Д.Л.Карчицка
во соработка со
Д.П.Коробар

ОСНОВИ
НА
ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Математички институт со нумерички центар при
Универзитетот "Кирил и Методиј"

СКОПЈЕ,1974

Едиција на Математичкиот институт со нумерички центар при
Универзитетот Кирил и Методиј во Скопје

Печатено во Универзитетската печатница во Скопје

Тираж : 1500 примероци

ПРЕДГОВОР

Оваа книга го содржи материјалот по кој работеше Математичката школа во 1974 година. Затоа таа е наменета првенствено за учениците од средните училишта, кои покажуваат посебен интерес за математиката и кои имаат желба да се запознаат со една понова математичка дисциплина, наречена линеарно програмирање.

Книгата може да биде корисна како почетно четиво и за студентите на оние факултети и високи школи, на кои се изучуваат предметите линеарна алгебра и линеарно програмирање.

Изложениот материјал во книгата е поделен на два самостојни и истовремено взаемноповрзани делови:.А - Основни познавања од линеарна алгебра и Б - Линеарно програмирање. Во обата дела излагањето е пратено со низа примери. Поставени се и повеќе примери за вежба. Читателот кој ги познава основите на линеарната алгебра може да го започне читањето со делот Б.

За да се олесни ракувањето со книгата на крајот е даден индекс во кој се наведени поважните термини со ознака на страната на која за прв пат терминот се јавува или дефинира.

Авторот ја изразува својата благодарност на проф.д-р Живко Мадевски за изнесените забелешки и сугестии во врска со дообјаснување, прецизирање и подобрување на одредени делови од текстот.

Авторот

С О Д Р Ж И Н А

А ОСНОВНИ ПОЗНАВАЊА ОД ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

А ОСНОВНИ ПОЗНАВАЊА ОД ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

Делот А содржи преглед на основните поими на линеарната алгебра: векторски простори, матрици, системи линеарни равенки и неравенки. Изложувањето е ограничено по обем и е подредено на потребите на разгледувањата што се вршат во делот Б.

Во овој дел векторите ги означуваме со мали печатни латински букви ($\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \ldots, \mathrm{a}, \mathrm{d}$), а само векторите колони на дадена матрица А ги означуваме со α. Скаларите ги означуваме со мали ракописни латински или грчки букви ($x, y, \alpha, \beta, \ldots$). Исклучок е направен само за компонентите на векторот d, поради немање соодветна ракописна буква, а сметајќи дека употребата на буквата d како вектор или скалар не доведува до забуна.

I. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

1. За реалните броеви

Нека R е множеството на реалните броеви. Ако x е реален број, тогаш тоа кратко ќе се пишува $x \in R$ и ке се чита: "x припаѓа на R" или "x е елемент на R". За произволно даден пар $x,y \in R$ секогаш важи само една од следните три можности:

- $x = y$ (се чита: "x е еднакво на y"),
- $x < y$ (се чита: "x е помало од y") и тоа значи исто што и $y > x$,
- $x > y$ (се чита: "x е поголемо од y") и тоа значи исто што и $y < x$.

Ќе пишуваме $x \leqslant y$ ако допуштаме да е $x = y$ или $x < y$ (ке читаме: "x е помало или рамно со y").

Познатите операции собирање и множење на реални броеви ги имаат следните особини: За произволни $x,y,z \in R$ е точно

1° $x+y = y+x$, $1'$ $xy=yx$, (комутативен закон)

2° $x+(y+z)=(x+y)+z$, $2'$ $x(yz)=(xy)z$, (асоцијативен закон)

3° постои елемент 0 (нула) така што $x+0=x$, $3'$ постои елемент 1 (единица) така што $1x=x$,

4° за секој елемент x постои елемент y спротивен на x така што $x+y=0$ $4'$ за секој ненулти елемент x постои елемент y инверзен на x така што $xy=1$,

5° множењето е дистрибутивно во однос на собирањето:

$$x(y+z) = xy+xz.$$

Вообичаено е бројот спротивен на x да се означува со $-x$, инверзниот на ненултиот број x да се означува со x^{-1}.

Ако се дадени повеќе броеви $x,y, \ldots, z$ често пати е згодно при нивното означување да не се употребуваат различни букви, туку една иста буква но со различни индекси, на пример: $x_1,x_2,\ldots,x_r$, (или кратко: x_i, $i=1,2,\ldots,r$).

2. Векторскиот простор R^n

За произволно даден природен број n, со R^n ке го означиме множеството на сите можни подредени n-ки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ (точно се знае кој е прв, кој е втор и т.н.). Произволен елемент x на R^n ке го означуваме вака:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

n-ката $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ке се наречува нула на R^n. n-ката $-x = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$ ке се наречува елемент спротивен на $x \in R^n$. Ке велиме дека елементите

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

се еднакви (пишуваме $x = y$) ако $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Собирање на $x, y \in R$ дефинираме на следниот начин:

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Бидејки $x_i, y_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$ тогаш и $x_i + y_i \in R$ што значи дека $x+y \in R^n$. Збирот $x+(-y)$ ке се пишува $x-y$.

За произволни $x, y, z \in R^n$ погоре дефинираното собирање ги има особините $1^\circ - 4^\circ$ наведени во точката 1.

Множење на $x \in R^n$ со $\alpha \in R$ дефинираме на следниот начин:

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

каде αx_i, $i=1,\dots,n$ е множењето во R. Значи $\alpha x \in R^n$.

За произволни $\alpha,\beta \in R$ и $x,y \in R^n$ множењето на елемент од R^n со реален број ги има следните особини:

6° $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

7° $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

8° $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

9° $1x = x$

10° $0x = o$ (0 е нулата на R, а o е нулата на R^n)

Може да се покаже дека $(-1)x = -x$, за секој $x \in R^n$.

Множеството R^n со операциите собирање и множење со реален број дефинирани погоре ќе го нарекуваме <u>векторски простор</u> над реалните броеви R. Елементите на R^n ќе ги викаме <u>вектори</u>, а елементите на R – <u>скалари</u>.

<u>Пример</u>. Дадени се векторите $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ од векторскиот простор R^2 $(n=2)$. Да се најдат векторите $x+y$, $x-y$, $\frac{1}{2}x$.

Решение:

$$x+y = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x-y = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}x = \begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ако x_i, $i=1,\dots,r$ се дадени вектори од R^n, а α_i, $i=1,\dots,r$ се дадени скалари, тогаш векторот $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r$ се нарекува <u>линеарна комбинација</u> на векторите x_i, $i=1,\dots,r$.

<u>Пример</u>. Дадени се векторите $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ од векторскиот простор R^3. Да се најде линеарната комбинација $2x_1 + (-3)x_2$.

Решение: $2x_1 + (-3)x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Во R^n векторите

$$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\dots,e_n=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

ги наречуваме <u>единични вектори</u> и тоа: e_1 е прв единичен вектор, e_2 е втор единичен вектор и т.н. Општо

$$e_i=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\cdot i \quad \text{е} \quad i\text{ - ти единичен вектор.}$$

Забележуваме дека произволен вектор $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ може да се претстави како линеарна комбинација на единичните вектори на следниот начин:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\dots+x_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$$

или кратко $x=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$.

<u>Пример</u>. Во R^n да се најде векторот еднаков на линеарната комбинација $1e_1+2e_2+\dots+ne_n$.

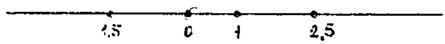
Решение:

$$1e_1+2e_2+\dots+ne_n=\begin{bmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{bmatrix}$$

Општо, <u>векторски простор над реалните броеви R</u> се наречува секое множество V во кое се дефинирани операции: а) собирање на елементи од V со особините 1^o - 4^o наведени во точката 1, б) множење на елемент од V со реален број, кое ги има особините 6^o - 10^o наведени погоре во оваа точка.

3. Геометриско претставување

Познато е дека множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви може да се претстави геометриски со точките на дадена координатна права

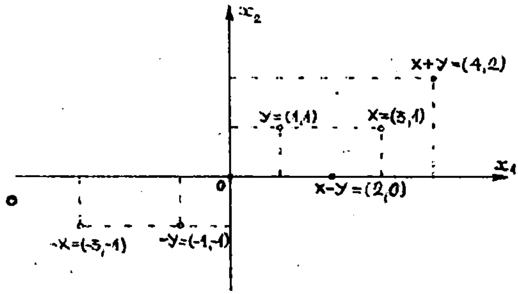


Затоа често пати наместо да велиме броевите x_1, x_2, x_3, ќе велиме точките x_1, x_2, x_3.

Векторските простори $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ исто така можат да се претставaт геометриски. Имено, за секоj вектор

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

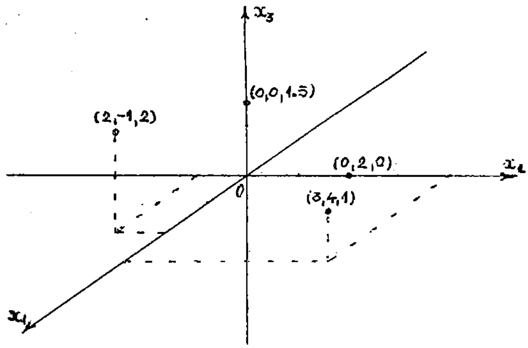
може да се наjде соодветна точка (x_1, x_2) во координатната рамнина $x_1 O x_2$ (затоа векторите на $\mathbb{R}^2$ се наречуваат и точки на координатната рамнина), и обратно. На пример:



За секоj вектор

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

може да се најде соодветна точка (x_1, x_2, x_3) во координатниот простор (затоа векторите на R^3 се наречуваат и точки на координатниот простор). На пример:



Општо, векторите на векторскиот простор R^n се наречуваат и точки на n - димензионален координатен простор. Во секој координатен простор координатниот почеток му одговара на нултиот вектор.

Во R^n, <u>права</u> низ координатниот почеток генерирана со точката $a=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$, се наречува множеството $D \subset R^n$ на точките од облик $x=\lambda a$, за секој $\lambda \in R$,

Во R^n, <u>права</u> генерирана со $a \in R^n$ $(a \neq 0)$ што минува низ зададена точка x_0, е множеството $L \subset R^n$ на точките од облик

$$x=x_0+\lambda a, \quad \text{за секој } \lambda \in R.$$

(Во R^2 и R^3 за конкретни точки a, x_0 да се нацртаат D,L).

За дадена точка $a=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и даден скалар $\beta \in R$, <u>рамнина</u> се наречува подмножеството $P \subset R^n$ на сите точки $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ што го задоволуваат условот

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta .$$

(Во R^2 P е правата $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$, а во R^3 P е рамнината

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta) .$$

Множеството $H \subset R^n$ на сите точки $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ што го задоволуваат условот

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \leqslant \beta$$

се наречува (затворен) полупростор одреден со рамнината P.
(Во R^2 полупростор е полурамнината $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \leqslant \beta$ или $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geqslant \beta$)

В е ж б и.

1. Во координатниот систем $x_1 0 x_2$

а) да се претстави множеството вектори x од R^2 за кои важи

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ за секое } \lambda \in R;$$

б) да се најде множеството на сите точки $x = (x_1, x_2)$, кои ја задоволуваат равенката $2x_1 + x_2 = 1$;

в) да се најде множеството на сите точки $x = (x_1, x_2)$ кои ја задоволуваат неравенката

$$2x_1 + x_2 \leqslant 1$$

2. Во R^2 да се покаже дека права е одредена со две (различни) свои точки. Да се обопшти за R^n.

3. Во координатниот простор да се најдат точките $x = (x_1, x_2, x_3)$ од R^3, кои ги исполнуваат условите:

а) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

б) $x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 1$

4. Линеарна зависност и независност

Ако множеството U е подмножество на векторскиот простор R^n тогаш ќе пишуваме $U \subseteq R^n$. На пример:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\}$$

е подмножество на R^2 со конечно многу (4) елементи ;

$$W=\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\1\end{bmatrix};\ \alpha\in R\right\}$$

е подмножество на R^2 со бесконечно многу елементи – на секој реален број α му одговара еден елемент од W.

Нека е дадено множеството вектори од R^n $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ каде

$$x_i=\begin{bmatrix}x_{1i}\\x_{2i}\\\vdots\\x_{ni}\end{bmatrix}\qquad (i=1,2,\ldots,r\geqslant 1)$$

Секогаш за линеарната комбинација $x=0\,x_1+0\,x_2+\ldots+0\,x_r$ е точно равенството $x=0$ (0 е нултиот вектор на R^n); оваа линеарна комбинација се наречува <u>тривијална</u>. Ако постои линеарна комбинација

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_rx_r=0$$

и притоа барем еден скалар $\alpha_i\neq 0$ (линеарната комбинација е <u>нетривијална</u>), тогаш векторите x_i $(i=1,2,\ldots,r)$ ги наречуваме <u>линеарно зависни</u>. За множеството $x=\{x_i;i=1,\ldots,r\}$ велиме дека е <u>линеарно зависно</u>.

Векторите x_i $(i=1,2,\ldots r)$ ги наречуваме <u>линеарно независни</u> ако произволна нивна линеарна комбинација рамна на нула, е тривијалната, т.е. од

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_rx_r=0\quad\text{следи}\quad \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=0.$$

За множеството $x=\{x_i, i=1,\ldots r\}$ велиме дека е <u>линеарно независно</u>.

Во R^n постојат конечно многу линеарно независни вектори.

<u>Пример</u> 1. Во R^2 векторите

$$x_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\qquad x_2=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$$

се линеарно зависни бидејќи постои нивна нетривијална линеарна комбинација, на пример $2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$; векторите

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

се линеарно независни бидејќи од $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$, т.е.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

следи $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, но ова е можно само ако $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; значи произволна линеарна комбинација е тривијалната.

Пример 2. Во векторскиот простор R^n векторите $e_i\ (i=1,2,\dots,n)$ се линеарно независни. Навистина, од

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0, \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

следи $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Максималниот број линеарно независни вектори на даден векторски простор V се нарекува <u>димензија</u> на V и се означува $\dim V$.

Максималниот број линеарно независни вектори на произволно подмножество U (конечно или бесконечно) од векторскиот простор V се нарекува <u>ранг</u> на U.

5. Потпростори

За даден векторски простор V, подмножеството $U \subseteq V$ го нарекуваме <u>потпростор</u> на V, ако заедно со произволни два свои вектори $x, y \in U$ ја содржи и секоја нивна линеарна комбинација; кратко тоа се пишува вака: U е потпростор на V ако за произволни $x, y \in U$ и $\alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$.

Пример. Множеството

$$U=\left\{\begin{bmatrix} z\\ z\end{bmatrix}; z\in R\right\}$$

е потпростор на R^2. Навистина, за произволни $\alpha,\beta\in R$ и произволни $x,y\in U$ имаме:

$$\alpha x+\beta y=\alpha\begin{bmatrix} x\\ x\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix} y\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x\\ \alpha x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta y\\ \beta y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha x+\beta y\\ \alpha x+\beta y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z\\ z\end{bmatrix}\in U,$$

каде $z=\alpha x+\beta y$.

Ако U е потпростор на V тогаш рангот на U се наречува и димензија на потпросторот U.

База на r- димензионален векторски простор V (или на r - димензионален потпростор) го наречуваме секое негово линеарно независно множество со r елементи.

Ако $\{x_1,\dots,x_r\}$ е база на векторскиот простор V, тогаш произволен вектор $x\in V$ може да се претстави како линеарна комбинација на базните вектори.

Навистина, бидејќи $\dim V=r$, множеството $\{x,x_1,\dots,x_r\}$ со $r+1$ елементи е линеарно зависно, т.е. постои нетривијална линеарна комбинација

$$\alpha_0x+\alpha_1x_1+\dots+\alpha_rx_r=0\ ,$$

каде барем еден скалар $\alpha_i\neq 0$. Ако $\alpha_0=0$, тогаш ќе имаме нетривијална линеарна комбинација на базните вектори, што претставува противречност. Значи мора да е $\alpha_0\neq 0$. Тогаш

$$0=\frac{1}{\alpha_0}0=\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_0x+\alpha_1x_1+\dots+\alpha_rx_r)=x+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x_1+\dots+\frac{\alpha_r}{\alpha_0}x_r \quad \text{или}$$

$$x=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x_1+\dots-\frac{\alpha_r}{\alpha_0}x_r$$

т.е. x е линеарна комбинација на базните вектори. Од произволноста на x во V следи дека секој вектор на V може да се претстави како линеарна комбинација на базните вектори.

<u>Теорема 1.</u> $p+1$ вектори y_i ($i=1,2,\dots,p,p+1$) на даден векторски простор V се линеарно зависни, ако секој од нив може да се претстави како линеарна комбинација на едни исти p вектори x_j ($j=1,2,\dots,p$).

Доказ:

$$y_i=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\dots+\alpha_{ip}x_p \quad (i=1,2,\dots,p+1).$$

Случајот кога еден од векторите y_i е нултиот вектор, е тривијален. Затоа да претпоставиме дека $y_i\neq o$ ($i=1,2,\dots,p+1$). Тврдењето е точно за $p=1$. Навистина, тогаш $y_1=\alpha_{11}x_1$, $y_2=\alpha_{21}x_1$, а бидејќи $y_1, y_2\neq o$, мора да $\alpha_{11}\neq o, \alpha_{21}\neq o$. Но тогаш постои нетривијална линеарна комбинација

$$\alpha_{21}y_1-\alpha_{11}y_2=o,$$

што значи дека y_1, y_2 се линеарно зависни.

Сега, нека тврдењето е точно за $p=k-1$ и нека имаме за $p=k$

$$y_i=\alpha_{i1}x_1+\alpha_{i2}x_2+\dots+\alpha_{ik}x_k \quad (i=1,2,\dots,k+1).$$

Бидејќи, по претпоставка, векторите y_i се различни од векторот o, можеме да земеме на пример $\alpha_{11}\neq o$. Тогаш можеме да ги формираме векторите:

$$z_i=y_i-\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}y_1=\left(\alpha_{i2}-\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}\alpha_{12}\right)x_2+\dots+\left(\alpha_{ik}-\frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}\alpha_{1k}\right)x_k \quad (i=1,2,\dots,k+1).$$

Очигледно, векторите z_i ($i=2,\dots,k+1$) се линеарни комбинации на едни исти $k-1$ вектори x_j ($j=2,\dots,k$) и од индуктивната претпоставка следи дека векторите z_i ($i=2,\dots,k+1$) се линеарно зависни, т.е. постои нетривијална линеарна комбинација од облик:

$$\alpha_2' z_2+\dots+\alpha_{k+1}' z_{k+1}=o$$

каде барем едно $\alpha_i'\neq o$, или

$$o=\alpha_2'\left(y_2-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}y_1\right)+\dots+\alpha_{k+1}'\left(y_{k+1}-\frac{\alpha_{k+1,1}}{\alpha_{11}}y_1\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha_{11}}\left(\alpha_2'\alpha_{21}+\dots+\alpha_{k+1}'\alpha_{k+1,1}\right)y_1+\alpha_2'y_2+\dots+\alpha_{k+1}'y_{k+1}$$

и барем едно $\alpha_i'\neq o$; значи y_i ($i=1,2,\dots,k+1$) се линеарно зависни, т.е. докажавме дека тврдењето е точно и за $p=k$. Тогаш од принципот на математичката индукција следи дека тврдењето е точно за произволен природен број p.

Заклучок 1. Ако векторот x е линеарна комбинациja на векторите $\{x_1, \ldots, x_r\}$ тогаш множеството $X = \{x, x_1, \ldots, x_r\}$ е линеарно зависно.

По претпоставка е

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r$$

а и секоj вектор x_i може да се претстави како

$$x_i = 0x_1 + \ldots + 0x_{i-1} + 1 \cdot x_i + 0x_{i+1} + \ldots + 0x_r; \quad (i=1,2,\ldots,r)$$

Значи секоj вектор од $r+1$ - елементното множество X е линеарна комбинациja на едни исти r вектори. Тогаш согласно Т.1. множеството X е линеарно зависно.

Заклучок 2. Векторскиот простор R^n има димензиja n $(\dim R^n = n)$. Навистина, во R^n постоjат n линеарно независни вектори, на пример e_i $(i=1,2,\ldots,n)$ (тоа го покажуваме во примерот 2 на точката 5.), и произволен вектор на R^n

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

може да се претстави како линеарна комбинациja на векторите e_i:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Тогаш од погорната теорема следи дека произволни $n+1$ вектори на R^n се линеарно зависни. Значи n е максималниот броj линеарно независни вектори во R^n.

Од горниот заклучок и од дефинициjата на база следи дека произволно множество од n линеарно независни вектори на R^n е база на R^n.

Теорема 2. Ако $\{x_i, (i=1,2,.,r)\}$ е база на r - димензионален векторски простор V, тогаш произволен вектор $x \in V$ на единствен начин може да се претстави како линеарна комбинациja на базните вектори.

Доказ: Нека

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r \quad \text{и} \quad x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_r x_r;$$

тогаш

$$o=x-x=(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_r x_r)-(\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\dots+\beta_r x_r)=$$
$$=(\alpha_1-\beta_1)x_1+(\alpha_2-\beta_2)x_2+\dots+(\alpha_r-\beta_r)x_r,$$

а бидејќи x_i $(i=1,2,\dots,r)$ се линеарно независни, мора да е

$$\alpha_i-\beta_i=o \quad (i=1,2,\dots,r) \quad \Rightarrow \quad \alpha_i=\beta_i \quad (i=1,2,\dots,r).$$

<u>Теорема 3.</u> Нека $\{x_i\,;(i=1,2,\dots,r)\}$ е база на r - димензионален векторски простор V и $x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_r x_r$ е произволен ненулти вектор на V. Тогаш множеството $\{x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_r\}$ е исто така база на V ако и само ако $\alpha_i\neq o$.

Доказ: Од $x\neq o$ следи дека барем едно $\alpha_i\neq o$, на пример нека $\alpha_1\neq o$, тогаш можеме да напишеме

$$x_1=\frac{1}{\alpha_1}x-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2-\dots-\frac{\alpha_r}{\alpha_1}x_r.$$

Нека $y=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\dots+\beta_r x_r$ е произволен вектор на V. Заменувајќи го x_1 со погорната линеарна комбинација добиваме:

$$y=\frac{\beta_1}{\alpha_1}x+\left(\beta_2-\beta_1\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)x_2+\dots+\left(\beta_r-\beta_1\frac{\alpha_r}{\alpha_1}\right)x_r,$$

т.е. произволен вектор на V е линеарна комбинација на векторите $x,x_2,\dots,x_r$, кои се линеарно независни ако и само ако $\alpha_1\neq o$. Навистина, ако $\alpha_1=o$ тогаш тие би биле линеарно зависни бидејќи ќе постои нетривијалната линеарна комбинација $o=-x+\alpha_2 x_2+\dots\alpha_r x_r$. Ако $\alpha_1\neq o$ и претпоставиме дека $x,x_2,\dots,x_r$ се линеарно зависни, тогаш x може да се изрази како линеарна комбинација на $x_2,\dots,x_r$, која ставена на местото на x во $x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_r x_r$ ќе имплицира линеарна зависност на $x_1,x_2,\dots,x_r$, што претставува противречност.

6. Конвексни множества

<u>Конвексна линеарна комбинација</u> на дадени точки $x_i, i=1,\dots,r$ од R^n се нарекува секоја точка $x\in R^n$ која може да се претстави во облик

$$x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_r x_r$$

каде

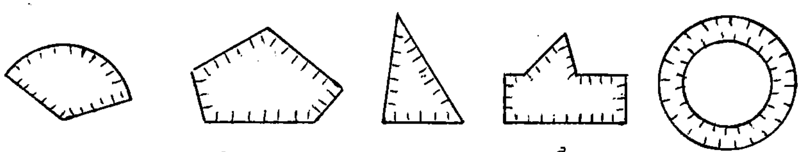
$$\alpha_i \geqslant 0, \; i=1,\dots,r \; , \; \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r = 1 .$$

Множеството $C \subseteq R^n$ го наречуваме <u>конвексно</u> ако заедно со било кои две свои точки x_1 и x_2 тоа ја содржи и секоја нивна конвексна линеарна комбинација, т.е.

$$x_1, x_2 \in C \;, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \quad \Rightarrow x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C .$$

Може да се провери дека во R^n произволен потпростор U, <u>линеарно многуобразие</u> $L = x_0 + U$, каде x_0 е фиксен вектор, а U- потпростор (значи произволна права, рамнина), полупростор се конвексни множества. Исто така пресек на конечен број конвексни множества е конвексно множество.

Геометриски конвексно множество е она, кое заедно со произволни две свои точки ја содржи и отсечката меѓу нив. Така, на пример, во R^2 конвексни се множествата а), b), с), а не се конвексни d) и е):



a. b. c. d. e.

<u>Екстремална точка</u> на дадено конвексно множество С ја наречуваме секоја негова точка која неможе да се претстави како конвексна линеарна комбинација на две различни точки од С. Ако $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$, каде $x_1, x_2 \in C$ и $0 < \alpha < 1$, тогаш точката х не е екстремална.

На пример, во R^2 произволен круг е конвексно множество. Секоја точка од кружницата на кругот е негова екстремална точка. Ако од кругот се отфрлат сите точки на кружницата, тогаш останатото множество е конвексно но тоа нема ниедна екстремална точка. Екстремални точки на произволен триаголник се неговите темиња. Права неможе да има екстремални точки.

<u>Конвексна покривка</u> на дадено множество $E \subseteq R^n$ се наречува множеството C(E) на сите конвексни линеарни комбинации

$$x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_r x_r,$$

каде $\{x_i, i=1,\dots,r\}$ е произволно конечно подмножество на E.

Се покажува дека конвексното множество од сите конвексни множества што го содржат E како подмножество, C(E) е најмалото меѓу нив. Тогаш јасно е дека, ако E е конвексно множество, C(E) = E.

Ако E е составено од осумте темиња на коцка во R^3, тогаш C(E) е целата коцка.

Ако $E=\{x_i, i=1,\dots,p\}$ е конечно множество точки од R^n, тогаш конвексната покривка C(E) се наречува <u>конвексен полиедар</u>.

Означувајќи го конвексниот полиедар со K, имаме:

$$K=\{x;\ x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\dots+\alpha_p x_p,\quad \alpha_i \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_p=1\}.$$

<u>Пример</u>. Во R^2 да се претстави графички конвексниот полиедар K одреден со множеството точки:

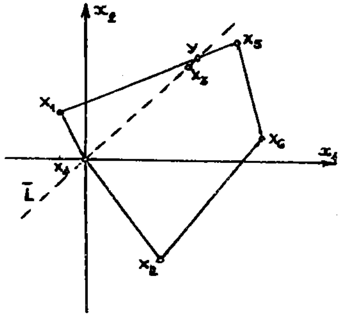
$$E=\{x_1=(-1,2);x_2=(3,-4);x_3=(4,4);x_4=(0,0);x_5=(6,5);\ x_6=(7,1)\}.$$

Точките на E кои се во полиедарот да се изразат како конвексни линеарни комбинации на екстремалните точки.

Значи

$$K=\{x;\ x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3+\alpha_4 x_4+\alpha_5 x_5+\alpha_6 x_6,\ \alpha_i \geq 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_6=1\}$$

Полиедарот K е претставен на следниот цртеж:



Од сликата се гледа дека точките $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ се екстремални на K, а x_3 не е екстремална. За да ја претставиме x_3 како конвексна линеарна комбинација на екстремалните точки, можеме да постапиме вака:

Прво повлекуваме права L која минува низ x_3 и една екстремална точка, на пример $x_4=(0,0)$. Тогаш очигледно

$$L=\{x;\ x=\beta(1,1),\beta\in R\}.$$

Правата L ја сече отсечката

$$T=\{x;\ x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_5,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

во точката y. Бидејки $y\in L$ постои скалар $\bar\beta$ така што $y=\bar\beta(1,1)$.

Бидејки $y\in T$, постои скалар $\bar\alpha, 0\leqslant\bar\alpha\leqslant 1$ така што $y=\bar\alpha x_1+(1-\bar\alpha)x_5$ или

$$y=\bar\alpha(-1,2)+(1-\bar\alpha)(6,5),$$

т.е.

$$y=(6-7\bar\alpha,5-3\bar\alpha).$$

Тогаш мора да е

$$(\bar\beta,\bar\beta)=(6-7\bar\alpha,5-3\bar\alpha),$$

т.е.

$$\bar\beta=6-7\bar\alpha\ ,$$

$$\bar\beta=5-3\bar\alpha\ .$$

Ова е точно само ако

$$\bar\alpha=\frac{1}{4}\ ,\ \bar\beta=\frac{17}{4}\ .$$

Значи

$$y=\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_5\ .$$

Бидеjќи x_3 лежи на отсечката

$$S=\{x;\ x=\lambda x_4+(1-\lambda)y,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\},$$

постои скалар $0\leqslant\bar\lambda\leqslant 1$ така што

$$x_3=(1-\bar\lambda)x_4+\bar\lambda y$$

т.е.

$$(4,4)=(1-\bar\lambda)(0,0)+\bar\lambda(\tfrac{17}{4}(1,1)),$$

Од овде следи дека $4=\frac{17}{4}\bar{\lambda}$ т.е. $\bar{\lambda}=16/17$

Значи

$$x_3=\frac{1}{17}x_4+\frac{16}{17}\left(\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_5\right)$$

или, дефинитивно

$$x_3=\frac{4}{17}x_1+\frac{12}{17}x_5+\frac{1}{17}x_4+0.x_2+0.x_6$$

(забележуваме дека сите коефициенти на десната страна се ненегативни и нивната сума е 1).

Множеството $G\subseteq R^n$ го наречуваме <u>конус</u> ако заедно со произволна своја точка x тоа ја содржи и точката αx за секој ненегативен скалар $\alpha\geqslant 0$. Забележуваме дека секој конус го содржи координатниот почеток (векторот о) бидејки α може да прима и вредност нула.

Конусот G кој е конвексно множество се наречува <u>конвексен конус</u>.

Се покажува дека G е конвексен конус ако и само ако

$$0\leqslant\alpha\in R,\ x\in G\Rightarrow \alpha x\in G$$

и

$$x_1,x_2\in G\ \Rightarrow\ x_1+x_2\in G.$$

Ако $E=\{x_i;i=1,\dots,p\}$ е конечно множество во R^n, тогаш множеството

$$C=\{x;\ x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_px_p,\ \alpha_i\geqslant 0\}$$

(на сите ненегативни линеарни комбинации на точките од E) е конвексен конус.

Вежби.

1. Едноелементно множество вектори $\{x_0\}$ е линеарно зависно ако и само ако $x_0=o$.

2. За произволно множество вектори $\{x_1,\dots,x_r\}$ множеството $\{x_1,\dots,x_r,o\}$ е линеарно зависно.

3. Ако $Y=\{y_1,\dots,y_r\}$ е линеарно зависно множество, тогаш и множеството $X=\{y_1,\dots,y_r,x_{r+1},\dots,x_s\}$ е линеарно зависно за произволни $x_{r+1},\dots,x_s$.

4. Ако $X=\{x_1,\dots,x_r\}$ е линеарно независно множество, тогаш и произволно негово непразно подмножество е линеарно независно.

5. Ако X е линеарно зависно множество тогаш постои барем еден елемент $x \in X$ кој е линеарна комбинација на останатите.

6. Ако некој елемент на дадено множество X е линеарна комбинација на останатите елементи, тогаш множеството X е линеарно зависно.

7. Да се покаже дека векторите

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

образуваат база на R^2.

8. Дали множеството вектори

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

е база на R^3?

9. Дадена е база $\{e_1, e_2, e_3\}$ на R^3. Кој базен вектор можеме да го замениме со векторот

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

и сеуште да имаме база на R^3? Да се даде геометриска илустрација.

10. Да се провери дека потпросторот од R^3 генериран со векторите

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

има димензија 2.

11. Дали е конвексно множеството $X \subseteq R^2$ дефинирано со:

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ;\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3 \right\}.$$

12. Да се нацрта конвексната покривка на множеството точки од R^2:

$\{x_1=(0,0);\ x_2=(1,1);\ x_3=(-1,-1);\ x_4=(-2,2);\ x_5=(1,4);$
$x_6=(0,3);\ x_7=(-1,1);\ x_8=(\frac{1}{2},4);\ x_9=(-1,2);\ x_{10}=(2,5)\}.$

Оние од зададените точки кои се внатрешни точки на конвексната покривка, да се претставaт како конвексни линеарни комбинации на екстремалните точки.

13. Во R^2 графички да се претстави конвексниот конус:

$$C=\{x=(x_1,x_2);\quad x=\alpha_1(2,1)+\alpha_2(1,1)+\alpha_3(-1,4),\alpha_i\geqslant 0\}.$$

II. МАТРИЦИ

1. Дефиниција на матрица

Правоаголна шема на $m.n$ броеви α_{ij} $(i=1,\dots,m;j=1,\dots,n)$ сместени во m редови и n колони на следниот начин

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

се наречува $m\times n$ <u>матрица</u>. Кратко матрицата се означува со A, или $A=[\alpha_{ij}]_{m\times n}$, или $m\times n$ матрица A. Броевите $\alpha_{ij}(i=1,\dots,m;j=1,\dots,n)$ ги викаме <u>елементи</u> на матрицата A. Елементите $\alpha_{11},\alpha_{12},\dots,\alpha_{1n}$ лежат во првата редица на матрицата, $\alpha_{21},\alpha_{22},\dots,\alpha_{2n}$ лежат во втората редица, додека елементите $\alpha_{11},\alpha_{21},\dots,\alpha_{m1}$ лежат во првата колона и т.н. Значи првиот индекс на елементот α_{ij} ја означува редицата, а вториот-колоната во кои лежи елементот α_{ij}. Велиме дека елементот α_{ij} лежи во пресекот на i-тата редица и j-тата колона.

<u>Пример</u>. За 3×4 матрицата

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

елементот -5 (α_{23}) лежи во пресекот на втората редица и третата колона.

Ако $m=n$, т.е. матрицата има исто толку редици колку и колони, тогаш матрицата ја викаме <u>квадратна</u> од n-ти ред.

<u>Пример</u>. Матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

е квадратна од втор ред.

Очигледно матрицата со една колона

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix}$$

е и вектор на векторскиот простор R^m. Оваа матрица ќе ја нарекуваме <u>m - вектор колона</u>.

Матрица со една редица

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \end{bmatrix}$$

ја нарекуваме <u>n - вектор редица</u>. Таа одредува единствен вектор во R^n. Вообичаено е елементите на вектор редиците (колоните) да се нарекуваат компоненти.

Матрицата

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

се вика <u>нулта матрица</u>.

Квадратната матрица

$$E_{n\times n}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

се вика <u>единична</u> матрица од n-ти ред.

Квадратната матрица

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

се вика <u>дијагонална</u> матрица од n-ти ред.

<u>Горна триаголна матрица</u> има облик

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad (\alpha_{ij}=0 \text{ за } i>j)$$

Аналогно се дефинира и <u>долна триаголна</u> матрица.

Матрицата

$$A^T=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

се наречува <u>транспонирана</u> на матрицата $A=[\alpha_{ij}]_{m\times n}$. Значи ако $A^T=[\beta_{ij}]_{n\times m}$, тогаш $\beta_{ij}=\alpha_{ji}$ за $i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$.

2. Операции со матрици

За две матрици $X=[x_{ij}]_{m\times n}$ и $Y=[y_{ij}]_{m\times n}$ велиме дека се **еднакви** $(X=Y)$ ако $x_{ij}=y_{ij}$ за $i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n.$

Збир на $m\times n$ матриците X и Y се наречува $m\times n$ матрицата $Z=[z_{ij}]$ чии елементи се $z_{ij}=x_{ij}+y_{ij}$ за $i=1,\dots,m; j=1,\dots,n.$

Пример.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Производ αX на матрицата $X=[x_{ij}]_{m\times n}$ со бројот α ја наречуваме матрицата $Z=[z_{ij}]_{n\times n}$ чии елементи се $z_{ij}=\alpha x_{ij}$ за $i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n.$

Пример.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Вообичаено е матрицата (-1)X да се означува со -X и се наречува **спротивна** (негативна) на X. Разликата X-Y на две $m\times n$ матрици X и Y е матрицата $Z=X+(-Y)$.

Производ $X.Y$ (XY) на $m\times p$ матрица X и $p\times n$ матрица Y ја наречуваме $m\times n$ матрицата Z чии елементи се:

$$z_{ij}=x_{i1}y_{1j}+x_{i2}y_{2j}+\dots+x_{ip}y_{pj} \text{ за } i=1,\dots,m; j=1,\dots,n.$$

Значи производ на матрици постои само ако бројот на колоните на првата матрица е еднаков со бројот на редиците на втората матрица. Затоа ако постои XY не мора да постои YX.

Пример 1.

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}\\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22}\\ \alpha_{31}\beta_{11}+\alpha_{32}\beta_{21} & \alpha_{31}\beta_{12}+\alpha_{32}\beta_{22}\end{bmatrix}$$

Пример 2. Ако $A=[\alpha_{ij}]$ е $m \times n$ матрица и

$$B=x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

тогаш производот $y=Ax$ постои и е еднаков на

$$y=AB=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\cdots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2}\cdots & \alpha_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n\\ \vdots\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\cdots+\alpha_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

Ако A е квадратна $n \times n$ матрица, тогаш постојат и матриците $A^2=AA$, $A^3=A^2A$ и т.н.

Вежби.

1. Дадени се матриците:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -2\\ 5 & 7 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

Да се најдат матриците:

$$2A,\ A+B^T,\ A-B^T,\ BA,\ CD,\ DC,\ A^TC,\ 2E-D+\frac{1}{2}D^2.$$

2. Да се толкува геометриски збирот на вектор колоните

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix};$$

истото да се направи за вектор колоните

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

3. Ако E е единичната матрица од n - ти ред и $A=[a_{ij}]$ е $n \times n$ матрица, да се покаже дека важи: $AE = EA = A$.

4. Да се покаже дека:

а) $A(\alpha B)=\alpha(AB)$, б) $(AB)C=A(BC)$, в) $(A+B)C=AC+BC$, г) $A+B=B+A$,

д) $A+0=A$, ѓ) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

5. Да се провери дека множеството на сите 2×2 матрици $A=[a_{ij}]$ образуваат векторски простор над R, со познатите операции збир на матрици и производ на матрица со скалар. Како гласи нултиот елемент на овој простор? Колкава е димензијата на овој простор? Да се напише една база на овој простор.

(Одговор: нулти елемент е матрицата

$$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

матриците

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ E_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

се една база).

3. Блок матрици

<u>Блок матрица</u> на дадена матрица A се наречува матрицата добиена од A со нејзино разбивање на делови (подматрици) со прави паралелни на редиците и на колоните. На пример:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \hline \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

(каде

$$A_{11}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}\alpha_{14}\\ \alpha_{24}\end{bmatrix},\ A_{21}=[\alpha_{31}\ \ \alpha_{32}\ \ \alpha_{33}],\ A_{22}=[\alpha_{34}]).$$

Нека A и B се $m\times n$ матрици. Ако тие се разбиени на блокови на ист начин:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\cdots A_{1r}\\ A_{21} & A_{22}\cdots A_{2r}\\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots\\ A_{s1} & A_{s2}\cdots A_{sr}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}\cdots B_{1r}\\ B_{21} & B_{22}\cdots B_{2r}\\ \vdots & \vdots \quad\ \ \vdots\\ B_{s1} & B_{s2}\cdots B_{sr}\end{bmatrix}$$

т.е. A_{ij} и B_{ij} $(i=1,..,s;j=1,\dots,r)$ се со исти размери(имаат еднаков број редици и еднаков број колони), тогаш

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12}\cdots A_{1r}+B_{1r}\\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\cdots A_{2r}+B_{2r}\\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots\\ A_{s1}+B_{s1} & A_{s2}+B_{s2}\cdots A_{sr}+B_{sr}\end{bmatrix}.$$

Значи сумата A+B се добива ако се изврши сумирање на соодветните блокови.

Ако A е $m\times p$ матрица, B е $p\times n$ матрица и колоните на A се поделени на блокови на ист начин како редиците на B, тогаш производот AB може да се добие применувајќи го правилото за множење на матрици над соодветните блокови.

Пример. Ако

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{32}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

и бројот колони на A_{11} е ист со бројот на редици на B_{11}, бројот колони на A_{12} е ист со бројот редици на B_{21} и т.н. тогаш

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}\ B_{11}+A_{12}\ B_{21} & A_{11}\ B_{12}+A_{12}\ B_{22} \\ A_{21}\ B_{11}+A_{22}\ B_{21} & A_{21}\ B_{12}+A_{22}\ B_{22} \\ A_{31}\ B_{11}+A_{32}\ B_{21} & A_{31}\ B_{12}+A_{32}\ B_{22} \end{bmatrix}.$$

Посебно, ако x е n - вектор колона и $m\times n$ матрицата A е поделена на блокови $A=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n]$ (блоковите α_i, $i=1,\dots,n$ се m- вектор колони), тогаш

$$Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n$$

Пример.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

4. Ранг на матрица

Нека е дадена произволна $m\times n$ матрица $A=[\alpha_{ij}]$ која може да се смета како блок матрица на n - вектор редици a_i $(i=1,\dots,m)$ или m -вектор колони α_j $(j=1,\dots,n)$.

Теорема 1. Рангот на множеството m - вектор колони $\{\alpha_j, j=1,\dots,n\}$ е ист со рангот на множеството n - вектор редици $\{a_i, i=1,\dots,m\}$.

Доказ: Нека r е рангот на множеството колони, а s е рангот на множеството редици. Ништо не се губи од општоста ако претпоставиме дека токму првите r колони се линеарно независни и токму првите s редици се линеарно независни. Да ја означиме со A′ подматрицата составена од нив:

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \vdots & & \\ \alpha_{s1} & \cdots & \alpha_{sr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_s \end{bmatrix} = [\alpha'_1 \ldots \alpha'_r] \quad (a'_i \in R^r, \alpha'_j \in R^s).$$

Да претпоставиме сега дека не е $r = s$ туку дека е $r > s$. Тогаш постои нетривијална линеарна комбинација од облик

$$o = x_1\alpha'_1 + \ldots + x_r\alpha'_r = A'x = \begin{bmatrix} a'_1 & x \\ \vdots & \\ a'_s & x \end{bmatrix} \quad (\text{барем едно } x_i \neq o),$$

каде

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix};$$

значи $a'_i\, x = o \quad (i=1,\ldots,s)$.

Од друга страна пак a_i можат да се изразат како линеарни комбинации на векторите $a_i, i=1,\ldots,s,$ па имаме:

$$a_i = \beta_{i1}a_1 + \ldots + \beta_{is}a_s \quad (i=1,\ldots,m)$$

и

$$a'_i = \beta_{i1}a'_1 + \ldots + \beta_{is}a'_s \quad (i=1,\ldots,m),$$

каде $a'_i = [\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir}]$ за $i=1,\ldots,m$. Тогаш

$$a'_i x = \beta_{i1}(a'_1 x) + \ldots + \beta_{is}(a'_s x) = o \quad (i=1,\ldots,m)$$

и

$$o = \begin{bmatrix} a'_1 & x \\ \vdots & \\ a'_m & x \end{bmatrix} = x_1\alpha_1 + \ldots + x_r\alpha_r \quad (\text{барем едно } x_i \neq o),$$

т.е. добиваме линеарна зависност меѓу првите r колони на A, што претставува противречност. Ова разгледување може да се повтори и при претпоставка $r<s$, менувајќи ги улогите на вектор редиците и вектор колоните. На крајот пак се добива противречност, а од тоа следува дека $r=s$ (бидејќи $r \not> s$ и $r \not< s$).

Максималниот број линеарно независни колони (или редици) на една матрица се наречува ранг на матрицата.

Заклучок. Рангот на $m \times n$ матрица A е $r(A) \leq \min\{m,n\}$.

Квадратната матрица од n - ти ред ја наречуваме несингуларна ако нејзиниот ранг е n. Ако $r(A)<n$, тогаш $n \times n$ матрицата A ја наречуваме сингуларна.

Пример. Рангот на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

е единица $(r(A)=1)$. Навистина, постои нетривијална линеарна комбинација на вектор колоните на A,

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

на пример

$$1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2 = 0 .$$

Тоа значи дека $r(A)<2$. Но бидејќи на пример $\{\alpha_1\}$ е линеарно независно едноелементно множество од R^2, мора да е $r(A) \geq 1$; значи $r(A)=1$

5. Инверзна матрица

Инверзна матрица на несингуларна матрица A од n - ти ред се наречува матрицата A^{-1}, што ги исполнува условите

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E.$$

Нека A е несингуларна матрица од $m+n$ ред поделена на блокови на следниот начин:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$ каде

A_{11} е $m \times m$; A_{12} е $m \times n$;

A_{21} е $n \times m$; A_{22} е $n \times n$;

и притоа A_{11} е несингуларна. Да извршиме аналогна поделба на блокови на инверзната матрица на A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} ,$$

Тогаш

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}\ B_{11}+A_{12}\ B_{21} & A_{11}\ B_{12}+A_{12}\ B_{22} \\ A_{21}\ B_{11}+A_{22}\ B_{21} & A_{21}\ B_{12}+A_{22}\ B_{22} \end{bmatrix} .$$

Од равенството

$$A.A^{-1} = E_{(m+n)x(n+m)} = \begin{bmatrix} E_{mxm} & O_{mxn} \\ O_{nxm} & E_{nxn} \end{bmatrix}$$

следи:

$$A_{11}\ B_{11}+A_{12}\ B_{21}=E_{mxm} \qquad A_{11}\ B_{12}+A_{12}\ B_{22}= O_{mxn}$$

$$A_{21}\ B_{11}+A_{22}\ B_{21}=O_{nxm} \qquad A_{21}\ B_{12}+A_{22}\ B_{22}= E_{nxn}$$

Решавајќи ги овие два системи матрични равенки со изравнување на коефициентите пред непознатите B_{11} ,B_{21} односно B_{12} ,B_{22} се добиваат блоковите на инверзната матрица*):

---

*) Решавањето на системите се одвива на следниот начин:

$$A_{11}^{-1}(A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21})=A_{11}^{-1}E \qquad A_{11}^{-1}(A_{11}\ B_{12}+A_{12}B_{22})=A_{11}^{-1}.0$$

$$B_{11}+A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}\ =A_{11}^{-1} \qquad B_{12}+A_{11}^{-1}A_{12}\ B_{22}\ =\ 0$$

$$\underline{B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}} \qquad \underline{B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}}$$

$$A_{21}(A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21})+A_{22}B_{21}=0 \qquad A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22})+A_{22}B_{22}=E$$

$$(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\ B_{21}=-A_{21}A_{11}^{-1} \qquad (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22}=E$$

$$\underline{B_{21}=-(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}\ A_{21}A_{11}^{-1}} \qquad \underline{B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}}$$

$$B_{22}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1},$$

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22},$$

$$B_{21}=-B_{22}A_{21}A_{11}^{-1},$$

$$B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}.$$

Значи, ако се најде блокот B_{22} тогаш за пресметување на останатите блокови на инверзната матрица, потребно е да се извршат низа множења и одземања.

Ако блокот A_{22} е едноелементна матрица, тогаш се јавува само една инверзија, имено на блокот A_{11}, кој има ред за 1 помал од редот на A. Па затоа, целата постапка може да се повтори земајќи го A_{11} во улога на A и т.н. Значи може да се почне со инверзија на подматрицата од втор ред во горниот лев агол на матрицата A, потоа користејќи го тоа да се најде инверзната на подматрицата од трет ред во горниот лев агол на A и т.н., проширувајќи постепено се додека не се добие инверзната матрица на A.

Освен погорниот постојат и други начини за наоѓање на инверзната матрица.

Пример. Да се најде инверзната матрица на

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Решение:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{21}=[9\ 5],\ A_{22}=[2],\ A_{11}^{-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{22}=(a_{22}-a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})^{-1}=(3-(-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 4)^{-1}=1/5=2/10.$$

$$b_{12}=-a_{11}^{-1}a_{12}b_{22}=-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{5}=-\frac{2}{5}=-\frac{4}{10}$$

$$b_{21}=-b_{22}a_{21}a_{11}^{-1}=-\frac{1}{5}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$b_{11}=a_{11}^{-1}-a_{11}^{-1}a_{12}b_{21}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{10}=3/10;$$

значи $A_{11}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Тогаш $B_{22}=([2]-[9\ 5]\cdot\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{10}{108}\end{bmatrix}$

$$B_{12}=-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}\left[-\frac{10}{108}\right]=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}12\\ 4\end{bmatrix}$$

$$B_{21}=-\left[-\frac{10}{108}\right][9\ 5]\ \frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\frac{1}{108}\quad[32\ -26]$$

$$B_{11}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{108}[32\ -26]=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}-6 & -12\\ -2 & 32\end{bmatrix}$$

Дефинитивно $$A^{-1}=\frac{1}{108}\begin{bmatrix}-6 & -12 & 12\\ -2 & 32 & 4\\ 32 & -26 & -10\end{bmatrix}$$

В е ж б и.

1. Да се најде рангот на матрицата:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ 2 & -1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\\ 1 & 7\end{bmatrix}$$

2. Да се најде инверзната на дадената матрица и да се провери дали е точно најдена:

а) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$;

в) $A=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}$ (Одговор: $A^{-1}=\dfrac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}\begin{bmatrix}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\\ -\alpha_{21} & \alpha_{11}\end{bmatrix}$);

г) $A=\begin{bmatrix}E_{m\times m} & R\\ 0 & N\end{bmatrix}$ (Одговор: $A^{-1}=\begin{bmatrix}E & -RN^{-1}\\ 0 & N^{-1}\end{bmatrix}$).

6. Линеарна трансформација

Познато е дека изразот, на пример,

$$t(x)=2x+1$$

дефинира една <u>трансформација</u> (или пресликување) на реалните броеви во себе. Тоа се искажува на следниот начин:

Трансформацијата $t(x)=2x+1$ бројот x го пресликува во бројот $2x+1$, и може да се означува

$$x \xrightarrow{t} 2x+1.$$

Така

$$0 \xrightarrow{t} 1,\ -\frac{1}{2} \xrightarrow{t} 0,\ 1 \xrightarrow{t} 3$$

и т.н.

Да го разгледаме изразот

$$t(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

или

$$t(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Овој израз дефинира трансформација

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} 2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

која на произволен вектор $x \in R^2$ му го припишува векторот $2 \cdot x \in R^2$
Значи ова е пример на трансформација на R^2 во себе.

Пресликувањето

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

е трансформација од R^3 во R^2 која на векторот $x \in R^3$ му го припишува векторот

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \in R^2 \quad \text{каде} \quad y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3,\ y_2 = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

Линеарна трансформација од векторскиот простор R^n во векторскиот простор R^m се наречува пресликувањето t што ги исполнува условите:

$$t(x_1+x_2)=t(x_1)+t(x_2) \quad \text{за секои} \quad x_1, x_2 \in R^n;$$

$$t(\alpha x)=\alpha t(x) \quad \text{за секој скалар } \alpha \in R \text{ и секој вектор } x \in R^n.$$

Забележуваме дека на левата страна во горните равенства се јавуваат операциите збир и производ со скалар дефинирани за елементите од R^n, а на десната страна се јавуваат истите операции дефинирани за елементите од R^m.

Пример 1. Лесно се проверува дека пресликувањето t во R, дефинирано со $t(x)=2x+1$ не е линеарна трансформација. Навистина

$$t(\alpha x)=2(\alpha x)+1, \text{ а } \alpha t(x)=\alpha(2x+1), \text{ па следува дека } t(\alpha x)\neq\alpha t(x).$$

Пример 2.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

е линеарна трансформација во R^2, $t(x)=2.x$. Навистина,

$$t(x_1+x_2)=2(x_1+x_2)=2.x_1+2.x_2=t(x_1)+t(x_2), t(\alpha x)=2\alpha x=\alpha(2x)=\alpha t(x)$$

Пример 3.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} \begin{bmatrix} 2x_1+x_2-x_3 \\ 3x_1-2x_2+4x_3 \end{bmatrix}$$

е линеарна трансформација од R^3 во R^2 (Да се провери!).

Пример 4. АкоA е mxn матрица, да се покаже дека левострано множење со A на векторите $x \in R^n$, $t(x)=Ax$, е линеарна трансформација од R^n во R^m.

Решение:

$$t(x_1+x_2)=A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=t(x_1)+t(x_2)$$

$$t(\alpha x)=A(\alpha x)=\alpha Ax=\alpha t(x)$$

Линеарен функционал се наречува линеарната трансформација од R^n во еднодимензионалниот векторски простор R $(m=1)$.

Пример 1. Пресликувањето t од R^3 во R дефинирано со

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{t} x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

или

$$t(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

е линеарен функционал. (Провери!)

Пример 2. Нека $q=[q_1 \; q_2 \; \ldots \; q_n]$ е дадена вектор редица. Лвострано множење на векторите $x \in R^n$ со q, $t(x)=qx$ е линеарен функционал. Навистина, од дефиницијата на производ на матрици и производ на матрица со скалар следи:

$$t(x_1+x_2)=q(x_1+x_2)=qx_1+qx_2=t(x_1)+t_2(x_2); \quad t(\alpha x)=q(\alpha x) = \\ = \alpha qx = \alpha t(x)$$

за секој $\alpha \in R$ и секои $x, x_1, x_2 \in R^n$ (Забелешка: $qx \in R$).

Ако t е линеарна трансформација од R^n во R^m и U е произволно подмножество од R^n, тогаш со tU се означува множеството од R^m образувано од сликите на сите елементи на U.

Теорема 2. Ако U е потпростор на R^n и t е линеарна трансформација од R^n во R^m тогаш множеството слики на U, tU, е потпростор на R^m.

Доказ: Нека $y_1, y_2 \in tU$. Тоа значи дека постојат $x_1, x_2 \in U$ такви што $y_1 = t(x_1), y_2 = t(x_2)$. За произволни $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ елементот

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 t(x_1) + \alpha_2 t(x_2) = t(\alpha_1 x_1) + t(\alpha_2 x_2) = t(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \in tU,$$

бидејќи $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ е елемент на потпросторот U.

Посебно tR^n (т.е. множеството на сликите на сите елементи на R^n) е потпростор на R^m. Димензијата на потпросторот tR^n се наречува ранг, $r(t)$, на линеарната трансформација t.

Теорема 3. Произволна линеарна трансформација t од R^n во R^m може потполно да се определи со помош на $m x n$ матрица.

Доказ: Нека $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ е единична база на R^n, а $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ е единична база на R^m. Нека x е произволен елемент од R^n и $y = t(x)$ е сликата на x при линеарната трансформација t. За $j=1,2,\dots,n$, $t(e_j) \in R^m$ и затоа $t(e_j)$ може да се претстави како линеарна комбинација на базните вектори на R^m, т.е. постојат скалари $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj}$ $(j=1,\dots,n)$ така што

$$t(e_j) = \alpha_{1j} f_1 + \alpha_{2j} f_2 + \dots + \alpha_{mj} f_m \quad \text{за} \quad j = 1,2,\dots,n.$$

Ако

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

тогаш

$$\begin{aligned} y &= t(x) = t(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 t(e_1) + x_2 t(e_2) + \dots + x_n t(e_n) = \\ &= x_1(\alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \dots + \alpha_{m1} f_m) + x_2(\alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \dots + \alpha_{m2} f_m) + \dots + \\ &+ x_n(\alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_2 + \dots + \alpha_{mn} f_m) = (\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1n} x_n) f_1 + \\ &+ (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2n} x_n) f_2 + \dots + (\alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \dots + \alpha_{mn} x_n) f_m = \\ &= y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_m f_m, \end{aligned}$$

каде $y_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \dots + \alpha_{in} x_n$ $(i=1,\dots,m)$. Овие равенства (m на број) во скратена форма можат да се напишат вака

$$y = A x,$$

каде A е $m x n$ матрица чии елементи се $m \cdot n$ броевите α_{ij} $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$ од погорните равенства.

За дадена трансформација t матрицата A е еднозначно одредена.

Теорема 4. Ако t е линарна трансформација од R^n во R^m и A е $m x n$ матрица која ја одредува t во однос на зададени бази на R^n и R^m, тогаш $r(t) = r(A)$.

Доказ: За линеарната трансформација t одредена со матрицата А, колоните α_j $(j=1,2.,..n)$ на А се слики на единичните вектори $e_j(j=1,2,...,n)$ на R^n. Бидејќи сликата $y=Ax=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_n\alpha_n$ на произволен вектор $x\in R^n$ е линеарна комбинација на векторите α_j, димензијата на tR^n, потпросторот на сликите на сите вектори од R^n, е еднаква со максималниот број линеарно независни вектори α_j $(j=1,2,...,n)$ т.е. со рангот на А, што значи дека $r(t)=r(A)$.

Заклучок. За линеарната трансформација t од R^n во R^m е $r(t)\leqslant\min\{m,n\}$.

Линеарната трансформација t од R^n во R^n се наречува несингуларна ако матрицата А, што ја одредува t во однос на зададена база на R^n е несингуларна.

Ако се дадени линеарните трансформации t од R^n во R^p и s од R^p во R^m, тогаш производ $s\circ t$ го наречуваме пресликувањето од R^n во R^m, одредено со

$$(s\circ t)(x)=s(t(x)) \qquad \text{за секој} \qquad x\in R^n.$$

Се проверува дека $s\circ t$ е линеарна трансформација. Ако t е претставена со матрицата А, а s е претставена со матрицата В во однос на единични бази соодветно на R^n, R^p, R^m тогаш $s\circ t$ е претставена со матрицата ВА.

Се покажува дека е точно следното:

а) $r(BA)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$;

б) Ако В е несингуларна $m\times m$ матрица $(r(B)=m)$ и рангот на $m\times n$ матрицата А е $r(A)=r$, тогаш $r(BA)=r$.

В е ж б и.

1. Да се провери дека пресликувањето од R^3 во R^2 зададено со

$$t(x)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

е линеарна трансформација; да се најде сликата на векторот $y=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$.

2. Дадени се линеарните трансформации во R^2:

$$t_1(x)=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\quad t_2(x)=\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12}\\ \beta_{21} & \beta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Збир t_1+t_2 на трансформациите t_1 и t_2 се наречува пресликувањето дефинирано со

$$(t_1+t_2)(x)=t_1(x)+t_2(x) \quad \text{за секој } x\in R^2.$$

Да се покаже дека t_1+t_2 е линеарна трансформација во R^2.

3. Да се покаже дека:

а) промена на местата на две редици (две колони),

б) множење на некоја редица (колона) со скалар $\alpha\neq 0$,

в) додавање на една редица (колона) кон друга редица (колона) на матрицата A доведува до матрица, која има ист ранг како и A.

Упатство: Секоја од наведените трансформации може да се смета како резултат од левострано множење на $m\times n$ матрицата A со матрица добиена од единичната $E_{m\times m}$ со помош на разгледуваната трансформација. (Таквата матрица очигледно е несингуларна. Провери!) Матриците кои се добиваат од единичната со помош на погорните операции се наречуваат <u>елементарни матрици</u>. Трите разгледани трансформации се наречуваат <u>елементарни трансформации</u> и се многу важни. Со нивна помош секоја матрица може да се сведе на триаголна чиј ранг лесно се наоѓа, или на дијагонална матрица, чиј ранг е еднаков со бројот на ненултите елементи.

4. Да се најде рангот на матрицата:

а) $$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

Решение:

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{(-\frac{1}{3})\text{I ред} \dotplus \text{II}}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4\frac{1}{3} & 4\frac{1}{3}\\ 4 & 3 & 7\end{bmatrix}\xrightarrow{(-\frac{4}{3})\text{I} \dotplus \text{III}}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4\frac{1}{3} & 4\frac{1}{3}\\ 0 & 4\frac{1}{3} & 4\frac{1}{3}\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow{(-1)II + III} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4\frac{1}{3} & 4\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{сведува дека } r(A) = 2.$$

б) $$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Во R^2 геометриски да се толкува линеарната трансформација одредена со матрицата:

а) $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, б) $B = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, в) $C = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

III. СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

1. Претставување на систем линеарни равенки

Нека е даден систем од две линеарни равенки со три непознати x_1, x_2, x_3:

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = d_1$$
$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = d_2 .$$

Означувајќи

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

горниот систем може да се напише вака:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} ;$$

или

$$x_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} .$$

Општо системот од m линеарни равенки со n непознати $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1n} x_n = d_1 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2n} x_n = d_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \dots + \alpha_{mn} x_n = d_m \end{array}$$

може да се напише во матричен облик на следниот начин:

$$Ax = d, \text{ или } \quad x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = d$$

каде

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}, \alpha_j = \begin{bmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{bmatrix}$$

$(j=1,2,\dots,n)$.

Овој систем линеарни равенки е <u>решлив</u>, ако постои барем една n-ка броеви $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ кои ставени на местото на соодветните непознати $x_1, x_2, \dots, x_n$ ги прават левите страни на сите равенки еднакви на десните страни. Во спротивно системот е <u>противречен</u> (<u>контрадикторен</u>).

<u>Пример 1</u>. Системот

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{array}$$

е решлив бидејќи постои, на пример, тројката броеви $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$ за кои

$$\begin{array}{l} 1 - (-1) + 1 = 3 \\ 1 + (-1) - 2(1) = -2 \end{array}$$

<u>Пример 2</u>. Системот

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

е противречен бидејки не постои таков број кој е еднаков на 1, а истовремено и неговиот спротивен да е 1.

За два система линеарни равенки велиме дека се <u>еквивалентни</u> ако секое решение на едниот систем е решение и на другиот, и обратно.

<u>Теорема 1</u>: Ако B е несингуларна $m \times m$ матрица, A е $m \times n$ матрица, d е m - вектор колона, тогаш системите

$$Ax = d \quad \ldots (1) \qquad BAx = Bd \quad \ldots (2)$$

се еквивалентни.

Доказ: Нека $\bar{x}$ е решение на (1), тогаш $A\bar{x} = d$ и $BA\bar{x} = Bd$ што значи дека $\bar{x}$ е решение и на (2). И обратно, ако $\bar{x}$ е решение на (2), тогаш $BA\bar{x} = Bd$, $B^{-1}(BA\bar{x}) = B^{-1}(Bd) \Rightarrow (B^{-1}B)A\bar{x} = (B^{-1}B)d \Rightarrow A\bar{x} = d$.

2. Дискусија за множеството решенија на систем линеарни равенки

Нека е даден системот $Ax = d$ каде $A = [\alpha_{ij}]_{m \times n}$, $d = [d_i]_{m \times 1}$. A се нарекува <u>матрица на системот</u>, а блок-матрицата $[A, d]$ - <u>проширена матрица на системот</u>.

Ако $d = o$ системот го нарекуваме <u>хомоген</u>. Очигледно секој хомоген систем е решлив бидејки векторот $\bar{x} = o$ е едно решение, наречено <u>тривијално</u>.

Ако $r(A)$ е рангот на матрицата A, а $r(A, d)$ е рангот на проширената матрица, тогаш очигледно $r(A) \leqslant r(A, d)$.

Од особините на векторскиот простор R^m во којшто лежат вектор колоните α_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ на матрицата A, можат да се изведат следните заклучоци што се однесуваат на дадениот систем линеарни равенки:

1° Ако $m < n$ хомогениот систем $Ax = o$ секогаш има решение $\bar{x} \neq o$. Навистина, $Ax = o$ може да се напише во облик $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = o$, а познато е дека повеке од m вектори α_j $(j = 1, \ldots, n > m)$ од R^m се линеарно зависни, т.е. постои нетривијална линеарна комбинација

$$\bar{x}_1\alpha_1 + \bar{x}_2\alpha_2 + \ldots + \bar{x}_n\alpha_n = o \text{ и барем еден } \bar{x}_i \neq o .$$

Значи $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ е едно ненулто решение на системот.

2^o Ако $r(A)=m$ (значи $m\leqslant n$) тогаш за произволен вектор d системот $Ax=d$ има точно едно решение ако $m=n$, а бесконечно многу решенија ако $m<n$.

а) Навистина, ако $m=n(=r(A))$ (системот се наречува <u>Крамеров</u>) тогаш сите колони α_j $(j=1,2,\dots,n=m)$ на A се линеарно независни m- вектори. Затоа тие можат да се земат за база на R^m. Тогаш секој вектор на R^m значи и d, на единствен начин може да се претстави како линеарна комбинација на базните вектори, т.е. постои единствена m - ка броеви $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ така што

$$\bar{x}_1\alpha_1+\bar{x}_2\alpha_2+\dots+\bar{x}_m\alpha_m = d ,$$

а тоа значи дека

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \vdots\\ \bar{x}_m\end{bmatrix}$$

е единствено решение на системот.

Формално ова решение е

$$\bar{x}=A^{-1}d \qquad (A\bar{x}=A(A^{-1}d)=d) .$$

Постои едноставна пресметувачка шема, која може да се примени на произволен несингуларен систем за да се добие неговото решение и (или) инверзната матрица на матрицата на системот. Постапката се наречува <u>метода на потполна елиминација на Жордан-Гаус</u> и се состои од конечен број чекори (итерации). Ќе ја разгледаме оваа метода на конкретен пример.

Нека е даден системот од три равенки со три непознати:

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 2\\ -2x_1+x_2+x_3 &= 3\\ x_1+x_2+x_3 &= 6 \end{aligned} .$$

Овде

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

е матрицата на системот. Лесно се проверува дека таа е несингуларна.
Дадениот систем може да се напише во матричен облик

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

или, означувајќи

$$\alpha_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

во облик

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3 = d.$$

Бидејќи A е несингуларна матрица, множеството вектори $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ е линеарно независно, значи тоа е и база на R^3. За да се реши системот, потребно е да се најдат коефициентите на единствената линеарна комбинација (т.е. скаларите x_1,x_2,x_3) на векторите $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, која е еднаква на векторот d. Процесот на решавање се состои во последователно исклучување на првата, втората, третата и т.н. променливи од сите равенки освен првата, втората, третата и т.н. соодветно. Првиот чекор се состои од исклучување на првата непозната x_1 од сите равенки освен првата. Тоа се постигнува со извршување на елементарните трансформации додавање на првата равенка помножена со соодветни броеви кон втората и третата равенка.

Чекор I.

$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 2 \\ -2x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ x_1+x_2+x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Бидејќи матрицата A е несингуларна, системот равенки може да се напише во таков облик, што коефициентот при првата непозната во првата равенка ќе биде различен од нула. Тоа може да се постигне со соодветна пренумерација на равенките (или непознатите).

Во нашиот пример $a_{11} = 1$. За елиминација на x_1 од втората равенка, ја множиме првата равенка со 2 и добиената равенка ја додаваме кон втората. За елиминација на x_1 од третата равенка, ја множиме првата равенка со -1 и добиената равенка ја додаваме кон третата. Со овие трансформации дадениот систем е сведен на следниот еквивалентен систем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Чекор 2. Ја елиминираме втората променлива од сите равенки добиени како резултат на чекорот 1, освен втората. Пак, равенките можат да бидат преместени така, што коефициентот при x_2 во втората равенка ќе биде различен од нула. Бидејќи во почетокот на итерацијата згодно е да се направи коефициентот при променливата, која се елиминира, рамен 1, ја делиме втората равенка со 3. Коефициентот 3 ни се јавува како <u>главен елемент</u> (во чекорот 1 главен елемент беше $a_{11}=1$). Множејќи ја трансформираната втора равенка со -1 и додавајќи ја кон првата добиваме:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{2}{3} x_3 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3} x_3 &= \frac{7}{3} \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Чекор 3. Сега главен елемент е 2. Делејќи ја со 2 третата равенка добиена после чекорот 2, множејќи го добиениот резултат со $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ и додавајќи ги добиените равенки кон првата и втората соодветно, системот равенки го сведуваме во облик

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

одредувајќи го очигледно и неговото решение. Забележуваме дека целокупноста на сите извршени елементарни трансформации ја трансформираат матрицата на системот

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

во единична матрица

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Значи целокупноста на трансформациите, кои се јавуваат во методата на потполна елиминација е еквивалентна на левострано множење со A^{-1} на системот $Ax = d$.

Ако матрицата на почетниот систем ја "прошириме" со единична матрица E од исти ред и со вектор колоната d,

$$[A, E, d],$$

и потоа ја примениме методата на потполна елиминација, ке добиеме

$$[A^{-1}A, A^{-1}E, A^{-1}d], \text{ т.е. } [E, A^{-1}, A^{-1}d] .$$

Значи со примена на методата на елиминација може да се добие и инверзната на матрицата на системот

Да го илустрираме ова на претходниот пример. Проширената матрица има облик

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Извршувајки ги истите трансформации како и порано добиваме

Чекор 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] .$$

Чекор 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Чекор 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 2 \end{array}\right].$$

Одовде имаме:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

б) Ако $m<n$ и на пример првите m колони $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ на A се линеарно независни, тогаш давајки им на променливите $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ произволно избрани вредности $\bar{x}_i$ $(i=m+1,\dots,n)$ се добива Крамеров систем

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_m\alpha_m=d-\bar{x}_{m+1}\alpha_{m+1}-\dots-\bar{x}_n\alpha_n \quad ,$$

или

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_m\alpha_m=d',$$

кој има едно единствено решение $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$, според 2° а). Тогаш

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$

е решение на системот $Ax = d$. Земајќи други вредности за променливите

$x_{m+1}, \dots, x_n$ на ист начин како погоре се добива друго решение на системот $Ax = d$. Бидејќи избори на вредности за $x_{m+1}, \dots, x_n$ имаме бесконечно многу, постојат и бесконечно многу решенија на $Ax = d$.

Пример. Да го разгледаме пак системот

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -2$$

Лесно се наоѓа дека $r(A) = m = 2 < 3 = n$ и дека вектор колоните α_1, α_2 се линеарно независни. Значи имаме случај 2° б). Земајќи на пример $\bar{x}_3 = 1$ се добива Крамеров систем

$$x_1 - x_2 = 3 - 1$$
$$x_1 + x_2 = -2 + 2$$

кој има единствено решение $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = -1$. Тогаш

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

е решение на почетниот систем. Земајќи $\bar{x}_3 = 0$ се добива системот

$$x_1 - x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = -2$$

кој има (единствено) решение

$$\bar{x}_1 = 1/2, \quad \bar{x}_2 = -2\frac{1}{2}$$

и тогаш

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

е друго решение на почетниот систем, и т.н.

Заклучок. За даден систем линеарни равенки $Ax = d$ со n непознати постојат три можности, кои взаемно се исклучуваат:

а) Ако $r(A) < r(A,d)$, тогаш системот нема решение (бидејќи во тој случај d е линеарно независен на множеството вектор колони α_j $(j=1,2,\dots,n)$ на А и неможе да се изрази како нивна линеарна комбинација);

б) Ако $r(A) = r(A,d) = n$, тогаш системот има точно едно решение (според 2° а));

в) Ако $r(A) = r(A,d) < n$, тогаш системот има бесконечно многу решенија (според 2° б)).

3. Решавање на системи линеарни равенки

<u>Теорема 2.</u> Ако $r(A) = r$ тогаш множеството U на сите решенија на хомогениот систем со n непознати, $Ax = o$, е $n-r$ димензионален потпростор на R^n.

Доказ: Нека

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in U \text{ (т.е. } A\bar{x}_1 = o,\ A\bar{x}_2 = o) \text{ и } \alpha_1, \alpha_2 \in R,$$

тогаш

$$A(\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2) = \alpha_1(A\bar{x}_1) + \alpha_2(A\bar{x}_2) = \alpha_1 o + \alpha_2 o = o$$

што значи дека и $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 \in U$, односно дека U е потпростор. За да се најде неговата димензија доволно е да се најде една база на U. Бидејќи $r(A) = r$, постои барем една r- ка линеарно независни колони α_j на А. Нека тоа се векторите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Тогаш $\alpha_j (j=r+1,\dots,n)$ можат да се изразат како линеарни комбинации

$$\alpha_j = \beta_{j1}\alpha_1 + \beta_{j2}\alpha_2 + \dots + \beta_{jr}\alpha_r \qquad (j=r+1,\dots,n).$$

Да ги формираме векторите

$$\bar{x}_{r+1}=\begin{bmatrix}-\beta_{r+1,1}\\-\beta_{r+1,2}\\ \vdots\\-\beta_{r+1,r}\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\bar{x}_{r+2}=\begin{bmatrix}-\beta_{r+2,1}\\-\beta_{r+2,2}\\ \vdots\\-\beta_{r+2,r}\\0\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix},\ldots,\bar{x}_n=\begin{bmatrix}-\beta_{n1}\\-\beta_{n2}\\ \vdots\\-\beta_{nr}\\0\\0\\ \vdots\\1\end{bmatrix}.$$

Очигледно овие вектори се линеарно независни (матрицата составена од нив содржи единична подматрица). Бидејќи е

$$A\bar{x}_j=-\beta_{j1}\alpha_1-\beta_{j2}\alpha_2-\ldots-\beta_{jr}\alpha_r+\alpha_j=-\alpha_j+\alpha_j=0 \quad (j=r+1,\ldots,n),$$

заклучуваме дека $\bar{x}_j$ $(j=r+1,\ldots,n)$ се $n-r$ решенија на системот $Ax=0$. Нека

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

е произволно решение на $Ax=0$. Тогаш и векторот

$$x'=x-x_{r+1}\bar{x}_{r+1}-\ldots-x_n\bar{x}_n \tag{3}$$

е решение на системот, бидејќи

$$Ax'=Ax-x_{r+1}A\bar{x}_{r+1}-\ldots-x_nA\bar{x}_n=0-x_{r+1}0-\ldots-x_n0=0.$$

Компонентите $x'_{r+1},\ldots,x'_n$ на векторот x' се сите 0 (што се гледа од (3) и од дефиницијата на векторите x и $\bar{x}_j$). Според тоа

$$x'_1\alpha_1+x'_2\alpha_2+\ldots+x'_r\alpha_r=0$$

Но бидејќи $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ се линеарно независни, следува дека и $x'_1=x'_2=\ldots=x'_r=0$ односно $x'=0$. Тогаш од (3) следи дека x може да се претстави како линеарна комбинација на векторите $\bar{x}_j$ $(j=r+1,\ldots,n)$.

Теорема 3. Ако $r(A)=r(A,d)=r$, множеството на сите решенија на системот $Ax=d$ може да се претстави во облик x_0+U, каде x_0 е едно фиксно решение на системот $Ax=d$, а U е множеството на сите решенија на хомогениот систем $Ax=o$.

Доказ: Ако x_0 е фиксно решение, а x е произволно решение на $Ax=d$, тогаш

$$A(x-x_0)=Ax-Ax_0=d-d=0 \Rightarrow x-x_0 \in U.$$

Тоа значи дека постои елемент $u \in U$ така што $x=x_0+u$. Обратно, за секој $u \in U$, $x=x_0+u$ е решение на нехомогениот систем.

$$Ax=A(x_0+u)=Ax_0+Au=d+o=d.$$

Теорема 4. Множеството на сите решенија на системот $Ax=d$ е конвексно.

Доказ: Нека x_1,x_2 се две решенија на системот и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \alpha \in R$. Тогаш

$$A(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=\alpha Ax_1+(1-\alpha)Ax_2=\alpha d+(1-\alpha)d=d.$$

Тоа значи дека и $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$ е решение на дадениот систем, односно дека множеството решенија е конвексно.

Едно решение

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\\ \vdots\\ \bar{x}_n\end{bmatrix}$$

на $Ax=d$ е ненегативно ако сите компоненти $\bar{x}_j$ $(j=1,2,\dots,n)$ се ненегативни, т.е. ако $\bar{x}_j \geqslant 0$ $(j=1,2,\dots,n)$, или кратко $\bar{x} \geqslant 0$.

Пример 1. Да се најде множеството решенија на системот $Ax=d$ каде

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}, \qquad d=\begin{bmatrix}0\\ -4\\ -1\end{bmatrix}$$

Рековме дека произволно решение на системот $Ax = d$ може да се претстави во облик $x = x_0 + u$, каде x_0 е едно фиксно решение на системот, а u е елемент на множеството решенија U на хомогениот систем.

Најпрво проширената матрица $[A \vdots d]$ со низа елементарни трансформации ја сведуваме на поедноставен еквивалентен облик

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\mathrm{I} \dotplus \mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2\mathrm{III} \dotplus \mathrm{II}]{(-1)\mathrm{III} \dotplus \mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1/2)\mathrm{II} \dotplus \mathrm{III}]{(-1/2)\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Со овие трансформации добиен е следниот еквивалентен систем

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 + (1/2)\, x_4 \quad &= 3 \\ x_2 \qquad - (1/2)\, x_4 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

кој според 2° б) има бесконечно многу решенија. Ако земеме $x_4 = x_5 = 0$ добиваме $x_1 = 1, x_3 = 3, x_2 = 2$ односно едно фиксно решение на системот

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Множеството решенија на хомогениот систем го наоѓаме според понапред изнесената постапка. Во последниот облик на дадениот систем, линеарно независни се векторите $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ додека α_4 и α_5 можат да се изразат како нивна линеарна комбинација:

$$\alpha_4 = 1\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\alpha_2$$

$$\alpha = 1\alpha_1 + 0\alpha_3 + 1\alpha_2$$

Сега можеме да ги формираме векторите $\overline{x}_4$ и $\overline{x}_5$

$$\overline{x}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overline{x}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Покажавме дека секое решение на хомогениот систем може да се претстави како линеарна комбинација на векторите $\overline{x}_4$, $\overline{x}_5$. Значи множеството решенија на хомогениот систем е:

$$U=\{u \mid u=\beta_1\overline{x}_4+\beta_2\overline{x}_5;\quad \beta_1,\beta_2 \in R\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\beta_1 - \beta_2 \\ -\frac{1}{2}\beta_1 + 0\cdot\beta_2 \\ \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1 + 0\beta_2 \\ 0\beta_1 + \beta_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; \beta_1,\beta_2 \in R \right\}.$$

Тогаш множеството решенија L на системот $A\,x = d$ е:

$$L=\{x \mid x=x_0+u;\ u \in U\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-\beta_1-\beta_2 \\ 2-\frac{1}{2}\beta_1+0\beta_2 \\ 3+\frac{1}{2}\beta_1-\beta_2 \\ 0+\beta_1+0\beta_2 \\ 0+0\beta_1+\beta_2 \end{bmatrix} \;\middle|\; \beta_1,\beta_2 \in R \right\}$$

В е ж б и.

1. Да се дискутира за множеството решенија на системот:

а) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$ в) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$

г) $\begin{aligned} x_1 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 - 3x_5 &= 3 \end{aligned}$ д) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$ ѓ) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$

2. Да се најде множеството решенија на системот:

а) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 . \end{aligned}$

4. Базни решенија

Нека е даден системот линеарни равенки $Ax = d$, каде A е $m\text{x}n$ матрица и $r(A) = r(A,d) = m < n$ (значи системот има бесконечно многу решенија). Нека B е подматрица на A составена од m линеарно независни колони (барем една таква подматрица постои бидејќи $r(A) = m$). Овие вектори образуваат база B на множеството вектор колони на A. Ако со R се означи подматрицата образувана од колоните на A, кои не се во базата, тогаш A може да се напише како блок матрица:

$$A = [B, R] .$$

Ако со x^B се означи векторот образуван од компонентите на x соодветни на базните колони, а со x^R се означи векторот образуван од компонентите на x соодветни на останатите колони, тогаш системот $Ax = d$ може да се претстави во облик:

$$[B,R]\begin{bmatrix} x^B \\ x^R \end{bmatrix} = d \quad \text{или} \quad Bx^B + Rx^R = d \quad . \qquad (4)$$

Компонентите на x^B се наречуваат <u>базни променливи</u>, а компонентите на x^R - <u>слободни променливи</u>.

Ако системот (4) се помножи од лево со B^{-1}, се добива еквивалентен систем

$$x^B + B^{-1}Rx^R = B^{-1}d,$$

од каде се гледа дека за произволно зададен $\bar{x}^R$ може да се најде точно одреден

$$\bar{x}^B = B^{-1}d - B^{-1}R\bar{x}^R;$$

притоа векторот

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}^B \\ \bar{x}^R \end{bmatrix}$$

е решение на дадениот систем. (Провери!).

Ако на слободните променливи им се даде вредност нула $(\bar{x}^R = o)$, тогаш дадениот систем се сведува на Крамеров систем:

$$Bx^B = d,$$

кој има едно единствено решение $\bar{x}^B = B^{-1}d$. Очигледно

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}^B \\ o \end{bmatrix}$$

е решение на почетниот систем. Ова решение се наречува <u>базно решение</u>, соодветно на базата B. Ако избереме нова база B′ на A, добиваме ново базно решение

$$x' = \begin{bmatrix} x^{B'} \\ x^{R'} \end{bmatrix}$$

Максималниот број базни решенија е еднаков со максималниот број несингуларни подматрици B од m- ти ред на матрицата A, кој најмногу изнесува

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} .$$

Пример. Да се најде едно базно решение на системот равенки

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\quad - 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 \qquad + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 \qquad - 2x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Матрицата на системот е:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$r(A) \leqslant \min\{3,4\}=3$, од друга страна, бидејќи постојат три линеарно независни колони на A, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R^3$, следува дека $r(A) = 3$. Една база на колоните на A очигледно е $B = [\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$.

Базни променливи соодветни на базата B се $x_2\ x_3\ x_4$, слободни се x_1 и x_5. Давајќи им на слободните променливи вредност нула $(x_1 = x_5 = 0)$ се добива системот

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

чие решение е $x_2=2, x_3=3, x_4=1$. Значи базното решение соодветно на базата B е

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Очигледно ова е ненегативно базно решение.

Во овој пример и векторите $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ образуваат база B' на колоните на матрицата A (зошто?). Да се најде базното решение соодветно на B'!.

5. За неравенките

Ако во системот $Ax = d$ знакот за равенство се замени со знак за неравенство, на пример $\geqslant$:

$$Ax \geqslant d,$$

тогаш се добива <u>систем линеарни неравенки</u>.Ако системот $Ax = d$ има решение $\bar{x}$, тогаш $\bar{x}$ е решение и на системот неравенки $Ax \geqslant d$, па тој е решлив.

<u>Пример</u>.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &\geqslant 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geqslant 0 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

е систем од две неравенки со три непознати. Лесно се уочува едно решение на овој систем, на пример

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left(A\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Секое решение на системот равенки

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

е решение на дадениот систем неравенки; од наведените примери се гледа дека системот неравенки има и други решенија, различни од решенијата на системот равенки.

В е ж б и.

1. Да се најдат сите базни решенија на системот равенки:

$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad\quad - x_3 - x_4 &= 4 \\
x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Решение: Нека првата база ја чинат векторите α_1 и α_2 (тие се линеарно независни), а другите вектори α_3, α_4, d ги изразуваме како линеарни комбинации од базните:

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= -\frac{1}{2}\alpha_1 + 3\alpha_2 \\
\alpha_4 &= -\frac{1}{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 \\
d &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2
\end{aligned}
$$

Ставајки $x_3 = x_4 = 0$ го добиваме базното решение соодветно на првата база:

$$
\overline{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Втора база добиваме со замена на еден од базните вектори, на пример α_2, со некој од слободните вектори(во чие разложување како линеарна комбинација на базните, коефициентот пред α_2 е различен од нула) на пример α_3. Значи за втора база може да се избере $B' = [\alpha_1, \alpha_3]$. Тогаш

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_3 \\
\alpha_4 &= -\frac{1}{2}\alpha_1 + 2\left(\frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_3\right) = -\frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_3 \\
d &= 2\alpha_1 + 3\left(\frac{1}{6}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_3\right) = \frac{5}{2}\alpha_1 + \alpha_3 .
\end{aligned}
$$

Ставајќи $x_2 = x_4 = 0$ го добиваме базното решение соодветно на втората база

$$\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Друга база добиваме пак со замена (како погоре) на еден од базните вектори со некој од слободните, а потоа го наоѓаме соодветното базно решение, и тоа го чиниме се додека не ги најдеме сите можни бази на системот, а нив може да ги има најмногу $\frac{4!}{2!2!} = 6.$

б)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad - 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 \qquad\qquad + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 \qquad - 2x_5 &= 3 . \end{aligned}$$

Кои од најдените базни решенија во а) и б) се ненегативни?

2. Множеството решенија на системот неравенки

$$Ax \geqslant 0$$

(A е $m \times n$ матрица) е конвексен конус. Покажи!

3. Нека A е $m \times n$ матрица, d е m - вектор колона и $r(A,d) = r(A)$. Тогаш множеството решенија на системот неравенки $Ax \geqslant d$ е конвексно (тоа се наречува конвескно многустрано множество). Покажи!

4. Нека T е конвексно многустрано множество во R^2 зададено со следниот систем линарни неравенки (значи T е множеството на сите решенија на системот):

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geqslant 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 13 \\ x_1 + 4x_2 &\geqslant 4 \\ x_2 &\geqslant 0 . \end{aligned}$$

Векторот

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

е решение на Крамеровиот потсистем равенки од втор ред

$$x_1 + 3x_2 = 9$$
$$x_2 = 0$$

кое ги задоволува и останатите услови, т.е. $\bar{x} \in T$. Да се покаже дека $\bar{x}$ е екстремна точка на T.

Решение: Нека $\bar{x}$ не е екстремна точка на T, т.е. постојат $x_1, x_2 \in T$ (а тоа значи $Ax_1 \geqslant d$ и $Ax_2 \geqslant d$, односно $Ax_1 = d+h$ и $Ax_2 = d+g$, каде векторите $h, g \geqslant 0$) и скалар $0 < \alpha < 1$ така што

$$\bar{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \qquad (5)$$

Да ја означиме матрицата на Крамеровиот систем со

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тогаш и

$$A_1 x_1 \geqslant d_1 , \ A_1 x_2 \geqslant d$$

односно

$$A_1 x_1 = d_1 + h_1 , \ A_1 x_2 = d_1 + g_1 \ (h_1 , g_1 \geqslant 0) .$$

По претпоставка

$$d_1 = A_1 \bar{x}_1 = A_1 (\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha A_1 x_1 + (1-\alpha) A_1 x_2 =$$
$$= \alpha (d_1 + h_1) + (1-\alpha)(d_1 + g_1) = d_1 + \alpha h_1 + (1-\alpha) g_1 .$$

Бидејќи $\alpha, 1-\alpha > 0$ и $h_1, g_1 \geqslant 0$, горното равенство е можно само ако $h_1 = g_1 = 0$. Тогаш $A_1 x_1 = d_1$ и $A_1 x_2 = d_1$, а бидејќи системот $A_1 x = d_1$ е Крамеров и има единствено решение, следува дека $x_1 = x_2 = \bar{x}$. Добиваме дека $\bar{x}$ не може да се претстави како конвексна комбинација на две различни точки од T, а тоа значи дека $\bar{x}$ е екстремна точка на T.

Б ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Делот Б ги опфаќа основите на линеарното програмирање: формулирана е општата задача и докажана е основната теорема на линеарното програмирање, дадени се теоријата и алгоритмот на симплекс методата, разгледана е дуалноста во линеарното програмирање. Потоа читателот може да се запознае со транспортниот проблем и со една метода за негово решавање.

Во овој дел се ослободуваме од договорот направен во делот А за ознаките на векторите, односно скаларите. Овде, од практични причини, мали печатни латински букви се користат и за скаларите. За да се избегне недоразбирање, во контекстот најчесто е нагласено кога се работи за вектор.

I. ОСНОВИ НА ЛИНЕАРНОТО ПРОГРАМИРАЊЕ

1. Формулација на задачата на линеарното програмирање (LP задача)

Во многу области на човечката дејност се јавуваат проблеми кои се сведуваат на решавање на задачата:

(LP): Да се најде решение $x_1, x_2, \dots, x_n$ на системот неравенки

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geqslant d_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geqslant d_2\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geqslant d_m
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$x_j \geqslant 0, \ j=1,\dots,n \tag{2}$$

за кое линеарниот функционал

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \tag{3}$$

прима минимална (максимална) вредност.

Неравенствата (1) се наречуваат <u>ограничувања</u> на LP задачата, (2) се нарекуваат <u>услови за ненегативност</u>, а (3) се нарекува <u>функција на целта</u>.

n- ката вредности $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ се нарекува <u>допустиво решение</u> (или <u>програм</u>) ако ги исполнува ограничувањата и условите за ненегативност. За задачата на минимизација допустивото решение $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ се нарекува <u>оптимално</u> (или <u>минимално</u>) ако

$$c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \dots + c_n\bar{x}_n \leqslant c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

за секое друго допустиво решение $x_1, x_2, \dots, x_n$. Аналогно, за задачата на максимизација допустивото решение $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ се нарекува оптимално (или <u>максимално</u>) ако

$$c_1\overline{x}_1+c_2\overline{x}_2+\dots+c_n\overline{x}_n \geqslant c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

за секое друго допустиво решение $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Да се реши LP задачата значи да се најде оптимално решение или да се покаже дека такво не постои.

За упростување на работата при разгледувањето на LP задачата се користат следните скратени форми на запис:

Координатна форма:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n \geqslant d_i\,,\quad i=1,\dots,m$$
$$x_j \geqslant 0,\quad j=1,\dots,n\,.$$

$$\min(\max)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$$

Матрична форма:

$$Ax \geqslant d$$
$$x \geqslant o$$
$$\min(\max)\ z=c\,x,$$

каде

$$c=[c_1\ \ c_2\dots\dots c_n],\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad d=\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_m\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mn}\end{bmatrix}$$

$o=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ - вектор колона со n компоненти еднакви нула.

Векторска форма:

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\dots+x_n\alpha_n \geqslant d$$
$$x \geqslant o\,.$$

$$\min(\max)\ z=c\,x\,,$$

каде x, c, d, o имаат исто значење како погоре, а

$$\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \; j=1,\dots,n.$$

Забелешка. Во секој случај LP задачата треба да се чита вака: да се најдат ненегативни вредности на променливите x_j, $j=1,\dots,n$ кои ги задоволуваат ограничувањата и ја минимизираат (максимизираат) функцијата на целта z.

2. Примери на LP проблеми

Пример 1. Во една фабрика со машините A и B се произведуваат три видови артикли: I, II, III. За изработка на единица артикал I машината A работи 2 часа, а машината B – 3 часа, за изработка на единица артикал II A работи 5 часа, а B – 4 часа, за изработка на единица артикал III A работи 4 часа, а B – 2 часа. Машината A дневно може да работи најмногу 16 часа, а машината B – најмногу 18 часа. За подобра прегледност погорните податоци ги претставуваме табеларно на следниот начин:

Машина	Артикли I	II	III	Дневно расположиво време во часови
A	2	5	4	16
B	3	4	2	18
Вкупно часови	5	9	6	34

Се поставува прашање колку единици од секој артикал дневно треба да се произведуваат за да бидат максимално искористени капацитетите на машините.

Нека x_1 е количеството на артикалот I, кое дневно би требало да се произведе, x_2 е количеството на артикалот II, кое дневно би требало да се произведе, x_3 е количеството на артикалот III, кое дневно би требало да се произведе. Од табелата се гледа дека за производство на единица артикал I вкупно е потребно 5 часа, за единица артикал II – вкупно 9 часа, за единица артикал III– вкупно 6 часа. Тогаш за производство на x_1 единици артикал I, x_2 единици артикал II и x_3 единици артикал III вкупно се потребни

$$z = 5x_1 + 9x_2 + 6x_3$$

часа. Потребен е таков избор на ненегативни вредности x_1, x_2, x_3 за кои z ке има максимална вредност и притоа капацитетите на машините нема да бидат надминати, т.е.

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 16$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 18$$

($2x_1 + 5x_2 + 4x_3$ е времето што ке го потроши машината А за производство x_1 единици артикал I, x_2 единици артикал II и x_3 единици артикал III, $3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ е времето што ке го потроши машината В за производство x_1 единици артикал I, x_2 единици артикал II, x_3 единици артикал III). На тој начин го добиваме LP проблемот:

$$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leqslant 16$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leqslant 18$$
$$x_j \geqslant 0, \ j=1,2,3$$
$$\max\ z = 5x_1 + 9x_2 + 6x_3.$$

Пример 2. Рудниците R_1 и R_2 ги снабдуваат со јаглен градовите G_1, G_2, G_3. Рудникот R_1 дневно може да испраќа 600 тони, а рудникот R_2 - 1000 тони (вкупно 1600 тони). Градот G_1 дневно троши 500 тони јаглен, градот G_2 - 700 тони, а градот G_3 - 400 тони (вкупно 1600 тони). Цената на превоз 1 тон јаглен од рудникот R_i, $i=1,2$ до градот G_j, $j=1,2,3$ е дадена во табелата

од \ до	G_1	G_2	G_3
R_1	9	4	6
R_2	7	5	3

Се поставува прашање како да се организира превозот за да бидат минимални трошоците.

Ако x_{ij}, $i=1,2; j=1,2,3$ е количеството јаглен (во тони) што треба да се испрати од i-от рудник во j-от град, тогаш погорната задача математички може да се формулира на следниот начин:

$$
\begin{array}{llllll}
x_{11}+x_{12}+x_{13} & & & & & = 600 \\
& & & x_{21}+x_{22}+x_{23} & & =1000 \\
x_{11} & & & +x_{21} & & =500 \\
& x_{12} & & & +x_{22} & =700 \\
& & x_{13} & & +x_{23} & =400
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \; i=1,2; \; j=1,2,3$$

$$\min z=9x_{11}+4x_{12}+6x_{13}+7x_{21}+5x_{22}+3x_{23}.$$

3. Едноставни графички примери

LP проблемите со две променливи и произволен број ограничувања можеме да ги решиме графички. За илустрација ќе наведеме повеќе примери.

Пример 1.

$$3x_1+5x_2 \leqslant 15$$

$$5x_1+2x_2 \leqslant 10$$

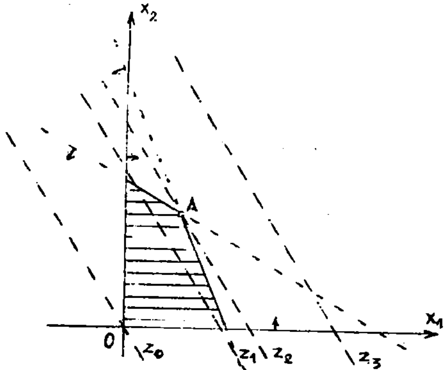
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

$$\max z=5x_1+3x_2$$

Воведуваме координатен систем $x_1 0 x_2$. Тогаш паровите броеви (x_1,x_2) се точки во x_1x_2- рамнината. Сите точки (x_1,x_2) кои се на x_2 оската или од нејзината десна страна имаат $x_1 \geqslant 0$. Слично, сите точки на или над x_1 оската имаат координата $x_2 \geqslant 0$. Значи произволна точка (x_1,x_2) од првиот квадрант има $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$ и ги задоволува условите за ненегативност, и обратно. Затоа, секоја точка која е допустиво решение на LP проблемот мора да лежи во првиот квадрант. За да се најде множеството точки во првиот квадрант кои ги задоволуваат ограничувањата, потребно е геометриски да се интерпретираат неравенките како $3x_1+5x_2 \leq 15$. Во случај на равенство, т.е.

$$3x_1+5x_2 = 15$$

имаме равенка на права и секоја точка на оваа права ја задоволува равенката. Сега да го разгледаме координатниот почеток (0,0).



Сл.1

Забележуваме дека $3.0+5.0=0<15$ т.е. координатниот почеток ја задоволува неравенката. Фактички, секоја точка на или под правата $3x_1+5x_2=15$ ја задоволува неравенката $3x_1+5x_2\leq 15$, а ниедна точка над правата не ја задоволува неравенката. Затоа множеството точки (x_1,x_2), кои ја задоволуваат неравенката $3x_1+5x_2 \leq 15$ се состои од сите точки во координатната рамнина $x_1 0 x_2$ на или под правата $3x_1+5x_2 = 15$. На потполно ист начин заклучуваме дека сите точки кои ја задоволуваат неравенката $5x_1+2x_2 \leq 10$ и условите за ненегативност се сите точки од првиот квадрант, кои се на или под правата $5x_1+2x_2 = 10$. Множеството точки кои ги задоволуваат двете наведени неравенки и условите за ненегативност се сите точки од зацртаната област на цртежот 1. Произволна точка од оваа област е допустиво решение на LP проблемот и само точките од оваа област се допустиви решенија. За да го решиме LP проблемот, треба да најдеме точка или точки од областа допустиви решенија, во кои функцијата на целта z достигнува најголема вредност. За произволно избрана вредност $\bar{z}$ на z, $\bar{z} = 5x_1+3x_2$ е права. Во секоја точка на оваа права z има една иста вредност $(\bar{z})$. За секоја друга вредност на z добиваме друга права. Вредно е да се забележи дека сите прави соодветни на различни вредности на z се паралелни (агловиот коефициент на секоја од нив е $-c_1/c_2$ и е независен од z). Ние сакаме да најдеме права со најголема вредност на z и која има барем една заедничка точка со областа на допустивите решенија. Паралелните линии на цртежот ја претставуваат функцијата на целта за четири различни вредности на $z(z_0,z_1,z_2,z_3)$. Јасно е дека z_0 или z_1 не е најголема вредност на z бидејќи правата може да се помери така да z расте и сеуште некои нејзини точки да се во областа на допустивите решенија. Од друга страна пак иако $z_3 > z_i, i = 0,1,2,$ правата соодветна на z_3 нема заеднички точки со областа на допустиви решенија. Очигледно z_2 е максимална вредност на z и допустивото решение кое ја дава оваа вредност е темето A на областа допустиви решенија. Бидејќи A е пресек на правите

$$3x_1+5x_2=15$$

$$5x_1+2x_2=10$$

решението на овој систем го дава оптималното допустиво решение $\bar{x}_1=1,053$, $\bar{x}_2=2,368$. Оптималната вредност на функцијата на целта е $\bar{z}=5.\bar{x}_1+3\bar{x}_2=12,37$.

Пример 2. Да го разгледаме проблемот

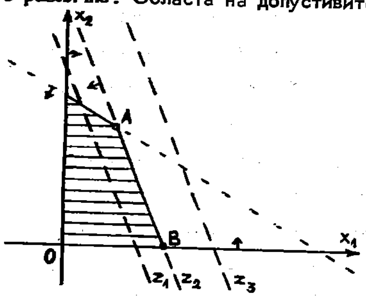
$$3x_1+5x_2 \leqslant 15$$

$$5x_1+2x_2 \leqslant 10$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

$$\max z=2,5x_1+x_2$$

Оваа задача се разликува од претходната само во тоа што функцијата на целта е различна. Областа на допустивите решенија е иста.



Сл.2

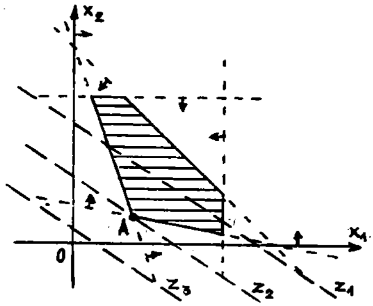
На цртежот 2 се нацртани прави кои ја претставуваат новата функција на целта за неколку различни вредности на z (z_1, z_2, z_3). Очигледно z_2 е максимална вредност на z. Оваа вредност се достигнува за секоја точка (x_1,x_2) на отсечката $\overline{AB}$. Значи овде немаме единствено оптимално решение, бидејќи секоја точка на отсечката $\overline{AB}$ е оптимално решение. Забележуваме уште дека точката A, која беше оптимално решение на проблемот во примерот 1, е оптимално и за разгледуваниот проблем и затоа, користејќи ги веќе најдените вредности на координатите на A, можеме веднаш да ја најдеме оптималната вредност на новата функција на целта

$$\bar{z}=2,5\cdot 1,053+1\cdot 2,368=5,0.$$

Пример 3.

$$x_1+x_2 \leqslant 4$$
$$6x_1+2x_2 \geqslant 8$$
$$x_1+5x_2 \geqslant 4$$
$$x_1 \leqslant 3$$
$$x_2 \leqslant 3$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$
$$\min z=2x_1+3x_2$$

Геометриската интерпретација на овој проблем е дадена на следниот цртеж:



Сл.3

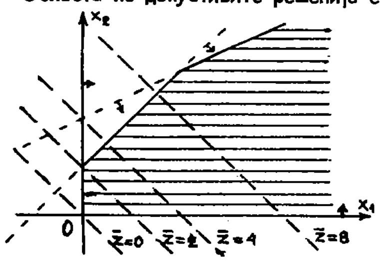
Минималната вредност на z е z_2 и таа се достигнува во точката A, која е пресек на правите $6x_1+2x_2=8$ и $x_1+5x_2=4$. Решавајки го овој систем на две равенки со две непознати се добива оптималното решение

$$\bar{x}_1=8/7, \ \bar{x}_2=4/7; \ \bar{z}=2\bar{x}_1+3\bar{x}_2=4.$$

Пример 4.

$$x_1-x_2 \geqslant -1$$
$$-0,5x_1+x_2 \leqslant 2$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$
$$\max z=2x_1+2x_2$$

Обласата на допустивите решенија е претставена на следниот цртеж:



Сл.4

Правите кои ја претставуваат функцијата на целта за неколку вредности на z исто така се нацртани. Но констатираме дека колку и да ја поместуваме правата на функцијата на целта во смер на растењето на z таа постојано ке има заеднички точки со обласата на допустивите решенија.

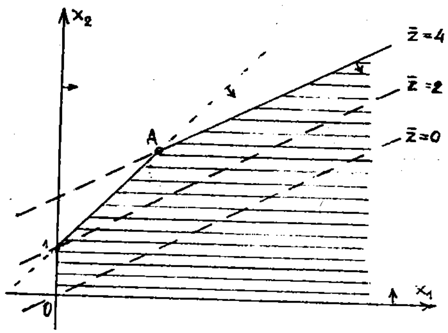
Значи z може да се направи произволно големо, т.е. проблемот нема конечна максимална вредност на z. Во овој случај велиме дека функцијата на целта е <u>неограничена од горе</u> (се бара максимизација на z) во областа на допустивите решенија. При аналогна ситуација во случај на минимизација ќе велиме дека функцијата на целта е <u>неограничена од доле</u>.

Јасно е дека ситуација како во примерот 4 може да настане само во случајот кога областа на допустиви решенија е <u>неограничена</u>, т.е. ако во неа барем една од променливите x_j може да прима произволно голема позитивна вредност.

Уочивме веќе дека оптималното решение на LP проблемот не мора да е единствено. Со наредниот пример ќе покажеме дека и ако оптималната вредност на функцијата на целта е конечна, сепак можат да постојат оптимални решенија со бесконечни вредности на компонентите.

<u>Пример 5.</u>

$$x_1 - x_2 \geqslant -1$$
$$-0{,}5x_1 + x_2 \leqslant 2$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$
$$\max\ z = 2x_2 - x_1$$



Сл.5

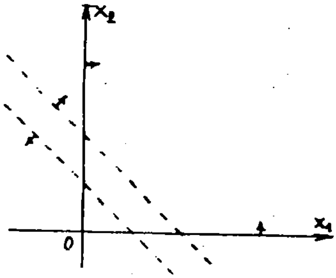
Овој проблем графички е решен на цртежот 5. Забележуваме дека постојат допустиви решенија, чии компоненти можат да бидат произволно големи, па сепак оптималната вредност на функцијата на целта е конечна и еднаква $\bar{z} = 4$. Произволна точка на работ на допустивата област, кој излегува од темето A и се протега до бескрајност, ѝ дава на функцијата на целта вредност $\bar{z} = 4$; значи таа претставува оптимално решение.

Досега, во сите наведени примери постоеа допустиви решенија, но тоа не значи дека сите LP проблеми имаат допустиво решение.

Следниот пример, графички претставен на цртежот 6, нема допустливи решенија бидејќи системот ограничувања е противречен.

Пример 6.

$$x_1+x_2\leqslant 1$$
$$2x_1+2x_2\geqslant 4$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$
$$\min z=3x_1-2x_2$$



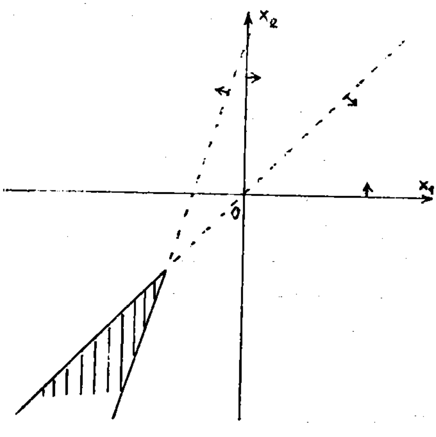
Сл.6

Очигледно ниту една точка од рамнината неможе да ги исполнува истовремено двете ограничувања.

Ограничувањата можат да бидат непротивречни, а сепак да не постои ниту едно допустиво решение, бидејќи условите за ненегативност можат да не бидат исполнети, како во следниот случај:

Пример 7.

$$x_1-x_2\geqslant 0$$
$$3x_1-x_2\leqslant -3$$
$$x_1,x_2\geqslant 0$$
$$\min z=x_1+x_2$$



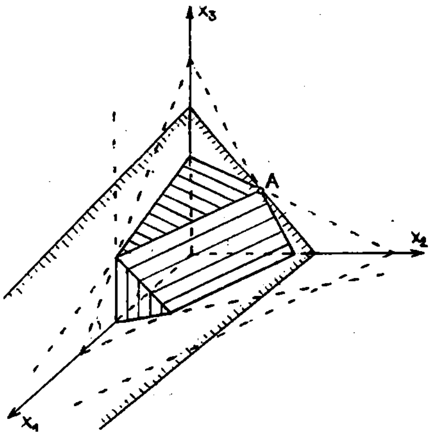
Сл.7

Произволна точка од зацртаната област ги исполнува ограничувањата, но бидејќи ниту една од нив нема ненегативни компоненти, заклучуваме дека не постои ниту едно допустиво решение на LP проблемот.

LP проблемите со три променливи исто така можеме да ги претставиме графички, но нивното графичко решавање е малку потешко. Како илустрација нека послужи следниот пример:

Пример 8.

$$4x_1+6x_2+3x_3 \leqslant 24$$
$$x_1+1,5x_2+3x_3 \leqslant 12$$
$$3x_1+x_2 \leqslant 12$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,3$$
$$\max z=0,5x_1+6x_2+5x_3$$



Сл.8

Областа на допустивите решенија е зацртаниот полиедар на цртежот 8. Равенката со три непознати како $4x_1+6x_2+3x_3 = 24$ претставува рамнина P во координатниот простор R^3. Решавајќи ја оваа равенка на пример по x_1, P може да се напише во облик

$$P=\{(6-1,5x_2-0,75x_3;x_2;x_3);\ x_2,x_3 \in R\},$$

или

$$P=\{(6,0,0)+x_2(-1,5;1;0)+x_3(-0,75;0;1);x_2,x_3 \in R\},$$

од кој се гледа дека таа минува низ точката (6,0,0) и е паралелна со векторите (-1,5;1;0) и (-0,75;0;1). Кога знакот за равенство се замени со неравенството ($\leqslant$), тогаш множеството точки кои ја задоволуваат оваа неравенка се сите точки кои лежат на (или под) рамнината. Множеството точки (x_1,x_2,x_3), кои заменети во функцијата на целта и даваат некоја вредност $\bar{z}$ на z, лежат на рамнината $\bar{z} = 0,5x_1+6x_2+5x_3$. Кога z се менува, добиваме фамилија паралелни рамнини. Рамнината од оваа фамилија која одговара на најголемата вредност $\bar{z}$ и која има барем една заедничка точка со областа на допустивите решенија дава $\max z$. Точката, или точките, од допустивата област кои лежат во оваа рамнина се оптимални решенија. Можеме да уочиме дека оптималното решение е во темето А на полиедарот на допустивите решенија. Во оваа точка се сечат рамнините

$$4x_1+6x_2+3x_3=24, \quad x_1+1,5x_2+3x_3=12, \quad x_1=0.$$

Решавајќи го овој систем од три равенки со три непознати се добива оптималното решение

$$\bar{x}_1=0,\ \bar{x}_2=\bar{x}_3=8/3,\ \bar{z}_{max}=88/3.$$

В е ж б и.

1. Геометриски да се решат LP проблемите:

a) $-3x_1+x_2\leqslant 1$, $x_1\leqslant 3$, $x_1+x_2\leqslant 4$, $x_1,x_2\geqslant 0$, $\max z=3x_1+2x_2$

b) $x_1-x_2\leqslant 2$, $x_1\leqslant 3$, $x_1+x_2\leqslant 4$, $x_1,x_2\geqslant 0$, $\max z=3x_1+2x_2$

c) $-3x_1+x_2\leqslant 1$, $x_1\leqslant 3$, $x_1+x_2\leqslant 4$, $x_1,x_2\geqslant 0$, $\max z=x_1+x_2$

d) $x_1-x_2\leqslant 2$, $x_1+x_2\leqslant 4$, $x_1,x_2\geqslant 0$, $\max z=3x_1+2x_2$

e) $x_1+x_2\leqslant 2$, $-x_1+2x_2\leqslant 3$, $x_1\geqslant 4$, $x_1,x_2\geqslant 0$, $\max z=3x_1+2x_2$

f) $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant 2$, $0\leqslant x_1+x_2\leqslant 3$, $-1\leqslant x_1-x_2\leqslant 0$, $\min z=x_1+x_2$

2. Да се наведат примери на LP проблеми со две непознати за кои: а) множеството оптимални програми е единствена точка, б) множеството оптимални програми е отсечка, в) секое допустиво решение е оптимално.

3. Да се најде општиот облик на оптималните решенија на LP проблемот:

$$x_1+2x_2\leqslant 1,\ x_1-x_2\leqslant 0,\ x_1,x_2\geqslant 0,\ \min z=-x_1-2x_2.$$

4. Користејќи ја геометриската интерпретација на LP проблемот:

$$x_1+ax_2 \leqslant 1$$
$$ax_1 - x_2 \leqslant 1$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$
$$\max\ z = x_1 + x_2$$

да се најдат вредности за a така што: а) ограничувањата се недопустиви, б) ограничувањата се допустиви, но функцијата на целта е неограничена, в) постои единствено оптимално решение, г) постојат повеќе оптимални решенија.

4. Стандарден облик на LP задачата

Во точката 1 беше дефинирана LP задачата, чија координатна форма е

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r \geqslant d_i\ , \quad i=1,\dots,m \tag{1}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j=1,\dots,r \tag{2}$$

$$\min(\max)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_rx_r \tag{3}$$

(се претпоставува дека сите a_{ij}, d_i, c_j се познати константи).

Во општ случај е многу полесно да се работи со равенки отколку со неравенки. Затоа е пожелно неравенките од ограничувањата да се сведат на равенки така што ќе се добие систем линеарни равенки. Ова претворање може да се изведе многу едноставно воведувајќи дополнителни променливи $x_{r+i} \geqslant 0$ $i=1,\dots,m$ на следниот начин:

$$x_{r+i} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r - d_i\ , \quad i=1,\dots,m$$

Овие равенки можеме да ги напишеме и вака:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r - x_{r+i} = d_i\ , \quad i=1,\dots,m \tag{4}$$

Значи со воведувањето на дополнителните променливи неравенките (1) (m на број, со r непознати) ги сведовме на равенки (4) (m на број, со $n=r+m$ непознати), кои во матрична форма можеме да ги напишеме на следниот начин:

$$Ax = d\ ,$$

или

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = d\ .$$

каде $\alpha_j, j=1,\dots,n$ се вектор колоните на матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1r} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2r} & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots a_{mr} & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

Пример. Системот неравенки

$$x_1+7x_2 \geqslant 4$$
$$x_1- x_2 \geqslant 1$$

да се сведе на систем равенки.

Воведувајќи ги дополнителните променливи

$$x_3=x_1+7x_2-4 \qquad (\geqslant 0)$$
$$x_4=x_1-x_2-1 \qquad (\geqslant 0)$$

се добива системот равенки

$$x_1+7x_2-x_3=4$$
$$x_1-x_2-x_4=1$$

кој може да се напише во следната матрична форма:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

или во векторска форма

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Да видиме сега каков ефект има претварањето на неравенките во равенки врз функцијата на целта на LP задачата. Првобитно имавме

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_rx_r.$$

Ако на секоја дополнителна променлива ѝ припишеме коефициент нула во функцијата на целта, тогаш

$$z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_rx_r+0x_{r+1}+\ldots+0x_n \qquad (5)$$

$$(=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_rx_r).$$

Значи сведувањето на ограничувањата (1) на систем линеарни равенки (4) не ја менува функцијата на целта.

Тврдиме дека минимизација (максимизација) на (5) при ограничувањата изразени со системот равенки (4) и условите за ненегативност

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ldots,r,r+1,\ldots,n \qquad (6)$$

е еквивалентна со минимизацијата (максимизацијата) на LP задачата (1), (2), (3). Точноста на ова тврдење ке ја покажеме за задачата на минимизација (аналогно разгледување може да се спроведе и за задачата на максимизација).

Прво да забележиме дека ако е познато едно ненегативно решение $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r$ на почетниот систем (1) и ако ги најдеме вредностите

$$\bar{x}_{r+i}=a_{i1}\bar{x}_1+a_{i2}\bar{x}_2+\ldots+a_{ir}\bar{x}_r-d_i,\quad i=1,\ldots,m \qquad (7)$$

тогаш добиваме ненегативно решение

$$\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_r,\bar{x}_{r+1},\ldots,\bar{x}_n \qquad (8)$$

на системот (4). И обратно, ако е дадено ненегативно решение (8) на системот (4), т.е. ако

$$a_{i1}\bar{x}_1+a_{i2}\bar{x}_2+\ldots+a_{ir}\bar{x}_r-\bar{x}_{r+i}=d_i,\quad i=1,\ldots,m$$

тогаш изоставувајќи ги од левите страни на овие равенки членовите $-\bar{x}_{r+i}\,(\leqslant 0)$, добиваме неравенства:

$$a_{i1}\bar{x}_1+a_{i2}\bar{x}_2+\ldots+a_{ir}\bar{x}_r\geqslant d_i,\quad i=1,\ldots,m.$$

Значи вредностите $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ претставуваат ненегативно решение на системот (1).

Сега, нека

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r, \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_n$$

е ненегативно решение на системот равенки (4), кое ја минимизира функцијата на целта (5), т.е.

$$\bar{z} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \dots + c_r\bar{x}_r \leqslant c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r$$

за секое друго ненегативно решение

$$x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$$

на системот (4). Ке покажеме дека првите r компоненти $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ претставуваат оптимално решение на LP задачата (1), (2), (3) и $\bar{z}$ е оптимална вредност и на функцијата на целта на почетната LP задача. Навистина, ако претпоставиме дека постои допустиво решение $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ на (1) за кое

$$z^* = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_r x_r^* < \bar{z}$$

тогаш наоѓајки ги ненегативните вредности

$$x_{r+i}^* = a_{i1} x_1^* + a_{i2} x_2^* + \dots + a_{ir} x_r^* - d_i, \quad i=1, \dots, m$$

n - ката

$$x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*, x_{r+1}^*, \dots, x_n^*$$

ке биде ненегативно решение на (4) за кое функцијата на целта (5) прима помала вредност z^* од минималната вредност $\bar{z}$, што претставува противречност. Значи нашата претпоставка за постоење на подобро решение x_j^*, $j=1, \dots, r$ не е можна. Слично се покажува дека ако $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ е оптимално решение на LP задачата (1), (2), (3), тогаш дополнувајки го ова решение со ненегативните вредности $\bar{x}_{r+i}$, $i=1, \dots, m$ најдени по формулата (7) добиваме оптимално решение на задачата со ограничувањата во вид на равенки.

Погорната дискусија покажува дека општата LP задача можеме да ја преформулираме вака:

Да се најде n - вектор колона x, кој ги исполнува ограничувањата

$$Ax = d \qquad (\text{или } x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = d),$$

$$x \geqslant 0$$

и ја минимизира функцијата на целта

$$z = cx$$

Оваа формулација се нарекува <u>стандарден облик</u> на LP задачата.

<u>Пример</u>. Да се сведе на стандарден облик LP проблемот:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geqslant 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 13 \\ 2x_1 - x_2 &\leqslant 0 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \\ \min z &= 4x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Стандардниот облик е:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 9 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 13 \\ 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0 \\ x_j \geqslant 0, \; j = 1, \ldots, 5 \\ \min z = 4x_1 - x_2 \end{aligned}$$

5. Основна теорема на линеарното програмирање

Сé што ќе биде изложено во оваа точка се однесува на LP задачата во стандарден облик

$$Ax = d$$

$$x \geqslant 0$$

$$\min z = cx$$

каде A е $m\times n$ матрица и притоа $r(A)=m$, d е m- вектор колона, c е n - вектор ред, x е n - вектор колона на непознатите.

Теорема 1. Ако постои барем едно допустиво решение (програм), тогаш постои барем едно допустиво базно решение (базен програм).

Доказ. Нека $\bar{x}$ е даден програм на LP задачата, т.е. $A\bar{x}=d$, $\bar{x}\geqslant 0$. Да претпоставиме дека променливите x_j се така нумерирани, што позитивните компоненти на $\bar{x}$ се на првите k места, т.е. $x_j>0$, $j=1,\dots,k$, а останатите $\bar{x}_j$ (доколку ги има) се нула, т.е. ако $k<n$ тогаш $\bar{x}_{k+1}=\dots=\bar{x}_n=0$. Од првите k колони на матрицата A ја формираме матрицата

$$A_1=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k] \quad \text{каде} \quad \alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \; j=1,\dots,k.$$

Тогаш, по претпоставка, имаме

$$\bar{x}_1\alpha_1+\bar{x}_2\alpha_2+\dots+\bar{x}_k\alpha_k=d.$$

Секогаш важи само еден од следните два случаи:

Случај 1. $r(A_1)=k$. Тогаш мора да е $k\leqslant m$.

