Здравко Цветковски
Скопје

ОСНОВНИ НЕРАВЕНСТВА И НИВНА ПРИМЕНА

Почетни, елементарни факти кои претставуваат основа за докажување на неравенства се следниве:

1. Ако $x \geq y$ и $y \geq z$ тогаш $x \geq z$, за секои $x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Ако $x \geq y$ тогаш $x + z \geq y + z$, за секои $x, y, z \in \mathbb{R}$.
3. Ако $x \geq y$ и $a \geq b$ тогаш $x + a \geq y + b$, за секои $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.
4. Ако $x \geq y$ и $a \geq b$ тогаш $xa \geq yb$, за секои $x, y, a, b \in \mathbb{R}^{+}$.
5. Ако $x \in \mathbb{R}$ тогаш $x^2 \geq 0$, при што $x^2 = 0$ акко $x = 0$.

Овие својства се очигледни и едноставни, но претставуваат моќна алатка при докажување на неравенства, особено Својството 5, кое се употребува во многу случаи.

Ќе дадеме неколку примери со кои ќе ја илустрираме јачината на *Својството 5*. Најпрво ќе докажеме неколку "почетни" неравенства кои се неопходни за целосна и темелна надградба на секој ученик, кој е заинтересиран за оваа област.

За докажување на овие неравенства доволно е да се знаат елементарните неравенства, кои можат да се искористат во одреден дел од доказот на дадено неравенство. Но пред се, се користат основни елементарни операции.

Задача 1. Да се докаже дека за секој реален број $x > 0$, важи неравенството

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Решение. Од очигледното неравенство $(x-1)^2 \geq 0$ имаме

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x,$$

и бидејќи $x > 0$ ако поделиме со x го добиваме бараното неравенство. Равенство важи акко $x - 1 = 0$ т.е. $x = 1$. ■

Задача 2 Ако $a, b \in \mathbb{R}^{+}$. Да се докаже неравенството $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Решение. Од очигледното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$ имаме

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; a^2+b^2 \geq 2ab \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 .$$

Равенство важи акко $a-b=0$ т.е. $a=b$. ■

Задача 3. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}$. Да се докаже неравенството

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca .$$

Решение. Од $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ имаме

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca .$$

Равенство важи акко $a=b=c$. ■

Задача 4. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}$. Да се докажат неравенствата

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) .$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} 3(ab+bc+ca) &= ab+bc+ca+2(ab+bc+ca) \\ &\leq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &\leq a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2) \\ &= 3(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

Равенства важат акко $a=b=c$. ■

Задача 5. Нека $a,b,c \in \mathbb{R}^+$ за кои важи $a+b+c=6$. Да се докаже неравенството

$$a^2+b^2+c^2 \geq 12 .$$

Решение. Од *Задача 4*. имаме дека важи

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 = 36 .$$

Од каде лесно добиваме $a^2+b^2+c^2 \geq 12$.

Равенство важи акко $a=b=c=2$. ■

Задача 6. Нека $x,y \in \mathbb{R}$. Да се докаже дека важи неравенството

$$x^4+y^4+4xy+2 \geq 0 .$$

Решение. Имаме

$$x^4+y^4+4xy+2=(x^4-2x^2y^2+y^4)+(2x^2y^2+4xy+2)$$
$$=(x^2-y^2)^2+2(xy+1)^2\geq 0$$

што и требаше да се докаже.

Равенство важи акко $x=1$, $y=-1$ или $x=-1$, $y=1$. ■

Задача 7. Да се докаже дека за секој реален број x важи неравенството

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Решение. Ќе разгледаме два случаи: $x<1$ и $x\geq 1$.

1° Нека $x<1$. Имаме

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+(x^4-x^9)+(1-x).$$

Бидејќи $x<1$ важи $1-x>0$ и $x^4>x^9$ т.е. $x^4-x^9>0$, па во овој случај

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$$

т.е. неравенството е точно.

2° За $x\geq 1$ имаме

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^8(x^4-x)+(x^4-x)+1$$
$$=(x^4-x)(x^8+1)+1$$
$$=x(x^3-1)(x^8+1)+1$$

Поради $x\geq 1$ имаме $x^3\geq 1$ односно $x^3-1\geq 0$ од каде следува дека

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Со ова задачата е решена. ■

Задача 8. Да се докаже дека за секој реален број x важи неравенството

$$2x^4+1\geq 2x^3+x^2.$$

Решение. Имаме

$$2x^4+1-2x^3-x^2=1-x^2-2x^3(1-x)=(1-x)(1+x)-2x^3(1-x)$$
$$=(1-x)(x+1-2x^3)$$
$$=(1-x)(x(1-x^2)+1-x^3)$$
$$=(1-x)(x(1-x)(1+x)+(1-x)(1+x+x^2))$$
$$=(1-x)((1-x)(x(1+x)+1+x+x^2))$$
$$=(1-x)^2((x+1)^2+x^2)\geq 0$$

Равенство важи акко $x=1$.■

Задача 9. Да се докаже дека за секои реални броеви x,y,z важи неравенството

$$x^4+y^4+z^2+1\geq 2x(xy^2-x+z+1).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}x^4+y^4+z^2+1-2x(xy^2-x+z+1)&=\\&=(x^4-2x^2y^2+x^4)+(z^2-2xz+x^2)+(x^2-2x+1)\\&=(x^2-y^2)^2+(x-z)^2+(x-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

од каде следува бараното неравенство.

Равенство важи акко $x=y=z=1$ или $x=z=1$, $y=-1$. ■

Задача 10. Ако $a,b\in\mathbb{R}^+$. Да се докаже неравенството

$$a^2+b^2+1\geq a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}.$$

Решение. Од очигледното неравенство

$$(a-\sqrt{b^2+1})^2+(b-\sqrt{a^2+1})^2\geq 0 \tag{1}$$

се добива бараното неравенство.

Равенство важи акко

$$a=\sqrt{b^2+1}\text{ и } b=\sqrt{a^2+1}\text{ т.е. } a^2=b^2+1\text{ и } b^2=a^2+1,$$

што не е можно, т.е. во неравенството (1) важи стриктно неравенство. ■

Задачи за вежбање

Задача 1. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$. Да се докаже неравенството

$$a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c).$$

Задача 2. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ се такви што $x+y+z=3$. Да се докаже дека важи неравенството

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx.$$

Задача 3. Нека $a,b,c\in\mathbb{R}$ се такви што $a+b+c\geq abc$. Да се докаже дека важи неравенството

$$a^2+b^2+c^2\geq\sqrt{3}abc.$$

Забелешка. Статијата првично е објавена во НУМЕРУС.