuredangle A_1BC$. Сега од $\overline{A_1B}=\overline{A_1A}+\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{AB}=b+c$, $\overline{B_1B}=\overline{AB}-\overline{AB_1}=\overline{AB}-\overline{AC}=c-b$ и пропорцијата (1) следува дека $\triangle A_1BC\sim\triangle CBB_1$. Според тоа, $\measuredangle BB_1C=\measuredangle A_1CB$ и $\measuredangle B_1CB=\measuredangle CA_1B$. Но во триаголникот A_1CA важи $\overline{AA_1}=\overline{AC}=b$, што значи дека тој е рамнокрак, па затоа $\measuredangle ACA_1 = \measuredangle AA_1C$, што заедно со претхоните равенства значи $\measuredangle ACA_1 = \measuredangle B_1CB$. Од досега изнееното следува

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACB_1 + \measuredangle B_1CB = \measuredangle B_1CA + \measuredangle ACA_1 = \measuredangle B_1CA_1 = 90^\circ,$$

што значи дека триаголникот ABC е правоаголен со прав агол во темето C.

Трет начин. Нека во триаголникот ABC важи $a^2 + b^2 = c^2$ (цртеж десно) и нека $CD \perp AB$. Од правоаголниот триаголник ADC следува $q^2 + h^2 = b^2$, а од правоаголниот триаголник BDC следува $p^2 + h^2 = a^2$. Со замена во даденото равенство $a^2 + b^2 = c^2$ добиваме

$$p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = c^2,$$



па како $c = p + q$, од последното равенство следува

$$p^2 + q^2 + 2h^2 = (p+q)^2,$$

$$p^2 + q^2 + 2h^2 = p^2 + q^2 + 2pq,$$

$$h^2 = pq,$$

$$h : q = p : h,$$

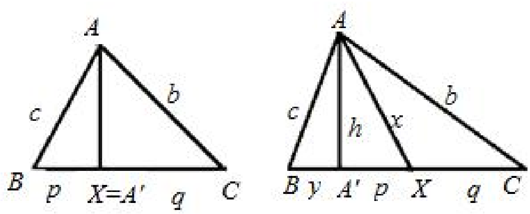
што значи дека правоаголните триаголници ADC и BDC, кои имаат прав агол во темето D се слични. Сега од $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ и последната пропорција следува дека $\measuredangle DBC = \measuredangle ACD$ и $\measuredangle DAC = \measuredangle DCB$. Конечно, бидејќи $\triangle ADC$ е правоаголен, добиваме

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACD + \measuredangle DCB = \measuredangle ACD + \measuredangle DAC = 90^\circ. \blacksquare$$

Теорема 8 (Стјуарт). Ако X е произволна точка од страната BC на $\triangle ABC$, тогаш

$$\overline{AX}^2 = \frac{\overline{CX}}{\overline{BC}}\overline{AB}^2 + \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}}\overline{AC}^2 - \overline{BX} \cdot \overline{CX}.$$

Доказ. Со a, b, c да ги означиме должините на страните BC, CA, AB, соодветно, со p, q, x редоследо должините на отсечките BX, CX, AX и со A' подножјето на висината h повлечена од темето A.



Тврдењето прво ќе го докажеме во случајот кога $X = A'$. Од Питагоровата теорема следува $h^2 = b^2 - q^2$ и $h^2 = c^2 - p^2$. Ако првото равенство го помножиме со p, а второто со q и ги собереме добиените равенства, по средувањето добиваме

$$h^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - pq .$$

Нека $X \neq A'$. Отсечката AA' е висина за триаголниците ABX и BAC. Без ограничувањена оштоста можеме да претпоставиме дека $B - A' - X$. Ако означиме $\overline{BA'} = y$, тогаш од претходно доажаното следува

$$h^2 = \frac{y}{p}x^2 + \frac{p-y}{p}c^2 - y(p-y) \text{ и } h^2 = \frac{y}{a}b^2 + \frac{a-y}{a}c^2 - y(a-y) .$$

Ако ги изедначиме десните страни на последните две равенства, по средувањето добиваме

$$x^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 - pq ,$$

што и требаше да се докаже. ■

Забелешка. Ако не важи Нека претпоставиме дека $B - A' - C$, односно ако Нека претпоставиме дека A' е точка од правата BC, која не лежи на страната BC, тогаш слично се докажува дека

$$x^2 = \frac{p}{a}b^2 + \frac{q}{a}c^2 + pq . \blacksquare$$

Задачи за самостојна работа

1. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е коцка со раб a.

   а) Определи ја плоштината на триаголникот BDA_1.

   б) Определи ја плоштината на триаголникот BDA', каде A' е средина на работ AA_1.

2. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е квадар со рабови $\overline{AB} = a, \overline{AD} = b, \overline{AA'} = c$. Определи ја плоштината на пресекот на овој квадар и рамнината која минува низ точките B, D и A'.

3. Конструирај рамностран триаголник чија плоштина е еднаква на:
   а) збирот на плоштините на два дадени рамнострани триаголници,
   б) разликата на плоштините на два дадени рамнострани триаголници.

4. Конструирај правилен шестаголник чија плоштина е два пати помала од плоштината на даден шестаголник.

5. Дадени се два слични петаголници. Конструирај петаголник, сличен на нив, чија плоштина е еднаква на:
   а) збирот на плоштините на дадените петаголници,
   б) разликата на плоштините на дадените петаголници.
6. Нека $ABCDEFG$ е произволен седумаголник. Конструирај седумаголник сличен на него чија плоштина е три пати поголема од плоштината на седумаголникот $ABCDEFG$.

Литература

1. Аневска, К., Малчески, С.: Една теорема, мнигу начини на докажување, Математички талент, 2021
2. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици од Питагоровата теорема, Математички талент, 2021
3. Главче, М., Аневска, К.: Решаваме коснтруктивни задачи со помош на Питагорвата теорема, Математички талент, 2021
4. Михајло Петровиќ – Алас: Занимливости во примената на Питагоровата теорема, Математички талент, 2021