Ако $k=m$, тогаш $\bar{x}$ по дефиниција е базен програм.

Ако $k<m$, тогаш множеството вектори $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ (линеарно независно) може да се прошири со $m-k$ вектор колони α_{s_i}, $i=1,\dots,m-k$, до база

$$B=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\alpha_{s_1},\dots,\alpha_{s_{m-k}}]$$

на системот $Ax=d$.

Тогаш m - векторот

$$\bar{x}^B=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \\ \bar{x}_{s_1} \\ \vdots \\ \bar{x}_{s_{m-k}} \end{bmatrix} \qquad (\bar{x}_{s_i}=0,\, i=1,\dots,m-k)$$

е решение на Крамеровиот систем $Bx^B = d$. Значи $\overline{x}$ е базен програм соодветен на базата B. Во него покрај слободните променливи уште $m-k$ базни променливи имаат вредност нула.

Случај 2. $r(A_1)=r < k$ (што сигурно е точно за $k > m$).

Сега векторите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ се линеарно зависни, т.е. постои нетривијална линеарна комбинација

$$\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\dots+\beta_k\alpha_k=0$$

каде барем еден скалар $\beta_i \neq 0$.

Секогаш можеме да претпоставиме дека барем еден од скаларите β_i е позитивен (во случај на потреба множејќи го погорното ревенство со (-1) ќе добиеме таков скалар). За сите позитивни β_i ги формираме соодветните односи

$$\frac{\overline{x}_i}{\beta_i}$$

и нека $\dfrac{\overline{x}_\ell}{\beta_\ell}$ е најмалиот од нив, т.е.

$$\frac{\overline{x}_\ell}{\beta_\ell} \leqslant \frac{\overline{x}_i}{\beta_i}$$

за сите индекси i за кои е $\beta_i > 0$. Потоа ги наоѓаме вредностите

$$x'_j=\overline{x}_j-\beta_j\frac{\overline{x}_\ell}{\beta_\ell}, \quad j=1,\dots,k.$$

Очигледно

$$x'_\ell=\overline{x}_\ell-\beta_\ell\frac{\overline{x}_\ell}{\beta_\ell}=\overline{x}_\ell-\overline{x}_\ell=0, \qquad x'_j \geqslant \overline{x}_j \geqslant 0 \quad \text{за сите} \quad \beta_j<0.$$

Од изборот на индексот ℓ следи дека

$$\beta_j\frac{\overline{x}_\ell}{\beta_\ell} \leqslant \beta_j\frac{\overline{x}_j}{\beta_j}=\overline{x}_j \quad \text{или} \quad -\beta_j\frac{\overline{x}_\ell}{\beta_\ell} \geqslant -\overline{x}_j$$

за секој индекс j за кој е $\beta_j>0$. Тогаш за сите нив е $x'_j \geqslant \overline{x}_j-\overline{x}_j=0$. Значи за сите j од 1 до k е $x'_j \geqslant 0$.

Потоа

$$x_1'\alpha_1+x_2'\alpha_2+\dots+x_k'\alpha_k=\bar{x}_1\alpha_1+\bar{x}_2\alpha_2+\dots+\bar{x}_k\alpha_k-\frac{\bar{x}_\ell}{\beta_\ell}(\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\dots+\beta_k\alpha_k)=$$
$$=d-\frac{\bar{x}_\ell}{\beta_\ell}\,o=d.$$

а тоа значи дека вредностите x_j', $j=1,\dots,k$, заедно со $x_j'=0$, $j=k+1,\dots,n$ образуваат нов програм x' на LP задачата и тој има најмногу $k-1$ позитивни компоненти $(x_\ell'=0)$.

Ако вектор колоните на матрицата A_1 соодветни на позитивните компоненти x_j' на програмот x' се линеарно зависни, тогаш постапка од почетокот на случајот 2 може да се повтори (со x' во улога на $\bar{x}$) и т.н, сé додека не добиеме програм во кој на позитивните компоненти ке им одговараат линеарно независни вектор колони, кој согласно случајот 1 ке биде базен програм.

Пример. Лесно се проверува дека

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$$

е допустиво решение на системот

$$x_1\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\14\end{bmatrix}$$

Рангот на матрицата на системот, $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ е два (2). Значи постои базно допустиво решение со најмногу две позитивни компоненти. Забележуваме дека $1.\alpha_1+2.\alpha_2-\alpha_3=o$, или согласно применета ознака $\beta_1=1$, $\beta_2=2$, $\beta_3=-1$. Ги формираме односите (за $\beta_i>0$)

$$\left\{\frac{\bar{x}_1}{\beta_1},\ \frac{\bar{x}_2}{\beta_2}\right\}=\left\{\frac{2}{1},\ \frac{3}{2}\right\}$$

и го наоѓаме најмалиот од нив $\dfrac{\bar{x}_2}{\beta_2}=\dfrac{3}{2}$, значи во нашиот случај е $\ell=2$. Тогаш, новото допустиво решение (со најмногу 2 позитивни компоненти) е:

$$x'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{bmatrix}$$

каде

$$x_1' = \bar{x}_1 - \beta_1 \frac{\bar{x}_2}{\beta_2} = 2-1.3/2=1/2, \quad x_2' = \bar{x}_2 - \beta_2 \frac{\bar{x}_2}{\beta_2} = 0, \quad x_3' = \bar{x}_3 - \beta_3 \frac{\bar{x}_2}{\beta_2} = 1+3/2=5/2.$$

Притоа, вектор колоните α_1, α_3 соодветни на позитивните компоненти на новото допустиво решение x' се линеарно независни, значи тие образуваат база $B=[\alpha_1, \alpha_3]$ и x' е базно допустиво решение. Се проверува дека базните компоненти x_1', x_3' се решение на Крамеровиот систем $x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3 = d$

<u>Теорема 2.</u> Ако постои барем еден оптимален програм, тогаш постои барем еден базен оптимален програм.

Доказ. Нека $\bar{x}$ е произволно даден оптимален програм и да ги примиме истите ознаки како во доказот на теоремата 1.

<u>Случај 1.</u> $r(A_1)=k$. Тогаш исто како и во доказот на теоремата 1 заклучуваме дека $\bar{x}$ е базен оптимален програм.

<u>Случај 2.</u> $r(A_1)=r<k$. Тогаш постои барем една r- ка линеарно независни вектор колони на матрицата A_1; нека тоа се првите r вектор колони $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Ако во системот

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r + x_{r+1}\alpha_{r+1} + \dots + x_k\alpha_k \pm \dots + x_n\alpha_n = d$$

земеме $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, а променливите $x_{r+1}, \dots, x_k$ ги сметаме за параметри и ним соодветните членови ги префрлиме на десната страна, тогаш добиваме систем

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_r\alpha_r = d - x_{r+1}\alpha_{r+1} - \dots - x_k\alpha_k$$

кој има едно Крамерово решение за променливите $x_1, x_2, \dots, x_r$ (бидејќи матрицата $[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r]$ има ранг r):

$$x_j = a_j + \beta_{j1} x_{r+1} + \dots + \beta_{j,k-r} x_k, \quad j=1,\dots,r$$

(каде $a_j, \beta_{j1}, \dots, \beta_{j,k-r}$ за $j=1,\dots,r$ се коефициенти од разложувањето по базните вектори на векторите $d, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_k$ соодветно.)

Се разбира дека компонентите $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ (позитивни) на дадениот оптимален програм $\bar{x}$ ги задоволуваат погорните равенки, т.е.

$$\bar{x}_j=\alpha_j+\beta_{j1}\bar{x}_{r+1}+\dots+\beta_{j,k-r}\bar{x}_k\ ,\quad j=1,\dots,r$$

Користејќи ги овие релации и претпоставката дека $\bar{x}_{k+1}=\dots=\bar{x}_n=0$, оптималната вредност на функцијата на целта $\bar{z}$ (која се добива за $\bar{x}$) може да се претстави во облик:

$$\bar{z}=c_1\bar{x}_1+\dots+c_r\bar{x}_r+c_{r+1}\bar{x}_{r+1}+\dots+c_k\bar{x}_k+c_{k+1}\cdot 0+\dots+c_n\cdot 0=$$
$$=c_1(\alpha_1+\beta_{11}\bar{x}_{r+1}+\dots+\beta_{1,k-r}\bar{x}_k)+\dots+c_r(\alpha_r+\beta_{r1}\bar{x}_{r+1}+\dots+$$
$$+\beta_{r,k-r}\bar{x}_k)+c_{r+1}\bar{x}_{r+1}+\dots+c_k\bar{x}_k\ ,$$

или

$$\bar{z}=\beta_0+\beta_1\bar{x}_{r+1}+\dots+\beta_{k-r}\bar{x}_k\ ,$$

каде

$$\beta_0=c_1\alpha_1+\dots+c_r\alpha_r,\quad \beta_j=c_1\beta_{1j}+\dots+c_r\beta_{rj}+c_{r+j},\ j=1,\dots,k-r$$

Ќе покажеме дека $\beta_1=\dots=\beta_{k-r}=0$ т.е. $\bar{z}=\beta_0$ (β_0 е оптимална вредност на функцијата на целта). Навистина, ако претпоставиме дека барем еден $\beta_i\neq 0$ на пример $\beta_1\neq 0$, тогаш додавајќи ѝ на вредноста $\bar{x}_{r+1}$ доволно мало нарастување $\epsilon>0$ ако $\beta_1<0$, или $\epsilon<0$ ако $\beta_1>0$ така што да е

$$x'_{r+1}=\bar{x}_{r+1}+\epsilon\geqslant 0,$$

$$x'_j=\alpha_j+\beta_{j1}x'_{r+1}+\beta_{j2}\bar{x}_{r+2}+\dots+\beta_{j,k-r}\bar{x}_k\geqslant 0,\ j=1,\dots,r$$

добиваме ново допустиво решение на LP задачата, x', чии компоненти се:

$$x'_j,\ j=1,\dots,r,\ x'_{r+1},\bar{x}_{r+2},\dots,\bar{x}_k,0,\dots,0\quad(\bar{x}_{k+1}=\dots=\bar{x}_n=0).$$

За ова решение функцијата на целта прима нова вредност

$$z'=\beta_0+\beta_1x'_{r+1}+\beta_2\bar{x}_{r+2}+\dots+\beta_{k-r}\bar{x}_k=\bar{z}+\beta_1\epsilon<\bar{z}\ ,$$

што противречи на претпоставката дека $\bar{z}$ е оптимална вредност на функцијата на целта. Значи мора да е $\beta_i=0, i=1,\dots,k-r$ Тогаш е $\bar{z}=\beta_0$, а исто така и $z'=\bar{z}=\beta_0$, т.е. и новиот програм x' е оптимален. Посебно, тој е оптимален за секој $\epsilon>0$, за кој $\bar{x}_{r+1}+\epsilon\geqslant 0$ и $x_j'\geqslant 0$, $j=1,2,\dots,r$.

Тогаш можеме да го намалуваме ϵ сѐ додека $\bar{x}_{r+1}+\epsilon$ или некоја од вредностите x_j', $j=1,\dots,r$, не се претвори во нула, така што новиот програм x' ке има барем една позитивна компонента помалку отколку $\bar{x}$. Ако вектор колоните на A_j пред позитивните компоненти на x' се линеарно независни, x' е веке базен оптимален програм, ако не, тогаш целата постапка ја повторуваме земајки го x' во улога на $\bar{x}$. После конечно многу (најмногу $k-1$) вакви постапки ке добиеме базен оптимален програм.

Теоремите 1 и 2 заедно ја претставуваат основната теорема на линеарното програмирање.

В е ж б и.

1. Да се покаже дека множеството допустиви решенија на LP задачата е конвексно.

2. Да се покаже дека произволен базен програм на LP задачата е екстремна точка на конвексното множество допустиви решенија.

3. Да се покаже дека конвексното множество допустиви решенија на задачата има конечен број (најмногу $n!/(m!(n-m)!)$) екстремни точки.

4. Нека областа на допустиви решенија на LP задачата е конвексниот полиедар

$$K=\{x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_rx_r;\ \alpha_i\geqslant 0,\ \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r=1\}$$

каде x_i, $i=1,2,\dots,r$ се фиксни точки од R^n. Да се покаже дека барем една екстремна точка на K е оптимален програм.

5. Да се најде оптимално решение на LP проблемот:

$$2x_1+3x_2-x_3+4x_4=8$$
$$x_1-2x_2+6x_3-7x_4=-3$$
$$x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,4$$

$$\max z=2x_1+3x_2+4x_3+7x_4$$

наоѓајки ги сите базни допустиви ршенија и вредноста на z во нив.

6. Векторот $\bar{x}^T = [2\ 1\ 3\ 2\ 1]$ е допустиво решение на системот

$$2x_1-3x_2+4x_3+6x_4 \qquad = 25$$

$$x_1+2x_2+3x_3-3x_4+5x_5 = \text{[illegible]}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,5$$

Да се редуцира $\bar{x}$ во две различни базни допустиви решенија.

6. Втора геометриска интерпретација на LP проблемите

LP проблемите во стандарден облик со произволен број на променливи, но со едно или две ограничувања можеме да ги интерптетираме графички соодветно во R^2 или R^3. За илустрација ке наведеме два примери.

Пример 1. Да се реши LP проблемот

$$x_1+2x_2+x_3-x_4=4$$

$$x_j \geqslant 0, j=1,\dots,4$$

$$\min z=-x_1+x_2+2x_3+x_4$$

Да ја напишеме функцијата на целта како дополнително ограничување:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3-x_4 &= 4 \\ -x_1+x_2+2x_3+x_4 &= z \end{aligned} \qquad (1)$$

и во координатниот систем $y_1\ 0\ y_2$ го наоѓаме множеството C на сите точки, чии координати се од облик

$$y_1=x_1+2x_2+x_3-x_4$$

$$y_2=-x_1+x_2+2x_3+x_4$$

за сите можни вредности $x_j \geqslant 0, \ j=1,\dots,4$

$$C=\{(y_1,y_2);\ (y_1,y_2)=x_1(1,-1)+x_2(2,1)+x_3(1,2)+x_4(-1,1),\ x_j \geqslant 0\}$$

C е конвексен конус (на цртежот 9 тоа е означената полурамнина).

Од друга страна, множеството Q на сите точки, чии координати се

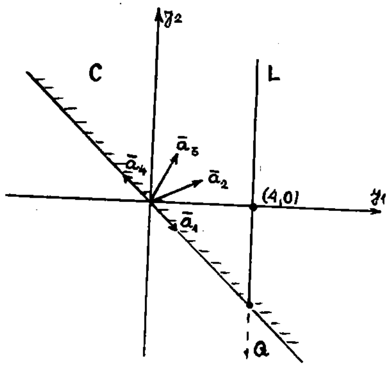
$$y_1 = 4$$
$$y_2 = z$$

за секоја можна вредност на z , т.е.

$$Q = \{(y_1, y_2);\ (y_1, y_2) = (4,0) + z(0,1),\ z \in R\}$$

е правата, која минува низ точката (4,0) и е паралелна со векторот (0,1).

Тогаш равенствата (1) означуваат дека е потребно да ги најдеме оние точки (y_1, y_2), кои лежат во C и во Q ,т. е. пресекот $C \cap Q$, кој во нашиот случај е полуправата L со теме во точката A и паралелна на y_2 оската. Минимизацијата на z означува дека од сите точки на L треба да се избере онаа, која има најмала втора координата. Очигледно, тоа е точката A, која е пресек на Q и полуправата низ координатниот почеток одредена со векторот $\bar{a}_1 = (1,-1)$. Втората координата на A и оптималното решение на LP проблемот ке ги најдеме решавајки го равенството



Сл.9

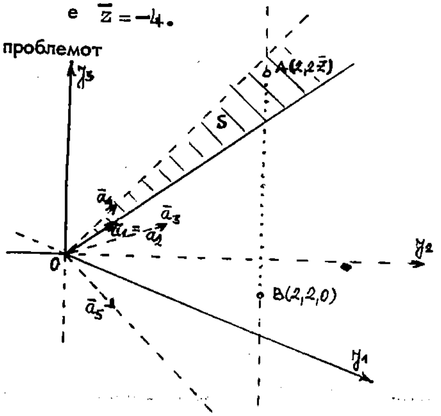
$$x_1(1,-1) = (4,z)$$

Очигледно, решението е $\bar{x}_1 = 4$, $\bar{z} = -4$. Значи оптимален програм на LP проблемот е $\bar{x} = (4,0,0,0)$ и оптималната вредност на функцијата на целта е $\bar{z} = -4$.

Пример 2. Да се реши LP проблемот

$$x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 2$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 2$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1,\dots,5$$
$$\max\ z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5$$

Допишувајки ја функцијата на целта како трето ограничување:



Сл.10

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad &= 2\\ x_3+x_4+x_5 &= 2\\ x_1+x_2+x_3+x_4-x_5 &= z \end{aligned}$$

добиениот систем можеме да го интерпретираме во координатниот простор

$$R^3=\{(y_1,y_2,y_3);\ y_i\in R\}.$$

Сега во R^3 го цртаме конвексниот конус

$$C=\{(y_1,y_2,y_3);\ (y_1,y_2,y_3)=x_1(1,0,1)+x_2(1,0,1)+ +x_3(1,1,1)+x_4(0,1,1)+x_5(0,1,-1),\ x_j\geqslant 0\}.$$

и правата

$$Q=\{(y_1,y_2,y_3);\ (y_1,y_2,y_3)=(2,2,0)+z(0,0,1),\ z\in R\}$$

(цртеж 10). Равенствата (2) означуваат дека треба да се најдат точките од пресекот L на C и Q. Во овој случај L е отсечката AB. Очигледно, точката A на оваа отсечка има најголема трета координата z. A е пресек на Q со страната S на конусот C, која е одредена со полуправите низ векторите $\bar{a}_1$ (или $\bar{a}_2$) и $\bar{a}_4$,

$$S=\{(y_1,y_2,y_3);\ (y_1,y_2,y_3)=x_1(1,0,1)+x_4(0,1,1),x_1,x_4\geqslant 0\}$$

Решавајќи го системот

$$x_1(1,0,1)+x_4(0,1,1)=(2,2,z)$$

добиваме $\bar{x}_1=2$, $\bar{x}_4=2$, $\bar{z}=4$, значи $(2,0,0,2,0)$ е оптимален програм*) на LP проблемот и $\bar{z}=4$ е максимална вредност на функцијата на целта.

В е ж б и.

Да се решат следните LP проблеми користејќи ја втората геометриск интерпретација

1. $x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1$

   $x_j\geqslant 0,\ j=1,\dots,$

   $\max\ z=x_1+4x_2+3x_3+2x_4$

2. $x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=1$

   $x_j\geqslant 0,\ j=1,\dots,n$

   $\max\ z=x_1+x_2+x_3+\dots+x_n$

*) Векторот (0,2,0,2,0) е исто така оптимален програм.

3. $x_1+x_2 \qquad\qquad = 1$

$\qquad x_2+x_3-x_4=1$

$x_j \geqslant 0,\ j=1,\dots,4$

$\min\ z=-x_1+x_2-2x_3+x_4$

4. $x_1+x_2 \qquad\qquad\qquad = 1$

$\qquad\qquad x_3+x_4+\dots+x_n = 1$

$x_j \geqslant 0,\ j=1,2,\dots,n$

$\max\ z=x_1+\dots+x_n$

II. СИМПЛЕКС МЕТОДА

1. Теорија на методата симплекс

Познато ни е веке дека ако постои барем еден оптимален програм на LP задачата, тогаш постои барем еден оптимален базен програм. Бидејќи бројот на базните програми е конечен и бидејќи овие програми знаеме да ги наоѓаме, од теориска гледна точка LP задачата е наполно решена. Меѓутоа, во систем од m равенки со n непознати бројот на сите можни бази бргу расте со растењето на m и n, и може да изнесува C_n^m. За илустрација да наведеме дека проблем со четири ограничувања и осум променливи може да бара решавање на $8!/4!4! = 70$ системи на четири равенки со четири непознати. Освен тоа, испитувањето на базните решенија неможе да открие отсуство на конечен оптимален програм. Затоа постапката за решавање на сите системи, кои даваат базни решенија, не е погодна.

Симплекс методата на Dantzig е итеративна процедура, која овозможува усмерено испитување на базните програми. Таа може да се примени ако е познат почетен базен програм. Потоа се извршува нареден чекор за да се најде "соседен" базен програм, кој е барем исто толку добар колку и претходниот, т.е. кој на функцијата на целта и дава помала или најмногу иста вредност (во случајот на минимизација). После конечен број чекори (многу помал од C_n^m) се добива оптимален базен програм или индикација за непостоење на конечен оптимален програм.

Да го разгледаме прво примерот:

$$x_1 \quad +5x_3-x_4=4$$
$$x_2+x_3-x_4=1$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,3,4$$
$$\min z=x_3+2x_4$$

Веднаш се гледа дека базното решение $\bar{x}_1=4$, $\bar{x}_2=1$, $\bar{x}_3=0$, $\bar{x}_4=0$ соодветно на базата $B=[\alpha_1,\alpha_2]$ е оптимален базен програм, оптималната вредност на функцијата на целта е $\bar{z}=0\cdot4+0\cdot1+1\cdot0+2\cdot0=0$. Навистина, за секое друго допустиво решение барем една од променливите x_3, x_4 има позитивна вредност, но тогаш и z има позитивна вредност.

Сега, при истото множество ограничувања како погоре, да се најде

$$\min z=x_3-2x_4.$$

Јасно е дека секое допустиво решение на претходната задача е допустиво и за новата задача; укажаното базно решение $\bar{x}$ соодветно на базата $B=[\alpha_1,\alpha_2]$ останува базно решение и за новата задача, но сега $\bar{x}$ не може да биде оптимално решение, бидејќи можеме да најдеме подобро допустиво решение, кое на функцијата на целта ѝ дава вредност помала од $\bar{z}=0$. Поточно, во овој случај можеме да најдеме цела една фамилија допустиви решенија, кои на функцијата на целта и даваат се помала и помала вредност. Имено, решението

$$x_1'=4+\theta, \quad x_2'=1+\theta, \quad x_3'=0, \quad x_4'=\theta$$

за произволен ненегативен број θ е допустиво решение (е ненегативно и ги задоволува ограничувањата) и на функцијата на целта ѝ дава вредност

$$z'=0\cdot(4+\theta)+0\cdot(1+\theta)+1.0-2.\theta=-2\theta, \qquad (z'\leqslant 0)$$

која може да се направи неограничено мала, земајќи го θ доволно големо. Значи не постои конечен оптимален програм и LP задачата не е решлива

Да го разгледаме уште примерот:

$$x_1+\quad 5x_3-x_4= \ 4$$
$$x_2+x_3+x_4=1$$
$$x_j\geqslant 0, \quad j=1,2,3,4$$

$$\min z=x_3-2x_4$$

Исто како и во двата претходни случаи $\bar{x}$ соодветно на базата $B=[\alpha_1,\alpha_2]$ е базен програм. Тој не е оптимален бидејќи додавајќи и́ на x_4 позитивна вредност $\theta, 0\leqslant\theta\leqslant 1$ и модифицирајќи ги вредностите на $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ така што ограничувањата ќе бидат задоволени, добиваме нов програм, кој на функцијата z и́ дава вредност $-2\theta\leqslant 0$. Ако се земе $\theta=1$, тогаш новото подобро допустиво решение е

$$x_1'=5,\ x_2'=0,\ x_3'=0,\ x_4'=1$$

а соодветната вредност на функцијата на целта е $z'=-2<\bar{z}=0$.

Бидејќи вектор колоните α_1, α_4 соодветни на позитивните компоненти x_1', x_4' се линеарно независни, x' е ново подобро базно допустиво решение.

Да ја разгледаме општата LP задача во стандарден облик

$$\begin{aligned} Ax&=d \\ x&\geqslant 0 \\ \min z&=cx \end{aligned} \tag{1}$$

каде $A=[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ е $m\times n$ матрица, x е n - вектор колона на непознатите, d е даден m - вектор колона, а c е n - вектор ред. За $j=1,\ldots,n$, α_j означува j-та колона на матрицата A. Нека $m<n$ и $r(A)=m$, т.е. вектор редиците на системот ограничувања се линеарно независни и истиот има бесконечно многу решенија.

Кога разгледуваме база $B=[b_1,\ldots,b_m]$ на системот $Ax=d$ (B е $m\times m$ матрица составена од m линеарно независни колони на A), да се договориме за колоните на B да ги зачуваме индексите $I=\{j_1,\ldots,j_m\}$ во соодветен редослед, т.е. $b_s=\alpha_{j_s}$ за $s=1,\ldots,m$; значи $B=[\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_m}]$. За останатите $n-m$ колони на A ќе ги употребуваме индексите $J=\{j_{m+1},\ldots,j_n\}$. Нека $R=[\alpha_{j_{m+1}},\ldots,\alpha_{j_n}]$. Ако $x^B=[x_{j_1}\ldots x_{j_m}]^T$ е вектор колона составена од m-те базни променливи соодветни на базата B, $c^B=[c_{j_1},\ldots,c_{j_m}]$ е m- вектор ред составен од коефициентите на функцијата на целта пред базните променливи, $x^R=[x_{j_{m+1}},\ldots,x_{j_n}]^T$ се останатите променливи, наречени слободни, а од ним соодветните коефициенти во функцијата на целта се формира вектор редот $c^R=[c_{j_{m+1}},\ldots,c_{j_n}]$, тогаш LP задачата може да се напише во следната блок-форма:

$$[B\,,R]\begin{bmatrix} x^B \\ x^R \end{bmatrix} = d \qquad \begin{bmatrix} x^B \\ x^R \end{bmatrix} \geqslant o$$

$$\min\ z = [c^B, c^R]\begin{bmatrix} x^B \\ x^R \end{bmatrix}$$

или, ако се извршат множењата,

$$B\ x^B + R\ x^R = d$$

$$x^B \geqslant o,\ x^R \geqslant o$$

$$\min\ z = c^B\ x^B + c^R\ x^R$$

Да се потсетиме, базното решение

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}^B \\ \bar{x}^R \end{bmatrix}$$

соодветно на базата B се добива ако за слободните променливи се земе

$\bar{x}^R = o$ и се реши Крамеровиот систем

$$B\,x^B = d\,,$$

чие решение има облик

$$\bar{x}^B = B^{-1}\,d.$$

Вредноста на функцијата на целта за ова базно решение изнесува

$$\bar{z} = c^B\ \bar{x}^B + c^R\ \bar{x}^R = c^B\ B^{-1}\,d.$$

Да се вратиме на системот ограничувања

$$B\ x^B + R\ x^R = d\ .$$

Познато ни е дека ако оваа матрична равенка ја помножиме од лево со несингуларна матрица од m - ти ред, тогаш се добива еквивалентна равенка, чии решенија се точно решенијата на претходната равенка. Посебно, множејќи со инверзната B^{-1} на матрицата B се добива еквивалентниот систем

$$E\ x^B + B^{-1} R\ x^R = B^{-1}\ d,$$

каде E е mxm единичната матрица, или

$$x^B + B^{-1} R\, x^R = B^{-1} d, \tag{2}$$

чија скаларна форма, ако означиме $B^{-1}R = Y = [y_{ij}]\ mx(n-m)$, е:

$$\begin{aligned} x_{j_1} \qquad\quad &+ y_{1\,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + \dots + y_{1\,j_n}\ x_{j_n} = \bar{x}_{j_1} \\ x_{j_2} \quad &+ y_{2\,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + \dots + y_{2\,j_n}\ x_{j_n} = \bar{x}_{j_2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{j_m} &+ y_{m\,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + \dots + y_{m\,j_n}\ x_{j_n} = \bar{x}_{j_m} \end{aligned} \tag{2'}$$

Овој систем се наречува експлицитен, или решение во однос на базните променливи. Тој може да се напише и во следниот векторски облик:

$$x^B + x_{j_{m+1}} y_{j_{m+1}} + \dots + x_{j_n}\ y_{j_n} = \bar{x}^B \tag{2''}$$

каде $y_{j_{m+1}}, \dots, y_{j_n}$ се колоните на матрицата Y (од дефиницијата на Y следи дека $y_j = B^{-1}\ \alpha_j$). Експлицитниот систем ни овозможува функцијата на целта z да ја претставиме како функција од слободните променливи, имено

$$\begin{aligned} z &= c^B\ x^B + c^R\ x^R = c^B(\bar{x}^B - x_{j_{m+1}}\ y_{j_{m+1}} - \dots - x_{j_n} y_{j_n}) + c^R\ x^R = \\ &= c^B \bar{x}^B - (c^B\ y_{j_{m+1}} - c_{j_{m+1}}) x_{j_{m+1}} - \dots - (c^B y_{j_n} - c_{j_n}) x_{j_n}\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Означувајќи

$$\bar{z} = c^B \bar{x}^B,\quad z_j = c^B\ B^{-1} \alpha_j$$

за $j = 1, \dots, n$, дефинитивно имаме LP задача

$$x^B + Y x^R = \overline{x}^B$$

$$x^B \geqslant o, \quad x^R \geqslant o \tag{4}$$

$$\min z - \overline{z} = -(z_{j_{m+1}} - c_{j_{m+1}}) x_{j_{m+1}} - \ldots - (z_{j_n} - c_{j_n}) x_{j_n}$$

еквивалентна на почетната (1).

Ако за момент се вратиме на примерите разгледани во почетокот на оваа точка, ке уочиме дека тие беа зададени во облик (4). Дискусијата спроведена за нив може да се воопшти за општа LP задача (4).

Теорема 1. Нека е даден базен програм $\overline{x}$ соодветен на базата B. Ако за некој индекс k (на некоја слободна променлива) е $z_k - c_k > 0$ и истовремено соодветната колона на матрицата Y, $y_k \leqslant o$, тогаш можно е наоѓање на класа програми со $m+1$ ненегативни компоненти; компонентата x_k може да прима произволно големи ненегативни вредности x'_k и притоа z ке прима произволно мали вредности; затоа во овој случај не постои конечен оптимален програм.

Доказ: Бидејки $y_k \leqslant o$, од (2) следи дека поаѓајки од базното решение $\overline{x}$ може да се добие друг програм давајки и на слободната променлива x_k произволна позитивна вредност x'_k, за останатите слободни променливи задржувајки и натаму вредност нула, а вредностите на базните променливи модифицирајки ги така, што да бидат исполнети равенките (2):

$$x'^B = \overline{x}^B - x'_k y_k \geqslant \overline{x}^B .$$

Согласно (3), z прима нова вредност $z' = \overline{z} - (z_k - c_k) x'_k$ од каде што следи дека z може да прима произволно мали вредности кога x'_k е доволно големо. Значи z нема конечна минимална вредност.

Теорема 2. Нека $\overline{x}$ е базен програм соодветен на базата B. Ако за некој индекс k е $z_k - c_k > 0$ и барем една компонента на вектор колоната y_k е позитивна, тогаш базното решение соодветно на базата B′, добиена од B со замена на нејзиниот ℓ - ти вектор $b_\ell = \alpha_{j_\ell}$ со векторот α_k, каде индексот ℓ е одреден од условот

$$\frac{\bar{x}_{j_\ell}}{y_{\ell k}} = \min_{s:y_{sk}>0} \left\{ \frac{x_{j_s}}{y_{sk}} \right\},$$

е нов базен програм, кој на функцијата на целта и́ дава нова вредност $z' \leqslant \bar{z}$.

Доказ: Во системот (2′) давајќи и́ на x_k позитивна вредност x_k' и задржувајќи вредност нула за сите други слободни променливи $(x'_{j_{m+i}}=0, j_{m+i} \neq k)$ добиваме нови вредности на базните променливи:

$$x'_{j_s} = \bar{x}_{j_s} - y_{sk} x_k'.$$

Бидејќи за некој индекс s е $y_{sk}>0$, мора да е $x'_{j_s} < \bar{x}_{j_s}$ за барем еден индекс s. x′ ке биде програм ако и само ако

$$\bar{x}_{j_s} - y_{sk} x_k' \geqslant 0, \quad \text{т.е.} \quad x_k' \leqslant \min_{s:y_{sk}>0} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_s}}{y_{sk}} \right\}.$$

За да биде x′ нов базен програм (да има најмногу m позитивни компоненти) доволно е да се земе

$$x_k' = \frac{\bar{x}_{j_\ell}}{y_{\ell k}} = \min_{s:y_{sk}>0} \left\{ \frac{\bar{x}_{j_s}}{y_{sk}} \right\}$$

што повлекува $x'_{j_\ell} = 0$.

Матрицата $B' = [\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_{j_m}]$ е добиена од B со замена на ℓ-та колона со α_k. Бидејќи $\alpha_k = B\, y_k$ и $y_{\ell k} \neq 0$ колоните на B′ исто така образуваат база. Значи x′ е базен програм соодветен на базата B′. Согласно (3) новата вредност на функцијата на целта z е

$$z' = \bar{z} - (z_k - c_k)\frac{\bar{x}_{j_\ell}}{y_{\ell k}} \leqslant \bar{z}; \quad z' < \bar{z} \text{ ако и само ако } \bar{x}_{j_\ell} \neq 0.$$

Теорема 3. Нека x^B е базен програм соодветен на базата B. $\bar{x}$ е оптимален ако $z_j - c_j \leqslant 0$ за сите индекси j на слободните променливи.

Доказ: Равенството (3) важи за секое решение на системот (2). Во него единствени променливи се слободните променливи и z. Бидејќи сите коефициенти $c_j - z_j$ по претпоставка се ненегативни и условите $x_j \geqslant 0$ мора да се исполнети за секој програм, z достигнува минимална вредност за $x_{j_{m+1}}=\dots=x_{j_n}=0$; тоа значи дека разгледуваниот базен програм е минимален (оптимален) и минимална вредност на функцијата на целта е $\bar{z}=c^B\,\bar{x}^B$.

Заклучок. Даден минимален програм е единствен ако и само ако $z_j-c_j<0$ за сите индекси j на слободните променливи.

Овој заклучок следи од претходната теорема и од фактот дека постои само едно решение (базно) соодветно на дадена база.

2. Симплекс алгоритам

Изнесената теорија во претходната точка укажува на кој начин, имајќи даден неоптимален базен програм $\bar{x}$ соодветен на базата B на LP задачата (1), може да се добие нов базен програм x' ,кој на функцијата на целта и́ дава подобра вредност, или да се најде програм со $m+1$ ненегативни компоненти од кои барем една може да прима произволно големи вредности и тогаш LP задачата нема конечен оптимален програм. Имено, потребно е системот ограничувања да го решиме по базните променливи (да го најдеме експлицитниот систем (2) и (3)) и тогаш користејќи ги векторите $y_j=B^{-1}\alpha_j$ и скаларите $z_j-c_j(=c^By_j-c_j)$ за сите индекси j соодветни на слободните променливи, можеме да најдеме нов базен програм. Прво треба да ги разгледаме слободните вектори α_j за кои е $z_j-c_j>0$. Ако за било кој од нив соодветниот вектор $y_j\leqslant 0$, тогаш не постои конечен оптимален програм и пресметувањата се завршени. Ако тоа не е случај, тогаш можеме да добиеме подобар базен програм внесувајќи во базата било кој слободен вектор α_j за кој е $z_j-c_j>0$. Векторот кој треба да ја напушти базата не се избира произволно. Заради допустивост на новото базно решение, од базата треба да излезе векторот $b_\ell(=\alpha_{j_\ell})$ одреден со условот:

$$\frac{\bar{x}_{j_\ell}}{y_{\ell j}}=\min_{s:y_{sj}>0}\frac{\bar{x}_{j_s}}{y_{sj}}\,.$$

Тогаш α_j влегува во базата како ℓ - та вектор колона, т.е. нова база е матрицата

$$B' = [b_1, \ldots, b_{\ell-1}, b'_\ell, b_{\ell+1}, \ldots, b_m]$$

каде $b'_\ell = \alpha_j$. Новите вредности на базните променливи, соодветни на базата B', се:

$$\begin{aligned} x'_{j_s} &= \bar{x}_{j_s} - \bar{x}_{j_\ell} y_{sj}/y_{\ell j}, \quad s=1,\ldots,\ell-1,\ \ell+1,\ldots,m \\ x'_{j_\ell} &= \bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

а новата вредност на функцијата на целта е

$$z' = \bar{z} + (c_j - z_j)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j} \tag{5.2}$$

Сега сакаме да знаеме дали вака добиеното ново базно допустиво решение x' (компонентите на x' соодветни на слободните променливи се нула) е оптимално. Затоа ги наоѓаме новите вредности $z'_j - c_j$. Ако сите $z'_j - c_j$ се непозитивни, тогаш x' е оптимален програм. Ако не е така, тогаш целата постапка ја повторуваме за да најдеме подобар базен програм x''. Тоа ке го постигнеме, ако ги најдеме новите вектори y''_j, а потоа ке ги пресметаме новите вредности $z''_j - c_j$ и т.н.

При влез во базата на еден вектор α_j, за кој е $z_j - c_j > 0$, функцијата на целта прима нараствање (негативно):

$$(c_j - z_j)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j}.$$

Од сите можни кандидати за влез во базата логично е да се избере оној вектор α_j, за кој погорното нараствање е по апсолутна вредност најголемо, т.е.

$$|(c_k - z_k)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell k}| = \max_{j: z_j - c_j > 0} |(c_j - z_j)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j}|$$

Но овој начин за одредување на индексот k не е практичен. Затоа се зема поедноставен критериум за влез во базата, имено:

$$z_k - c_k = \max_{j:z_j - c_j > 0} \{z_j - c_j\}$$

и тогаш α_k влегува во базата како нов ℓ - ти вектор.

Од условот

$$\alpha_k = y_{1k} b_1 + \dots + y_{\ell k} b_\ell + \dots + y_{mk} b_m$$

каде $b_\ell = \alpha_{j_\ell}$ добиваме

$$\alpha_{j_\ell} = -\frac{y_{1k}}{y_{\ell k}} b_1 - \dots + \frac{1}{y_{\ell k}} \alpha_k - \dots - \frac{y_{mk}}{y_{\ell k}} b_m$$

или, означувајќи

$$y'_{i j_\ell} = -\frac{y_{ik}}{y_{\ell k}}, \quad i \neq \ell$$

$$y'_{\ell j_\ell} = 1/y_{\ell k}, \qquad (5.3)$$

$$\alpha_{j_\ell} = y'_{1 j_\ell} b_1 + \dots + y'_{\ell j_\ell} b'_\ell + \dots + y'_{m j_\ell} b_m$$

каде $b'_\ell = \alpha_k$.

За слободните вектори α_j различни од α_k имаме:

$$\alpha_j = y_{1j} b_1 + \dots + y_{\ell j} b_\ell + \dots + y_{mj} b_m = y_{1j} b_1 + \dots + y_{\ell j}\Big(-\frac{y_{1k}}{\ell k} b_1 - \dots + \frac{1}{y_{\ell k}} \alpha_k - \dots - \frac{y_{mk}}{\ell k} b_m\Big) + \dots + y_{mj} b_m =$$

$$= y'_{1j} b_1 + \dots + y'_{\ell j} b'_\ell + \dots + y'_{mj} b_m,$$

каде

$$y'_{ij} = y_{ij} - y_{\ell j} y_{ik}/y_{\ell k}, \quad i \neq \ell, \ j \neq k$$

$$y'_{\ell j} = y_{\ell j}/y_{\ell k}, \quad j \neq k \qquad (5.4)$$

Овие формули се слични на формулите (5.1) (во кои за j треба да се земе k) за новите вредности x'_{j_s}, $s=1,\dots,m$, на базното решение соодветно на базата B′. За да ги најдеме новите вредности $z'_j - c_j$ поаѓаме од дефиницијата:

$$
\begin{aligned}
z'_j-c_j &= c^{B'} y'_j - c_j = c_{j_1} y'_{1j} + \dots + c_{j_{\ell-1}} y'_{\ell-1,j} + c_k y'_{\ell j} + \dots + c_{j_m} y'_{mj} - c_j = \\
&= c_{j_1}(y_{1j} - y_{\ell j} y_{1k}/y_{\ell k}) + \dots + c_{j_{\ell-1}}(y_{\ell-1,j} - y_{\ell j} y_{\ell-1,k}/y_{\ell k}) + \\
&+ c_k y_{\ell j}/y_{\ell k} + \dots + c_{j_m}(y_{mj} - y_{\ell j} y_{mk}/y_{\ell k}) - c_j = (c_{j_1} y_{1j} + \dots + c_{j_{\ell-1}} y_{\ell-1,j} + \\
&+ c_{j_\ell} y_{\ell j} + \dots + c_{j_m} y_{mj}) - (c_{j_1} y_{1k} + \dots + c_{j_{\ell-1}} y_{\ell-1,k} + c_{j_\ell} y_{\ell k} + \dots + c_{j_m} y_{mk}) \times \\
&\times y_{\ell j}/y_{\ell k} + c_k y_{\ell j}/y_{\ell k} - c_j,
\end{aligned}
$$

или

$$
z'_j - c_j = (z_j - c_j) - (z_k - c_k) y_{\ell j}/y_{\ell k} . \tag{5.5}
$$

Значи новите вредности $z'_j - c_j$ можеме да ги најдеме користејќи ги старите вредности $z_j - c_j$ и $y_{\ell j}, y_{\ell k}$. Потоа целата постапка треба да се повтори.

Можеме сега да го формулираме <u>симплекс алгоритмот:</u>

Чекор 0. Нека $\bar{x}$ е почетен базен програм соодветен на базата

$$B = [b_1, \dots, b_\ell, \dots, b_m]$$

Нека I е множеството индекси на базните променливи, т.е. $I = \{j_1, \dots, j_\ell, \dots, j_m\}$ а J е множеството на слободните променливи. Ја формираме матрицата $Y = [y_{ij}]$ и ги наоѓаме величините $z_j - c_j$ за $j \in J$.

Чекор 1. Ги испитуваме вредностите $z_j - c_j$ за $j \in J$.

1.1. Ако $z_j - c_j \leq 0$ за сите $j \in J$ тогаш $\bar{x}$ е оптимален базен програм, стоп!

1.2. Во спротивно, нека $J_1 \subseteq J$ е подмножеството индекси за кои $z_j - c_j > 0$; одиме на чекор 2.

Чекор 2. Ги испитуваме вектор-колоните y_j за $j \in J_1$.

2.1. Ако $y_j \leq 0$ за барем еден индекс $j \in J_1$ тогаш не постои конечен оптимален програм; стоп!

2.2. Во спротивно, одредуваме индекс $k \in J_1$ така што

$$z_k - c_k = \max_{j \in J_1} \{z_j - c_j\} \quad \text{(критериум за влез)}$$

и индекс $j_\ell \in I$ така што

$$\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell k} = \min_{s: y_{sk} > 0} \{x_{j_s}/y_{sk}\} \quad \text{(критериум за излез)}$$

и одиме на чекор 3.

Чекор 3. Ги трансформираме векторот $\bar{x}^B$, матрицата Y и величините $\bar{z}, z_j - c_j$ по формулите соодветно (5.1), (5.2) (со $j = k$), (5.3), (5.4), (5.5), земаме

$$I' = I - \{j_\ell\} \cup \{k\}, \quad J' = J - \{k\} \cup \{j_\ell\}$$

и одиме на чекор 1.

Ако претпоставиме дека сите базни допустиви решенија се недегерирани (сите базни компоненти се стриктно позитивни) тогаш после конечен броj постапки (бидејќи постојат конечно многу базни решенија) процесот ќе заврши со наоѓање оптимален базен програм (случај 1.1) или со откривање отсуство на конечен оптимален програм (случај 2.1).

Погодно е сите пресметувања да ги вршиме во правоаголна табела, која првобитно ја пополнуваме со почетните вредности на $\bar{x}^B, \bar{z}, Y, z_j - c_j$. Значи почетната симплекс табела ги содржи коефициентите на експлицитниот систем (2) и на (3) соодветни на почетната база B.

Ако на пример почетната база

$$B = [b_1, \ldots, b_\ell, \ldots, b_m]$$

се состои од првите m вектор колони на матрицата A, т.е. $\alpha_{j_s} = \alpha_s$ $s = 1, \ldots, \ell, \ldots, m$ тогаш почетната симплекс табела изгледа вака:

		x_1	x_2		x_ℓ		x_m	x_{m+1}		x_k		x_n
z	$\bar{z}$	0	0	..	0	..	0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	..	z_k-c_k	..	z_n-c_n
x_1	$\bar{x}_1$	1	0	..	0	..	0	$y_{1,m+1}$	..	y_{1k}	..	y_{1n}
x_2	$\bar{x}_2$	0	1	..	0	..	0	$y_{2,m+1}$	..	y_{2k}	..	y_{2n}
•	•	•	•	..	•	..	..	•	..	•	..	•
x_ℓ	$\bar{x}_\ell$	0	0	..	1	..	0	$y_{\ell,m+1}$	..	$y_{\ell k}$	..	$y_{\ell n}$
•	•	•	•	..	•	..	•	•	..	•	..	•
x_m	$\bar{x}_m$	0	0	..	0	..	1	$y_{m,m+1}$	..	y_{mk}	..	y_{mn}

Потоа, при секоја итерација само еден индекс се менува: ако наместо α_ℓ во базата влегува α_k, тогаш индексот на ℓ - та редица $(j_\ell = \ell)$ се заменува со к. Во секоја табела со * ќе го означуваме елементот $y_{\ell k}$ (<u>главен елемент</u>) кој е во пресекот на колоната соодветна на променливата што станува базна (к) и редицата на базната променлива што станува слободна (ℓ).

<u>Пример I</u>. Да се реши LP проблемот:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\; x_3 \quad\quad &= 2 \\ x_2 + \quad + x_4 \quad &= 3 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + x_5 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \; j=1,\dots,5$$

$$\min z = -2x_1 - x_2$$

Матрицата на системот ограничувања е

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Очигледно $r(A)=3$ и на пример $B = [\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$ може да се земе за почетна база. Бидејќи $B^{-1} = B = E$ ограничувањата веќе се решени по базните променливи x_3 (прва базна променлива), x_4 (втора базна променлива), x_5 (трета базна променлива) и овие променливи не се јавуваат во функцијата на целта (можеме да сметаме дека тие се јавуваат во функцијата на целта но со нулти коефициенти), $\bar{x}_1=0$, $\bar{x}_2=0$, $\bar{x}_3=2$, $\bar{x}_4=3$, $\bar{x}_5=4$ е почетен базен програм;

$$\bar{x}^B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

За избраната база B имаме $Y=B^{-1}[\alpha_1,\alpha_2]=[\alpha_1,\alpha_2]$,

$$z_j-c_j=c^B y_j-c_j=-c_j \quad \text{за} \quad j=1,2,3,4,5 \ (c_3=c_4=c_5=0)$$

Почетна табела

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	2	1	0	0	0
x_3	2	1*	0	1	0	0
x_4	3	0	1	0	1	0
x_5	4	1	1	0	0	1

Почетниот програм $\bar{x}$ не е оптимален бидејќи постојат позитивни z_j-c_j, имено $z_1-c_1=2>0$ и $z_2-c_2=1>0$. Сега ги гледаме колоните

$$y_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Бидејќи $y_1 \nleq 0$ и $y_2 \nleq 0$, заклучуваме дека постои подобар базен програм. Применувајќи го критериумот за влез добиваме:

$$z_1-c_1=\max\{z_1-c_1, z_2-c_2\}$$

Значи $k=1$, т.е. x_1 ке биде нова базна променлива. Примената на критериумот за излез дава:

$$\frac{\bar{x}_3}{y_{11}}=\min\left\{\frac{\bar{x}_3}{y_{11}}, \frac{\bar{x}_5}{y_{31}}\right\}$$

т.е. $l=1$ што значи дека x_1 треба да стане прва базна променлива, а "старата" базна променлива x_3 ке стане нова слободна променлива. Сега ја трансформираме почетната табела по формулите (3), (4), (5),

Табела 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	-4	0	1	-2	0	0
x_1	2	1	0	1	0	0
x_4	3	0	1	0	1	0
x_5	2	0	1^*	-1	0	1

Табела 2

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z	-6	0	0	-1	0	-1
x_1	2	1	0	1	0	0
x_4	1	0	0	1	1	-1
x_2	2	0	1	-1	0	1

Во првата табела $z_2-c_2=1>0$ и $y_2 \not\leq 0$; значи можеме да најдеме подобар базен програм ако променливата x_2 ја направиме базна ($k=2$). Бидејки

$$x_5/y_{32}=\min\left\{\frac{\bar{x}_4}{y_{22}}=\frac{3}{1}\ ,\ \frac{\bar{x}_5}{y_{32}}=\frac{2}{1}\right\}$$

т.е. $l=3$ променливата x_5 (трета базна променлива) треба да стане нова слободна променлива. Трансформацијата на табелата 1 со $y_{32}=1$ во улога на главен елемент ја дава табелата 2, која е оптимална бидејки во неа сите z_j-c_j се непозитивни. Оптималниот базен програм е

$$\bar{x}_1=2, \bar{x}_2=2,\ \bar{x}_3=0,\ \bar{x}_4=1,\ \bar{x}_5=0$$

(соодветен на базата $[\alpha_1,\alpha_4,\alpha_2]=B$); оптималната вредност на функцијата на целта е $\bar{z}=-6$.

Пример 2.

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3\quad +2x_5 \quad &= 21\\ -2x_2+4x_3+x_4 \quad &= 36\\ -4x_2+3x_3 \quad +8x_5+x_6 &= 30\\ x_j\geq 0,\ j=1,\dots,6 & \end{aligned}$$

$$\min z=2x_2-6x_3+4x_5$$

Ограничувањата се претставени со систем од три равенки, матрицата на системот содржи единична подматрица од трети ред, значи системот е решлив. Земајќи за почетна база $B=[\alpha_1, \alpha_4, \alpha_6]$ (x_1 - прва базна променлива, x_4 - втора базна променлива, x_6 - трета базна променлива, x_2, x_3, x_5 - слободни променливи), веднаш се добива почетното базно решение:

$$\bar{x}_1=21,\ \bar{x}_2=0,\ \bar{x}_3=0,\ \bar{x}_4=36,\ \bar{x}_5=0,\ \bar{x}_6=30$$

Бидејќи базните променливи не се јавуваат во функцијата на целта, имаме $z_1-c_1=z_4-c_4=z_6-c_6=0$ и ја пополнуваме почетната табела со коефициентите на системот и на функцијата на целта:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	0	−2	6	0	−4	0
x_1	21	1	3	−1	0	2	0
x_4	36	0	−2	4	1	0	0
x_6	30	0	−4	3	0	8	1

Бидејќи само $z_3-c_3=6>0, x_3$ е единствен кандидат за нова базна променлива; $y_3 \nleq 0$, значи постои подобар базен програм. Бидејќи

$$\frac{\bar{x}_4}{y_{23}}=\min\left\{\frac{\bar{x}_4}{y_{23}}, \frac{\bar{x}_6}{y_{33}}\right\}=\min\{\frac{36}{4}, \frac{30}{3}\}$$

т.е. $\ell=2$, заклучуваме дека втората базна променлива x_4 треба да стане нова слободна променлива и можеме да ја составиме табелата 1, која одговара на првата итерација. Потоа на сличен начин се врши анализа на табелата 1 и пресметувањата поврзани со преодот кон табела 2. Програмот

$$\bar{x}_1=0,\ \bar{x}_2=12,\ \bar{x}_3=15,\ \bar{x}_4=0,\ \bar{x}_5=0,\ \bar{x}_6=33$$

е оптимален базен програм. Минималната вредност на функцијата на целта е $\bar{z}=-66$.

Пример 3.

$$\begin{aligned} 3x_1 \qquad\quad +14x_4 + \quad x_5 - x_6 &= 7 \\ x_2 \quad +16x_4 + 0{,}5x_5 - 2x_6 &= 5 \\ x_3 + 3x_4 \qquad\qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,6$$

$$\min z = -2x_4 - x_5 - x_6$$

Да го напишеме системот ограничувања во матрична форма:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 14 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 16 & 0{,}5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Очигледно пак имаме случај $r(A)=3=m<n=6$ (на пример $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ се линеарно независни). Делејќи ја првата равенка со 3 (формално множејќи ја матричната равенка од лево со елементарната матрица

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

) се добива еквивалентен систем решен по базните променливи x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad +\frac{14}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 &= \frac{7}{3} \\ x_2 \quad +16x_4 + 0{,}5x_5 - 2x_6 &= 5 \\ x_3 + 3x_4 \qquad\qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,6$$

$$\min z = -2x_4 - x_5 - x_6$$

Забележуваме дека во почетното базно решение покрај слободните променливи x_4, x_5, x_6 и базната променлива x_3 има вредност нула, значи имаме дегенерирано почетно базно допустиво решение.

Почетна табела:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	0	0	0	2	1	1
x_1	7/3	1	0	0	14/3	1/3	−1/3
x_2	5	0	1	0	16	1/2	−2
x_3	0	0	0	1	3	0	0

Бидејки $z_6-c_6=1>0$ и истовремено $y_6 \leqslant 0$, заклучуваме дека проблемот нема конечен оптимален програм. Една фамилија L на програми, за кои функцијата на целта прима се поголема и поголема вредност, можеме да добиеме давајќи ѝ на променливата x_6 произволна позитивна вредност, за останатите слободни променливи x_4 и x_5 задржувајќи и натаму вредност нула, а вредностите на базните променливи модифицирајќи ги така што ограничувањата да бидат исполнети:

$$x_6 = \theta$$
$$x_5 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$x_1 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\theta$$
$$x_2 = 5+2\theta$$
$$x_3 = 0+0\cdot\theta,$$

т.е.

$$L=\left\{ x=\begin{bmatrix}7/3\\5\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix}1/3\\2\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \quad ; \quad \theta \geqslant 0 \right\}$$

Пример 4. Да го разгледаме LP проблемот, кој се разликува од оној во примерот 3 само со тоа што во првото ограничување пред променливата x_6 стои знак + наместо −. Пак $\bar{x}^T = [7/3\ 5\ 0\ 0\ 0\ 0]$ е почетен базен програм.

Почетна табела:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	0	0	0	0	2	1	1
x_1	7/3	1	0	0	14/3	1/3	1/3*
x_2	5	0	1	0	16	1/2	−2
x_3	0	0	0	1	3	0	0

Сега за сите позитивни z_j-c_j соодветните вектори $y_j \nleq 0$; значи можеме да најдеме подобар базен програм. Претворањето на x_6 во прва базна променлива и соодветната трансформација на почетната табела доведува до Табелата 1, која е оптимална:

Табела 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	−7	−3	0	0	−12	0	0
x_6	7	3	0	0	14	1	1
x_2	19	6	1	0	44	5/2	0
x_3	0	0	0	1	3	0	0

$\bar{x}^T = [0\ 19\ 0\ 0\ 0\ 7]$ е оптимален базен програм, $\bar{z} = -7$ е оптимална вредност на функцијата на целта.

Пример 5.

$$x_1 - x_2 \geqslant -1$$

$$2x_1 + x_2 \geqslant 0$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

$$\min z = 2x_2 - x_2$$

Прво LP проблемот го сведуваме на стандарден облик со воведување на ненегативни променливи x_3, x_4:

$$x_1-x_2-x_3 \quad =-1$$
$$2x_1+x_2 \quad -x_4=0$$
$$x_j \geqslant 0, \; j=1,\dots,4$$
$$\min \; z=2x_1-x_2+0.x_3+0.x_4 = 2x_1-x_2$$

Множејќи ги обете страни на двете равенки со (-1) (формално, множејќи го системот

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

од лево со несингуларната матрица

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Bigg),$$

се добива еквивалентниот систем.

$$-x_1+x_2+x_3 \quad =1$$
$$-2x_1-x_2 \quad +x_4=0$$

кој е решен по променливите x_3, x_4. Очигледно $B=[\alpha_3, \alpha_4]$ може да се земе за почетна база и соодветната почетна табела е:

Почетна табела

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	0	-2	1	0	0
x_3	1	-1	1*	1	0
x_4	0	-2	-1	0	1

Бидејќи е само $z_2-c_2=1>0$ и $y_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \nleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ можеме да најдеме подобар базен програм внесувајќи го α_2 во базата како прв базен вектор (на местото на α_3):

Табела 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
z	-1	-1	0	-1	0
x_2	1	-1	1	1	0
x_4	1	-3	0	1	1

Сега е $z_j - c_j \leqslant 0, j=1,\dots,4$ значи $\bar{x}^T = [0\ 1\ 0\ 1]$ е оптимален програм на проблемот во стандарден облик, $\bar{z} = -1$ е оптимална вредност на функцијата на целта. За LP проблемот во каноничен облик (почетниот) $x_1=0$, $x_2=1$ е оптимален програм.

3. Претворување на LP задачата на максимизација во LP задача на минимизација

Во дискусијата за симплекс методата беше третирана само задачата на минимизација додека задачата на максимазација не ја споменавме. Сега ке покажеме дека тоа не беше направено случајно, туку затоа што секоја задача на максимизација можеме да ја сведеме во задача на минимизација со една тривијална трансформација.

Нека заLP задачата

$$Ax = d$$

$$x \geqslant 0$$

$$\max\ z = cx\ ,$$

$\bar{z} = c\bar{x}$ е максимална вредност на функцијата на целта во областа на допустиви решенија, т.е.

$$\bar{z} \geqslant z$$

за секоја друга вредност z во областа на допустиви решенија. Множејќи го ова неравенство со (-1) добиваме еквивалентно неравенство

$$-\bar{z} \leqslant -z$$

Тогаш од дефиницијата на апсолутен минимум следи дека

$$-\bar{z} = \min\{-z\}$$

за секое z во областа на допустивите решенија, т.е.

$$-c\bar{x} = \min\{-(cx)\}.$$

Значи функцијата $-z=-(c\,x)$ прима минимална вредност во истата точка $\bar{x}$ во која функција $z=c\,x$ достигнува максимална вредност.

Дефинитивно, можеме да заклучиме дека

$$\bar{z} = \max z = -\min\{-z\}$$

т.е. максимумот на функцијата $z=c\,x$ во областа на допустивите решенија е спротивен на минимумот на функцијата $-z=-c\,x$ во истата област на допустиви решенија.

Пример. Решение на LP проблемот:

$$2x_1+x_2+x_3=3$$
$$x_1-x_2+x_3=1$$
$$x_j\geqslant 0,\; j=1,2,3$$

$$\max z=-3x_1+2x_2-x_3$$

може да се добие решавајќи го LP проблемот

$$2x_1+x_2+x_3=3$$
$$x_1-x_2+x_3=1$$
$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3$$
$$\min z' =-z=3x_1-2x_2+x_3$$

Ако $\bar{x}$ е оптимално решение и $\bar{z}'$ е оптимална вредност на вториот проблем, тогаш $\bar{x}$ е оптимално решение и $\bar{z}=-\bar{z}'$ е оптимална (максимална) вредност на првиот проблем.

