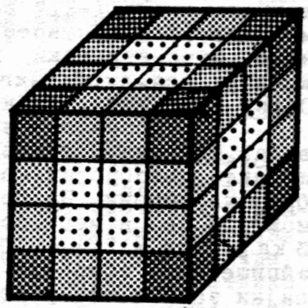
ДРАГОЉУБ МИЛОШЕВИЌ
П Р А Њ А Н И

ЕДЕН ПРОБЛЕМ НА ДЕЛБА ВО ВРСКА СО КОЦКА

Должините на работ на коцката нека се x dm ($x \in \mathbb{N}$ и $x \geq 2$). Таа коцка нека е обоена однадвор, а потоа изрежана на кубни дециметри. На тој начин се добиваат x^3 коцкички.



Бидејќи секое теме на коцките е заедничка точка на три нејзини страни, бројот на коцкичките обоени од трите страни е еднаков со бројот на нејзините темиња, т.е. 8.

По еден коцкин раб постојат коцкички обоени од две страни. Ги има x. Меѓутоа, бидејќи две веќе се порано сметани (како обоени по три страни), бројот на коцкичките обоени само по две страни ќе биде $x-2$. Според бројот на рабовите вкупниот број на таквите коцкички е $12(x-2)$.

По една страна на коцките има x^2 коцкички, а веќе пресметавме $4+4(x-2)$, т.е. $4(x-1)$ коцкички, тогаш бројот на оние коцкички што се обоени само по едната страна е $x^2-4(x-1)$, односно $(x-2)^2$. Поради бројот на коцкините страни, вкупниот број на овие коцки е $6(x-2)^2$.

Преостанатите коцкички се во внатрешниот дел и сите се необоени. Ги има $(x-2)^3$.

Проблемот, во врска со тоа, е расчленет на неколку теореми.

ТЕОРЕМА 1. - Ако нема необоени коцкички, тогаш сите коцкички се обоени по три страни.

Според условот на теоремата е $(x-2)^3=0$, од каде што произлегува $x-2=0$, т.е. $x=2$. Бидејќи $x=2$, тогаш вкупниот број на коцкичките е $2^3=8$. Бидејќи бројот на коцкичките обоени по три страни секогаш е 8, значи дека и наведената теорема е оправдана.

Во натамошното разгледување ќе земеме предвид само случаи кога бројот на коцкичките е поголем од 8, т.е. ако $x > 2$.

ТЕОРЕМА: 2. - Бројот на необоените коцкички не може да биде еднаков со бројот на коцкичките обоени само по две страни.

ДОКАЗ: Кога би важело спротивното, би било $(x-2)^3=12(x-2)$, т.е. $(x-2)^2=12$ (при $x \neq 2$), што е невозможно (затоа што не постои цел број чиј што квадрат е еднаков на 12).

ТЕОРЕМА 3. - Ако бројот на необоените коцки е к пати помал од бројот на коцкичките обоени само по две страни, тогаш е к=3 или к=12.

ДОКАЗ: Претпоставката имплицира $к(x-2)^3 = =12(x-2)$, односно $(x-2)^2=\frac{12}{к}$ (за $x \neq 2$). Бидејќи $\frac{12}{к}$ задолжително треба да претставува квадрат на природен број, тогаш к може да има вредност само 3 или 12, што требаше да се докаже.

ТЕОРЕМА 4. - Ако бројот на коцкичките обоени само по една страна е s пати поголем од бројот на необоените, тогаш s е делител на бројот 6.

Имаме: $6(x-2)^2=s(x-2)^3$, т.е. $x-2=\frac{6}{s}$ (за $x \neq 2$). Бидејќи s и x се природни броеви, тогаш s може да биде еден од броевите: 1, 2, 3 или 6. Со ова доказот е завршен.

***

Задачите во врска со овој напис се поместени на страна 17.

1. Бројот на коцкичките обоени само по една страна е еднаков со бројот на коцкичките обоени само по две страни.

Колку има необоени коцкички?

2. Ако бројот на необоените коцкички е за 50% поголем од бројот на коцкичките обоени само по една страна, тогаш вкупниот број на коцкичките е 1331. Докажи!

3. Нека бројот на необоените коцкички е p пати поголем од бројот на коцкичките обоени само по две страни.

а) Определи ја секоја вредност за p помала од 30.

б) За најмалата вредност од p пресметај го бројот на коцкичките обоени само по една страна.

4. Бројот на коцкичките обоени само по една (две) страни не може да биде 8. Докажи!

5. Ако бројот на коцкичките обоени само по една страна е n пати помал од оние што се обоени само по две страни, тогаш n = 2. Докажи!

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус