СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 15 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке? *Алексей Толпыго*
4	2. Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, его стороны AB и CD параллельны. Известно, что углы DAC и ABD равны, а также углы CAB и DBC равны. Обязательно ли $ABCD$ — квадрат? *Александр Тертерян*
5	3. У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил? *Татьяна Казицына*
5	4. По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023? *Сергей Дворянинов*
5	5. Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 — чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник? *Николай Чернятьев*

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 15 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
3	1. Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(-x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов $a_n, \ldots, a_1, a_0$ (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон? *Борис Френкин*
4	2. На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки? *Александр Юран*
4	3. Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра — какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}? *Павел Кожевников*
5	4. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P — произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' — проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP. *Алексей Заславский*
6	5. У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок — многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил? *Татьяна Казицына*

45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

Решения задач осеннего тура

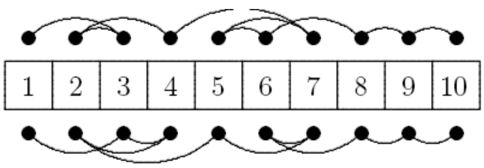
Базовый вариант

Младшие классы

1. [4] На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

Алексей Толпыго

Ответ: не обязательно. **Решение**. На рисунке проход Ани указан над полосой, а проход Вари – под полосой.

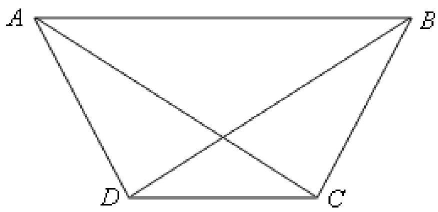


Замечание. Разумеется, есть и другие примеры: скажем, Аня могла прыгать в порядке 1-6-3-7-5-9-8-4-2-10, а Варя – в порядке 1-6-9-5-3-7-8-4-2-10.

2. [4] Четырёхугольник *ABCD* выпуклый, его стороны *AB* и *CD* параллельны. Известно, что углы *DAC* и *ABD* равны, а также углы *CAB* и *DBC* равны. Обязательно ли *ABCD* – квадрат?

Александр Тертерян

Ответ: не обязательно. **Решение**. Пусть *A*, *D*, *C*, *B* – последовательные вершины правильного шестиугольника. Тогда *ABCD* – равнобедренная трапеция (половина правильного шестиугольника), и все упомянутые в условии углы равны 30°.

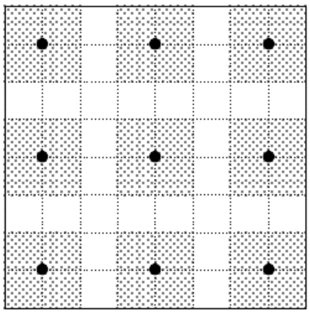


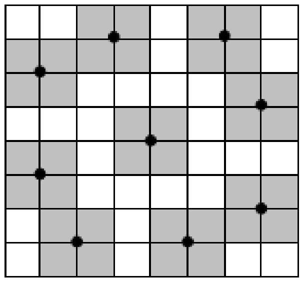
Замечание: четырёхугольник из условия может быть любой равнобедренной трапецией, у которой одно из оснований равно боковой стороне, или квадратом. Других вариантов нет.

3. [5] У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына

Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке слева. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Поэтому никакие две утащенные вороной ягоды не могут лежать внутри одного участка – ведь участок имеет площадь 8 клеток и состоял бы тогда ровно из двух таких квадратов, а они не образуют многоугольник.





Замечание. Возможен и пример, аналогичный примеру из решения задачи 5 старших классов (рисунок справа).

4. [5] По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

Сергей Дворянинов

Ответ: не может. **Решение.** Рассмотрим любые два соседних числа, пусть a – меньшее из них. Тогда большее равно либо $2a$, либо $5a$, и вместе с меньшим оно даёт либо $3a$, либо $6a$. Значит, сумма любых двух соседних чисел кратна 3. Дальше можно рассуждать по-разному.

1-й способ. Найдём для каждого числа сумму его и следующего за ним по часовой стрелке, и все эти суммы сложим. Получим, что удвоенная сумма всех чисел кратна 3. Значит, она не может равняться 4046.

2-й способ. Найдём для каждого числа его отношение к следующему за ним по часовой стрелке. Каждое такое отношение равно одному из чисел 2, ½, 5, 1/5, а произведение всех таких отношений равно 1. Значит, двоек среди этих отношений столько же, сколько и чисел ½, а пятёрок – столько же, сколько чисел 1/5 (по основной теореме арифметики). Тогда общее количество чисел чётно и их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3.

3-й способ. Если общее количество чисел чётно, то их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3. Если общее количество чисел нечётно, то выберем любое число x из них, а остальные разобьём на пары соседних с суммой, кратной 3. Получим, что x имеет такой же остаток от деления на 3, что и общая сумма 2023, то есть остаток 1. Но в качестве x можно взять любое из чисел, поэтому все они имеют остаток 1 от деления на 3. Тогда сумма двух соседних имеет остаток 2 от деления на 3, а должна делиться на 3 – противоречие.

5. [5] Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Николай Чернятьев

Ответ: Вася. **Решение**. Назовём башенку *белой*, если её нижний и верхний кубики белые, и *бело-чёрной*, если её нижний кубик белый, а верхний чёрный. Аналогично определяются чёрная и чёрно-белая башенки. В начале игры имеется 50 белых и 50 чёрных башенок. Петя из белой и чёрной башенок соберёт *разноцветную* (*чёрно-белую* или *бело-чёрную*). В любом случае Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеивает белую башенку. В результате остаются по 49 белых и чёрных башенок. Далее Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после своего хода две белые и две чёрные башенки. Петя своим ходом снова соберёт разноцветную башенку. Теперь Вася из оставшихся белой и чёрной башенок соберёт противоположную башенку (чёрно-белую, если Петя собрал бело-чёрную), и у Пети не будет хода.

Старшие классы

1. [3] Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(–x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов a_n, $\ldots$, a_1, a_0 (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?

Борис Френкин

Ответ: не ошибается. **Решение**. Отметим действительные корни многочлена $P(x) + P(–x)$ на координатной прямой. Поскольку $P(x) + P(–x)$ – чётная функция, отмеченные корни симметричны относительно нуля. Так как их нечётное количество, один из этих корней равен нулю. Тогда $2a_0 = P(0) + P(–0) = 0$, откуда $a_0 = 0$.

Замечание: никакой другой коэффициент не определён условием однозначно.

2. [4] На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?

Александр Юран

Ответ: не обязательно.

1-е решение. *Контрпример*. Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя – $\frac{1}{8}$ оборота, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на $\frac{3}{8}$ оборота против часовой стрелки. Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (то есть условия выполнены). Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, то есть все их встречи происходят через *чётное* число часов после «утра», и значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через *нечётное* число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

2-е решение. Пусть угловые скорости короткой, средней и длинной стрелок равны соответственно α, α + β и α + γ градусов в час (нам удобны именно эти обозначения, ведь β и γ окажутся относительными скоростями стрелок). Назовём утреннее направление короткой стрелки (совпадающее с направлением длинной) начальным. Пусть средняя в этот момент отстояла от начального направления на угол δ градусов по часовой стрелке.

Тогда через t часов после начального момента короткая стрелка отстоит от начального направления на αt градусов, средняя – на $(\alpha + \beta)t + \delta$ градусов, длинная – на $(\alpha + \gamma)t$ градусов.

Чтобы через 3 часа длинная и средняя стрелки совпали, достаточно выполнения равенства $3(\alpha + \gamma) = 3(\alpha + \beta) + \delta$, или, что то же самое, $\delta = 3(\gamma - \beta)$.

Аналогично, чтобы ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки совпали, достаточно того, чтобы $7\alpha = 7(\alpha + \beta) + \delta$, то есть, $\delta = -7\beta$.

Итого, для выполнения условия задачи достаточно выполнения равенств $\beta = -\frac{\delta}{7}$, $\gamma = \frac{10\delta}{21}$.

Докажем, что при иррациональном δ все три стрелки никогда не встретятся. Предположим противное. Чтобы три стрелки когда-нибудь встретились, необходимо и достаточно существования положительного вещественного числа T, для которого попарные разности чисел $((\alpha + \beta)T + \delta) - \alpha t$, и $(\alpha + \gamma)T - \alpha t$ оказались целыми числами, кратными 360. Иными словами, числа $\delta + \beta T$ и γT целые и кратны 360.

Подставим значения β и γ. Получим, что для некоторого T будут целыми числа $\delta(1 - \frac{T}{7})$ и $\delta(\frac{10T}{21})$. Отсюда отношение $\frac{\delta(1-\frac{T}{7})}{\delta(10\frac{T}{21})} = \frac{21}{10} \cdot \frac{1}{T} - \frac{3}{10}$ рационально. Но тогда и T рационально! Отсюда иррационально число $\delta(1 - \frac{T}{7})$ как произведение рационального и иррационального. Но оно должно быть целым. Противоречие.

3-е решение. Пусть p и q – произвольные различные действительные числа. Пусть «утром» длинная и короткая стрелки стартуют из одного положения и идут со скоростями p и q оборотов в час соответственно. Далее эти стрелки совпадают в точности в те моменты, когда более быстрая из них прошла на целое число оборотов больше, чем другая. Так как множество целых положительных чисел счётно, то и таких моментов счётно, а значит, множество положений в которых эти стрелки совпадают не более чем счётно (в случае, когда p/q рационально, этих положений конечное количество). Тогда пусть средняя стрелка неподвижно стоит в положении отличном от всех вышеописанных.

Теперь умножим скорости всех стрелок на одно и тоже положительное число (положения встреч длинной и коротких стрелок не поменяются) так, чтобы через q часов после «утра» длинная заняла положение средней. Тогда через p часов после «утра» короткая займёт это положение (отношение скоростей не поменялось). Теперь увеличим скорости всех стрелок на одно и то же положительное число, скорости станут ненулевыми, а даты встреч соответствующих стрелок не изменятся (в частности, не появится одновременной встречи всех стрелок). В частности, при $p = 7$, $q = 3$ получаем в точности ситуацию, описанную в условии.

3. [4] Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра – какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?

Павел Кожевников

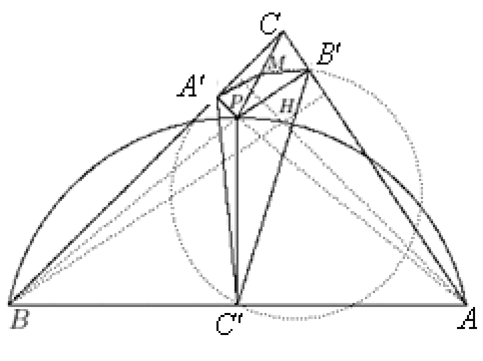
Ответ: 3^{100} чисел. **Решение**. Докажем по индукции, что есть ровно 3^n *хороших* n-значных чисел (кратных 2^n и составленных из указанных цифр). *База* ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Если у хорошего (n+1)-значного числа стереть первую цифру, получится хорошее n-значное число (поскольку, стирая цифру x, мы вычитаем из числа, кратного 2^{n+1}, число $x10^n$, кратное 2^n).

С другой стороны, хорошее n-значное число имеет вид $y2^n$. Приписывая к нему цифру x, мы добавляем число $(x5^n)2^n$, и сумма будет делиться на 2^{n+1} тогда и только тогда, когда число $y + x5^n$ чётно, то есть, когда $x+y$ чётно. Видно, что для чётных y в качестве x подходят в точности чётные цифры 2, 4, 6, а для нечётного y – в точности нечётные цифры 3, 5, 7. Значит, хороших (n+1)-значных чисел в 3 раза больше, чем хороших n-значных.

4. [5] Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P – произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' – проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP.

Алексей Заславский



Решение. Пусть M – середина CP. Точки A' и B' лежат на окружности с диаметром CP и центром в M, а вписанный в эту окружность угол $A'CB'$ острый, поэтому $\angle A'MB' = 2\angle BCA$ и M лежит от прямой $A'B'$ по ту же сторону, что и C. Так как P лежит внутри остроугольного треугольника, её проекции A', B', C' лежат внутри сторон, тогда четырёхугольники $AB'PC'$ и $BA'PC'$ вписанные.

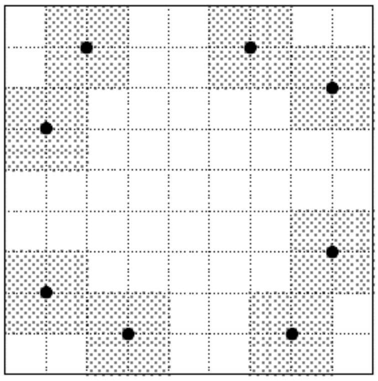
Используя равенства вписанных углов, имеем:

$180° - \angle A'C'B' = \angle AC'B + \angle BC'A = \angle BPA' + \angle APB' = 360° - \angle APB - \angle A'PB' =$
$= (180° - \angle AHB) + (180° - \angle A'PB') = \angle C + \angle C = 2\angle BCA$, откуда $\angle A'MB' + \angle A'C'B' = 180°$, то есть точки A', M', B', C' лежат на одной окружности, что и требовалось.

Замечание: Утверждение задачи остаётся верным для всякого треугольника ABC, в котором углы при вершинах A и B не прямые, и для произвольной точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABH и отличной от вершин треугольника ABC.

5. [6] У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына



Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Если участок содержит две утащенные вороной ягоды, он, кроме соответствующих квадратов 2×2, содержит тогда ещё ровно одну клетку (так как площадь участка равна 9). Но тогда эти квадраты 2×2 соприкасаются (иначе одной клетки не хватит, чтобы получить связный участок). В этом случае образуется примыкающий к углу поля изолированный участок, «отсечённый» этими двумя квадратами, в котором будет одна или две клетки, что невозможно (площади всех участков равны 9).

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи	
4	1.	В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую — число 6? *Егор Бакаев*
6	2.	В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади 1/6. *Александр Юран*
7	3.	Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку? *Алексей Глебов*
7	4.	Дан треугольник ABC с углом A, равным $60°$. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.) *Азамат Марданов*
9	5.	У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая — весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов — одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания. *Андрей Аржанцев*
10	6.	Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n-1$ горизонтальных разрезов и $n-1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.) *Георгий Караваев*
12	7.	В белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон? *Александр Грибалко*

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, …, 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных? *Алексей Глебов*
5	2.	Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз? *Алексей Глебов*
	3.	Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.
3	а)	Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?
6	б)	Может ли количество прямоугольников равняться 23? *Александр Шаповалов*
9	4.	Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $S/8$. *Михаил Малкин*
10	5.	Хорда DE описанной около треугольника ABC окружности пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно, точка P лежит между D и Q. В треугольниках ADP и QEC провели биссектрисы DF и EG. Оказалось, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности. Докажите, что точки A, P, Q, C лежат на одной окружности. *Азамат Марданов*
12	6.	Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора $\{1, \ldots, 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой? *Иван Кухарчук*
14	7.	На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n — по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее). *Александр Грибалко*

45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

Решения задач осеннего тура

Сложный вариант

Младшие классы

1. [4] В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую – число 6?

Егор Бакаев

Ответ. Могло. **Решение**. *Пример 1*. Раскрасив доску в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, сначала во все чёрные клетки впишем единицы, а во все белые – двойки. Затем заменим угловую единицу на 6, а соседнюю с ней двойку – на 5 (см. рисунок справа).

1	**2**	**1**
2	**1**	**2**
6	**5**	**1**

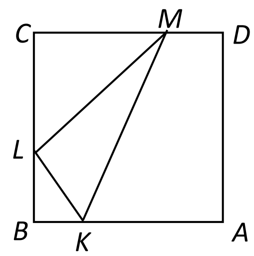
Пример 2 см. на рисунке ниже.

6	5	10	2	10	2	10	2
5	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10

2. [6] В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $^1/_6$.

Александр Юран

Решение 1. Возьмём точку внутри треугольника и спроектируем из неё вершины треугольника на контур квадрата *ABCD* и соединим проекции друг с другом. Получится новый треугольник, содержащий исходный. Если при этом две вершины нового треугольника окажутся на одной стороне квадрата, увеличим эту сторону треугольника так, чтобы она совпала со стороной квадрата (возможно, эту операцию придется повторить несколько раз). Достаточно доказать утверждение для последнего треугольника. Заметим, что *внутри* одной стороны квадрата (пусть AD) вершин треугольника нет. Поэтому можно считать, что вершины K, L, M треугольника лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD (см. рисунок; возможно некоторые из них совпадают с вершинами квадрата).



Один из отрезков BL, CL (пусть CL) не меньше $^1/_2$. Если при этом $CM \geq {}^2/_3$, то $S_{LCM} \geq {}^1/_6$. Если же $CM < {}^2/_3$, то $S_{ADM} \geq {}^1/_6$.

Решение 2. Отрежем от квадрата нижнюю треть отрезком YZ и соединим концы отрезка с серединой X стороны CD (рис. 1). Площади треугольников CXY и DXZ равны по 1/6, поэтому внутри каждого из них есть вершина дыры (иначе эти треугольники можно отрезать). Площади треугольников BYA и BZA также равны по 1/6, поэтому оставшаяся вершина дыры лежит в каждом из них, то есть, лежит внутри треугольника BTA. Построив на каждой стороне квадрата такой треугольник (рис. 2), аналогично докажем, что внутри каждого из них лежит вершина дыры, что невозможно, так как треугольников четыре, а вершин три.

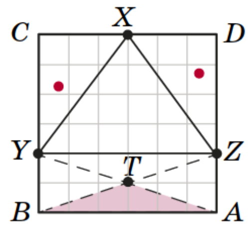


Рис. 1

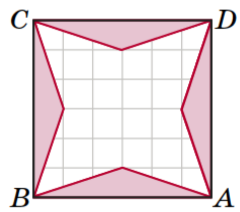


Рис. 2

3. [7] Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

Алексей Глебов

Ответ. За 3 хода. **Решение**. Будем изображать карточку в виде пары (a, b), где $a < b$. Пусть надо из (a, b) получить (c, d). Умножим первую карточку на разность $d - c$ чисел на второй карточке, получим карточку $(a(d - c), b(d - c))$. Вторым ходом получим из неё карточку $(c(b - a), d(b - a))$. Это можно сделать с помощью сложения, так как разность между нижним и верх-ним числами на каждой из этих карточек равна $(b - a)(d - c)$. Третьим ходом делим на разность $b - a$.

Докажем, что из карточки (1, 3) нельзя получить карточку (1, 4) меньше, чем за три хода. Для нашей карточки первый ход – прибавление натурального числа или умножение (так как на ней есть 1).

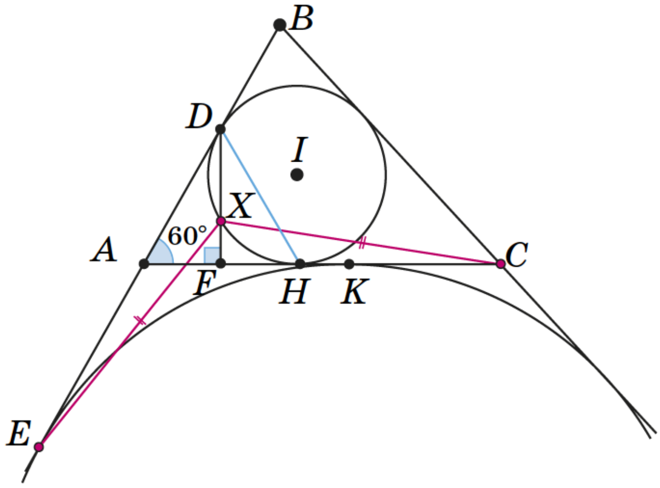
В первом случае разность чисел на карточке останется равной 2, и за одно деление или умножение получить разность 3 нельзя (разность умножится или разделится на целое число); сложение разность вообще не изменит.

Во втором случае, чтобы изменить отношение чисел на карточке с 3 на 4, придётся вторым ходом использовать вычитание, тогда разность уже должна была равняться 3, но она кратна 2.

4. [7] Дан треугольник ABC с углом A, равным 60°. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

Азамат Марданов

Решение. Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H, вневписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K, перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X. Поскольку $AD = AH$, $\angle A = 60°$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH =$ $= 2\angle XDH = 60° = \angle AIH$, точка X лежит на прямой AI, то есть является центром треугольника ADH.



По свойствам касательных вписанной и вневписанной окружностям, $AE = AK = CH$. Кроме того, $AX = HX$, $\angle EAX = 150° = \angle CHX$. Следовательно, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE = XC$.

5. [9] У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая – весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов – одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

Андрей Аржанцев

Решение. Будем всегда класть на чаши весов поровну гирь. Заметим, что тогда заведомо нефальшива гиря, оказавшаяся на лёгкой чаше, а в случае равенства – на любой из чаш. Обозначим весы X и Y. Первым взвешиванием положим на чаши весов X по 4 гири.

1) Весы в равновесии. Тогда фальшива одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим по 2 подозрительные гири на чаши весов X. При равновесии фальшива невзвешенная гиря A.

В противном случае фальшива либо гиря A (если весы X неправильные), либо одна из гирь B, C на «тяжёлой» чаше. Третьим взвешиванием сравним B с C на весах Y. При равновесии фальшива гиря A. В противном случае фальшива более тяжелая гиря (если бы фальшива была A, весы Y показали бы равновесие).

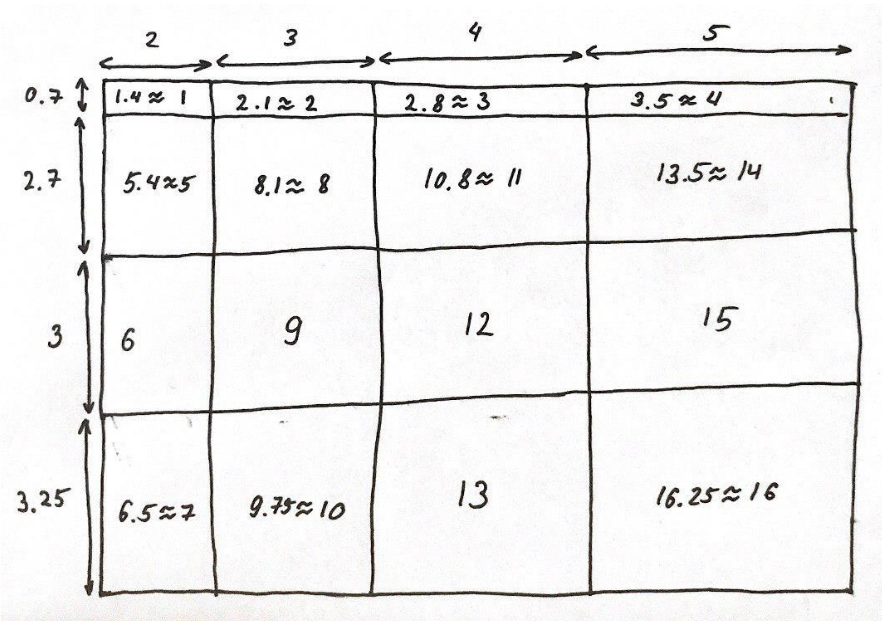
2) Одна из чаш опустилась. Тогда фальшива либо одна из 4 гирь на «тяжёлой» чаше, либо одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим на чаши весов Y по 2 «тяжёлые» гири и по одной из невзвешенных – A и B. При равновесии фальшива одна из 3 ещё не взвешенных гирь, причём весы Y правильные (раз они показали равенство, все гири на них настоящие – в том числе, четыре гири, «тяжёлые» по мнению весов X, то есть весы X соврали). С их помощью найдём за одно взвешивание одну фальшивую гирю из 3 подозрительных.

Если одна из чаш (пусть с гирей A) опустилась, то фальшива одна из гирь на этой чаше (если бы фальшивая гиря была среди 3 невзвешенных, то как весы X, так и весы Y были бы неправильны, что не так). Более того, A фальшива только если весы Y правильные. Третьим взвешиванием сравним на весах Y две отличные от A гири с её чаши. При равновесии фальшива A, в противном случае – более тяжёлая гиря.

6. [10] Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n - 1$ горизонтальных разрезов и $n - 1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

Георгий Караваев

Ответ. Для $n = 4$. **Решение**. Пример пирога представлен в виде таблицы, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток:



Докажем, что $n \leq 4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов – слева направо. Пусть числа в угловых клетках равны $a < b < c < d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причём $ad = bc$. Пусть b – правое верхнее. Округлённые числа будем обозначать штрихами. Тогда $a' = 1$, $d' = n^2$, $b' \geq n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c' \geq 2n - 1$ (оно не меньше всех чисел первого столбца и верхней строки). Значит, $a < 1{,}5$, $d < n^2 + 0{,}5$, $b \geq n - 0{,}5$, $c \geq 2n - 1{,}5$. Поэтому $1{,}5(n^2 + 0{,}5) > ad = bc > (n - 0{,}5)(2n - 1{,}5)$, откуда $1{,}5n^2 + 0{,}75 > 2n^2 - 2{,}5n + 0{,}75$, то есть $2{,}5n > 0{,}5n^2$, откуда $n < 5$.

7. [12] На белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

Александр Грибалко

7. Ответ: 197 ходов.

Алгоритм. Все ходы будем делать так, чтобы на доске оставались слоны обоих цветов, пока слонов хотя бы два.

Если есть возможность сделать *экономичное* взятие (слон за один ход бьёт слона другого цвета, стоящего с ним на одной диагонали), делаем его.

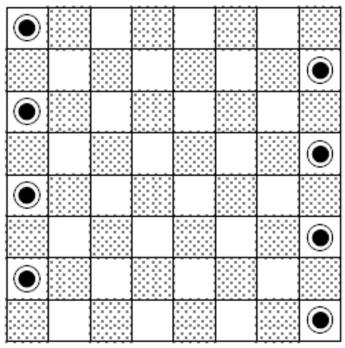
В противном случае сделаем *неэкономичное* взятие (за два хода). Выберем двух слонов разного цвета и рассмотрим путь, по которому первый слон мог бы пройти ко второму за два хода (такой путь всегда есть). Если на этом пути есть ещё слоны, найдём среди них двух ближайших друг к другу слонов разного цвета, и пусть один из них собьёт другого за два хода.

Изначально все слоны стоят на 99 белых диагоналях, параллельных главной белой диагонали. Тогда на одной из них стоит не меньше двух слонов. Назовём двух из этих слонов *особыми*. Если особые слоны разного цвета, экономичное взятие возможно уже на первом ходу вдоль этой диагонали; сделаем его.

Пусть эти особые слоны белые. Тогда при взятиях будем бить чёрными слонами белых. После того как будет взят первый особый слон, это ограничение снимается. Заметим, что сразу после этого возможно экономичное взятие.

Поскольку всего взятий 99 и хотя бы одно из них экономичное, потребуется не больше $2 \cdot 99 - 1 = 197$ ходов.

Оценка. Расставим произвольным образом по 50 слонов на нижней и верхней строке доски. При этом на всех 199 белых диагоналях обоих направлений будут стоять слоны (угловые белые клетки доски мы считаем «одноклеточными» диагоналями). За ход число диагоналей, на которых есть слон, может уменьшиться не более, чем на 1 (поскольку «исчезнуть» может только та диагональ, с которой уходит слон, делающий ход). Когда останется один слон, занятых диагоналей будет 2. Итого, понадобится хотя бы $199 - 2 = 197$ ходов.



Старшие классы

1. [4] Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, ..., 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

Алексей Глебов

Ответ. Поровну. **Решение**. Заметим, что корни многочленов из условия могут быть только отрицательными. К каждому многочлену P из условия есть парный P^*, коэффициенты которого записаны в обратном порядке. Заметим, что корни P^* обратны корням P. Следовательно, исходные числа на доске разбиваются на пары взаимно обратных отрицательных чисел. После прибавления единицы числа из интервала (–1, 0) станут положительными, а числа, меньшие –1, останутся отрицательными.

2. [5] Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

Алексей Глебов

Ответ. Для $N = 2^{10} - 1 = 1023$. **Решение**. Будем называть числа со свойством из условия *хорошими*, включая также «числа», начинающиеся на 0. Докажем по индукции, что в хорошем числе, содержащем k различных цифр ($1 \le k \le 10$), не более $2^k - 1$ знаков.

База ($k = 1$) очевидна – используется лишь одна цифра, и она не может повторяться.

Шаг индукции. Пусть $1 \le k \le 9$ и X – хорошее число, содержащее k+1 различных цифр. По условию одна из цифр a встречается в нём ровно один раз. Заметим, что слева и справа от этой цифры записаны хорошие числа (число справа, возможно, начинается с нуля), в каждом из них используется не более k различных цифр, поэтому в каждом из них (по индукции) не более $2^k - 1$ знаков, а суммарно в X тогда не более $(2^k - 1) + (2^k - 1) + 1 =$ $= 2^{k+1} - 1$ знаков, что и требовалось.

Пример хорошего числа, содержащего k различных цифр ($1 \le k \le 10$), в записи которого ровно $2^k - 1$ знаков, также построим по индукции.

База (k=1): годится число 1 (берём не 0, чтобы далее итоговое число не начиналось с 0).

Шаг индукции. Пусть $1 \le k \le 9$ и X – хорошее число, в котором k различных цифр и $2^k - 1$ знаков. Возьмём цифру, которая не встречается в этом числе (назовём её a), и припишем к ней слева и справа число X. В полученном числе $2^{k+1} - 1$ знаков, и оно хорошее: ведь любая его часть из несколько подряд идущих цифр либо включает единственную в числе цифру a, либо является частью хорошего числа X.

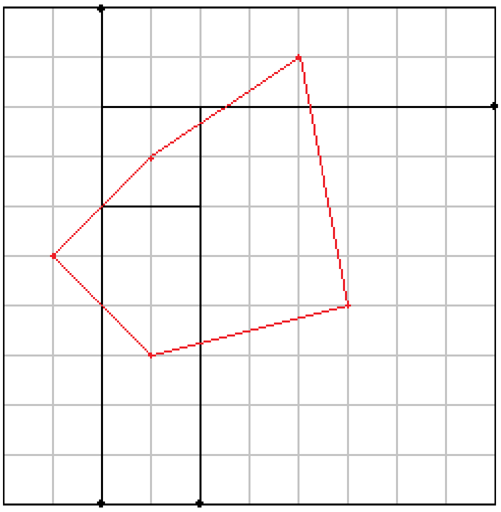
3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

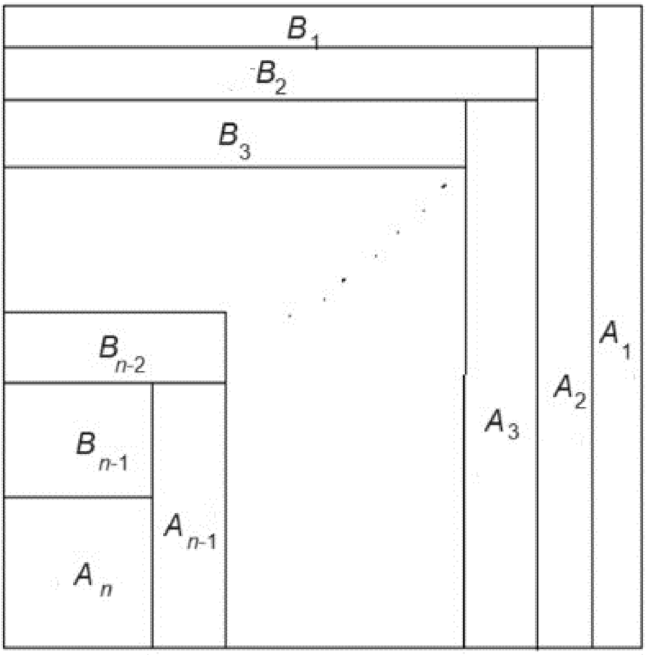
Александр Шаповалов

а) [3] Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

б) [6] Может ли количество прямоугольников равняться 23?

а) Ответ: не обязательно. **Решение**. См. рисунок слева.





б) Ответ. Может.

Решение. Приведём пример для произвольного нечётного $m = 2n - 1$, $n > 1$. Разобьём квадрат на n «вертикальных» прямоугольников A_1, …, A_n и $n - 1$ «горизонтальных» прямоугольников B_1, …, B_{n-1}, расположенных так, как показано на рисунке справа. Центры прямоугольников будем обозначать теми же буквами, что и сами прямоугольники. Пусть ширина (горизонтальная сторона) прямоугольника A_i равна a_i, высота (вертикальная сторона) прямоугольника B_i равна b_i. Тогда тангенс угла наклона прямой $A_{i+1}A_i$ к горизонтальной оси равен $\frac{b_i}{a_{i+1}+a_i}$, а тангенс угла наклона прямой $B_{i+1}B_i$ к вертикальной оси равен $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}+b_i}$. Для выпуклости достаточно подобрать значения a_i и b_i так, чтобы обе последовательности тангенсов возрастали с уменьшением i и сумма ширин $a_n + \dots + a_1$ была бы больше суммы высот $b_{n-1} + \dots + b_1$ (тогда мы сможем подобрать высоту прямоугольника A_n так, чтобы получился квадрат, а высоты остальных прямоугольников A_i и ширины прямоугольников B_i подберутся автоматически). Сделаем, например $a_i = (2i - 1)!$ и $b_i = (2i)!$. Тогда $\operatorname{ctg}(A_{i+1}A_i) = 2i + 1 + \frac{1}{2i}$, $\operatorname{ctg}(B_{i+1}B_i) = 2i + 2 + \frac{1}{2i+1}$. Нетрудно проверить, что обе последовательности котангенсов убывают с уменьшением i, а значит, последовательности тангенсов возрастают.

4. [9] Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $^S/_8$.

Михаил Малкин

Решение. Пусть K, L, M и N – точки деления, лежащие на сторонах AB, BC, CD и DA, причём $AK = aAB$, $BL = bBC$, $CM = cCD$, $DN = dDA$. Тогда

$S_{KBL}S_{LCM}S_{MDN}S_{NAB} = (1-a)bS_{ABC}(1-b)cS_{BCD}(1-c)dS_{CDA}(1-d)aS_{DAB} \le$

$$\le \left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2\left(\frac{c+1-c}{2}\right)^2\left(\frac{d+1-d}{2}\right)^2\left(\frac{S_{ABC}+S_{CDA}}{2}\right)^2\left(\frac{S_{BCD}+S_{DAB}}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{S}{2}\right)^4.$$

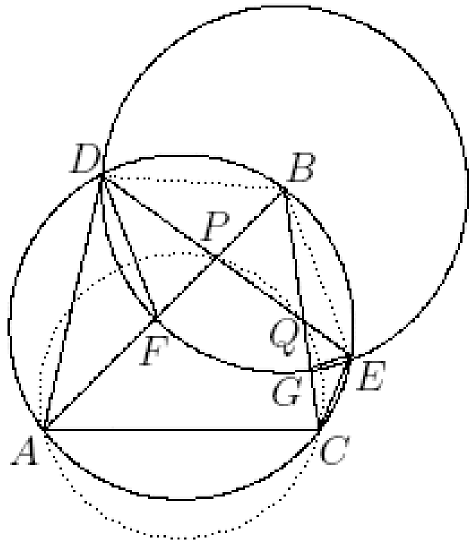
Следовательно, одно из чисел S_{KBL}, S_{LCM}, S_{MDN}, S_{NAB} не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{8}$.

5. [10] Хорда DE описанной около треугольника ABC окружности пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно, точка P лежит между D и Q. В треугольниках ADP и QEC провели биссектрисы DF и EG. Оказалось, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности. Докажите, что точки A, P, Q, C лежат на одной окружности.

Азамат Марданов

Решение 1. Пусть α – окружность, описанная около треугольника ABC, β – окружность, на которой лежат точки D, F, G, E. Заметим, что эти точки лежат на β именно в таком порядке. Пусть B'– центр окружности β. Докажем, что точки B и B'совпадают.

Углы ADE и ABE равны, так как опираются на дугу ACE, откуда $2\cdot\angle FDE = \angle FBE$ (поскольку DF – биссектриса угла ADE). С другой стороны, $\angle FB'E = 2\cdot\angle FDE$ (как центральный и вписанный углы), поэтому $\angle FBE = \angle FB'E$. Тогда точка B' лежит на дуге FBE описанной окружности треугольника FBE. Аналогично, точка B'лежит на дуге DBG описанной окружности треугольника DBG.



Но дуга $DFGE$ лежит внутри окружности α, откуда дуга DBE лежит внутри окружности β. Тогда дуги FBE и DBG также лежат внутри β и пересекаются в единственной точке, поскольку дуга FBE делит окружность β на две части, причём точки D и G попадают в разные части (D лежит на дуге FDE, а G – на дуге FGE). Значит, точки B и B'совпадают, поэтому B – середина дуги DBE (поскольку $BD = BE$).

Но тогда равны углы EAB и DAB, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами DE и AB, мы получаем равенство:

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180° - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырёхугольник $APQC$ вписанный.

Замечание. Обосновать тот факт, что дуги FBE и DBG пересекаются в единственной точке, можно по-разному. Например, рассмотрим радикальные оси трёх окружностей: $DFGE$, DBG и FBE. Они пересекаются в радикальном центре – точке пересечения *отрезков* DG и FE, исходя из последовательности точек на окружности. Пусть это точка S, а вторая точка пересечения окружностей DBG и FBE – это точка Z. Поскольку S лежит внутри хорды, то её степень относительно всех трех окружностей отрицательна, то есть S лежит между точками B и Z, откуда точка Z и точка B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой DG. Следовательно, Z не лежит на *дуге* DBG, то есть B – единственная точка пересечения указанных дуг.

Решение 2. Заметим сначала, что точки G и E лежат по другую сторону от прямой AB, нежели точка D, поэтому отрезки DF и GE не пересекаются. Отрезки же DE и FG не пересекаются по построению. Тогда D, E, G, F – последовательные точки на окружности, откуда четырёхугольник $DFGE$ выпуклый.

Далее мы докажем **лемму**: B – середина дуги DE, не содержащей точек A и C.

Этого достаточно для решения задачи, поскольку тогда равны углы EAB и DAB, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами DE и AB, мы получаем равенство:

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180° - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырёхугольник $APQC$ вписанный.

Доказать лемму можно по-разному.

1-й способ. Предположим противное: серединой дуги DBE является точка B', отличная от B. Не умаляя общности, B' лежит на дуге BE, не содержащей точки D. Тогда хорда AB' пересекает хорду DE в точке P', такой что P лежит между D и P'. Далее DF – биссектриса угла $P'DA$, пусть F' – точка её пересечения с $P'A$, тогда F лежит между D и F'.

Аналогично, если Q' – точка пересечения $B'C$ с DE, а G' – точка пересечения EG с $B'C$, получаем, что G' лежит между G и E. Имеем тогда:

$$\angle F'DB' = \angle F'DE + \angle EDB' = 1/2\cdot\angle ADE + \angle EDB' = 1/2\cdot\angle ADE + \angle DEB',$$

$$\angle DF'B' = 180° - \angle F'DB' - \angle DB'F' = (\angle DB'A + \angle ADE + \angle DEB' + \angle EDB') -$$

$$- (1/2\cdot\angle ADE + \angle EDB') - \angle DB'F' = 1/2\cdot\angle ADE + \angle DEB' = \angle F'DB',$$

то есть, треугольник $F'DB'$ равнобедренный и $DB'=F'B'$. Аналогично получаем $EB'=G'B'$, и из определения B' выполнено $DB'=B'E$, то есть, D, F', G', E лежат на окружности с центром B'. Так как четырёхугольники $DFGE$ и $DF'G'E'$ оба вписанные, то $F'G'$ и FG параллельны (так как они обе антипараллельны DE относительно DF и EG). Однако, раз $DFGE$ выпуклый, то прямая, параллельная FG и проходящая через точку G', лежащую на стороне GE, пересечёт луч FD, но она пересекает прямую FD в точке F', лежащей на продолжении FD за F – противоречие.

2-й способ. Пусть B' – центр описанной окружности ω четырёхугольника $DFGE$. Так как $\angle FDE$ острый, то $1/2\angle FB'E = \angle FDE = 1/2\cdot\angle ADE = 1/2\cdot\angle ABE = 1/2\cdot\angle FBE$, то есть $\angle FB'E = \angle FBE$, при этом B и B' лежат одну сторону с D от прямой FE (B' по эту сторону, так как $\angle FDE$ острый). Тогда B' лежит на описанной окружности треугольника BFE, аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BGD. Заметим сразу, что раз $\angle FBE = 2\angle FDE > \angle FDE$, то B лежит внутри ω. Предположим, $B \neq B'$. Тогда при инверсии относительно ω точка B переходит в общую точку образов описанных окружностей треугольников BFE и BGD, то есть в точку пересечения FE и GD, то есть в точку пересечения диагоналей $DFGE$, то есть в некоторую точку внутри ω, но это невозможно, так как B сама внутри ω – противоречие. Значит, $B=B'$, откуда $BD = BE$ и значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

3-е решение: Пусть ω – описанная окружность четырёхугольника $DFGE$, Ω – описанная окружность треугольника ABC. Так как Q – точка внутри ω, то луч QB пересекает ω, пусть в точке Y; $Y \neq B$ (иначе бы различные окружности ω и Ω имели три общие точки). Аналогично, пусть X – точка пересечения луча PB с ω. Тогда, пользуясь равенствами вписанных углов и тем, что EG – биссектриса угла DEC, имеем следующие равенства ориентированных углов: $\angle(BD, DY) = \angle(BD, BC) + \angle(BC, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(YG, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(EG, ED) = -\angle(EG, ED) = -\angle(YG, YD) = -\angle(YB, YD)$, откуда треугольник YDB равнобедренный, то есть $BD=BY$, аналогично получаем $BE=BX$. Из равнобедренности YDB следует, что угол DYB острый, тогда Y лежит на продолжении QB за точку B (иначе бы YBD был смежным с вписанным углом DYQ, который острый, так как равен острому вписанному углу DEG). Тогда далее имеем

$$\angle YDE=\angle YDB+\angle BDE=\angle DYB+\angle BDE=\angle DEG+\angle BDE=1/2\cdot\angle DEC+\angle BDE<1/2\cdot\angle DBE+\angle BDE.$$

Аналогично получаем, что $\angle XED < 1/2\cdot\angle DBE+\angle BED$. Складывая эти неравенства, имеем $\angle XED+\angle YDE<\angle DBE+\angle BED+\angle BDE=180°$. Значит, DY и EX не параллельны, поэтому серединные перпендикуляры к DY и EX имеют единственную общую точку, но и B, и центр ω являются таковыми, значит B – центр ω. Тогда $BD=BE$ и, значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

6. [12] Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора {1, ..., 2023}. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

Иван Кухарчук

Ответ: обязательно.

Решение. **Лемма**. Пусть k и l – натуральные числа, причём НОК(k, l) < $k + l$. Тогда $k + l$ делится на k или на l.

Доказательство. Пусть d = НОД(k, l). По условию $kl < d(k + l)$, т.е. $(k - d)(l - d) < d^2$. Один из множителей меньше d и делится на d, т.е. равен нулю. А $k + l$ делится на d. □

Условие делимости не изменится, если все числа строки уменьшить на одно и то же целое число. Поэтому можно считать, что верхние числа находятся в пределах от 0 до 2022, а нижние от – 0 до M (причём и 0, и M присутствуют). Ясно, что $M > 2022$. Разность чисел над 0 и M делится на M, поэтому эти числа равны (пусть это число b).

Предположим, есть столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$, где $d \neq 0$. Ясно, что $|d| \leq 2022$. Сравнивая этот столбец со столбцами $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix}$, видим, что d делится как на k, так и на $M - k$. Поэтому d делится на НОК(k, $M - k$); по лемме M делится на k или на $M - k$. Как известно, у числа M не более $2\sqrt{M}$ делителей, столько же дополнений этих делителей до M, значит, всего в верхней строке не более $4\sqrt{M}$ чисел, отличных от b. С другой стороны, и k, и $M - k$ не больше 2022, поэтому $M \leq 4044$. Итак, в верхней строке не более $4\sqrt{4044} < 300$

чисел, отличных от b. Зафиксируем один столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$ и рассмотрим произвольный столбец вида $\begin{pmatrix} b \\ k+q \end{pmatrix}$. По условию d делится на q. Значит, в первой строке не более $4\sqrt{d} \leq 4\sqrt{2022} < 180$ чисел b (q может быть как положительным, так и отрицательным). Но 300 + 180 < 2024. Противоречие.

Замечание. Для малых размеров таблицы утверждение неверно. Пример:

1	1	1	1	7	1	1	1
1	4	5	6	7	8	10	13

7. [14] На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n – по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).

Александр Грибалко

1-е решение. Случай $n = 1$ очевиден.

В случае $n = 2$ положим на чаши по одной монете. В случае равновесия добавим в пару к каждой одну из не взвешенных монет. В противном случае пары образуют две взвешенные, и две невзвешенные монеты.

В случае $n = 3$ у нас есть 6 монет A, B, C, D, E, F. Сначала сравним A и B, потом C и D. Если оба раза весы в равновесии, то нужные пары – (A, C), (B, D) и (E, F). Если оба раза равновесия нет, нужные пары – (A, B), (C, D) и (E, F). Если равновесия не будет один раз, например при первом взвешивании, то нужные пары – (A, B), (C, E) и (D, F).

Пусть $n \geq 4$. Уменьшим мысленно веса всех монет на 9 г: теперь они весят 0 и 1 г. Поскольку мы всегда будем класть на чаши весов поровну монет, на результаты взвешиваний это не повлияет. Общий вес всех монет теперь равен n г.

Разобьём монеты на n пар, а затем приведём алгоритм разбиения пар на сравнимые *цепочки* вида $a = a = \ldots = a > b = b = \ldots = b$ или $c = c = \ldots = c$ и на отдельные пары известного веса.

Алгоритм. Будем сравнивать первую пару с остальными, пока не получим неравные пары. Взвешенные пары образуют цепочку $a = a = \ldots = a > b$ или $a > b = b = \ldots = b$. (буквами обозначены веса пар). Отложим взвешенные пары и, проделав то же с оставшимися, получим вторую цепочку с неравенством, скажем $c = c = \ldots = c > d$. Сравним $a + b$ с $c + d$. Равенство означает $a = c$, $b = d$. Тогда две цепочки объединяются в одну $a = \ldots = a > b = \ldots = b$, и мы продолжаем поиск цепочки среди оставшихся невзвешенными пар. Заметим, что число взвешиваний с парами цепочки на 1 меньше длины цепочки.

Главный случай. Если при сравнении получилось неравенство, скажем, $a + b > c + d$, то $a = 2$, а $d = 0$. Взяв из этих пар по одной монете, создадим пару $p = 1$. Сравнив каждую из невзвешенных пар с p, найдём их веса. Мы провели всего $n - 1$ взвешивание и теперь знаем веса пар вида a, вида d и пар вне цепочек. Тем самым мы знаем общий вес пар видов b и c в цепочках. Их число нам тоже известно: k пар вида b и m пар вида c. Возможны три случая: 1) $b = c = 1$; 2) $b = 1$, $c = 2$; 3) $b = 0$, $c = 1$. Соответственно, их общий вес $k + m$, $k + 2m$ или m. Но $m < k + m < k + 2m$ – из трёх вариантов подойдёт лишь один. А зная веса пар, легко разложить монеты нужным образом.

Цепочка неравенств + цепочка равенств. $a = \ldots = a > b = \ldots = b$, $c = c = \ldots = c$ (это значит, что невзвешенных пар не осталось). Пусть есть k пар a, m пар b и r пар c.

Для весов a, b, c возможны 9 случаев, сведённых в таблицу. Напомним, что общий вес всех монет равен $n = k + m + r$. Поэтому четыре «красных» строки невозможны.

a	***b***	***c***	**Общий вес**	**Следствие**	
2	1	1	$2k + m + r$		
2	1	0	$2k + m$	$k = r$	$a + b > 2c,\ b > c$
2	0	0	$2k$	$k = m + r$	$a > c$
1	0	0	k		
2	0	1	$2k + r$	$k = m$	$a + b = 2c$
2	1	2	$2k + m + 2r$		
2	0	2	$2k + 2r$	$k + r = m$	$b < c$
1	0	2	$k + 2r$	$r = m$	$a + b < 2c,\ a < c$
1	0	1	$k + r$		

В остальных строках это равенство приводится к виду, записанному в пятом столбце. Если выполнено ровно одно из этих равенств, мы нашли веса a, b, c.

Больше двух равенств могут быть выполнены в трёх случаях. Но мы провели только $n - 2$ взвешивания и дополнительное взвешивание поможет их различить.

1) $k = m = r$. Сравнив дополнительно $a + b$ с $c + c$ (заметим, что $r > 1$, поэтому две пары c у нас есть), мы различим три случая в «синих» строках (2-я, 5-я и 8-я).

2) $k = r$, $k + r = m$. Сравнив дополнительно b с c, мы отличим 2-ю и 7-ю строки.

3) $m = r$, $k = m + r$. Сравнив дополнительно a с c, мы отличим 3-ю и 8-ю строки.

Одна цепочка неравенств: $a = \ldots = a > b = \ldots = b$ возможна только в случае $a = 2$, $b = 0$.

Одна цепочка равенств: $a = \ldots = a$ возможна только в случае $a = 1$.

Замечание. Случай $n = 2$ можно отдельно не разбирать: он подходит под общий случай.

2-е решение. Если $n = 1$, то монеты уже образуют нужную пару, достаточно 0 взвешиваний. Поэтому далее можем и будем считать, что $n > 1$.

Пары монет с суммарными весами 20 г, 19 г, 18 г будем называть тяжёлыми, средними, лёгкими соответственно. Далее приведём явный алгоритм.

Разобьём монеты на n пар произвольным образом, далее возьмём одну из этих пар и будем последовательно сравнивать с остальными парами до тех пор, пока не будет получено неравновесие. Если оно так и не будет получено, то все n пар одинаковые, и значит они все средние (так как 20-граммовых и 19-граммовых монет одинаковое количество), то есть уже получено искомое разбиение.

Поэтому далее можем и будем считать, что неравновесие встретится, причём первая пара в этом взвешивании тяжелее (другой случай аналогичен: надо поменять в рассуждении 20 граммовые монеты с 18 граммовыми, тяжёлые пары с лёгкими и т.п.).

Так как 20 граммовых и 18 граммовых монет одинаковое количество, то тяжёлых и лёгких пар тоже одинаковое количество. Если уже сделано $n-1$ взвешивание, то все пары, кроме одной («последней») одинаковые, причём эта одна легче остальных. Это возможно только при $n = 2$ (иначе пар какого-то типа – одна, какого-то $n-1>1$, а какого-то 0, т.е. тяжёлых и лёгких пар не поровну). В этом случае понятно, что «первая» пара тяжёлая, а «последняя» – лёгкая; беря по монете из этих пар, формируем 2 нужные пары. Тогда далее можем и будем считать что сделано $a+1<n-1$ взвешиваний (получено a равновесий, возможно $a = 0$), в частности $n > a+2 \geq 2$. Обозначим через A, B монеты «первой» пары, а через C, D – монеты последней пары. Сравним пару A, C с парой B, D.

Если будет получено равновесие, то суммарный вес пар $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ составляет чётное количество граммов, и значит, первая пара (вместе с a равновесными ей) тяжёлая, а последняя – лёгкая. То есть, мы знаем тип каждой из взвешенных монет. Далее сформируем одну вспомогательную среднюю пару (например, $\{A, C\}$) и будем последовательно сравнивать с остальными невзвешенными парами (всего делаем $n-1$ взвешивание), по результату определяем тип очередной пары. Так будут определены веса всех исходных пар, кроме одной. Зная, сколько среди всех этих $n-1$ пар тяжёлых, а сколько лёгких, определяем тип последней пары, исходя из равенства количеств тяжёлых и лёгких пар среди всех n пар. Зная тип каждой пары, формируем нужные пары: средние не трогаем, а из каждой пары пар (лёгкая, тяжёлая) формируем две средние, беря по монете из каждой пары (назовём это *стандартной процедурой*).

Если же при сравнении $\{A, C\}$ с $\{B, D\}$ равновесия не будет, то можем и будем считать, что A с C весят больше, чем B с D (иначе просто переобозначим монеты: $A \longleftrightarrow B$, $C \longleftrightarrow D$). Суммируя то, что $\{A, B\}$ тяжелее $\{C, D\}$ и $\{A, C\}$ тяжелее $\{B, D\}$, получаем, что A тяжелее D, значит A весит 10 г, а D весит 9 г. Тогда B и C одинаковые, иначе в одном из двух выше рассмотренных взвешиваний было бы равновесие. Кроме того, если они 10-граммовые, то все a пар, с которыми пара $\{A, B\}$ попала в равновесие – тяжёлые, иначе – они средние. Эти a пар пока не трогаем, назовём их *главными*; пары $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ переформируем: сформируем среднюю пару $\{A, D\}$ и пару $\{B, C\}$, состоящую из одинаковых монет. Далее последовательно сравним $\{A, D\}$ с каждой из остальных пар (из изначально сформированных, отличных от уже взвешенных) кроме одной, всего сделав $n-1-(a+2)+(a+2)= n-1$ взвешиваний и определив тип каждой из этих $n-1-(a+2)$ пар. Пусть Y – последняя пара. Тогда мы «уже» знаем тип каждой пары, кроме Y, $\{B, C\}$ и a главных пар. Зная, что суммарно тяжёлых и лёгких пар одинаково, вычисляем x – разность количеств тяжёлых и лёгких пар среди Y, $\{B, C\}$ и a главных пар (она противоположна аналогичной разности количеств среди пар, у которых мы «уже» знаем тип).

Введём y: положим $y=1$, если Y тяжёлая, 0 – если Y средняя, и –1 – если Y лёгкая (мы «пока» не знаем значение у). Если $x > 0$, то мы понимаем, что $\{B, C\}$ тяжёлая и a главных пар – тяжёлые: иначе бы, согласно выше установленному, $\{B, C\}$ была бы лёгкой и a

главных пар были бы средними, и тогда было бы $x = -1+y \leq 0$, что не так; и тогда имеем $x = 1+a+y$, откуда вычисляем y, то есть, мы знаем тип каждой пары, и тогда формируем нужные пары стандартной процедурой. Аналогично, при $x < 0$ получаем, что $\{B, C\}$ лёгкая и a главных пар средние (иначе $x=a+1+y \geq 0$,) и тогда из $x = -1+y$ находим y, то есть, знаем все пары, формируем нужные по стандартной процедуре. Остаётся рассмотреть случай $x=0$. При $a > 0$ в точности аналогичное рассуждение исключает случай $x = a+1+y$, и приводит к нужным парам. Наконец рассмотрим случай $x=0=a$: тогда главных пар 0 штук, а пара $\{B, C\}$ не средняя, тогда она «противоположна» паре Y, беря по монете из этих пар формируем 2 нужные пары. Из остальных пар (типы которых нам известны) формируем нужные пары по стандартной процедуре.

3-е решение.

Рассмотрим отдельно случай $n = 3$. Пронумеруем монеты числами от 1 до 6. Первым взвешиванием сравним монеты 1 и 2, вторым – монеты 3 и 4. Если получим два равенства, то в одной из этих пар монеты весят по 9 г, а в другой – по 10 г. Тогда пары $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 6\}$ весят по 19 г. Если в одном взвешивании, например в первом, будет неравенство, а во втором – равенство, то можно разбить монеты на пары $\{1, 2\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 6\}$. Если же оба взвешивания дадут неравенства, то искомые пары – $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$.

Если $n \neq 3$, разобьём монеты на *пары* произвольным образом. Каждая пара весит 18 г, 19 г или 20 г, причём пар массой 18 г и 20 г поровну. Если для каждой пары мы определим её массу, то сможем получить требуемое разбиение монет. Действительно, пары массой 19 г можно оставить без изменений, а, объединив по одной монете из пар массами 18 г и 20 г, также получим искомые пары.

Сравним первую пару со второй, потом с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся пары. Если неравенство получено, то из всех пар, которые мы сравнили, сформируем первую *кучку*. Если остались пары, то будем действовать с ними аналогично и создавать новые кучки. В итоге получим несколько кучек, в каждой из которых пары имеют две различные массы. Возможно, несколько последних пар не образуют кучку, если они равны между собой. В каждой кучке выделим одну лёгкую и одну тяжёлую пары и объединим их в *группу*. Пронумеруем группы в соответствии с номерами кучек, которым они принадлежат.

Начнём сравнивать группы: первую группу сравним со второй, затем с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся группы. Если неравенство получено, например первая группа оказалась легче k-й (если наоборот, дальнейшие рассуждения аналогичны), то в первой группе лёгкая пара весит 18 г, а в k-й группе тяжёлая пара весит 20 г. Объединим эти две пары в новую группу X массой 38 г. Если k меньше числа групп, то сравним X со всеми группами, номера которых больше k – так мы узнаем массы пар во всех кучках, начиная с $(k+1)$-й. Если какие-то пары не попали в кучки, то сравним одну из них с половиной группы X (в которую входит по одной монете из составляющих её пар). Результат сравнения позволит узнать массы всех пар, не попавших в кучки.

Заметим, что если массы двух групп равны, то в этих группах лёгкие пары весят одинаково и тяжёлые пары тоже. Поэтому все лёгкие пары в кучках с первой по $(k-1)$-ю весят по 18 г, а все тяжёлые пары в k-й кучке – по 20 г. Таким образом, пока мы не узнали только массы тяжёлых пар в первых $k-1$ кучках и лёгких пар в k-й кучке. Они могут весить либо 19 г и 18 г, либо 19 г и 19 г, либо 20 г и 19 г соответственно. Учитывая, что общее число пар массой 18 г и 20 г одинаковое, мы однозначно можем определить, какой из случаев имеет место.

Если при сравнении групп мы дошли до последней группы и не получили ни одного неравенства (в частности, если число кучек равно 0 или 1), то во всех кучках лёгкие пары весят одинаково и тяжёлые пары тоже. Тогда мы имеем три *набора*, состоящие из равных пар: лёгкие пары в кучках, тяжёлые пары в кучках и пары, не попавшие в кучки (какие-то наборы могут оказаться пустыми). Обозначим число пар в этих наборах через a, b, c соответственно. Можем считать, что все эти числа ненулевые, ибо в противном случае тип каждой пары определяется тривиально. Так как пар массой 18 г и 20 г поровну, то в большинстве случаев можно сразу понять, сколько весят пары в каждой группе: либо есть два набора, состоящие из одинакового числа пар, либо два набора содержат в сумме столько же пар, сколько и третий. Нельзя это понять, только когда одновременно выполняется более одного равенства, то есть в следующих четырёх случаях.

1) $a = c$ и $a + c = b$. Тогда лёгкие пары весят по 18 г. Сравним тяжёлую пару с парой не из кучек. Если тяжёлая пара окажется легче, то они весят 19 г и 20 г, а если тяжелей – 20 г и 18 г соответственно.

2) $b = c$ и $b + c = a$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

3) $a = b$, $c = a+b$. Нетрудно понять, что этот случай реализуется, только если тяжёлые пары весят 20 г, лёгкие – 18 г, а остальные – 19 г.

4) $a = b = c$. Такое возможно, если n делится на 3. Так как $n \neq 3$, то в каждом наборе есть хотя бы по две пары. Объединим в группу одну лёгкую пару с одной тяжёлой и сравним её с двумя парами, не попавшими в кучки. Результат такого взвешивания однозначно определит массы всех пар.

Построим граф, в котором вершины соответствуют составленным в самом начале n парам. Рёбрами соединим две вершины, если соответствующие пары участвовали во взвешивании. Если взвешивались группы, то ребром будем соединять по одной паре из групп. Когда одна из пар сравнивалась с половиной группы X, соединим ребром эту пару с одной из пар, которая использовалась в формировании группы X. Тогда во всех рассмотренных случаях полученный граф не содержит циклов, поэтому число сделанных взвешиваний не превышает $n - 1$.

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 25 февраля 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на 17 частей. Могли ли все части оказаться равными по массе? (Объединять части нельзя.)

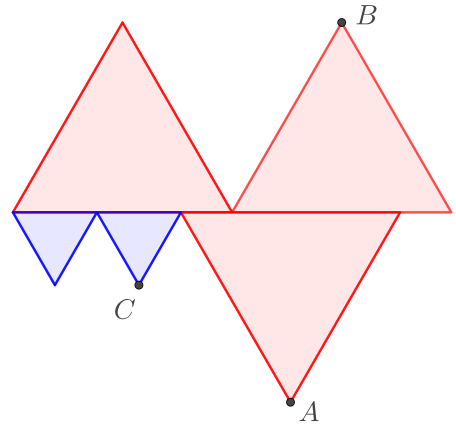
Борис Френкин

4 2. Шахматную доску 8×8 перекрасили в несколько цветов (каждую клетку — в один цвет). Оказалось, что если две клетки — соседние по диагонали или отстоят друг от друга на ход коня, то они обязательно разного цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?

Михаил Евдокимов

5 3. Пять равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке ниже. Три больших треугольника равны между собой и два маленьких тоже равны между собой. Найдите углы треугольника ABC.

Егор Бакаев



5 4. Два пирата делят 25 золотых монет разного достоинства, выложенные в виде квадрата 5×5. Пираты по очереди берут по одной монете с краю (монету можно взять, если слева, или справа, или снизу, или сверху от неё нет другой). Верно ли, что первый пират всегда может действовать так, чтобы гарантированно получить хотя бы половину суммарной добычи?

Михаил Евдокимов

6 5. Есть N удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, $\ldots$, N см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?

Татьяна Казицына

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 25 февраля 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

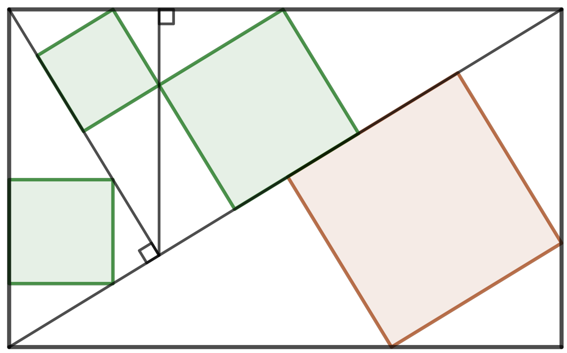
баллы задачи

3 — 1. В последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ каждое число, начиная с третьего, равно полусумме двух предыдущих. Докажите, что все параболы вида $y = x^2 + a_n x + a_{n+1}$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$) имеют общую точку.

Михаил Евдокимов

4 — 2. Произвольный прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники так, как показано на рисунке ниже. В каждый треугольник вписан квадрат со стороной, лежащей на гипотенузе. Что больше: площадь самого большого квадрата или сумма площадей трёх остальных квадратов?

Михаил Евдокимов



5 — 3. Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на N частей. При каждом ли $N \geq 10$ все части могли получиться равными по массе? (Объединять части нельзя.)

Борис Френкин

5 — 4. Верно ли, что сумма внутренних двугранных углов при основании треугольной пирамиды всегда меньше суммы внешних?

Алексей Заславский

6 — 5. В математическом кружке 45 школьников, некоторые дружат. Как ни разбивай их на тройки, в какой-то тройке все будут друг с другом дружить. Докажите, что всех школьников можно разбить на тройки так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.

Максим Прасолов

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 10 марта 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

Михаил Евдокимов

5 2. Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

Александр Юран

7 3. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Первый берёт 1 камень, потом второй берёт 1 или 2 камня, потом первый берёт 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

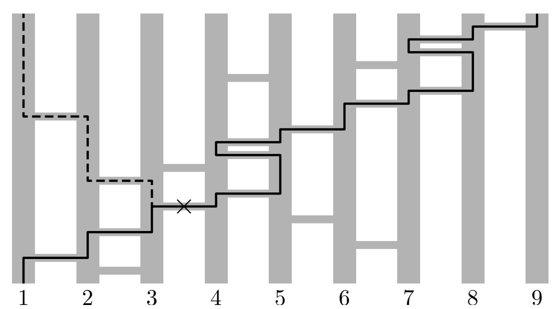
Людмила Смирнова

7 4. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?

Максим Дидин

9 5. В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике.

Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика? (Например, если палочки расположены как на рисунке, жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, дальше он поползёт по пунктирной линии.)



Георгий Караваев

10 6. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N — середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q — середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.

Алексей Доледенок

12 7. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

Андрей Кушнир

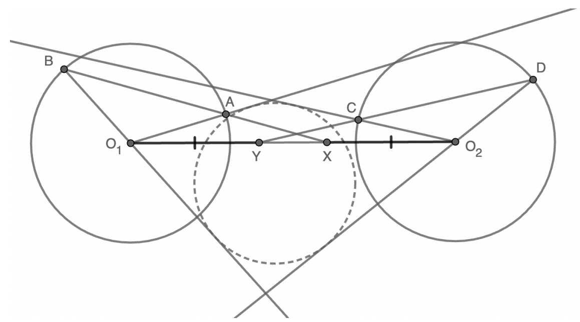
СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

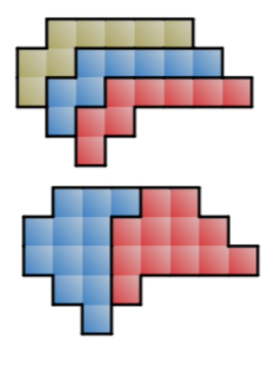
10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы	задачи
4	1. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых $m!! = n!$. (Двойной факториал $m!!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих ту же чётность, что m. Например, $5!! = 15$, $6!! = 48$). *Борис Френкин*
6	2. В пространстве расположили конечный набор кругов радиуса 1. Круги могут пересекаться друг с другом, но не проходят через центры друг друга. В центре каждого круга зажгли точечную лампочку, светящую во все стороны. Могло ли случиться, что любой луч света, выходящий из центра любого круга, упирается в какой-то другой круг? *Марк Алексеев*
7	3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку C *хорошей*, если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C, а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C. Каково наибольшее возможное количество хороших клеток? *Александр Чеботарев*
8	4. Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1Y = O_2X$. Точки A и B лежат на ω_1, и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2, и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2. *Иван Кухарчук, Артемий Соколов*



баллы	задачи
10	5. Дан многочлен степени $n > 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что у этого многочлена не может быть никаких других коэффициентов, кроме 1, -1 и -2. *Леонид Шатунов*
12	6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Чтобы пройти испытание, Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными? *Виктор Клепцын*
12	7. Назовём *полоской* клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях — вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор $(-1, 1)$. Докажите, что для любой полоски, состоящей из чётного числа клеток, найдётся такое нечётное k, что если объединить k таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке приведён пример.) *Сергей Маркелов, Игорь Маркелов*



СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР

Решения задач

Базовый вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на 17 частей. Могли ли все части оказаться равными по массе? (Объединять части нельзя.)* *(Борис Френкин)*

Ответ: могли.

Решение. Пусть масса пирога была 17 унций. Сначала разделим его на куски в 2, 7 и 8 унций, затем кусок в 7 унций на куски в 1, 2 и 4 унции. Теперь будем делить все куски, кроме «единичных» пополам, пока все не станут «единичными».

Замечание. Разбить кусок массой 17 на единичные куски можно разными способами с помощью следующих разбиений, с учётом того, что куски 2, 4 и 8 превращаются в единичные куски делением пополам:

$7 = 4 + 2 + 1;$

$10 = 7 + 2 + 1;$

$11 = 8 + 2 + 1;$

$12 = 7 + 4 + 1;$

$14 = 7 + 7 = 11 + 2 + 1 = 8 + 4 + 2 = 7 + 4 + 2 + 1;$

$17 = 14 + 2 + 1 = 12 + 4 + 1 = 11 + 4 + 2 = 10 + 4 + 2 + 1 = 8 + 7 + 2.$

См. также задачу 3 для 10 — 11 классов.

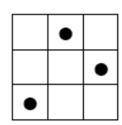
2 (4 балла). *Шахматную доску 8×8 перекрасили в несколько цветов (каждую клетку — в один цвет). Оказалось, что если две клетки — соседние по диагонали или отстоят друг от друга на ход коня, то они обязательно разного цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?* *(Михаил Евдокимов)*

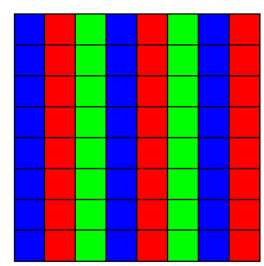
Ответ: 3 цвета.

Решение.

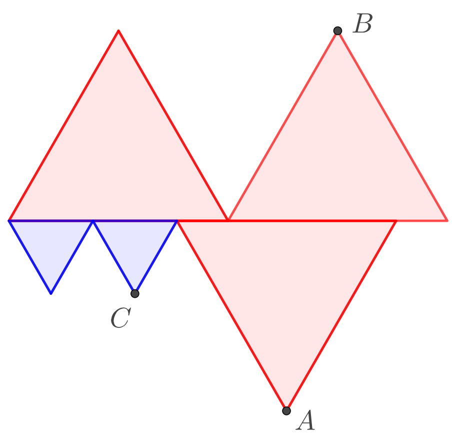
Оценка. По условию клетки на левом рисунке должны быть разного цвета.

Пример. Окрасим каждый столбец в свой цвет, периодически чередуя цвета 1, 2 и 3 (см. правый рисунок).



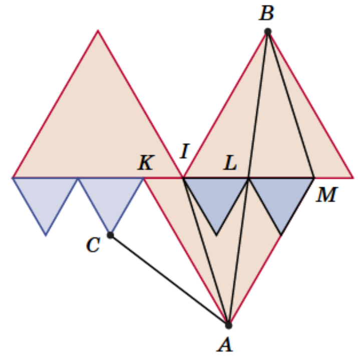


3 (5 баллов). *Пять равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке ниже. Три больших треугольника равны между собой и два маленьких тоже равны между собой. Найдите углы треугольника ABC.* *(Егор Бакаев)*



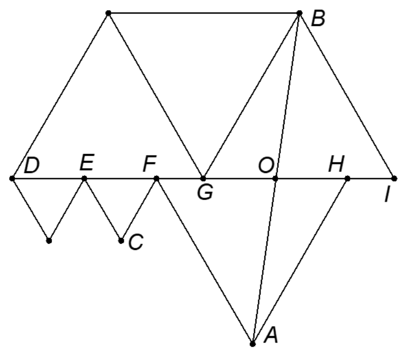
Ответ: $A = 60^\circ$, $B = 30^\circ$, $C = 90^\circ$.

Решение 1. Добавим на рисунок ещё два маленьких треугольника, как показано справа. Заметим, что $AIBM$ — параллелограмм, а L — его центр. При повороте на 60° против часовой стрелки вокруг точки A треугольник AML, очевидно, переходит в треугольник AKC. Таким образом, в треугольнике ABC имеем: $AB = 2AL = 2AC$, $\angle A = 60^\circ$. Следовательно, он прямоугольный.

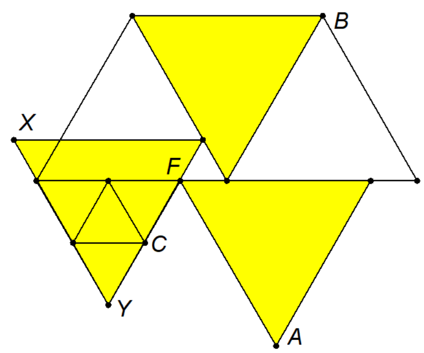


Решение 2. Обозначим точки как показано на рисунке справа. Пусть m — длина стороны малого треугольника, b — большого. Равносторонние треугольники с вершинами A и B центрально симметричны. Значит, O — центр их симметрии. Поэтому $AO = OB$, $GO = OH = m$ и $EO = b$.

Треугольники CEO, CFA и OHA равны, так как у них есть стороны m и b с углом 60° между ними. Следовательно, $CO = CA = OA$ и треугольник ABC — прямоугольный с углом $A = 60^\circ$.



Решение 3. Пристроим к малым треугольникам ещё два, достроим их до тёмного равностороннего треугольника, как на рисунке. Видно, что тёмные треугольники равны, значит, они переходят друг в друга при повороте на 120° вокруг центра треугольника между ними. Поэтому ABX — равносторонний. Симметрия относительно точки C переводит отрезок FA в YX. Следовательно, ABC — половина треугольника ABX, отсюда получаем ответ.



4 (5 баллов). *Два пирата делят 25 золотых монет разного достоинства, выложенные в виде квадрата* 5×5. *Пираты по очереди берут по одной монете с краю (монету можно взять, если слева, или справа, или снизу, или сверху от неё нет другой). Верно ли, что первый пират всегда может действовать так, чтобы гарантированно получить хотя бы половину суммарной добычи?*

(Михаил Евдокимов)

Ответ: неверно.

Решение. Пусть монета в центре стоит больше всех остальных, вместе взятых. Пусть второй пират ходит центрально симметрично первому, пока не «освободится» центральная монета. Тогда он забирает её и выигрывает.

5 (6 баллов). *Есть* N *удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, . . . ,* N *см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?*

(Татьяна Казицына)

Ответ: $(N-1)^2$ яблок.

Если у какого-то яблока диаметр нецелый, увеличим его до ближайшего целого числа, от этого ничего не изменится: например, все удавы одинаково «реагируют» на яблоки диаметра из промежутка $(2, 3]$. Так добьёмся того, что диаметры всех яблок будут целыми.

Оценка. Рассмотрим яблоки диаметра d, где $2 \leqslant d \leqslant N$. Пусть таких яблок не дадут каким-то двум удавам. Пасти этих удавов могут оказаться размером $d-1$ и d. Оба удава съедят все меньшие яблоки и оставят все бóльшие, поэтому этих удавов не различить. Значит, для каждого d от 2 до N включительно яблок диаметра d требуется хотя бы $N-1$, а всего яблок тогда нужно хотя бы $(N-1)^2$.

Пример. Дадим каждому удаву, кроме последнего, яблоки всех диаметров от 2 до N включительно. Получив такой набор, удав выдаст размер своей пасти: он равен максимальному радиусу съеденного яблока или 1, если ни одно яблоко не съедено. Размер пасти у последнего удава определим методом исключения.

Замечание. Оказывается, тот же самый набор яблок можно раздать удавам как угодно, лишь с одним условием: не давать одинаковые яблоки одному и тому же удаву. В самом деле, если найдётся удав, съевший яблоко диаметра N, то его пасть размера N. Иначе такая пасть у удава, не получившего такого яблока. Среди остальных удавов яблоками диаметра $N-1$ точно так же находится пасть размера $N-1$ и так далее. Оставшийся в конце удав будет иметь пасть размера 1.

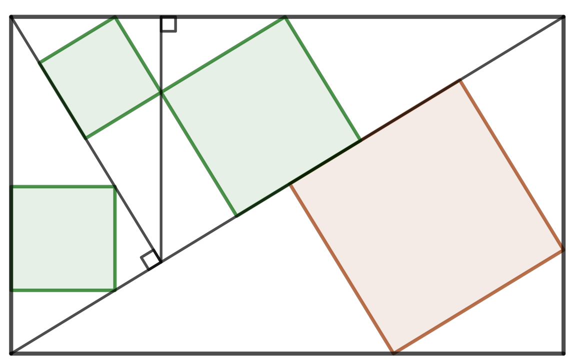
Среди школьников это заметил, например, Гаджиев Низам (10 кл., Махачкала).

Базовый вариант, 10 – 11 классы

1 (3 балла). *В последовательности действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ каждое число, начиная с третьего, равно полусумме двух предыдущих. Докажите, что все параболы вида $y = x^2 + a_n x + a_{n+1}$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$) имеют общую точку.* *(Михаил Евдокимов)*

Решение. Так как
$$\frac{1}{2}a_{n+1} + a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{1}{2}a_n + a_{n+1},$$
то $(n+1)$-я и n-я параболы пересекаются в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}$.

2 (4 балла). *Произвольный прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники так, как показано на рисунке ниже. В каждый треугольник вписан квадрат со стороной, лежащей на гипотенузе. Что больше: площадь самого большого квадрата или сумма площадей трёх остальных квадратов?* *(Михаил Евдокимов)*

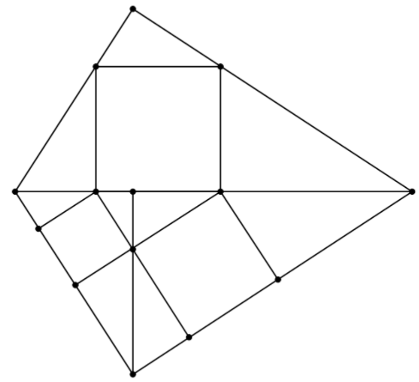


Ответ: они равны.

Заметим сначала, что квадрат со стороной на гипотенузе AB вписывается в прямоугольный треугольник ABC однозначно. (Например, потому, что если есть два таких квадрата, то гомотетия с центром в точке C переводит один из них в другой, оставляя при этом AB на месте, значит, коэффициент равен 1.) Далее можно действовать по-разному.

Решение 1. Заметим, что все прямоугольные треугольники в задаче подобны. Значит, вписанные квадраты занимают в них одинаковую долю площади. Поэтому сумма площадей малых квадратов равна площади большого, так как это верно для содержащих их треугольников.

Решение 2. Отразим прямоугольный треугольник относительно гипотенузы, один из треугольников разобьём высотой на два, впишем в них квадраты (см. рисунок справа). Поскольку треугольники подобны, то вершины квадратов разбивают катеты в одном и том же отношении, поэтому совпадения вершин квадратов не случайны. Тогда по теореме Пифагора для треугольника, заключённого между квадратами, сумма площадей малых квадратов равна площади большого. Дважды заменяя в задаче пару малых квадратов на один вписанный той же площади, оставим только два квадрата, вписанные в равные треугольники. Значит, спрашиваемые в задаче площади равны.



3 (5 баллов). *Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на N частей. При каждом ли $N \geq 10$ все части могли получиться равными по массе? (Объединять части нельзя.)*

(Борис Френкин)

Ответ: при каждом.

Решение. Кусок массой N (натуральное число) надо разбить на единичные куски. Все степени двойки разбиваются делением пополам. Для дальнейших рассуждений приведём два способа.

Способ 1. Число N разложимо в сумму различных степеней двойки (двоичное представление). Возможны три случая.

1) В этом разложении не два слагаемых (одно или хотя бы три). Тогда разбиваем сначала ровно как в этом двоичном разложении, а потом превращаем в единицы каждую степень двойки.

2) $N = 2^a + 2^b$, где $0 < a < b$. Тогда $b \geqslant 3$, так как $N \geqslant 10$. Разбиваем N на куски 1, 2^a и $2^b - 1$, последний из которых — на b степеней двойки ($1, 2, \ldots, 2^{b-1}$).

3) $N = 1 + 2^b$. Тогда $b \geqslant 4$, и мы разбиваем N на куски 1, 2 и $2^b - 2$, последний из них — на $b - 1$ степеней двойки ($2, \ldots, 2^{b-1}$).

Способ 2. Многократно отделяя пару кусков 1 и 2, сведём задачу к куску 10, 11 или 12. Кусок 10 сведём к 7, затем к 4. Кусок 11 сведём к 8. Кусок 12 разобьём на 1, 4 и 7. Все полученные куски мы уже умеем разбивать.

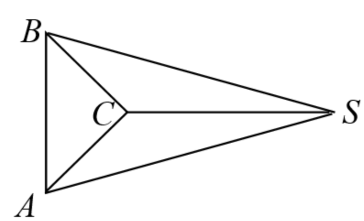
Замечание. Можно показать, что утверждение задачи неверно в точности для $N = 3,\ 5,\ 6,\ 9$.

4 (5 баллов). *Верно ли, что сумма внутренних двугранных углов при основании треугольной пирамиды всегда меньше суммы внешних?*

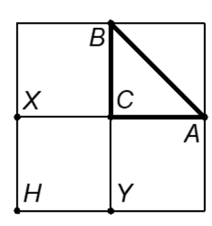
(Алексей Заславский)

Ответ: неверно.

Решение 1. Плоскую фигуру на рисунке справа можно рассматривать как вырожденную треугольную пирамиду $ABCS$ с двугранным углом $0°$ при ребре AB и двугранными углами $180°$ при рёбрах AC и BC. Сумма внутренних углов при основании равна $360°$, а внешних — равна $180°$. Если немного приподнять вершину S над плоскостью ABC, двугранные углы изменятся не сильно, поэтому сумма внутренних углов останется больше суммы внешних.



Решение 2. На клетчатой плоскости рассмотрим узлы, указанные на рисунке справа. Пусть ABC — основание пирамиды, а высота SH пирамиды равна стороне клетки. Тогда внешний двугранный угол при CA равен $\angle SXH = 45°$, а внутренний равен $135°$. Аналогично при ребре CB. Значит, сумма внутренних двугранных углов при основании больше $270°$, а внешних — меньше.



5 (6 баллов). *В математическом кружке 45 школьников, некоторые дружат. Как ни разбивай их на тройки, в какой-то тройке все будут друг с другом дружить. Докажите, что всех школьников можно разбить на тройки так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.*

(Максим Прасолов)

Докажем аналогичное утверждение для $3N$ школьников:

если при любом разбиении их на N троек в какой-то тройке все будут друг с другом дружить, то всех школьников можно разбить на N троек так, чтобы в каждой тройке хотя бы какие-то двое дружили друг с другом.

Решение 1. Достаточно доказать, что можно выделить N отдельных пар друзей, тогда, подсоединив к каждой паре одного из оставшихся школьников, получим требуемое. Пусть можно выделить максимум $N-1$ пар (людей в них будем обозначать чёрными точками). Тогда осталось минимум $N+2$ человека (их будем обозначать белыми точками), и среди них никто не дружит. Каждые две точки, соответствующие друзьям, соединим отрезком (ребром).

Заметим, что для каждой пары из наших $N-1$ пар чёрных точек есть максимум одна белая точка, соединённая с обеими вершинами пары (иначе можно вместо одной пары чёрных точек создать две новые). Тогда будем постепенно присоединять к каждой чёрной паре по белой точке так, чтобы не получилось полной тройки (в которой все друг с другом дружат). Это получится сделать для всех чёрных пар, и ещё три белые точки останутся, образуя пустую тройку (среди этих троих никто не дружит) — мы получили разбиение на тройки, противоречащее условию!

Решение 2. Обозначим школьников точками и каждых двух друзей соединим отрезком (ребром). Будем формировать «полуполные» тройки — в которых есть хотя бы одно ребро, но не все три ребра. Пусть мы не можем из остатка сформировать очередную «полуполную» тройку. Тогда в остатке либо все попарно не дружат, либо все попарно дружат. (В самом деле, пусть в остатке есть и дружащие, и не дружащие. Выберем из них двоих друзей A и B. Тогда все другие люди из остатка дружат и с A, и с B (иначе возникнет полуполная тройка с ребром AB), но при этом в остатке имеется некто C, который с кем-то из остатка не дружит — скажем, с D. Тогда A, C, D — полуполная тройка.)

Если в остатке все попарно не дружат — получается разбиение без полных троек, что противоречит условию. Если в остатке все попарно дружат — получается разбиение из полуполных и полных троек, что решает задачу.

Сложный вариант, 8 – 9 классы

1 (4 балла). *На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?* *(Михаил Евдокимов)*

Ответ: да, могло. **Решение.** Пусть силы мальчиков равны 1, 2, ..., 12.

Способ 1. Разобьём их на пары соседних по силе. В одну команду возьмём сильных детей из каких-то трёх пар и слабых – из других трёх; в другую команду – всех остальных. Получится 10 разбиений на команды равной силы – число способов разбить 6 объектов на две группы по 3.

Способ 2. Разобьём их на пары с равной суммарной силой 13. В одну команду возьмём любые три из этих шести пар, в другую — остальные три пары. Снова 10 разбиений на команды равной силы

2 (5 баллов). *Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.* *(Александр Юран)*

Решение 1. Обозначим девятиугольник как $A_1A_2\dots A_9$. Рассмотрим четырёхугольники $A_2A_4A_6A_8$ и $A_1A_4A_6A_8$. Заметим, что оба прямоугольниками они быть не могут, так как он однозначно задаётся тремя точками. Значит, поскольку сумма углов в четырёхугольнике равна 360°, один из них будет иметь тупой угол, который и даст нам искомый треугольник.

Решение 2. Проведём девятизвенную замкнутую ломаную $A_1A_3A_5A_7A_9A_2A_4A_6A_8A_1$, соединяющую вершины 9-угольника через одну. Если угол между какими-то двумя соседними звеньями тупой, задача решена. Предположим, что все эти углы не больше $\pi/2$. Тогда их сумма не больше $9\cdot\pi/2 = 4,5\pi$. К каждому из этих углов примыкают с двух сторон два угла, дополняющие его до угла девятиугольника. Сумму T этих 18 дополнительных углов можно посчитать так: разбить их на пары, дополняющие до π соответствующий угол девятиугольника. Так как сумма углов девятиугольника равна 7π, сумма T равна $9\pi - 7\pi = 2\pi$. Но тогда сумма всех углов девятиугольника не больше, чем $2\pi + 4,5\pi = 6,5\pi < 7\pi$ — противоречие.

3 (7 баллов). *Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Первый берёт 1 камень, потом второй берёт 1 или 2 камня, потом первый берёт 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?* *(Людмила Смирнова)*

Ответ: первый игрок.

Решение. Докажем, что для любого натурального $n \leqslant 10$ первый игрок на своём n-м ходе может добиться, чтобы количество забранных из кучки камней равнялось n^2, и второй игрок не сможет ему помешать. Доказательство проведём индуктивно. В свой первый ход первый игрок забирает один камень, т. е. число забранных камней равно 1^2. Пусть в свой n-й ход первому игроку удалось сделать так, чтобы количество забранных камней равнялось n^2. В свой n-й ход второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Поскольку $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$. Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n+1$ камня и точно сможет получить $(n+1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока. Таким образом, поскольку $100 = 10^2$, побеждает первый игрок: ему достаточно каждый раз забирать такое число камней, чтобы общее число забранных камней было точным квадратом, и на своём 10-м ходе он возьмёт последний камень.

4 (7 баллов). *Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?* *(Максим Дидин)*

Решение 1. Можно считать, что m и n — натуральные взаимно простые числа. Назовём сначала дробь $\dfrac{1}{2}$. Петя вычислит дробь $\dfrac{2m+n}{2n}$. Общий делитель числителя $2m+n$ и знаменателя $2n$ будет также общим делителем чисел $2(2m+n) - 2n = 4m$ и $2n$ и, поскольку m и n взаимно просты, может равняться 1, 2 или 4. Узнав числитель, который сообщит нам Петя, мы точно будем знать, что $2m+n$ не больше этого числителя, умноженного на 4. Следующим ходом назовём дробь $\frac{1}{p}$, где p — простое число, большее учетверённого числителя, — тогда p будет больше и m, и n. Петя вычислит дробь $\frac{p\cdot m+n}{p\cdot n}$, она будет несократимой. Узнав её числитель $p\cdot m+n$, возьмём от него остаток от деления на p и таким образом найдём n. Вычтя из числителя n и поделив на p, найдём m.

Решение 2. Назовём сначала $\frac{1}{3}$ и получим ответ a, а потом $\frac{2}{3}$ и получим ответ b. Возможны четыре случая.

Случай 1: n не кратно 3. Тогда $a=3m+n$, $b=3m+2n$. Заметим, что $a<b<2a$.

Пусть $n=3k$. Тогда m не кратно 3.

Случай 2: k кратно 3. Тогда $a=m+k$, $b=m+2k$. Здесь тоже $a<b<2a$.

Случай 3: $k\equiv m \pmod 3$. Тогда $a=m+k$, $b=\dfrac{m+2k}{3}$. Здесь $b<a<3b$.

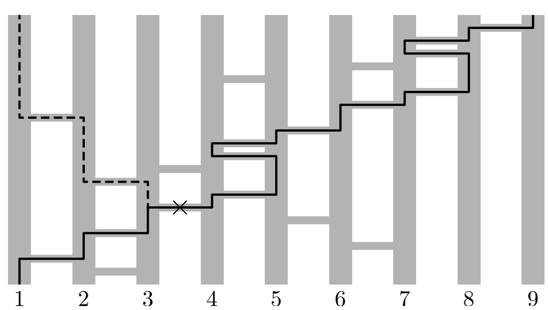
Случай 4: $k\equiv 2m \pmod 3$. Тогда $a=\dfrac{m+k}{3}$, $b=m+2k$. Здесь $b>3a$.

В случаях 1 и 2, как легко проверить, $\frac{m}{n}=\dfrac{2a-b}{3(b-a)}$.

Случаи 3 и 4 отличаются от них и между собой по указанным соотношениям между a и b.

В случае 3 получаем $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2a-3b}{3(3b-a)}$, в случае 4 получаем $\dfrac{m}{n}=\dfrac{6a-b}{3(b-3a)}$.

5 (9 баллов). *В ряд стоят 9 вертикальных столбиков. В некоторых местах между соседними столбиками вставлены горизонтальные палочки, никакие две не находятся на одной высоте. Жук ползёт снизу вверх; встречая палочку, он переползает по ней на соседний столбик и продолжает ползти вверх. Известно, что если жук начинает внизу первого (самого левого) столбика, он закончит свой путь на девятом (самом правом) столбике. Всегда ли можно убрать одну палочку так, чтобы жук в конце пути оказался наверху пятого столбика? (Например, если палочки расположены как на рисунке, жук будет ползти по сплошной линии. Если убрать третью палочку на пути жука, дальше он поползёт по пунктирной линии.)* *(Георгий Караваев)*



Ответ: да, всегда.

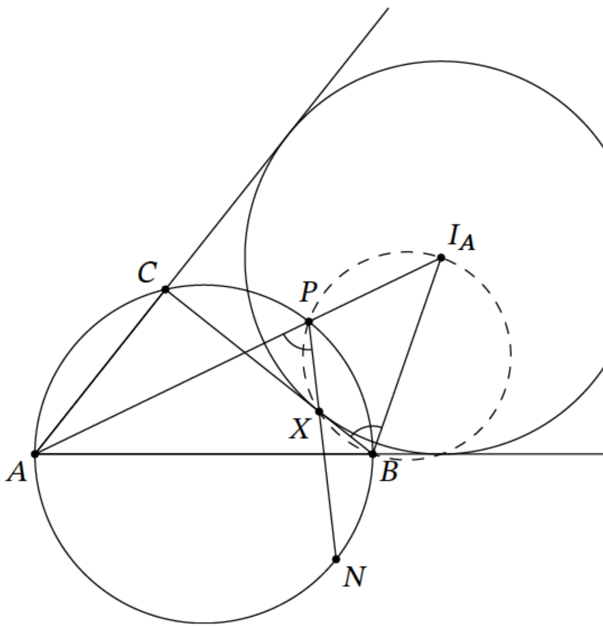
Посадим по жуку на основание каждого столбика. Пусть они будут ползти вверх с одинаковыми скоростями, а на горизонтальных палочках будут мгновенно меняться местами. Тогда в каждый момент времени по каждому столбику ползёт один жук. В частности, на каждом столбике финиширует один из жуков.

Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, *красным*, а финишировавшего на вершине пятого столбика — *зелёным.* Красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они должны поменяться местами. Уберём эту палочку. После этого красный жук поползёт по маршруту зелёного, то есть закончит на пятом столбике.

Замечание. Ту же идею можно было оформить по-другому. Изначально посадим синего жука на вершину пятого столбика, и пусть он ползёт сверху вниз. Тогда он пройдёт какую-то палочку в том же направлении, что и красный жук. Эту палочку и уберём.

6 (10 баллов). *На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N — середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q — середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.* *(Алексей Доледенок)*

Решение 1. Временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Пусть I_A — центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон BA и AC. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN.



Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B, то $\angle CBI_A = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}$. Так как I_A лежит на биссектрисе угла A, то точки A, P, I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\smile AN}{2} = \frac{\smile ABC}{4} = \frac{360^\circ - \smile AC}{4} = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, то есть четырёхугольник I_APXB вписанный.

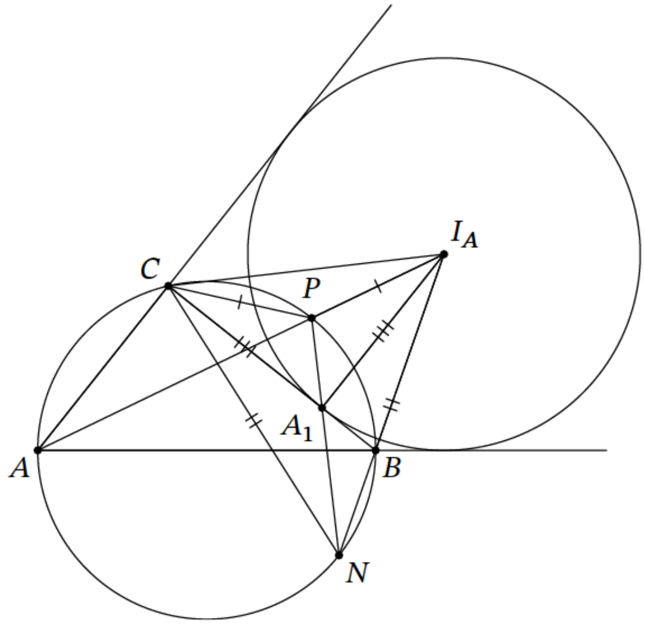
Вернёмся к решению задачи. Точки X и A_1 совпадают тогда и только тогда, когда

$$\angle BXI_A = \angle BA_1I_A = 90^\circ,$$

что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BPI_A = 90^\circ$, а это эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90^\circ$. Проведя аналогичные рассуждения со стороны вершины A, получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой эквивалентна тому, что угол ACB прямой, а следовательно, из одного утверждения следует другое.

Решение 2. Как и в прошлом решении, временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Воспользуемся двумя известными фактами.

- *Лемма о трезубце.* Точка P равноудалена от точек B, C, I_A и центра вписанной окружности треугольника ABC.
- *Внешняя лемма о трезубце.* Точка N равноудалена от точек A, C, I_A и центра окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CA и CB.



Из этих утверждений следует, что $NC = NI_A$ и $PC = PI_A$, а значит, PN является серединным перпендикуляром к отрезку CI_A.

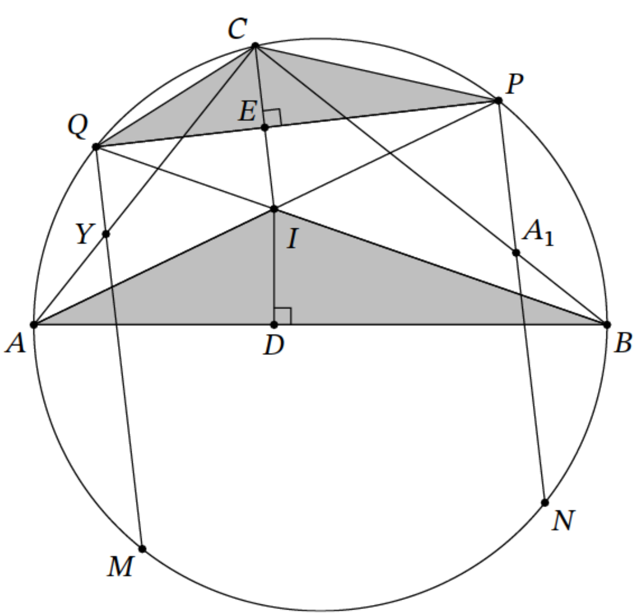
Вернёмся к решению задачи. Точка A_1 лежит на прямой PN тогда и только тогда, когда $CA_1 = A_1I_A$, то есть треугольник CA_1I_A является равнобедренным и прямоугольным. Это, в свою очередь, равносильно тому, что $\angle A_1CI_A = 45°$, что эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90°$.

Осталось, как и в концовке прошлого решения, сослаться на то, что аналогично устанавливается эквивалентность утверждений, что $\angle BCA = 90°$ и что точки Q, B_1, M лежат на одной прямой.

Решение 3. Пусть I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, D — точка касания этой окружности со стороной AB, E — точка пересечения отрезков CI и PQ. Обозначим через Y точку пересечения прямых AC и MQ. Требуется доказать, что точки B_1 и Y совпадают.

Мы будем пользоваться следующими известными фактами.

- Прямые NP и MQ параллельны биссектрисе угла C, а прямая PQ — перпендикулярна.
- Выполнены равенства $AD = CB_1$ и $BD = CA_1$.



Поскольку $\angle CPQ = \angle CBQ = \angle IBA$ и аналогично $\angle CQP = IAB$, то треугольники IBA и CPQ подобны. Тогда D и E — соответствующие точки в подобных треугольниках IBA и CPQ, поэтому

$PE/EQ = BD/DA$. Так как длина отрезка PE равна расстоянию между параллельными прямыми CI и NP, то

$$PE = CA_1 \cdot \sin \frac{\angle C}{2}.$$

Аналогично $QE = CY \cdot \sin \frac{\angle C}{2}$, поэтому

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{PE}{EQ} = \frac{BD}{DA}.$$

Подставив $CA_1 = BD$, получим

$$\frac{CA_1}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow \frac{BD}{CY} = \frac{BD}{DA} \Leftrightarrow CY = DA.$$

Но $DA = CB_1$, то есть $CB_1 = CY$. Следовательно, точки Y и B_1 совпадают.

7 (12 баллов). *На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из* 99 *карточек называется* неудачной*, если для каждого* k *от 1 до* 99 *сумма чисел на* k *верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?* *(Андрей Кушнир)*

Ответ: 98!.

Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}, 1, 2, \ldots, 98$. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна находиться сверху, а остальные карточки можно расположить любым из 98! способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2} + n$, где n — натуральное число, то есть будет иррациональна.

Оценка. Разобьём все стопки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (то есть перекладыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из неё по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$. Тогда все стопки из группы будут иметь вид $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{99}, a_1, \ldots, a_{i-1}$ для i от 1 до 99.

Начнём идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1}, удачная. Проделаем описанную операцию 100 раз. По принципу Дирихле найдётся карточка a_t, с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t, а закончили карточкой a_{t-1}, то есть прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS', где n — количество пройденных кругов, а S' — сумма чисел на всех карточках. Однако S' по условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше, чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки

$$1 + \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2},\ \ldots,\ 50 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2},\ 2 - \sqrt{2},\ \ldots,\ 49 - \sqrt{2}.$$

Назовём первые 50 карточек *положительными*, а остальные — *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной, и для любого k среди первых k карточек положительных карточек должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также будет равно 98!.

Сложный вариант, 10 – 11 классы

1 (4 балла). *Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых $m!! = n!$. (Двойной факториал $m!!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих ту же чётность, что m. Например, $5!! = 15$, $6!! = 48$).* *(Борис Френкин)*

Ответ: $m = n = 1$ и $m = n = 2$.

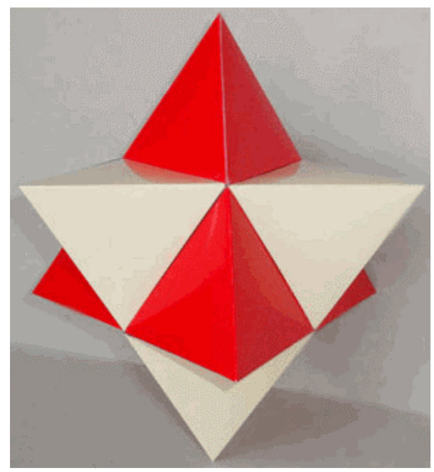
Решение. Пусть $m!! = n!$. Заметим, что $n!$ чётно при $n > 1$. Поэтому при нечётных $m > 1$ решений нет. Ясно, что $m = n = 1$ является решением.

Пусть $m = 2k$, где k натуральное. Тогда $n! = m!! = k!2^k$. Отсюда $(k+1) \cdot \ldots \cdot n = 2^k$. Одно из чисел $k+1, k+2$ нечётно. Так как оно больше единицы, оно не является делителем для 2^k. Значит, единственно возможный случай — это $2^k = k+1$. Но $2^k > k+1$ при $k \geq 2$ (так как $2^2 > 3$, а при дальнейшем увеличении k правая часть неравенства всегда увеличивается на 1, а левая — больше, чем на 1). Значит, в нашем случае $k = 1$, $m = 2$. Очевидно, $m = n = 2$ является решением.

2 (6 баллов). *В пространстве расположили конечный набор кругов радиуса 1. Круги могут пересекаться друг с другом, но не проходят через центры друг друга. В центре каждого круга зажгли точечную лампочку, светящую во все стороны. Могло ли случиться, что любой луч света, выходящий из центра любого круга, упирается в какой-то другой круг?* *(Марк Алексеев)*

Ответ: могло.

Рассмотрим звёздчатый октаэдр (см. рисунок). Его можно рассматривать как объединение двух правильных тетраэдров с общим центром, пересекающихся по октаэдру, или как октаэдр, у которого «продлены» грани. В центре каждой грани обоих тетраэдров поместим лампочку и возьмём круги, содержащие эту грань. Ясно, что все лучи не выйдут за пределы звёздчатого октаэдра и тем более за пределы наших кругов.



Замечание. Аналогичные конструкции можно получить на основе додекаэдра или икосаэра, но количество кругов будет больше. Подойдёт также любой выпуклый многогранник, у которого все двугранные углы тупые: если в плоскости каждой его грани взять большой круг с центром внутри грани, то над каждой гранью соседние круги образуют «домик», который блокирует все лучи, выходящие из центра, лежащего в этой грани, наружу многогранника, а лучи, идущие внутрь многогранника, блокируются его гранями (содержащимися в соответствующих кругах).

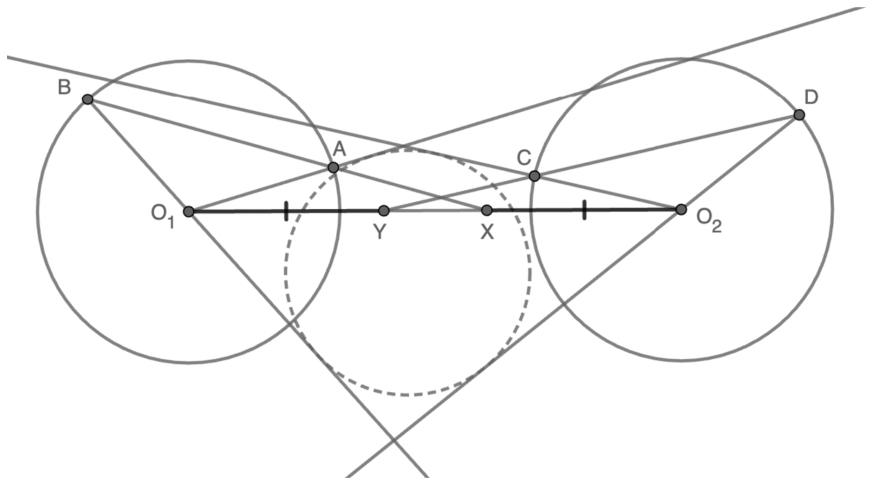
3 (7 баллов). *В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку C* хорошей, *если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C, а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C. Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?* *(Александр Чеботарев)*

Ответ: $N^2 - N$. Пример расстановки для таблицы 5×5 показан на рисунке, в общем случае он строится аналогично (таблица симметрична относительно диагонали, ведущей из левого нижнего угла в правый верхний, все числа хорошие, кроме чисел на этой диагонали).

0	1	2	3	4
3	4	5	6	3
6	7	8	5	2
9	10	7	4	1
12	9	6	3	0

Докажем, что хороших чисел не более $N^2 - N$. Пусть их всего X. Соединим каждое хорошее число с двумя его соседями — с тем соседом, который на 1 больше, и с тем, который на 3 больше (соединяем отрезком). Тогда каждое хорошее число даст по два отрезка, каждый из которых будет подсчитан ровно один раз. Итого, всего будет $2X$ отрезков. Но всего на доске пар соседних клеток ровно $2N(N-1)$, откуда $2N(N-1) \geqslant 2X$, что и требовалось.

4 (8 баллов). *Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1Y = O_2X$. Точки A и B лежат на ω_1, и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2, и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2.* *(Иван Кухарчук, Артемий Соколов)*



Решение. Пусть внешние биссектрисы углов AO_1B и CO_2D пересекаются в точке S, а прямые BO_1 и DO_2 — в точке T. Тогда $\angle TO_1S = \frac{1}{2}\angle TO_1A = \angle O_1BA$, то есть O_1S и BX параллельны. Аналогично O_2S и DY параллельны. Заметим, что следующие площади треугольников равны:

$$S_{O_1AS} = S_{O_1XS} = S_{O_2YS} = S_{O_2CS}$$

(первое и последнее равенство следуют их полученных параллельностей, а второе — из равенства отрезков O_1X и O_2Y). Следовательно, точка S равноудалена не только от прямых O_1T и O_1A (O_2T и O_1C), но и от прямых O_1A и O_2C, то есть является центром окружности, касающейся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2, что и требовалось.

5 (10 баллов). *Дан многочлен степени $n > 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что у этого многочлена не может быть никаких других коэффициентов, кроме 1, -1 и -2.* *(Леонид Шатунов)*

Пусть наш многочлен $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = Q(x)x + a_0 = R(x)x^2 + a_1x + a_0$. Подставив в $P(x)$ любой его коэффициент, видим, что все слагаемые, кроме a_0, делятся на этот корень, а значит и a_0 на него делится. Поэтому, если $|a_0| = 1$, то всё доказано. Далее считаем, что $|a_0| > 1$.

По условию $P(a_0) = 0$. Если и $P(-a_0) = 0$, то $P(x)$ делится на $(x - a_0)(x + a_0) = x^2 - a_0^2$. Но тогда a_0 делится на a_0^2, что не так. Значит, среди коэффициентов $-a_0$ отсутствует.

Так как $P(a_0) = 0$, то $R(a_0)a_0 + a_1 + 1 = 0$. Поскольку a_1 делит a_0, получаем, что a_1 делит 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $a_1 = 1$. Тогда $R(a_0)a_0 = -2$, то есть $|a_0| = 2$. Если $a_0 = -2$, то все доказано. Пусть $a_0 = 2$. Тогда все остальные коэффициенты равны ± 1 или 2. Поэтому равенство $P(2) = 0$ имеет вид $2S_2 + S_1 - S = 0$ (где в $2S_2$ входят слагаемые с коэффициентом 2, в S_1 — с коэффициентом 1, а в S — с коэффициентом -1), или

$$S_2 + S_2 + S_1 = S, \qquad (*)$$

причём S_2, S_1, S — суммы различных степеней двойки. При этом в силу равенства $P(1) = 0$, означающего, что сумма коэффициентов многочлена равна 0, получаем, что число слагаемых (степеней двойки) в левой части равенства $(*)$ равно числу слагаемых в правой. В левой части будем проделывать следующие операции: если в ней встречаются два одинаковых слагаемых 2^i, заменим их на 2^{i+1}. Хотя бы одна такая операция будет проделана: поскольку $a_0 = 2$, в сумму $S_2 + S_2$ дважды входит 1. Когда этот процесс остановится, как в левой, так и в правой части будут стоять суммы различных степеней двоек (но какие то слагаемые левой части могут совпадать со слагаемыми правой). При этом число слагаемых в левой части будет меньше: каждая операция уменьшала его на единицу. Противоречие с единственностью разложения натурального числа в сумму степеней двойки.

Случай 2: $a_1 = -1$. Тогда $R(a_0)a_0 = 0$, то есть $R(a_0) = a_n a_0^{n-2} + \ldots + a_3 a_0 + a_2 = 0$. Если $n > 1$, то $n \geqslant 3$ (так как $a_2 \neq 0$). Далее, a_2 делится на a_0, то есть $a_2 = a_0$, а $a_3 a_0 + a_0$ делится на a_0^2, то есть $a_3 + 1$ делится на a_0, которое само делится на a_3. Значит, 1 делится на a_3, откуда $|a_3| = 1$.

Если $a_3 = 1$, то $P(1) = 0$. Кроме того, $|a_0| = 2$. Повторяя рассуждения случая 1, снова получим, что $a_0 = -2$.

Если $a_3 = -1$ и $n > 3$, то $P(a_0) = a_n a_0^n + \ldots + a_5 a_0^5 + a_4 a_0^4 = 0$. Поделив на a_0^4, видим, что $n \geqslant 5$, и повторив предыдущие рассуждения, получаем, что либо $a_0 = -2$, либо $a_4 = a_0$, $a_5 = -1$. И так далее.

Так мы получим, что либо $a_0 = -2$, либо $n = 2m - 1$ нечётно и все коэффициенты при чётных степенях многочлена равны a_0, а при нечётных равны -1. Тогда $P(a_1) = P(-1) = m(a_0 + 1) \neq 0$, так как $a_0 \neq -1$. Противоречие.

6 (12 баллов). *Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Чтобы пройти испытание, Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?* *(Виктор Клепцын)*

Решение.

Первый способ (предложен участником Московской математической олимпиады). Рассмотрим всевозможные мелодии из нот до и си длины 13 (их 2^{13} штук). Каждую такую мелодию периодически продолжим в обе стороны, получив бесконечную в обе сторону мелодию. Назовём две получившиеся бесконечные мелодии эквивалентными, если одна получается из другой сдвигом.

Наименьший период всех бесконечных мелодий, кроме двух, состоящих только из нот до и только из нот си, равен 13 (поскольку число 13 простое).

Количество не эквивалентных друг другу бесконечных мелодий равно $\frac{2^{13}-2}{13} + 2 = 632$. Из них мелодий, содержащих запрещённые Кощеем мелодии, не больше

$$\left(2^8 + 2^7 + \ldots + 2^1\right) + 18 = 528$$

(в скобках учтены запретные мелодии длины $\leqslant 12$, за скобками — все остальные).

Таким образом, найдётся бесконечная мелодия, которая не содержит запретных мелодий, и для прохождения испытания Ивану достаточно сыграть её кусок длины 300.

Второй способ. Пусть L_n — число мелодий длины n, не содержащих запретных последовательностей нот. Будем считать, что $L_0 = 1$. По индукции докажем, что $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$ для всех натуральных n.

База индукции ($n = 1$): $L_2 = 4 \geqslant 2 + 1 = L_1 + L_0$.

Предположим, что неравенство $L_{k+1} \geqslant L_k + L_{k-1}$ верно для всех k, меньших n. Покажем, что тогда $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$. Заметим, что

$$L_{n+1} \geqslant 2L_n - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0. \tag{1}$$

Действительно, мы можем добавить одну из двух нот к уже имеющейся мелодии из n нот, при этом добавленная нота могла завершить запретную мелодию из 5 нот и испортить разрешённую мелодию из $n - 4$ нот, завершить запретную мелодию из 6 нот и испортить разрешённую мелодию из $n - 5$

нот и т. д. (Здесь мы можем вычесть лишнее, если $n > 30$, и часть вычитаемых мелодий могут быть одинаковыми, но поскольку мы пишем оценку снизу, всё правильно.)

Из неравенства $L_{k+1} \geqslant L_k + L_{k-1}$ следуют неравенства

$$L_{k+1} - L_k \geqslant L_{k-1}, \tag{2}$$

$$L_{k+1} - L_{k-1} \geqslant L_k. \tag{3}$$

Применяя неравенства (1), (2) и (3), получим

$$L_{n+1} - L_n - L_{n-1} \geqslant (L_n - L_{n-1}) - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0 \geqslant L_{n-2} - L_{n-4} - L_{n-5} - \ldots - L_0 =$$

$$= (L_{n-2} - L_{n-4}) - L_{n-5} - \ldots - L_0 \geqslant L_{n-3} - L_{n-5} - L_{n-6} - \ldots - L_0 \geqslant$$

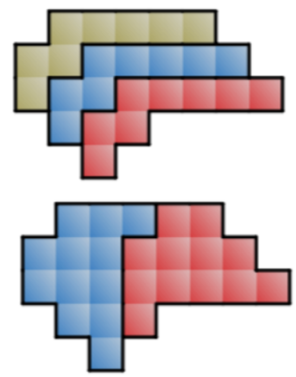
$$\geqslant L_{n-4} - L_{n-6} - L_{n-7} - \ldots - L_0 \geqslant \ldots \geqslant L_3 - L_1 - L_0 = 8 - 2 - 1 = 5 > 0.$$

Следовательно, $L_{n+1} \geqslant L_n + L_{n-1}$, и шаг индукции доказан.

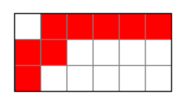
Поскольку L_0 и L_1 положительны, то из доказанного неравенства следует, что L_n — возрастающая последовательность положительных чисел. Следовательно, $L_{300} > 0$ и Иван справится с испытанием.

7 (12 баллов). *Назовём* полоской *клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях — вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор* $(-1, 1)$. *Докажите, что для любой полоски, состоящей из чётного числа клеток, найдётся такое нечётное* k, *что если объединить* k *таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке приведён пример.)*

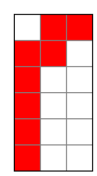
(Сергей Маркелов, Игорь Маркелов)



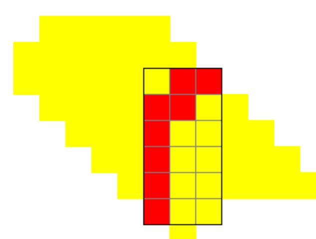
Решение. Построим прямоугольник наименьшего размера, содержащий полоску (см. рисунок). Так как полоска состоит из чётного числа клеток, то при шахматной раскраске её крайние клетки будут разного цвета. Эти клетки расположены в противоположных углах прямоугольника, поэтому его длина и ширина имеют разную чётность.



Без ограничения общности будем считать, что длина прямоугольника a больше его ширины b. Отразим прямоугольник относительно вертикальной линии и повернём на 90° против часовой стрелки (см. рисунок).



Вставим друг в друга достаточно большое количество исходных полосок и пронумеруем их снизу вверх. Расположим новый прямоугольник так, чтобы его левая нижняя клетка совпала с левой нижней клеткой первой полоски. Заметим, что при этом его правая верхняя клетка совпадёт с правой верхней клеткой полоски с номером $a - b + 1$. Начнём смещать прямоугольник на вектор $(-1, 1)$ до тех пор, пока он полностью не окажется внутри фигуры из полосок (см. рисунок). Такой момент наступит, когда нижний ряд прямоугольника попадёт в горизонталь, в которой будет $a - b + 1$ клеток.



Пусть при этом левая нижняя клетка прямоугольника совпадает с левой нижней клеткой полоски с номером x, а правая верхняя — с правой верхней клеткой полоски с номером y. Тогда $y - x = a - b$, поэтому числа x и y имеют разную чётность. Оставим $k = x + y$ полосок. Может оказаться, что после этого левая верхняя часть прямоугольника уже не будет находиться внутри фигуры. Исправляем это так: увеличиваем x на 1, то есть смещаем прямоугольник на вектор $(-1, 1)$, при этом y тоже увеличивается на 1, то есть число полосок увеличивается на 2. Если этого не хватило, повторяем процедуру (после каждого шага прямоугольник смещается на одну горизонталь и одну вертикаль, а число полосок увеличивается на 2, поэтому в какой-то момент прямоугольник окажется полностью внутри фигуры).

Докажем, что полученную фигуру можно разрезать по линиям сетки на две равные части. Сделаем разрез по границе исходной полоски, помещенной внутрь нашей фигуры, так, чтобы она осталась целиком в правой нижней части (на нашем рисунке режем вдоль левой и верхней границы красной полоски). Тогда граничный слой клеток в обеих полученных фигурах выглядит так (в левой верхней фигуре делаем обход по часовой стрелке, а в правой нижней — против часовой стрелки):

1) полоска (в левой верхней фигуре это полоска с наибольшим номером, а в правой нижней — наша полоска);

2) лесенка из x ступенек;

3) полоска (в левой верхней фигуре это полоска, получающаяся из нашей полоски смещением на вектор $(-1, 1)$, а в правой нижней — первая полоска);

4) лесенка из y ступенек.

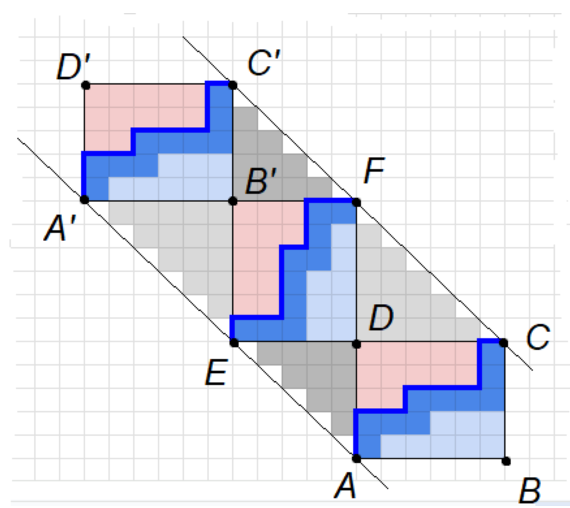
Таким образом, полученные фигуры равны.

Решение 2. Будем, считать, что полоска расположена на бесконечной клетчатой (координатной) плоскости. Впишем нашу полоску Π в клетчатый прямоугольник $ABCD$ размера $a \times b$ ($AB = a$, $BC = b$). В полоске будет $(a + b - 1)$ клетка, поэтому $(a + b)$ нечётно. Пусть Π ограничена слева и сверху ломаной ℓ, идущей из A в C (вправо-вверх).

Параллельно перенесём прямоугольник $ABCD$ вместе с полоской Π и ломаной ℓ на вектор $(-a - b, a + b)$; пусть после переноса мы получили прямоугольник $A'B'C'D'$, вписанную в него полоску Π' и ограничивающую ее ломаную ℓ', идущую из A' в C'.

Рассмотрим все клетки, лежащие целиком в области, ограниченной ломаными ℓ, ℓ' и отрезками AA', CC'. Докажем, что эти клетки образуют искомый клетчатый многоугольник M. Во-первых, ясно, что M получается как объединение $k = a + b$ сдвигов полоски Π на векторы $(-1, 1)$, $(-2, 2)$, …, $(-k, k)$.

Остаётся показать, как разбить M на два равных клетчатых многоугольника. Пусть $E = CD \cap C'B'$ и $F = AD \cap A'B'$ так, что $B'EDF$ — прямоугольник. По построению $CE = C'E = a+b$, значит $DE = b$. Аналогично $B'E = a$. Видим, что E и F лежат соответственно на отрезках AA' и CC', а прямоугольники $B'EDF$ и $DCBA$ равны. Наложим прямоугольник $DCBA$ на $B'EDF$ (так, чтобы совместились соответствующие вершины: D — с B', C — с E, и т.д.). Пусть при этом наложении ломаная ℓ перешла в ломаную ℓ''. Ломаная ℓ'' и будет делить M на две равные части. Действительно, рассмотренное выше наложение $DCBA$ на $B'EDF$ можно получить преобразованием плоскости φ, где φ — последовательное применение сдвига на вектор $(-\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ и отражения относительно средней линии между параллельными прямыми AA' и CC' (φ — скользящая симметрия). Легко видеть, что это же преобразование φ переводит соответственно A, C, F, E — в F, E, A', C', а ломаную ℓ'' — в ℓ'. Значит, φ совмещает указанные части многоугольника M.



СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 31 марта 2024 года

1. Дано натуральное число n. Можно ли представить многочлен $x(x-1)\ldots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами? *Б. Бутырин*

2. Точки P, Q лежат внутри окружности ω. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает ω в точках A и D. Окружность с центром D, проходящая через P и Q, пересекает ω в точках B и C. Отрезок PQ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ACP = \angle BCQ$.

А. Заславский

3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку *хорошей*, если сумма чисел строки, содержащей эту клетку, не меньше, чем сумма чисел столбца, содержащего эту клетку. Найдите наименьшее возможное количество хороших клеток. *А. Глебов*

4. Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны?

П. Кожевников

5. Вписанная сфера треугольной пирамиды $SABC$ касается основания ABC в точке P, а боковых граней — в точках K, M и N. Прямые PK, PM, PN пересекают плоскость, проходящую через середины боковых рёбер пирамиды, в точках K', M', N'. Докажите, что прямая SP проходит через центр описанной окружности треугольника $K'M'N'$.

Ф. Ивлев

6. У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и чёрная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45, делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке? (Каждый кусок — набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1.)

Т. Казицына

СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 31 марта 2024 года

1. *Дано натуральное число n. Можно ли представить многочлен $x(x-1)\dots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами?* *(Б. Бутырин)*

Ответ: нельзя.

Решение 1. Предположим противное — существуют такие многочлены f и g, что выполнено тождество $x(x-1)\dots(x-n) = f^3 + g^3$. Тогда

$$x(x-1)\dots(x-n) = (f+g)(f^2 - fg + g^2). \qquad (*)$$

При $x = 0, 1, \dots, n$ имеем $f^3(x) = -g^3(x)$, откуда $f(x) = -g(x)$, то есть $f(x) + g(x) = 0$.

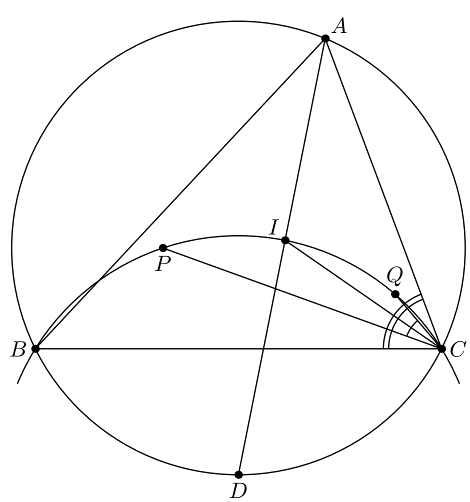
Значит, многочлен $f+g$ имеет корнями числа 0, 1, 2, …, n, откуда его степень не меньше $n+1$ (поскольку он не тождественный ноль). В частности, у одного из многочленов f и g степень не меньше $n+1$ — не теряя общности, пусть у g. Тогда, из равенства $(*)$, степень многочлена $f^2 - fg + g^2$ равна 0, то есть это ненулевая константа. Но это невозможно, так как из представления $f^2 - fg + g^2 = (f - 0,5g)^2 + 0,75g^2$ видно, что у этого многочлена старшая степень не меньше, чем максимум из степеней многочленов $(f - 0,5g)^2$ и $0,75g^2$, то есть, не меньше $2(n+1)$. (Можно сказать иначе: $0,75g^2$ принимает сколь угодно большие значения, откуда $(f - 0,5g)^2 + 0,75g^2$ — тоже, то есть, последний многочлен не может быть константой).

Решение 2. У многочленов f и g нет общих корней, иначе это будет кратный корень суммы кубов, а у многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ кратных корней нет.

Тогда многочлен $f^2 - fg + g^2$ имеет степень $2\max(\deg f, \deg g)$ (старшие коэффициенты не сократятся) и не имеет корней, поскольку выражение $a^2 - ab + b^2$ равно 0 только при $a = b = 0$. Но такого делителя у многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ нет.

2. *Точки P, Q лежат внутри окружности ω. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает ω в точках A и D. Окружность с центром D, проходящая через P и Q, пересекает ω в точках B и C. Отрезок PQ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ACP = \angle BCQ$.* *(А. Заславский)*

Решение 1. Пусть I — точка пересечения отрезка AD и дуги $BPQC$. Так как $DB = DC$, то AD — биссектриса угла BAC и по теореме о трилистнике I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Следовательно, CI — биссектриса угла ACB. С другой стороны, так как AD — серединный перпендикуляр к PQ, то $PI = QI$, то есть CI — биссектриса угла PCQ. Из этих двух утверждений, очевидно, следует утверждение задачи.



Решение 2. Обозначим $\angle ACQ = \alpha$, $\angle QCP = \beta$, $\angle PCB = \gamma$. Необходимо доказать, что $\gamma = \alpha$.

Заметим, что $\alpha + \beta + \gamma = \angle ACB = \angle ADB = \angle BDP + \angle PDA$. Далее, $\angle BDP = 2\angle BCP = 2\gamma$, как центральный и вписанный в окружность (DPQ), а также $\angle PDA = \frac{1}{2}\angle PDQ = \frac{1}{2} \cdot 2\angle PCQ = \beta$, как центральный и вписанный в окружность (DPQ). Тогда $\alpha + \beta + \gamma = \angle BDP + \angle PDA = 2\gamma + \beta$, откуда $\gamma = \alpha$.

Примечание. В условии задачи дано, что точки P и Q лежат не только внутри окружности ω, но и внутри вписанного в неё треугольника ABC. Последнее условие на самом деле излишне. Из остальных условий задачи следует, что точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Но если обе изогональные точки лежат внутри описанной окружности, то они лежат и внутри треугольника, поскольку при изогональном сопряжении три сегмента, ограниченные сторонами треугольника и дугами описанной окружности, переходят в три угла, вертикальных углам треугольника (см. по этому поводу книгу А. Акопяна и А. Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка», М.: МЦНМО, 2011, с. 47).

3. *В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку* хорошей*, если сумма чисел строки, содержащей эту клетку, не меньше, чем сумма чисел столбца, содержащего эту клетку. Найдите наименьшее возможное количество хороших клеток.* *(А. Глебов)*

Ответ: наименьшее возможное количество хороших клеток равно N.

Пример (один из многих). Пусть в первой строке стоят единицы, а в остальных нули. Тогда все клетки первой строки хорошие, а остальные плохие.

Оценка.

Способ 1. Разобьём все клетки таблицы на N групп по N клеток так, чтобы в каждой группе все клетки находились в разных строках и разных столбцах. Пример такого разбиения для $N = 5$ см. на рисунке, для других N разбиение аналогично (например, в одну группу берём главную диагональ (идущую сверху слева вниз вправо), во вторую — диагональ над ней и число в левом нижнем углу, в третью — следующую диагональ и диагональ из двух клеток слева внизу, и т.д.).

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

Предположим, что в какой-то группе все клетки плохие. Тогда для каждой клетки этой группы сумма чисел содержащей её строки меньше суммы чисел содержащего её столбца. Суммируя эти неравенства по всем клеткам группы, получаем, что сумма чисел во всей таблице, подсчитанная по строкам, меньше, чем эта же сумма, подсчитанная по столбцам – противоречие, Значит, в каждой группе есть хорошая клетка, и число хороших клеток не меньше числа групп, то есть не меньше N.

Способ 2. Допустим противное — хороших клеток может быть меньше, чем N. Докажем лемму:

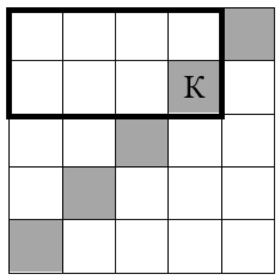
Лемма. *Если в белой таблице $N \times N$ закрасить чёрным менее N клеток, то можно будет выбрать N белых клеток так, чтобы все они были в разных столбцах и в разных строках.*

Из леммы, назвав хорошие клетки чёрными, а остальные белыми, получим противоречие: общая сумма чисел в столбцах, отвечающих N выбранным белым клеткам, больше общей суммы чисел в строках, отвечающих этим клеткам. Но в первой сумме участвуют все N столбцов, а во второй сумме — все N строк, откуда сумма всех чисел таблицы больше самой себя, противоречие.

Доказательство. Если чёрных клеток нет, задача очевидна. Иначе найдётся строка, в которой есть и чёрная клетка, и белая (так как чёрных меньше N). Вычеркнем из таблицы эту строку и столбец, проходящий через белую клетку этой строки. Осталась таблица $(N-1)\times(N-1)$, в которой чёрных клеток меньше $(N-1)$, и утверждение верно по индукции (база для доски 1×1 очевидна).

Способ 3. Переставим между собой строки таблицы так, чтобы суммы чисел по строкам убывали сверху вниз, а столбцы переставим так, чтобы суммы чисел в столбцах возрастали слева направо. При этом суммы чисел в строках и столбцах не изменятся, поэтому число хороших клеток не изменится (но эти клетки могут переместиться на другие места в таблице).

Тогда если какая-то клетка K хорошая, то и все клетки, расположенные в таблице выше и левее неё, хорошие. Все эти клетки вместе составляют прямоугольник $\Pi(K)$, у которого правая нижняя клетка – это K, а левая верхняя клетка совпадает с левой верхней клеткой таблицы (обведённый прямоугольник на рисунке).



Рассуждая как в 1-м решении, заключаем, что какая-то клетка K на большой диагонали таблицы, ведущей из её правого верхнего угла в левый нижний угол, является хорошей. Соответствующий прямоугольник $\Pi(K)$ состоит не менее чем из N хороших клеток, причём их число равно N, только если K – это правая верхняя или левая нижняя клетка таблицы (а прямоугольник $\Pi(K)$ состоит из всех клеток верхней строки или всех клеток левого столбца таблицы). Во всех других случаях число хороших клеток в прямоугольнике $\Pi(K)$ (а значит, и во всей таблице) превышает N.

4. *Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны?* *(П. Кожевников)*

Ответ: можно.

Решение 1. Достаточно найти такую точку O, что на любой прямой, проходящей через O, лежит не более одной рациональной точки. Тогда, проведя из O всевозможные лучи во все рациональные точки и удалив у каждого луча начало (от O до соответствующей рациональной точки), получим искомый набор непересекающихся непараллельных лучей.

Найти точку O можно разными способами.

Первый способ. Можно указать точку O явно — например, подойдёт точка $(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Пусть на прямой, проходящей через эту точку, есть две рациональные точки (a,b) и (c,d) (где a,b,c,d — рациональные). Тогда вектора $(a-\sqrt{2}, b-\sqrt{3})$ и $(a-c, b-d)$ пропорциональны, откуда

$$(a-\sqrt{2})(b-d) = (b-\sqrt{3})(a-c), \qquad (*)$$

откуда $a(b-d)-b(a-c) = (b-d)\sqrt{2}-(a-c)\sqrt{3}$. Возводя в квадрат и перенося заведомо рациональные слагаемые в левую часть, получим, что будет рациональным число $2(b-d)(a-c)\sqrt{6}$, что возможно только при $b=d$ или $a=c$. Но из равенства $(*)$ видим, что если выполнено хоть одно из равенств $b=d$, $a=c$, то выполнено и второе, откуда точки (a,b) и (c,d) совпадают.

Второй способ. Можно поступить иначе — доказать существование такой точки O. Проведём всевозможные прямые через пары рациональных точек. Таких прямых будет счётное количество. Так как всего направлений на плоскости несчётное количество, на ней найдётся прямая l, не параллельная ни одной из проведённых прямых. Проведённые прямые высекают на l счётное число точек, а всего на l точек несчётное количество, поэтому там ещё останутся точки, любая из них подойдёт в качестве O.

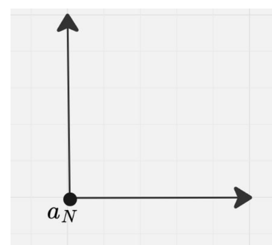
Решение 2. Заметим, что если прямая задаётся уравнением $y = kx+b$, где k — иррациональное, то на ней лежит не более одной рациональной точки. Действительно, пусть лежит хотя бы две: (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ — рациональное. Противоречие.

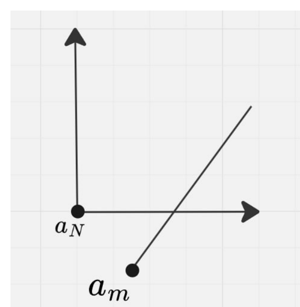
Так как всего рациональных чисел счётное множество, то рациональных точек тоже счётное множество. Занумеруем их: $a_1, a_2, \ldots$ Назовём набор из N лучей *хорошим*, если лучи имеют начала в точках $a_1, \ldots, a_N$, причём никакие два луча не имеют общей точки и не лежат на параллельных или совпадающих прямых, а направляющие векторы у всех лучей имеют положительные координаты (то есть угол между каждым лучом и положительным направлением оси Ox лежит в интервале от $0°$ до $90°$).

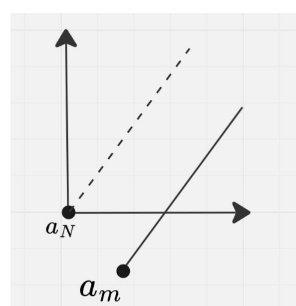
Докажем по индукции следующее утверждение: *если существует хороший набор из N лучей, то к нему можно добавить ещё один луч так, что снова получится хороший набор.*

База: $N = 1$. Проведём через $a_1 = (x_1, y_1)$ прямую с угловым коэффициентом $\sqrt{2}$, и лучом будет «верхняя половина» этой прямой.

Пусть проведены нужные нам лучи через точки $a_1, \ldots, a_{N-1}$. Рассмотрим точку a_N. Проведём через неё горизонтальный и вертикальный лучи (рис. 1).







Среди всех проведённых лучей найдём луч с минимальным углом наклона к оси Ox (пусть это k_0). Попробуем выпустить из a_N луч с положительным иррациональным угловым коэффициентом, меньшим k_0. Тогда прямая, содержащая этот луч, не параллельна ни одной из прямых, содержащих предыдущие лучи (и не совпадает с этими прямыми). Такой луч может не подойти, только если он пересекает какой-то другой уже построенный луч с началом a_m и угловым коэффициентом k_m (рис. 2).

Выберем тогда такой иррациональный коэффициент $k > k_m$, что k меньше всех коэффициентов, бóльших k_m, и выпустим из a_N луч с этим коэффициентом (на рисунке 3 он будет подыматься «круче» пунктирного луча с коэффициентом k_m). Его не могут пересечь лучи с коэффициентами, меньшими k — они пересекли бы тогда и луч, выходящий из a_m, что противоречит предположению индукции. Поэтому он не подойдёт, только если его пересекает луч с ещё бóльшим угловым коэффициентом k_l. Тогда, аналогично предыдущему, выпустим из a_N луч с коэффициентом, большим k_l и меньшим всех коэффициентов, больших k_l, и так далее. Так как всего проведённых лучей конечное число, найдётся момент, когда мы сможем провести луч, не пересекающий остальные лучи. Переход доказан.

Взяв объединение всех хороших наборов для $N = 1, 2, 3, \ldots$ (каждый луч берём один раз), получим искомые лучи.

5. *Вписанная сфера треугольной пирамиды $SABC$ касается основания ABC в точке P, а боковых граней — в точках K, M и N. Прямые PK, PM, PN пересекают плоскость, проходящую через середины боковых рёбер пирамиды, в точках K', M', N'. Докажите, что прямая SP проходит через центр описанной окружности треугольника $K'M'N'$.* *(Ф. Ивлев)*

Решение 1. Сделаем гомотетию с центром P и коэффициентом 2. Пусть K'', M'', N'' — образы точек K', M', N', T — тока пересечения прямой SK с плоскостью ABC. Тогда $TK = TP$ как касательные к сфере, и, поскольку треугольники PKT и $K''KS$ подобны, то $SK'' = SK$. Аналогично $SM'' = SM$, $SN'' = SN$. Но $SK = SM = SN$ как касательные, следовательно S — центр окружности $K''M''N''$, а середина SP — центр окружности KMN.

Решение 2. Обозначим сферу, проходящую через точки K, M, N, с центром в точке S, через ω, вписанную сферу пирамиды — через γ, а плоскость, проходящую через середины рёбер пирамиды — через α.

Сделаем инверсию с центром в точке P, переводящую γ в α. Тогда точки K, M, N перейдут в точки K', M', N'. Так как $\omega \perp \gamma$, то образ ω будет перпендикулярен α. Следовательно, образом ω будет сфера, построенная на окружности $(K'M'N')$ как на диаметральной окружности.

Тогда утверждение задачи следует из того, что центр инверсии, центр сферы и центр её образа лежат на одной прямой.

Комментарий. Утверждение задачи является частным случаем следующего факта. Рассмотрим стереографическую проекцию сферы S на плоскость π из точки $P \in S$. Пусть Q — точка вне сферы S, а окружность ω на S, образованная касательными к S из Q, не проходит через P. Тогда образом ω будет окружность ω' с центром в точке пересечения плоскости π с лучом PQ.

6. *У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и чёрная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45, делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке? (Каждый кусок — набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1.)* *(Т. Казицына)*

Ответ: 45 кусков.

Пример. Пусть верхний слой состоит из центральной клетки. Далее пусть каждый нижележащий слой состоит из клеток предыдущего слоя и из клеток, примыкающих к ним по стороне, и имеет противоположный цвет.

Оценка.

Первый способ.

Можно считать, что первый наклеенный кусок — весь квадрат, от этого ничего не испортится. Рассмотрим все диагонали, идущие в том же направлении, что и диагональ, идущая из правого верхнего угла в левый нижний. Всего их 89 (включая угловые клетки-диагонали). Занумеруем их подряд от левого нижнего угла к правому верхнему.

Назовём диагональ *готовой*, если все её клетки в данный момент имеют тот же цвет, который будет у них в итоге, когда вся доска приобретёт шахматную раскраску.

Будем следить за следующей величиной: *количество пар соседних готовых диагоналей* (порядок диагоналей в паре не учитываем). Заметим, что в любой такой паре диагонали имеют разный цвет.

Пусть мы наклеили очередной кусок. Рассмотрим диагональ с наименьшим номером k, пересекающую этот кусок, и диагональ с наибольшим номером l, пересекающую этот кусок. Любая пара соседних диагоналей с номерами от k до l включительно не может быть готовой — они все пересекают новый кусок, а значит, в них найдутся клетки одного и того же цвета. Так же не могут образоваться новые пары готовых диагоналей, не пересекающих добавленный кусок. Значит, могут появиться максимум две пары готовых диагоналей: пара $k-1, k$ и пара $l, l+1$.

После первого хода у нас 0 пар готовых диагоналей, а в конце — 88 пар. Так как каждым ходом добавляются максимум две пары, надо сделать ещё минимум 44 хода, всего 45 ходов.

Второй способ.

Можно считать, что первый наклеенный кусок — весь квадрат, от этого ничего не испортится. Считаем его нулевым. Докажем индукцией по k утверждение:

После еще k кусков между любыми двумя клетками есть путь с не более чем $2k$ сменами цвета.

База при $k = 0$ верна.

Рассмотрим наклеивание k-го куска S. Пусть до этого между двумя клетками был путь с не более $2(k-1)$ сменами цвета. Если он не заходил в S, то он таким и остался. Иначе заменим его кусок от первой его клетки в S до последней такой клетки на путь по S между этими клетками. Тогда количество смен цвета в новом пути увеличилось не более чем на 2 по сравнению со старым. Переход доказан.

В конце между противоположными углами любой путь имеет хотя бы 88 смен цвета. Значит, поверх нулевого куска наклеено еще хотя бы 44.

Третий способ.

1. Пронумеруем все куски в порядке выкладывания.

2. Пройдёмся по кускам от 1 номера к последнему. Если встречаем кусок, пересекающийся с одним из предыдущих, то кусок с меньшим номером можем продлить на всю площадь верхнего. Далее начинаем процесс сначала, и так можно добиться, что для любых двух кусков либо нет общих клеток, либо множество клеток одного является подмножеством клеток другого. Выкидываем бессмысленные куски, типа чёрный, лежащий непосредственно на чёрном, или кусок, который в точности накрывает предыдущий.

3. Теперь можем разбить все куски на слои. Первый слой — 1 кусок. Второй слой — все куски, лежащие непосредственно на первом куске. Третий слой: все куски, лежащие непосредственно на кусках второго слоя, и т. д. Очевидно, цвета кусков будут чередоваться по слоям.

4. Рассмотрим куски 2-го слоя. Пусть для определённости он белый. Вся непокрытая ими часть 1-го слоя не будет покрыта уже ничем, поэтому представляет из себя подмножество чёрных клеток шахматной доски. Значит, расстояние между двумя ближайшими клетками двух разных белых кусков – не более 1 чёрной клетки 1-го слоя. Если расстояние нулевое, то можем объединить такие два куска – кусков станет меньше, а картинка не изменится. Если расстояние равно 1 чёрной клетке, объединим эти два белых куска, добавив между ними 1 белую клетку. И добавим один новый чёрный кусок, положив его сверху на эту клетку. Таким образом, итоговая картинка не изменилась, общее количество кусков не изменилось, во втором слое теперь на один белый кусок меньше, а в третьем – на один чёрный кусок больше. Действуя так далее, можем добиться, что во втором слое только один кусок. Далее аналогично (предварительно проведя заново действия 1-3), добиваемся, что в третьем слое – только один кусок и т.д.

5. Процесс когда-то закончится, так как каждый следующий слой покрывает лишь часть предыдущего. Заметим, что самый верхний кусок может состоять только из одной клетки (на шахматной доске нет двух соседних клеток одного цвета), обозначим эту клетку K. Рассмотрим самый дальний от этой клетки угол доски, пусть это левый нижний. Рассмотрим диагонали, идущие слева сверху вправо вниз. Пронумеруем их от дальнего угла до нашей клетки K. Так как это самый дальний угол, то K окажется минимум на 45-й диагонали. Пойдём теперь по слоям сверху вниз. Самый верхний слой заходит не ниже 45-й диагонали. Каждый следующий слой может зайти своими клетками не более чем на одну новую диагональ (т.к. клетки одного слоя одинакового цвета, а цвета диагоналей чередуются, то «перепрыгнуть» через диагональ противоположного цвета слой не может). Поэтому, чтобы покрыть дальнюю угловую клетку, нужно добавить минимум 44 слоя. Итого получается 45 слоёв, то есть требуется минимум 45 кусков.

Четвёртый способ.

ИДЕЯ: запустить процесс в обратном порядке и посмотреть, что покрытая часть «разрастается не слишком быстро». И даже проекция на диагональ покрытой части «разрастается не слишком быстро».

СХЕМА РЕШЕНИЯ.

Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_N$ — куски, занумерованные с конца, так что K_1 положили последним, K_2 — предпоследним, и т.д., K_N — первым. Положим $L_n = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$, в частности L_N — множество всех клеток доски. Ясно, что множество $K_{n+1} \setminus L_n$ не может содержать двух соседних клеток, иначе они после наклеивания в исходном процессе останутся одноцветными. (В частности, $|K_1| = 1$.)

Занумеруем подряд $1, 2, \ldots, (2n-1)$ диагонали одного направления, и пусть K'_i и L'_i — множество номеров диагоналей, пересекающихся с K_i и L_i соответственно. Так как K_i связно, то K'_i — отрезок (то есть подмножество множества $\{1, 2, \ldots, (2n-1)\}$, состоящее из нескольких последовательных чисел). Кроме того, $K'_{n+1} \setminus L'_n$ не может содержать двух соседних чисел. Действительно, предположим противное и $i, i+1 \in K'_{n+1} \setminus L'_n$. Тогда ломаная, разделяющая i-ю и $(i+1)$-ю диагонали, в силу связности K_{n+1}, разрезает некоторую доминошку, целиком лежащую в K_{n+1}, но ни одна из клеток этой доминошки не принадлежит L_n, что противоречит доказанному ранее.

Пусть L'_i состоит из t_i непродолжаемых отрезков. Покажем, что величина $s_n = |L'_n| + t_n$ при переходе от n к $n+1$ увеличивается не более чем на 2. Отсюда будет следовать нужная оценка $N \geq 45$, так как $s_1 = 2$ и $s_N = 90$.

Пусть $x = |L'_{n+1}| - |L'_n| = |K'_{n+1} \setminus L'_n|$, то есть отрезок K'_{n+1} добавляет в L'_n x чисел.

Пусть $x \geq 2$. Тогда (так как по доказанному среди этих чисел нет пары соседних чисел) отрезок K'_{n+1} накрывает хотя бы $(x-1)$ отрезков множества L'_n, значит $t_{n+1} \leq t_n - x + 2$. Получаем $s_{n+1} = |L_{n+1}| + t_{n+1} \leq (|L_n| + x) + (t_n - x + 2) = s_n + 2$, что и требовалось.

Если же $x = 1$, то очевидно $t_{n+1} \leq t_n + 1$ и $s_{n+1} = |L_{n+1}| + t_{n+1} \leq (|L_n| + 1) + (t_n + 1) = s_n + 2$, что и требовалось.