4. Добивање почетно базно допустиво решение

За да ја решиме LP задачата

$$A\,x = d \quad (A \text{ e } m x n)$$
$$x \geqslant 0$$
$$\min z=c\,x$$

со методата симплекс потребно е да знаеме еден почетен базен програм. Во некои проблеми (како оние што ги решававме во точката 2.) таков програм лесно се уочува. Меѓутоа, во повекето случаи не само што веднаш неможеме да уочиме почетен базен програм, туку ништо не знаеме за противречноста или непротивречноста на системот ограничувања, за нивната зависност или независност. Во ваква ситуација решавањето на LP проблемот се врши во две фази. Првата фаза ни овозможува да утврдиме дали воопшто постојат програми и ако постојат, да најдеме еден базен програм. Потоа, земајки го овој програм за почетен базен програм, во втората фаза се наоѓа оптимален програм.

Пред се системот ограничувања го заменуваме со еквивалентен систем $Ax=d$ во кој $d\geqslant 0$ (множејки ги со (-1) равенките i во кои $d_i<0$). Потоа матрицата A ја прошируваме со толку единични вектор колони колку што е потребно за да добиеме единична подматрица од m - ти ред (единична почетна база). Заради упростување на ознаките да претпоставиме дека матрицата A не содржи ниту една единична вектор колона. Тогаш A ја прошируваме со m единични вектор колони, т.е. во системот ограничувања воведуваме m вештачки променливи x_i^v, $i=1,\dots,m$ на следниот начин

$$a_i x+x_i^v = d_i \quad (a_i \text{ е } i\text{-та вектор редица на A}),\quad i=1,\dots,m,$$

или, во матрична форма

$$Ax+ E\, x^v = d$$

Очигледно, парот вектори $\bar{x}=0, \bar{x}^v=d$ е ненегативно базно решение на погорниот систем.

Фаза I. Формираме __помошна__ LP задача:

$$A x +E x^v = d$$
$$x, x^v \geqslant 0$$
$$\min \zeta = x_1^v + x_2^v + \dots + x_m^v$$

Јасно е дека ако $\bar{x}$ е произволен базен програм на почетната задача тогаш парот $(\bar{x};\ \bar{x}^v=0)$ е базен програм на помошната задача и од постоењето на вакво програм следи дека $\min \zeta=0$. И обратно, ако парот $(\bar{x};\bar{x}^v)$ е програм на помошната задача за кој $\zeta=0$ (сите вештачки променливи имаат вредност нула), тогаш $\bar{x}$ е програм на почетната задача.

Земајќи го $\overline{x}=o$, $\overline{x}^v=d$ за почетен базен програм го применуваме симплекс алгоритмот (тој обезбедува ненегативни вредности за сите вештачки променливи, т.е. секогаш е $\zeta \geqslant 0$ и $\zeta = 0$ ако и само ако $x^v = o$) за помошната задача се́ додека не настане една од следните три ситуации:

1^o $\min \zeta = 0$ и ниту една вештачка променлива не е базна. Тогаш добиено е базно решение на почетниот проблем и пресметувањата ги продолжуваме во фазата II, ситуација 1^o за да најдеме оптимално решение на почетниот систем.

2^o $\min \zeta = 0$, но една или повеке вештачки променливи се базни (со вредност нула). Тогаш добиено е допустиво решение на почетната задача и пресметувањата ги продолжуваме во фазата II, ситуација 2^o.

3^o $\min \zeta = \overline{\zeta} > 0$ т.е. една или повеке вештачки променливи се базни со позитивна вредност и условите за оптималност се исполнети. Тогаш почетната LP задача нема воопшто програми и пресметувањата ги прекинуваме.

Фаза II. Почетна табела во фазата II е последната табела од фазата I, која содржи допустиво решение на почетната LP задача, со таа разлика што нултата редица сега се пополнува со величините $\overline{z}$, $z_j - c_j$ (наместо $\overline{\zeta}$, $\zeta_j - \gamma_j$ соодветни на помошната функција на целта) пресметани непосредно по формулите

$$\overline{z} = c^B \overline{x}^B, \quad z_j - c_j = c^B y_j - c_j$$

за секој индекс j соодветен на слободна променлива (за базните променливи е $z_j - c_j = 0$).

1^o Стартуваме со базен програм на почетната LP задача и без никакви тешкотии го применуваме симплекс алгоритмот за да најдеме оптимален програм.

2^o Во овој случај треба да обрнеме посебно внимание на базните вештачки променливи (со вредност нула), бидејќи тие несмеат да примат позитивна вредност во текот на целата фаза II. Тоа се постигнува на тој начин што ниеден вектор α_j за кој на крајот на фазата I беше $z_j - c_j < 0$ несмее да се земе како кандидат за влез во базата во текот на цела фаза II. Почитувајќи го овој услов го применуваме симплекс алгоритмот сè додека не најдеме оптимално решение.

Пример 1.

$$x_1+2x_2+3x_3=30$$
$$2x_1+x_2+5x_3=40$$
$$x_1+2x_2+x_3=20$$
$$x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3$$
$$\min z=-x_1-2x_2-3x_3$$

Матрицата на системот ограничувања не содржи единична подматрица од трети ред. Затоа за да го решиме LP проблемот користиме вештачка база. Забележуваме дека векторот $\bar{d}$ во примерот е ненегативен и затоа веднаш ја формираме помошната задача:

$$x_1+2x_2+3x_3+x_1^v \qquad\qquad =30$$
$$2x_1+x_2+5x_3 \qquad +x_2^v \qquad =40$$
$$x_1+2x_2+x_3 \qquad\qquad +x_3^v=20$$
$$x_j\geqslant 0,\ j=1,2,3;\ x_i^v\geqslant 0,\ i=1,2,3$$

$$\min \zeta=x_1^v+x_2^v+x_3^v$$

Јасно е дека паротот $\bar{x}^T=[0\ 0\ 0],\bar{x}^v=\begin{bmatrix}30\\40\\20\end{bmatrix}$ претставува базно допустиво решение на помошната задача. Користејќи ги ограничувањата, ги елиминираме од помошната функција на целта вештачките променливи:

$$\zeta=90-4x_1-5x_2-9x_3$$

Со тоа ги добиваме величините $\zeta_j-\gamma_j$, $j=1,2,3$ (за сите вештачки променливи се зема $\zeta_i-\gamma_i=0$) и можеме да ја составиме почетната табела во фазата I:

		x_1	x_2	x_3	x_1^v	x_2^v	x_3^v
ζ	90	4	5	9	0	0	0
x_1^v	30	1	2	3	1	0	0
x_2^v	40	2	1	5*	0	1	0
x_3^v	20	1	2	1	0	0	1

Бидејќи постојат позитивни $\zeta_j - \gamma_j$, почетниот програм не е оптимален. Примената на критериумот за влез и излез укажува дека променливата x_3 треба да стане нова втора базна променлива на местото на x_2^v. Во согласност со тоа ја трансформираме почетната табела и ја составуваме табелата 1 и т.н.

		x_1	x_2	x_3	x_1^v	x_2^v	x_3^v
ζ	18	2/5	16/5	0	0	−9/5	0
x_1^v	6	−1/5	7/5*	0	1	−3/5	0
x_3	8	2/5	1/5	1	0	1/5	0
x_3^v	12	3/5	9/5	0	0	−1/5	1

		x_1	x_2	x_3	x_1^v	x_2^v	x_3^v
ζ	30/7	6/7	0	0	−16/7	−3/7	0
x_2	30/7	−1/7	1	0	5/7	−3/7	0
x_3	50/7	3/7	0	1	− 1/7	2/7	0
x_3^v	30/7	6/7*	0	0	−9/7	4/7	1

		x_1	x_2	x_3	x_1^v	x_2^v	x_3^v
ζ	0	0	0	0	−1	−1	− 1
x_2	5	0	1	0	1/2	−1/3	1/6
x_3	5	0	0	1	1/2	0	−1/2
x_1	5	1	0	0	−3/2	2/3	7/6

Горната табела е оптимална за првата фаза (сите $\zeta_j - \gamma_j \leqslant 0$). Бидејќи min $\zeta = 0$ и ниту една вештачка променлива не е базна имаме ситуација 1°, т.е. последната табела содржи базно допустиво решение на почетниот проблем. Тоа одговара на базата $B=[\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1]$. Наоѓаме

$$\bar{z} = c^B\,\bar{x}^B = [-1\ \ -2\ \ -3]\begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix} = -30.$$

За сите индекси j соодветни на почетните променливи имаме $z_j - c_j = c^B y_j - c_j = c_j - c_j = 0 \leqslant 0$. Значи B е оптимална база и на почетниот проблем, т.е. $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 5$, $\bar{x}_3 = 5$ е оптимален програм и $\bar{z} = -30$ е оптимална вредност на функцијата на целта.

Пример 2.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leqslant 8 \\ x_1 - 9x_2 + x_3 &\leqslant -3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leqslant -4 \\ x_j \geqslant 0,\ j&=1,2,3 \end{aligned}$$

$$\min z = -2x_1 - x_2 - x_3$$

Со воведување дополнителни ненегативни променливи x_4, x_5, x_6 ограничувањата ги сведуваме на стандарден облик:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 8 \\ x_1 - 9x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad &= -3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 &= -4 \end{aligned}$$

Бидејќи $d_2 = -3$ и $d_3 = -4$, ги множиме втората и третата равенка со (-1). Со тоа системот ограничувања е сведен на еквивалентен облик:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 8 \\ -x_1 + 9x_2 - x_3 \qquad - x_5 \qquad &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad\qquad - x_6 &= 4 \end{aligned}$$

во кој сите слободни членови се ненегативни (векторот $d \geqslant 0$)

За да биде што помал бројот на вештачки променливи, кои треба да ги воведеме заради добивање на почетна единична база, вршиме уште една елементарна трансформација. Имено, втората равенка ја вадиме од третата и добиената разлика ја земаме за второ ограничување:

$$\begin{aligned}
4x_1+6x_2+3x_3+x_4 \qquad\qquad &= 8\\
3x_1-6x_2-4x_3 \quad +x_5-x_6 &= 1\\
2x_1+3x_2-5x_3 \qquad\quad -x_6 &= 4
\end{aligned}$$

Сега е доволно да се воведе една вештачка ненегативна променлива x_3^v па да добиеме единична почетна база. Тогаш помошната задача е:

$$\begin{aligned}
4x_1+6x_2+3x_3+x_4 \qquad\qquad\qquad &= 8\\
3x_1-6x_2-4x_3 \quad +x_5-x_6 \qquad &= 1\\
2x_1+3x_2-5x_3 \qquad\quad -x_6+x_3^v &= 4\\
x_3^v \geqslant 0,\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\dots,6 &
\end{aligned}$$

$$\min \zeta = x_3^v$$

Елиминирајќи ја вештачката променлива x_3^v од помошната функција на целта (со помош на третото ограничување) добиваме:

$$\zeta = 4-2x_1-3x_2+5x_3 \ +x_6$$

од каде се гледа дека на почетната база ѝ одговара

$$\bar{\zeta}=4,\ \zeta_1-\gamma_1=0-(-2),\ \zeta_2-\gamma_2=0-(-3),\ \zeta_3-\gamma_3=0-5,\ \zeta_4-\gamma_4=\zeta_5-\gamma_5=0,$$
$$\zeta_6-\gamma_6=0-1,\ \zeta_3^v-\gamma_3^v=0.$$

Значи можеме да ја пополниме почетната табела на фазата I:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_3^v
ζ	4	2	3	−5	0	0	−1	0
x_4	8	4	6*	3	1	0	0	0
x_5	1	3	−6	−4	0	1	−1	0
x_3^v	4	2	3	−5	0	0	−1	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_3^v
ζ	0	0	0	−13/2	−1/2	0	−1	0
x_2	4/3	2/3	1	1/2	1/6	0	0	0
x_5	9	7	0	−1	1	1	−1	0
x_3^v	0	0	0	−13/2	−1/2	0	−1	1

Погорната табела е оптимална за првата фаза, бидејќи $\min \zeta = 0$. Бидејќи вештачката променлива е базна, настана ситуација I.2° и пресметувањата ги продолжуваме во фазата II, ситуациј а 2°.

Ги одбележуваме со " * " променливите кои несмеат да станат базни во текот на фазата II (соодветните колони немораме да ги пополнуваме), наоѓаме

$$\bar{z} = c^B \bar{x}^B = -4/3, \quad z_1 - c_1 = 4/3, \quad z_2 - c_2 = 0, \quad z_5 - c_5 = 0, \quad z_3^v - c_3^v = 0$$

и ја составуваме почетната табела на фазата II:

		x_1	x_2	$\overset{*}{x}_3$	$\overset{*}{x}_4$	x_5	$\overset{*}{x}_6$	x_3^v
z	−4/3	4/3	0			0		0
x_2	4/3	2/3	1			0		0
x_5	9	7*	0			1		0
x_3^v	0	0	0			0		1

Примената на критериумот за влез и излез ни покажува дека x_1 треба да ја направиме нова втора базна променлива и во согласност со тоа ја трансформираме почетната табела. Добиваме:

		x_1	x_2	$\overset{*}{x}_3$	$\overset{*}{x}_4$	x_5	$\overset{*}{x}_6$	x_3^v
z	−64/21	0	0			−4/21		0
x_2	10/21	0	1			−2/21		0
x_1	9/7	1	0			1/7		0
x_3^v	0	0	0			0		1

Оваа табела е оптимална, $\bar{x}_1 = 9/7$, $\bar{x}_2 = 10/21$, $\bar{x}_3 = 0$ е оптимален програм на почетната задача, а $\bar{z} = -64/21$ е оптимална вредност на функцијата на целта.

В е ж б и.

1. Следниот LP проблем да се реши графички и со методата симплекс. Во геометриското претставување да се уочат точките кои одговараат на базните решенија во секоја табела на симплекс методата

$$3x_1+5x_2 \leqslant 15$$
$$6x_1+2x_2 \leqslant 24$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0$$
$$\min z=-2x_1-x_2$$

3. Со методата

$$3x_1+4x_2+5x_3+x_4+x_5+8x_6=8$$
$$x_1+3x_2+2x_3+5x_4+2x_5+x_6=3$$
$$2{,}5x_1+5x_2+4{,}5x_3+5{,}5x_4+2{,}5x+4x_6=7$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,6$$
$$\min z=-x_1-3x_2-2x_3-5x_4-x_5-6x_6$$

2. Со методата

a)
$$8x_1+3x_2+4x_3+x_4 \leqslant 7$$
$$2x_1+6x_2+x_3+5x_4 \leqslant 3$$
$$x_1+4x_2+5x_3+2x_4 \leqslant 8$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,4$$
$$\max z=3x_1+4x_2+x_3+7x_4$$

b)
$$x_1+5x_2+9x_3-6x_4 \geqslant -2$$
$$3x_1-x_2+x_3+3x_4 \leqslant 10$$
$$-2x_1-3x_2+7x_3-8x_4 \geqslant 0$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,\dots,4$$
$$\min z=-2x_1+3x_2-4x_3-x_4$$

4. Да се покаже дека векторот што ја напушта базата во една итерација на симплекс методата неможе да се врати во базата веднаш во наредната итерација.

5. Векторот $\bar{x}^T=[2 \ 1 \ 0]$ е базен програм (провери!) на проблемот:

$$x_1-x_2+(a-b)x_3=1$$

$$x_1+x_2+(a+b)x_3=3$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1,2,3$$

$$\min z=bx_1+ax_2+2abx_3$$

Да се испита кој од следните три случаи важи:

а) $\bar{x}$ е оптимален програм,

б) не постои конечен оптимален програм,

в) постои подобар базен програм.

III. ДУАЛНОСТ

1. Формулација на дуалната LP задача

Ако е дадена LP задачата:

$$(P) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &\geqslant d_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &\geqslant d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n &\geqslant d_m \\ x_1 \qquad\qquad\qquad &\geqslant 0 \\ x_2 \qquad\quad &\geqslant 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x_n &\geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\min z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n,$$

тогаш можеме да формираме и друга LP задача:

$$(D)\qquad \begin{aligned} u_1 \qquad\qquad &\geqslant 0 \\ u_2 \qquad &\geqslant 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_m &\geqslant 0 \\ a_{11}u_1+a_{21}u_2+\dots+a_{m1}u_m &\leqslant c_1 \\ a_{12}u_1+a_{22}u_2+\dots+a_{m2}u_m &\leqslant c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\dots+a_{mn}u_m &\leqslant c_n \end{aligned}$$

$$\max w = d_1u_1+d_2u_2+\dots+d_mu_m.$$

Задачата (D) се наречува <u>дуална</u> на <u>примарната</u> задача (P). Примарната и дуалната LP задача можеме да ги претставиме во следниот матричен облик:

$$(P)\qquad \begin{aligned} Ax &\geqslant d \\ x &\geqslant o \\ \min z &= cx \end{aligned} \qquad\qquad (D)\qquad \begin{aligned} u &\geqslant o \\ u^TA &\leqslant c \\ \max w &= u^Td \end{aligned}$$

Да ја преформулираме задачата (D) на следниот начин:

$$\begin{aligned} -A^Tu &\geqslant -c^T \\ u &\geqslant o \\ \min z' &= -d^Tu \end{aligned} \qquad \text{и} \quad \max w = -\min z'.$$

Сега дуалната задача има изглед на примарна задача. Ако претпоставиме дека таа ни е дадена и ја побараме нејзината дуална задача, тогаш ќе добиеме:

$$\begin{aligned} -Ax &\leqslant -d \\ x &\geqslant o \\ \max z'' &= -cx \end{aligned}$$

или еквивалентно

$$Ax \geqslant d$$

$$x \geqslant o$$

$$\min z = cx, \quad \text{каде} \quad \max z'' = -\min z$$

Оваа LP задача е почетната примарна задача. Затоа, природно е да зборуваме за <u>пар взаемно дуални задачи</u>, земајќи ја било која од нив за примарна задача.

Пример 1. Да се најде дуалната на LP задачата:

$$(\bar{P}) \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min z = [3 \quad 4] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{D}) \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \max w = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Пример 2. Да се најде дуалниот на LP проблемот

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

$$\min z = -2x_1 + x_2 + x_3$$

Прво, овој проблем го сведуваме на еквивалентен каноничен облик:

$$(\bar{P}) \qquad \begin{aligned} 4x_1+3x_2+x_3 &\geq 6 \\ -4x_1-3x_2-x_3 &\geq -6 \\ x_1+2x_2+5x_3 &\geq 4 \\ -x_1-2x_2-5x_3 &\geq -4 \\ x_1 \qquad\qquad &\geq 0 \\ x_2 \qquad &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min z = -2x_1+x_2+x_3$$

Дуалниот проблем е:

$$(\bar{D}) \qquad \begin{aligned} u_1 \qquad\qquad\qquad &\geq 0 \\ u_2 \qquad\qquad &\geq 0 \\ u_3 \qquad &\geq 0 \\ u_4 &\geq 0 \\ 4u_1-4u_2+u_3-u_3 &\leq -2 \\ 3u_1-3u_2+2u_3-2u_4 &\leq 1 \\ u_1-u_2+5u_3-5u_4 &\leq 1 \end{aligned}$$

$$\max w = 6u_1-6u_2+4u_3-4u_4$$

Зборот "дуален" значи двоен. Дуалноста применета во линеарното програмирање имплицира дека на секој LP проблем може да му се даде двојно значење. Покрај линеарното програмирање дуалноста многу често се јавува во математиката, економијата, техниката и физиката.

2. Особини на взаемно дуалните задачи

Ако $\bar{x}$ е произволен програм на задачата (P), а $\bar{u}$ е произволен програм на задачата (D), тогаш парот вектори $(\bar{x}, \bar{u})$ се нарекува <u>пар дуални програми</u>.

<u>Теорема 1.</u> За произволен пар дуални програми $(\bar{x}\,; \bar{u})$ точно е неравенството

$$c\,\bar{x} \geqslant \bar{u}^T d \qquad (\bar{z} \geqslant \bar{w}).$$

Доказ. Нека $\bar{x}$ е програм на (P), т.е. $A\bar{x} \geqslant d, \bar{x} \geqslant 0$, или

$$a_i \bar{x} \geqslant d_i, \; i=1,\dots,m \; (a_i \text{ е } i\text{–та вектор редица на } A)$$

$$x_j \geqslant 0, \; j=1,\dots,m.$$

Тогаш за произволен програм $\bar{u}^T = [\bar{u}_1 \; \bar{u}_2 \dots \bar{u}_m]$ на (D) точно е следното:

$$\bar{u}_i (a_i \bar{x}) \geqslant \bar{u}_i d_i, \; i=1,\dots,m$$

$$u_1 (a_1 \; \bar{x}) + \dots + u_m (a_m \bar{x}) \geqslant \bar{u}_1 d_1 + \dots + \bar{u}_m d_m \;,$$

или, кратко напишано

$$\bar{u}^T A \bar{x} \geqslant \bar{u}^T d.$$

Слично, поаѓајки од $\bar{u}^T A \leqslant c$ и $\bar{x} \geqslant 0$, се покажува дека

$$\bar{u}^T A \bar{x} \leqslant c\,\bar{x}.$$

Значи мора да е $c\,\bar{x} \geqslant \bar{u}^T d$.

Заклучок. Ако за парот дуални програми $(\bar{x} \; ; \bar{u})$ е точно равенството

$$c\,\bar{x} = \bar{u}^T d$$

тогаш $(\bar{x} \; ; \bar{u})$ е пар дуални оптимални програми.

Навистина, нека за парот дуални програми $(\bar{x} \; ; \bar{u})$ е исполнето равенството $c\,\bar{x} = \bar{u}^T d$ и нека постои програм x' на (P) така што $c\,x' < c\,\bar{x}$. Тогаш за парот $(x' ; \bar{u})$ точно е неравенството $c\,x' < \bar{u}^T d$, што противречи на теоремата 1. Значи $\bar{x}$ мора да е оптимален програм на (P). Аналогно се покажува дека $\bar{u}$ е оптимален програм на (D).

Теорема 2. (Основна теорема на дуалноста). Ако едната од парот взаемно дуални LP задачи има (конечен) оптимален програм, тогаш постои оптимален програм и на другата задача, притоа, оптималните вредности на двете функции на целта се еднакви. Ако едната задача има програми, но нема конечен оптимален програм, тогаш другата задача е противречна (нема воопшто програми).

Доказ. Нека, на пример, задачата (P) има оптимален програм $\bar{x}$ и нека тој е добиен со примена на симплекс алгоритмот за соодветната задача во стандарден облик

$$\begin{aligned} Ax - y &= d \\ x,\ y &\geq 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\min z = cx + oy$$

Значи претпоставуваме дека $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$ е оптимален програм на задачата (1). Нека тој одговара на базата B, т.е.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}^B = B^{-1} d; \quad \bar{z} = [c \quad o]^B \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}^B = c^B \bar{x}^B .$$

Во оптималната симплекс табела (соодветна на базата B) на задачата (1) имаме $z_j - c_j \leqslant 0$ за сите индекси j на колоните на матрицата $[A, -E]$, т.е.

$$[c \quad o]^B B^{-1} \alpha_j \leqslant c_j, \ j=1,\dots,n,$$

$$[c \quad o]^B B^{-1} (-e_i) \leqslant 0, \ i=1,\dots,m$$

Воведувајќи ознака

$$\bar{u}^T = [c \quad o]^B B^{-1}$$

погорните услови можеме да ги напишеме во следниот матричен облик:

$$\bar{u}^T A \leqslant c$$

$$\bar{u} \geqslant o .$$

Очигледно векторот $\bar{u}$ претставува програм на дуалната задача (D). За парот дуални програми $(\bar{x} \,;\, \bar{u})$ на задачите (P) и (D) точно е следното:

$$\bar{u}^T d = [c \quad o]^B B^{-1} d = [c \quad o]^B \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}^B = c^B \bar{x}^B = c\bar{x} .$$

Тогаш α_j влегува во базата како ℓ - та вектор колона, т.е. нова база е матрицата

$$B' = [b_1, \ldots, b_{\ell-1}, b'_\ell, b_{\ell+1}, \ldots, b_m]$$

каде $b'_\ell = \alpha_j$. Новите вредности на базните променливи, соодветни на базата B', се:

$$\begin{aligned} x'_{j_s} &= \bar{x}_{j_s} - \bar{x}_{j_\ell} y_{sj}/y_{\ell j}, \quad s=1,\ldots,\ell-1, \ \ell+1,\ldots,m \\ x'_{j_\ell} &= \bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

а новата вредност на функцијата на целта е

$$z' = \bar{z} + (c_j - z_j)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j} \tag{5.2}$$

Сега сакаме да знаеме дали вака добиеното ново базно допустиво решение x' (компонентите на x' соодветни на слободните променливи се нула) е оптимално. Затоа ги наоѓаме новите вредности $z'_j - c_j$. Ако сите $z'_j - c_j$ се непозитивни, тогаш x' е оптимален програм. Ако не е така, тогаш целата постапка ја повторуваме за да најдеме подобар базен програм x''. Тоа ке го постигнеме, ако ги најдеме новите вектори y''_j, а потоа ке ги пресметаме новите вредности $z''_j - c_j$ и т.н.

При влез во базата на еден вектор α_j, за кој е $z_j - c_j > 0$, функцијата на целта прима нарастување (негативно):

$$(c_j - z_j)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j}\ .$$

Од сите можни кандидати за влез во базата логично е да се избере оној вектор α_j, за кој погорното нарастување е по апсолутна вредност најголемо, т.е.

$$|(c_k - z_k)\bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell k}| = \max_{j: z_j - c_j > 0} |(c_j - z_j)\ \bar{x}_{j_\ell}/y_{\ell j}|$$

Но овој начин за одредување на индексот k не е практичен. Затоа се зема поедноставен критериум за влез во базата, имено:

$$z_k - c_k = \max_{j: z_j - c_j > 0} \{z_j - c_j\}$$

и тогаш α_k влегува во базата како нов ℓ - ти вектор.

Од условот

$$\alpha_k = y_{1k} b_1 + \dots + y_{\ell k} b_\ell + \dots + y_{mk} b_m$$

каде $b_\ell = \alpha_{j_\ell}$ добиваме

$$\alpha_{j_\ell} = -\frac{y_{1k}}{y_{\ell k}} b_1 - \dots + \frac{1}{y_{\ell k}} \alpha_k - \dots - \frac{y_{mk}}{y_{\ell k}} b_m$$

или, означувајќи

$$y'_{i j_\ell} = -\frac{y_{ik}}{y_{\ell k}}, \quad i \neq \ell$$

$$y'_{\ell j_\ell} = 1/y_{\ell k}, \tag{5.3}$$

$$\alpha_{j_\ell} = y'_{1 j_\ell} b_1 + \dots + y'_{\ell j_\ell} b'_\ell + \dots + y'_{m j_\ell} b_m$$

каде $b'_\ell = \alpha_k$.

За слободните вектори α_j различни од α_k имаме:

$$\alpha_j = y_{1j} b_1 + \dots + y_{\ell j} b_\ell + \dots + y_{mj} b_m = y_{1j} b_1 + \dots + y_{\ell j} \Big(-\frac{y_{1k}}{\ell k} b_1 -$$

$$\dots + \frac{1}{y_{\ell k}} \alpha_k - \dots - \frac{y_{mk}}{\ell k} b_m\Big) + \dots + y_{mj} b_m =$$

$$= y'_{1j} b_1 + \dots + y'_{\ell j} b'_\ell + \dots + y'_{mj} b_m,$$

каде

$$y'_{ij} = y_{ij} - y_{\ell j} y_{ik}/y_{\ell k}, \quad i \neq \ell, j \neq k$$

$$y'_{\ell j} = y_{\ell j}/y_{\ell k}, \quad j \neq k \tag{5.4}$$

бидејќи $\bar{u}$ ги исполнува како стриктни неравенства ограничувањата (iii) и (iv), соодветните променливи (x_3 и x_4), на почетниот проблем, во оптималниот програм $\bar{x}$ треба да имаат вредности нула, т.е. $\bar{x}_3=\bar{x}_4=0$. Значи мора да е

$$2\bar{x}_1+3\bar{x}_2=3$$
$$3\bar{x}_1-\bar{x}_2=2\,.$$

Решавајќи го овој систем добиваме

$$\bar{x}_1 = 9/11,\ \bar{x}_2 = 5/11.$$

Конечно го најдовме оптималниот програм $\bar{x}^T = [9/11 \quad 5/11 \quad 0 \quad 0]$ на почетниот проблем. Уште проверуваме: $\bar{z} = \bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3-\bar{x}_4=14/11 = \bar{w}$.

В е ж б и.

1. Да се состави дуалниот на LP проблемот:

а)

$$x_1-2x_2+x_3+3x_4-2x_5 \leqslant 4$$
$$-x_1-x_2+3x_3-2x_4+3x_5 \leqslant 10$$
$$x_j \geqslant 0,\ j=1,\dots,5$$
$$\min z = -2x_1+x_2-3x_3-x_4+x_5$$

б)

$$2x_1-3x_2-2x_3+x_4-x_5 = 5$$
$$x_1 + x_3-3x_4+2x_5 = 8$$
$$x_1+x_2-3x_3+2x_4-x_5 \leqslant 4$$
$$x_j \geqslant 0,\ j=1,\dots,5$$
$$\min z = -x_1+2x_2-3x_3+x_4-4x_5$$

2. Да се реши LP проблемот:

$$-3x_1-x_2+4x_3+x_4 \geqslant 3$$
$$2x_1+4x_2+x_3-x_4 \geqslant 3$$
$$x_j \geqslant 0,\ j=1,\dots,4$$

$$\min z=4x_1+18x_2+30x_3+5x_4$$

анализирајќи го графички дуалниот проблем.

