Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1998/99 година

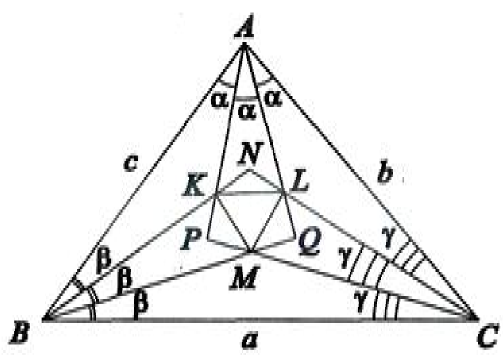
МОРЛИЈЕВА ТЕОРЕМА ЗА ТРОУГАО

Миомир Анђић, Беране

1. Увод. Чланак који слиједи односи се на један проблем везан за троугао, који је стар 100 година. Тачније, тврђење које слиједи носи назив Морлијева теорема, названа тако према америчком математичару Ф. Морлију. Доказана је 1899. године, али не знамо како. Његова формулација је проста, али доказ није тако очигледан. Извешћемо га користећи тригонометрију.

2. Тврђење. Сусједне трисектрисе (двије полуправе које садрже тјеме угла и исти дијеле на три једнака дијела) унутрашњих углова произвољног троугла сијеку се у тјеменима једнакостраничног троугла (пресјечне тачке нијесу тјемена полазног троугла).

Доказ. Уводећи ознаке као на слици 1, при чему је $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$ и примјењујући синусну теорему на троуглове ABC и ABK имамо $\frac{c}{\sin 3\gamma} = 2R$ и $\frac{c}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))} = \frac{|AK|}{\sin\beta}$, гдје је R дужина полупречника кружнице описане око троугла ABC.



Сл. 1

Коришћењем једнакости $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\sin 3\alpha = \sin\alpha(3\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)$ и $4\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha) = 3\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$, из последње двије релације слиједи

$$\begin{aligned} |AK| &= 2R\frac{\sin\beta\cdot\sin 3\gamma}{\sin(\alpha+\beta)} = \\ &= 2R\frac{\sin\beta\cdot\sin 3\gamma}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2R\sin\beta\sin\gamma\frac{(3\cos\gamma^2-\sin\gamma^2)}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)} = \\
&= 2R\sin\beta\sin\gamma\cdot 4\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)\cdot\frac{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)} = \\
&= 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma).
\end{aligned}$$

Аналогно добијамо $|AL| = 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)$, одакле је

$$\frac{|AK|}{\sin(\frac{\pi}{3}+\gamma)} = \frac{|AL|}{\sin(\frac{\pi}{3}+\beta)} = 8R\sin\beta\sin\gamma.$$

Посматрајмо сада помоћни троугао IJX са унутрашњим угловима α, $\frac{\pi}{3}+\beta$, $\frac{\pi}{3}+\gamma$ у којем је страница наспрам угла $\frac{\pi}{3}+\gamma$ дужине $|AK|$. Примјењујући на тај троугао синусну теорему, добијамо да је он подударан троуглу AKL.

На основу тога слиједи, такође, да је $\frac{|KL|}{\sin\alpha} = 8R\sin\beta\sin\gamma$, тј.

$$|KL| = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Примјењујући исти поступак, од почетка, на троуглове ABC и ACL, а такође и на троуглове ABC и BCM имамо

$$|LM| = |MK| = 8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma,$$

одакле, заједно са претходном релацијом, слиједи да је троугао KLM једнакостраничан.

Напомена. На основу претходног је $\angle AKL = \frac{\pi}{3}+\beta$, а сличним расуђивањем је $\angle BKM = \frac{\pi}{3}+\alpha$. Како је $\angle AKB + \angle AKL + \angle LKM + \angle BKM = 2\pi$, то слиједи да је $\angle LKM = \frac{\pi}{3}$. Аналогно се добија $\angle KLM = \angle LMK = \frac{\pi}{3}$, одакле такође закључујемо да је трогао KLM једнакостраничан.

3. Примјери.

Примјер 1. Користећи слику 1 доказати да су троуглови KLN, LMQ и KMP једнакокраки (и ово је једна од Морлијевих теорема).

Примјер 2. Морлијеву терему доказати елементарним путем.

Примјер 3. Сваки унутрашњи угао конвексног четвороугла је полуправама подијељен на 4 једнака угла. Спољашње полуправе, поред тјемена четвороугла, сијеку се у тјеменима новог четвороугла. Да ли је тај нови четвороугао ромб?

Примјер 4. Распоредити 6 тачака у равни тако да одређују максималан број дужи које немају заједничких унутрашњих тачака. Који је то број?