3. Да се испита дали $\bar{x}^T = [0 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 11]$ е оптимален програм на LP проблемот:

$$x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5 = 19$$
$$x_1+5x_2-5x_3+2x_4 = -5$$
$$x_1-x_2+2x_3 \quad +10x_5+x_6 = 17$$
$$x_j \geqslant 0,\ j=1,\dots,6$$
$$\min z = -2x_2+4x_3-3x_5$$

4. Применувајќи ја методата симплекс за дуалниот проблем да се реши LP проблемот:

$$-2x_1+3x_2 \leqslant 6$$
$$x_1+3x_2 \leqslant 15$$
$$2x_1+x_2 \leqslant 15$$
$$x_1-2x_2 \leqslant 5$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$
$$\max z = -x_1-2x_2.$$

5. Да се најде пример на пар взаемно дуални задачи, кои немаат воопшто програми.

6. Да се покаже дека дуален на дуалниот проблем на LP проблемот од задачата 2 е проблемот од задачата 2.

3. Економска интерпретација на парот взаемно дуални задачи

Во точката 2 на делот I (B) неколку економски проблеми се претставени како LP проблеми. Овде ке дадеме економска интерпретација на примарната и дуалната LP задача.

Да разгледаме едно претпријатие кое може да изведува n видови дејности. Во текот на тие дејности можно е производство на m видови артикли.

инверзната B^{-1} на матрицата B се добива еквивалентниот систем

$$E\, x^B + B^{-1} R\, x^R = B^{-1} d,$$

каде E е mxm единичната матрица, или

$$x^B + B^{-1} R\, x^R = B^{-1} d, \tag{2}$$

чија скаларна форма, ако означиме $B^{-1} R = Y = [y_{ij}]$ mx(n−m), е:

$$\begin{array}{l} x_{j_1} \quad +y_{1\,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + \ldots + y_{1\,j_n}\, x_{j_n} = \bar{x}_{j_1} \\ x_{j_2} \quad +y_{2\,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + \ldots + y_{2\,j_n}\, x_{j_n} = \bar{x}_{j_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{j_m} + y_{m\,j_{m+1}} x_{j_{m+1}} + \ldots + y_{m\,j_n}\, x_{j_n} = \bar{x}_{j_m} \end{array} \tag{2'}$$

Овој систем се наречува експлицитен, или решение во однос на базните променливи. Тој може да се напише и во следниот векторски облик:

$$x^B + x_{j_{m+1}} y_{j_{m+1}} + \ldots + x_{j_n}\, y_{j_n} = \bar{x}^B \tag{2''}$$

каде $y_{j_{m+1}}, \ldots, y_{j_n}$ се колоните на матрицата Y (од дефиницијата на Y следи дека $y_j = B^{-1} \alpha_j$). Експлицитниот систем ни овозможува функцијата на целта z да ја претставиме како функција од слободните променливи, имено

$$\begin{aligned} z &= c^B\, x^B + c^R\, x^R = c^B(\bar{x}^B - x_{j_{m+1}} y_{j_{m+1}} - \ldots - x_{j_n} y_{j_n}) + c^R\, x^R = \\ &= c^B \bar{x}^B - (c^B\, y_{j_{m+1}} - c_{j_{m+1}}) x_{j_{m+1}} - \ldots - (c^B y_{j_n} - c_{j_n}) x_{j_n} . \end{aligned} \tag{3}$$

Означувајќи

$$\bar{z} = c^B \bar{x}^B, \quad z_j = c^B\, B^{-1} \alpha_j$$

за $j=1,\ldots,n,$ дефинитивно имаме LP задача

$$x^B + Y\ x^R = \bar{x}^B$$

$$x^B \geqslant o,\ x^R \geqslant o \qquad (4)$$

$$\min\ z - \bar{z} = -(z_{j_{m+1}} - c_{j_{m+1}})x_{j_{m+1}} - \ldots - (z_{j_n} - c_{j_n})x_{j_n}$$

еквивалентна на почетната (1).

Ако за момент се вратиме на примерите разгледани во почетокот на оваа точка, ке уочиме дека тие беа зададени во облик (4). Дискусијата спроведена за нив може да се воопшти за општа LP задача (4).

Теорема 1. Нека е даден базен програм $\bar{x}$ соодветен на базата B. Ако за некој индекс k (на којa слободна променлива) е $z_k - c_k > 0$ и истовремено соодветната колона на матрицата Y, $y_k \leqslant o$, тогаш можно е наоѓање на класа програми со $m+1$ ненегативни компоненти; компонентата x_k може да прима произволно големи ненегативни вредности x'_k и притоа z ке прима произволно мали вредности; затоа во овој случај не постои конечен оптимален програм.

Доказ: Бидејќи $y_k \leqslant o$, од (2) следи дека поаѓајќи од базното решение $\bar{x}$ може да се добие друг програм давајќи й на слободната променлива x_k произволна позитивна вредност x'_k, за останатите слободни променливи задржувајќи и натаму вредност нула, а вредностите на базните променливи модифицирајќи ги така, што да бидат исполнети равенките (2):

$$x'^B = \bar{x}^B - x'_k y_k \geqslant \bar{x}^B.$$

Согласно (3), z прима нова вредност $z' = \bar{z} - (z_k - c_k)x'_k$ од каде што следи дека z може да прима произволно мали вредности кога x'_k е доволно големо. Значи z нема конечна минимална вредност.

Теорема 2. Нека $\bar{x}$ е базен програм соодветен на базата B. Ако за некој индекс k е $z_k - c_k > 0$ и барем една компонента на вектор колоната y_k е позитивна, тогаш базното решение соодветно на базата B', добиена од B со замена на нејзиниот ℓ - ти вектор $b_\ell = \alpha_{j_\ell}$ со векторот α_k, каде индексот ℓ е одреден од условот

$$x_{i1}+x_{i2}+\dots+x_{in}=a_i, \quad i=1,\dots,m \tag{1}$$

$$x_{1j}+x_{2j}+\dots+x_{mj}=b_j, \quad j=1,\dots,n \tag{2}$$

$$x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,\dots,m; \; j=1,\dots,n \tag{3}$$

$$\min z=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\dots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\dots+c_{m1}x_{m1}+$$
$$+c_{m2}x_{m2}+\dots+\dots+c_{mn}x_{mn}, \tag{4}$$

каде, по претпоставка, сите $a_{ij}, b_j, a_i \geqslant 0$.

LP проблемот (1), (2), (3), (4) се наречува <u>транспортен проблем</u>.

Бидејќи

$$a_1+a_2+\dots+a_m=(x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n})+(x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n})+\dots$$
$$+(x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn})=(x_{11}+x_{21}+\dots+x_{m1})+$$
$$+(x_{12}+x_{22}+\dots+x_{m2})+\dots+(x_{1n}+x_{2n}+\dots+x_{mn})=$$
$$=b_1+b_2+\dots+b_n,$$

заклучуваме дека системот равенки (2) и (3) има решение ако

$$a_1+a_2+\dots+a_m=b_1+b_2+\dots+b_n\,(=A) \tag{5}$$

Да претпоставиме дека е исполнет условот (5).

<u>Теорема 1.</u> Транспортниот проблем има програми.

Доказ. Бидејќи сите

$$a_i, b_j \geqslant 0 \quad \text{и} \quad a_1+a_2+\dots+a_m=b_1+b_2+\dots+b_n=A>0,$$

величините $\bar{x}_{ij}=a_i b_j/A$ се одредени ненегативни броеви, т.е.

$$\bar{x}_{ij}\geqslant 0, \quad i=1,\dots,m; \; j=1,\dots,n.$$

Потоа,

$$\bar{x}_{i1}+\bar{x}_{i2}+\dots+\bar{x}_{in}=\frac{a_i b_1}{A}+\frac{a_i b_2}{A}+\dots+\frac{a_i b_n}{A}=\frac{a_i}{A}(b_1+b_2+\dots+b_n)=a_i$$

$$i=1,\dots,m.$$

$$\bar{x}_{1j}+\bar{x}_{2j}+\dots+\bar{x}_{mj}=\frac{a_1 b_j}{A}+\frac{a_2 b_j}{A}+\dots+\frac{a_m b_j}{A}=\frac{b_j}{A}(a_1+a_2+\dots+a_m)=b_j,$$

$$j=1,\dots,n$$

Значи

$$\bar{x}_{ij},\ i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n$$

е програм на транспортниот проблем.

За случај $m=3$, $n=5$ да ги напишеме равенките на системот (2),(3):

$$
\begin{array}{l}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=a_1\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=a_2\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=a_3\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}=b_4\\
x_{15}+x_{25}+x_{35}=b_5
\end{array}
$$

Ако од сумата на последните 5 равенки ја извадиме втората и третата равенка, резултатот ке биде првата равенка. Значи оваа равенка е зависна и истата може да се изостави од системот ограничувања. Останатите равенки се линеарно независни. Аналогно доаѓаме до следниот заклучок:

Една од $m+n$ - те равенки на системот (2), (3) во транспортниот проблем е зависна и ако таа се изостави, тогаш системот ограничувања се сведува на $m+n-1$ линеарно независни равенки со $m.n$ непознати.

Од теоријата на линеарното програмирање следи дека постои програм на транспортниот проблем со најмногу $m+n-1$ позитивни компоненти.

<u>Теорема 2.</u> (Конструкција на почетен базен програм).

Постои програм на транспортниот проблем со не повеќе од $m+n-1$ позитивни компоненти. Вектор колоните во системот ограничувања пред сиве променливи се линеарно независни.

Доказот се изведува со примена на "<u>правилото на северозападниот агол</u>" за следната табела:

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & a_1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & a_m \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_n & \end{array}$$

Прво наоѓаме вредност $\bar{x}_{11}$ за променливата, која се наоѓа во горниот лев агол (северозапад) на табелата земајќи

$$\bar{x}_{11} = \min\{a_1, b_1\}$$

т.е. ако $a_1 \leqslant b_1$, тогаш $\bar{x}_{11}=a_1$ и $x_{1j}=0, j=2,3,\dots,n;$

ако $a_1 \geqslant b_1$, тогаш $\bar{x}_{11}=b_1$ и $x_{i1}=0, i=2,3,\dots,m.$

1° Да претпоставиме дека $a_1 \leqslant b_1$. Значи $\bar{x}_{11}=a_1$ и $\bar{x}_{1j}=0$, $j=2,3,\dots,n.$ Тогаш табелата се трансформира вака:

$$\begin{array}{cccc|c} x_{11}=a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} & a_m \\ \hline \cancel{b_1} a_1 & b_2 & \dots & b_n & \end{array}$$

Сега, општото количество на производот (јагленот во нашиот пример) кое се испраќа од првата отпремна точка (R_1 во нашиот случај) е сведено на нула, а општото количество на производот кое треба да стаса во првата точка на назначување (градот G_1) е b_1-a_1. Потоа наоѓаме вредност на променливата x_{21} , која е во горниот лев агол на втората табела, $\bar{x}_{21}=\min\{a_2, b_1-a_1\}$.

2° Нека е $a_2 \geqslant b_1-a_1$, тогаш $\bar{x}_{21}=b_1-a_1$ и $\bar{x}_{i1}=0, i=3,4,\dots,m.$

Во согласност со тоа формираме нова табела:

$\bar{x}_{11}=a_1$	0	$\dots$	0	0
$\bar{x}_{21}=b_1-a_1$	x_{22}	$\dots$	x_{2n}	$a_2-(b_1-a_1)$
0	x_{32}	$\dots$	x_{3n}	a_3
$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
0	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}	a_m
0	b_2	$\dots$	b_n	

Сега количеството производ кое треба да се испрати од втората отпремна точка изнесува $a_2-(b_1-a_1)$, потребите на првата точка на назначување се задоволени (сведени на нула) .

Наоѓаме вредност за променливата x_{22} во горниот лев агол на погорната табела

$$\bar{x}_{22}=\min\{a_2-(b_1-a_1),b_2\}.$$

3°. Нека $a_2-(b_1-a_1)\leqslant b_2$. Тогаш $\bar{x}_{22}=a_2-(b_1-a_1),\bar{x}_{23}=\dots=x_{3n}=0$, количеството производ во втората отпремна точка е сведено на нула, потребите на втората точка на назначување сега изнесуваат $b_2-(a_2-b_1+a_1)$ и во согласност со тоа се пополнува наредната табела:

$\bar{x}_{11}=a_1$	0	$\dots$	0	0
$\bar{x}_{21}=b_1-a_1$	$\bar{x}_{22}=a_2-b_1+a_1$	$\dots$	0	0
0	x_{32}	$\dots$	x_{3n}	a_3
$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	$\cdot$
0	x_{m2}	$\dots$	x_{mn}	a_m
0	$b_2-(a_2-b_1+a_1)$	$\dots$	b_n	

На сличен начин се извршуваат наредните постапки. Во секоја постапка одредуваме вредност на една променлива x_{ij} така што ги сведуваме на нула или резервите на i- та отпремна точка, или потребите на j-та точка на назначување.

Забележуваме дека секоја ненулта вредност $\bar{x}_{ij}$ се добива со сумирање или вадење на различни комбинации на величините a_i и b_j. Затоа ако првобитно сите a_i, b_j се природни броеви, тогаш и програмот добиен како резултат на погорниот процес ќе има ненегативни цели компоненти $\bar{x}_{ij}$. Не е тешко да се уочи дека овој програм има најмногу $m+n-1$ позитивни компоненти.

Се покажува дека вектор колоните на системот ограничувања на транспортниот проблем соодветни на позитивните компоненти на програмот

$$\bar{x}^T=[\bar{x}_{11}\ \bar{x}_{12}\ \dots\ \bar{x}_{mn}]$$

добиен со примена на правилото на северозападниот агол се линеарно независни. Значи $\bar{x}$ е базен програм.

Теорема 3. Транспортниот проблем има оптимален програм.

Доказ: Согласно теоремата 1 множеството допустиви решенија на транспортниот проблем не е празно. Ова множество е и ограничено бидејќи за произволно допустиво решение $\bar{x}$ компонентите x_{ij} можат да бидат најмногу еднакви на помалите броеви од паровите (a_i, b_j). Значи проблемот има конечен оптимален програм.

Јасно е дека транспортниот проблем, како LP проблем чиј систем ограничувања се состои од $m+n-1$ независни равенки со $m.n$ променливи, може да се реши применувајќи ја методата симплекс. Меѓутоа, дури и за мали броеви m и n се добива гломазен систем на равенки, кој е многу незгоден за извршување на пресметувањата.

2. Метода за решавање на транспортниот проблем

Формулацијата на транспортниот проблем како LP проблем ја даде американскиот математичар G.B.Dantzig, авторот на методата симплекс. Тој исто така предложил и метода за решавање на транспортниот проблем.

Dantzig покажал дека за произволен базен програм $\bar{x}$ на транспортниот проблем можеме да најдеме такви броеви u_i и v_j што за сите компоненти $\bar{x}_{ij}$ на базниот програм соодветни на базните вектори ќе важат равенствата:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Dantzig исто така докажал дека ако

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j$$

за сите комбинации (i,j) соодветни на слободните променливи x_{ij}, и разликата

$$\bar{c}_{ij} - c_{ij} \leqslant 0,$$

тогаш разгледуваниот базен програм $\bar{x}$ е оптимален. Ако овој услов за оптималност не е исполнет, тогаш може да се добие нов, подобар базен програм.

Пресметувачката процедура на Dantzig овозможува наоѓање на базни програми без составување на симплекс табела и нивно испитување во однос на оптималност $(z_{ij} - c_{ij} \leqslant 0)$, без претходно разложување на слободните вектори по базните вектори на системот ограничувања. Оваа процедура ќе ја илустрираме на следниот нумерички пример за 3×4 транспортен проблем:

Нека во три отпремни точки стојат на располагање соодветно $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$ единици на некој хомоген производ, кој треба да се испрати во четири точки на назначување, чии побарувачки се соодветно $b_1 = 4$, $b_2 = 6$, $b_3 = 8$, $b_4 = 6$. Забележуваме дека $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 24$.

Трошоците за превоз на единица производ од секоја отпремна точка до секоја точка на назначување се дадени во следната табела:

точки на назначување

отпремни точки	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	4	3	2	0
3	0	2	2	1

$= [c_{ij}]$

На пример трошокот за превоз единица производ од третата отпремна точка до втората точка на назначување е $c_{32} = 2$. Во општ случај величините [illegible] можат да бидат произволни реални броеви.

За да најдеме почетен базен програм $\overline{x}_{ij}, i=1,2,3;\ j=1,2,3,4$ го применуваме правилото на северзоападниот агол. Ја составуваме табелата:

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	6
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	8
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	10
4	6	8	6	

Бидејќи

$$\min\{a_1, b_1\} = \min\{6,4\} = 4$$

земаме

$$\overline{x}_{11}=4,\ \overline{x}_{21}=\overline{x}_{31}=0$$

со што потребите на првата точка на назначување се сведени на нула, а резервите на првата отпремна точка се смалени за четири единици и сега изнесуваат $a_1-b_1 = 2$ единици. Ја формираме табелата:

4	x_{12}	x_{13}	x_{14}	2
0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	8
0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	10
0	6	8	6	

Сега наоѓаме

$$\min\{a_1-b_1, b_2\}=\min\{2,6\} = 2.$$

Значи треба да земеме:

$$\overline{x}_{12}=2,\ \overline{x}_{13}=\overline{x}_{14}=0$$

и согласно тоа да ја трансформираме последната табела. Добиваме:

4	2	0	0	0
0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	8
0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	10
0	4	8	6	

Сите наредни постапки ги изведуваме без посебен коментар

$\min\{4,8\}=4$ имплицира $\overline{x}_{22}=4$, $\overline{x}_{32}=0$

4	2	0	0	0
0	4	x_{23}	x_{24}	4
0	0	x_{33}	x_{34}	10
0	0	8	6	

$\min\{4,8\}=4$ имплицира $\overline{x}_{23}=4$, $\overline{x}_{24}=0$.

4	2	0	0	0
0	4	4	0	0
0	0	x_{33}	x_{34}	10
0	0	4	6	

$\min\{10,4\}=4$ имплицира $\overline{x}_{33}=4$.

4	2	0	0	0
0	4	4		
0	0	4	x_{34}	6
0	0	0	6	

Земајќи $\overline{x}$ = 6, имаме почетен базен програм:

$$[x_{ij}]=\begin{array}{|c|c|c|c|c}\hline 4 & 2 & 0 & 0 & 6\\ \hline 0 & 4 & 4 & 0 & 8\\ \hline 0 & 0 & 4 & 6 & 10\\ \hline 4 & 6 & 8 & 6 & \end{array}$$

Вредноста на функцијата на целта за овој програм е:

$$\overline{z}=c_{11}\overline{x}_{11}+c_{12}\overline{x}_{12}+c_{13}\overline{x}_{13}+c_{14}\overline{x}_{14}+c_{21}\overline{x}_{21}+c_{22}\overline{x}_{22}+c_{23}\overline{x}_{23}+c_{24}\overline{x}_{24}+$$
$$+c_{31}\overline{x}_{31}+c_{32}\overline{x}_{32}+c_{33}\overline{x}_{33}+c_{34}\overline{x}_{34}=42.$$

Добиениот бавен програм е недегенериран (во случај на дегенерација за небазна се зема онаа променлива x_{ij}, од можните, на која и́ одговара најголемо c_{ij}). За позитивните компоненти на базниот програм треба да се одредат $m=3$ броеви u_i и $n=4$ броеви v_j така што

$$
\begin{aligned}
u_1+v_1&=c_{11}=1\\
u_1+v_2&=c_{12}=2\\
u_2+v_2&=c_{22}=3\\
u_2+v_3&=c_{23}=2\\
u_3+v_3&=c_{33}=2\\
u_3+v_4&=c_{34}=1
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Овој систем е составен од 6 линеарно независни равенки со 7 непознати. Значи тој има бесконечно многу решенија. За да најдеме едно решение, произволно бираме една од променливите u_i или v_j да е еднаква на соодветниот број c_{ij}. Со тоа бројот на непознатите во системот е намален за 1 и тогаш вредностите на овие непознати што го задоволуваат системот се еднозначно одредени. Избираме на пример $u_1=c_{11}=1$. Тогаш вредностите на останатите променливи, кои го задоволуваат погорниот систем се:

$$v_1=0,\ v_2=1,\ u_2=2,\ u_3=2,\ v_3=0,\ v_4=-1.$$

Наоѓањето на овие вредности може да се врши на многу едноставен начин во една табела, која првобитно ги содржи транспортните трошоци соодветни на базните компоненти на дадениот програм:

u \ v				
	1	2		
		3	2	
			2	1

Земајќи $u_1 = 1$, се пресметуваат останатите u_i и v_j и се сместуваат во соодветните позиции на табелата. Така се добива табелата

u \ v	0	1	0	−1
1	1	2		
2		3	2	
2			2	1

Бидејќи сите равенки на системот (6) се задоволени за најдените u_i и v_j точно е $u_i+v_j=c_{ij}$ за сите парови (i,j) соодветни на базните променливи x_{ij}. Потоа, ги пресметуваме вредностите

$$\bar{c}_{ij}=u_i+v_j$$

за сите останати комбинации (i,j) и ги сместуваме на ним соодветните места во табелата на индиректните трошоци ($\bar{c}_{ij}=c_{ij}$ за сите базни $\bar{x}_{ij}$):

$[\bar{c}_{ij}] =$

1	2	1	0
2	3	2	1
2	3	2	1

На пример $c_{14}=u_1+v_4=1-1=0$.

Ги наоѓаме разликите $\bar{c}_{ij}-c_{ij}$. Ако сите $\bar{c}_{ij}-c_{ij}\leqslant 0$, тогаш разгледуватниот баезен програм е оптимален. Ако постои барем една разлика $\bar{c}_{ij}-c_{ij}>0$ (како што е во нашиот случај), тогаш можеме да најдеме нов, подобар базен програм, правејќи ја базна слободната променлива x_{ij} за која е $\bar{c}_{ij}-c_{ij}>0$. Како и во обичната симплекс метода од сите можни кандидати за влез во базата се зема оној вектор (колона α_{ij} на системот ограничувања), кој одговара на

$$\max\{\bar{c}_{ij}-c_{ij}\}=c_{31}-c_{32}=2-0=2.$$

Значи x_{31} треба да е нова базна променлива (во случај максимумот да не е еднозначно одреден, од сите можни, за базна се зема онаа x_{ij} на која й одговара најмал c_{ij}).

Се враќаме на табелата на првиот базен програм и воведуваме засега непозната ненегативна вредност θ_1 за променливата x_{31}. Бидејќи сумите на елементите во секој ред и секоја колона треба да се еднакви на соодветните вредности a_i и b_j потребно е θ_1 да се додаде или извади од секои x_{ij} на следниот начин:

$4-\theta_1$	$2+\theta_1$			6
	$4-\theta_1$	$4+\theta_1$		8
θ_1		$4-\theta_1$	6	10
4	6	8	6	

Величината θ_1 е ограничена со оние $\bar{x}_{ij}$ од кои таа се вади, θ_1 несмее да е поголема од најмалата меѓу нив. Во нашиот случај θ_1 несмее да е поголема од 4. Бидејќи сакаме една стара базна променлива да стане слободна (да добие вредност нула), земаме $\theta_1=4$. Тогаш

$$\bar{x}_{11}-\theta_1=\bar{x}_{22}-\theta_1=\bar{x}_{33}-\theta_1=4-\theta_1$$

се анулираат истовремено и затоа новиот базен програм е дегенериран (тој има само четири позитивни компоненти). За да имаме базен програм со $m+n-1=6$ ненегативни компоненти, ги задржуваме за базни оние две нулти компоненти, на кои им одговараат помали вредности c_{ij} (во нашиот случај x'_{11}, x'_{33}):

$[x'_{ij}]=$

0	6			6
		8		8
4		0	6	10
4	6	8	6	

Новата вредност на функцијата на целта е

$$z'=42-(\bar{c}_{31}-c_{31})\theta_1=34.$$

Двојките (u_i, v_j) и сите $\bar{c}'_{ij}$ за новиот базен програм се дадени во следната табела:

$[\bar{c}'_{ij}]=$

u \ v	0	1	2	1
1	1	2	3	2
0	0	1	2	1
0	0	1	2	1

Очигледно

$$\max\{\bar{c}'_{ij}-c_{ij}>0\}=\bar{c}'_{24}-c_{24}=1-0=1,$$

значи x_{24} треба да стане нова базна променлива. Внесувајќи θ_2 во позицијата (2,4) потребно е да се додаде или извади θ_2 од вредностите x'_{ij} на следниот начин:

0	6			6
		$8-\theta_2$	θ_2	8
4		$0+\theta_2$	$6-\theta_2$	10
4	6	8	6	

Во овој случај θ_2 може да биде најмногу 6. За $\theta_2 = 6$ променливата x_{34} станува нова слободна променлива, а x_{24} е нова базна променлива со вредност $\theta_2 = 6$. Значи новиот базен програм е:

$[x''_{ij}] =$

0	6			6
		2	6	8
4		6		10
4	6	8	6	

Новата вредност на функцијата на целта е $z''=34-(\bar{c}'_{24}-c_{24})\theta_2=28$.

Двојките (u_i, v_j) и вредностите $\bar{c}''_{ij}$ за новиот програм се:

$[\bar{c}''_{ij}] =$

u \ v	0	1	2	0
1	1	2	3	1
0	0	1	2	0
0	0	1	2	0

Сега сите $\bar{c}''_{ij} - c_{ij} \leqslant 0$ значи последниот базен програм (дегенериран):

$$x''_{11}=0,\ x''_{12}=6,\ x''_{23}=2,\ x''_{24}=6,\ x''_{31}=4,\ x''_{33}=6\ ,$$

сите други $x''_{ij}=0$, е оптимален; оптималната вредност на функцијата на целта е $z''=28$. Забележуваме дека $\bar{c}''_{13}-c_{13}=0$ иако x_{13} не е базна променлива. Затоа, можеме да добиеме нов базен оптимален програм правејќи ја x_{13} нова базна променлива. Внесувајќи θ_3 во позицијата (1,3) добиваме:

$0-\theta_3$	6	θ_3		6
		2	6	8
$4+\theta_3$		$6-\theta_3$		10
4	6	8	6	

За $\theta_3 = 0$ имаме нов (дегенериран) базен програм:

$$[x'''_{ij}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
 & 6 & 0 & & 6 \\
\hline
 & & 2 & 6 & 8 \\
\hline
4 & & 6 & & 10 \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{8} & \multicolumn{1}{c}{6} &
\end{array}$$

Вредноста на функцијата на целта и за овој програм е 28.

Често пати се случува сумата на реверците во отпремните точки $A=a_1+....+a_m$ да е помала од општата побарувачка во точките на назначување $B=b_1+...+b_n$. Тогаш неможат да бидат задоволени сите потреби, но можеме да одредиме таков транспортен програм што сите резерви ке бидат испратени и притоа транспортните трошоци ке бидат минимални. За таа цел, се претпоставува дека постои фиктивна $m+1$ - ва отпремна точка, во која се концентрирани $B-A(>0)$ единици на хомогениот производ. Трошоците $c_{m+1,j}$ за превоз од фиктивната отпремна точка до секоја точка на назначување се земаат рамни на нула. Така, ако првобитниот проблем има димензии mxn, новиот транспортен проблем има димензии $(m+1)xn$:

точки на назначување

		1	2		n	
отпремни точки	1	c_{11}	c_{12}	......	c_{1n}	a_1
	2	c_{21}	c_{22}	......	c_{2n}	a_2
	.	.	.	......	.	.
	m	c_{m1}	c_{m2}	......	c_{mn}	a_m
	m + 1	0	0	......	0	B–A
		b_1	b_2	......	b_n	

Ако важи спротивното неравенство $B < A$, тогаш на сличен начин се составува проширена задача. Се воведува фиктивна точка на назначување со побарувачка $A-B(>0)$. Трошоците за превоз од сите отпремни точки до фиктивната точка на назначување се земаат рамни на нула. Така се добива транспортен проблем со димензии $m x(n+1)$:

точки на назначување

		1	2	....	n	n+1	
отпремни. точки	1	c_{11}	c_{12}	....	c_{1n}	0	a_1
	2	c_{21}	c_{22}	....	c_{2n}	0	a_2
	.	.	.	....	.	.	.
	m	c_{m1}	c_{m2}	....	c_{mn}	0	a_m
		b_1	b_2	....	b_n	$A-B$	

ЛИТЕРАТУРА

1. Дантзиг,Г.Б.: Линејное программирование его применениja и обобштениja, "Прогресс", Москва 1966.

2. Гасс,С.:Линејное программирование, "Физматгиз", Москва,1961

3. Hadley,G.: Linear programming,Addison-Wesley Publishing Company, Inc.,1962.

4. К'нчев и други: Линејна алгебра и математическо програмирање, Издателство Варна,1971.

5. Radić,M.: Sistemi linearnih jednadžbi i linearno programiranje, "Školska Knjiga", Zagreb.

6. Simmonard,M.: Programmation Linéaire, Dunod,Paris,1962.

7. Чупона,Г.: Предавања по алгебра, кн.I, Унив.печат.,1968

И Н Д Е К С