МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ ВО БОСНА И ХЕРЦЕГОВИНА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 1996-2018 И 2021

Во Босна и Херцеговина Математичките олимпијади за учениците од средното образование се организираат од 1996 година. Во оваа брошура се дадени сите олимпијади од 1996-2018 година и олимпијадата од 2021 година, како и дел од задачите за избор на екипите на БИХ за БМО и ЕГМО. Во некои години се дадени и решенијата на задачите. Овој материјал е компилација на постојни материјали кои се достапни на српски, македонски и босански јазик, па затоа во истиот се застапени сите три јазици. Се надеваме дека тоа нема да биде проблем за евентуалните корисници на оваа брошура и дека истата ќе придонесе за подобра подготовка на учениците за следните натпревари.

Ристо Малчески

1. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 18. и 19. мај 1996.

1. **(а)** Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Доказати да за све природне бројеве m важи неједнакост

$$(a+b)^m+(b+c)^m+(c+a)^m \leqslant 2^m(a^m+b^m+c^m).$$

(б) Шта се може рећи о неједнакости из (а) ако су **(1)** a,b,c произвољни реални бројеви, или је **(2)** m произвољан цео број?

2. **(а)** Нека су m и n ($m \geqslant 2$) природни бројеви. Доказати да n дели $\phi(m^n-1)$, где ϕ означава Ојлерову функцију.

(б) Нека су n и d природни бројеви и $d \mid n$. Доказати да је број чланова низа $1,2,\ldots,n$, чији је највећи заједнички делилац са бројем n једнак d, износи $\phi(\frac{n}{d})$.

3. Нека је M тачка у унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ таква да је четвороугао $ABMD$ паралелограм. Ако је $\sphericalangle CBM=\sphericalangle CDM$, доказати да је тада $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCM$.

4. Наћи све функције **(а)** $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, **(б)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ које за све x,y задовољавају

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$$

5. Десет људи је пошло да купује књиге. Познате су следеће чињенице:

(i) свака особа је купила четири различите књиге;

(ii) сваке две особе су купиле бар једну исту књигу.

Посматрајмо књигу коју је купио највећи број од ових десет људи. Одредити најмању могућу вредност тог броја.

6. Дати су узајамно прости цели бројеви a и b. Нека је n случајно изабран природан број. Одредити вероватноћу да је број решења (x,y) једначине $ax+by=n$ у ненегативним целим бројевима једнак $\left[\frac{n}{ab}\right]+1$.

Напомена. Другим речима, ако је $f(x)$ број природних бројева $n \leqslant x$ таквих да једначина $ax+by=n$ има тачно $\left[\frac{n}{ab}\right]+1$ решења у $\mathbb{N}_0$, треба одредити $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 17. и 18. мај 1997.

1. Решити у скупу реалних бројева систем једначина

$$\begin{aligned} 8(x^3+y^3+z^3) &= 73, \\ 2(x^2+y^2+z^2) &= 3(xy+yz+zx), \\ xyz &= 1. \end{aligned}$$

2. У једнакокраком троуглу ABC са основицом AB, тачке O и S су редом његови центри описаног и уписаног круга. Нека је M тачка на страници BC. Доказати да је $SM \parallel AC$ ако и само ако је $OM \perp BS$.

3. Нека је A подскуп скупа $\mathbb{R}$. Функција $f: A \to \mathbb{R}$ задовољава услов

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \quad \text{за све} \quad x, y \in A.$$

(а) Ако је $A \supseteq \mathbb{N}$ и $c = f(1) - 1$, доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$f(n) = \begin{cases} \frac{c^{n+1}-1}{c-1} & \text{ако је } c \neq 1, \text{ и} \\ n+1 & \text{ако је } c = 1. \end{cases}$$

(б) Наћи све овакве функције за $A = \mathbb{Z}$.

(в) Ако је $A = \mathbb{Q}$, наћи све овакве функције за које је $f(1997) \neq f(1998)$.

4. **(а)** Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама A_1, B_1 и C_1. Нека су l_1, l_2, l_3 редом дужине лукова B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 уписаног круга који не садрже тачке A_1, B_1, C_1. Ако су a, b, c редом дужине страница троугла ABC, доказати да је

$$\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} \geqslant \frac{9\sqrt{3}}{\pi}.$$

(б) Нека је $ABCD$ тетраедар у коме је $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ и $AC = BD = c$. Одредити висине тетраедра у функцији a, b и c.

5. Доказати да за сваки природан број n постоји скуп M_n од n природних бројева са следећим својством:

(i) аритметичка средина елемената ма ког непразног подскупа M_n је цео број;

(ii) геометријска средина елемената ма ког непразног подскупа M_n је цео број;

(iii) и аритметичка и геометријска средина елемената ма ког непразног подскупа скупа M_n су цели бројеви.

Постоји ли бесконачан скуп M природних бројева са својством (i)?

6. Нека су k, m и n природни бројеви такви да је $1 < n \leqslant m-1 \leqslant k$. Одредити највећи могући број елемената подскупа S скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$ таквог да не постоји n различитих елемената из S са збиром

(а) једнаким m; **(б)** већим од m.

3. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 16. и 17. мај 1998.

1. Нека су P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 различите тачке унутар фигуре D или на њеној граници. Означимо са M минималну удаљеност између различитих тачака P_i. За какву конфигурацију тачака P_i величина M достиже максималну вредност ако је D

(а) јединични квадрат?

(б) једнакостраничан троугао странице 1?

(в) круг полупречника 1?

2. Ако за позитивне реалне бројеве x, y и z важи $x^2+y^2+z^2=1$, доказати неједнакост

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

3. Симетрале углова код темена A, B и C троугла ABC секу наспрамне странице редом у тачкама A_1, B_1, C_1. Нека је M произвољна тачка на једној од дужи A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, а M_1, M_2, M_3 редом њене нормалне пројекције на праве BC, CA, AB. Доказати да је једна од дужи MM_1, MM_2, MM_3 једнака збиру друге две.

4. Круг полупречника r додирује праву p у тачки A. Нека је AB пречник тог круга и C произвољна тачка на кругу различита од A и B. Означимо са D подножје нормале из тачке C на праву AB. Нека је E тацка на продужетку дужи CD иза D таква да је $ED=BC$. Тангенте на круг повучене из тачке E секу праву p у тачкама K и N. Доказати да дужина дужи KN не зависи од избора тачке C.

5. Ако цели бројеви a, b, c и d задовољавају једначине $bc+ad=ac+2bd=1$, доказати да тада они задовољавају и једнакост $a^2+c^2=2b^2+2d^2$.

6. Низ целих бројева $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ је одређен условима $u_0=0$ и

$$u_{2n}=u_n, \quad u_{2n+1}=1-u_n \quad \text{за } n \in \mathbb{N}_0.$$

(а) Израчунати u_{1998}.

(б) Ако је p природан број и $m=(2^p-1)^2$, одредити u_m.

4. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 22. и 23. мај 1999.

1. Нека су a, b и c странице троугла. Доказати да бар једна од једначина

$$x^2 - 2bx + 2ac = 0, \quad x^2 - 2cx + 2ab, \quad x^2 - 2ax + 2bc$$

нема реална решења.

2. Ако су a, b, c странице троугла ABC и R његов полупречник описаног круга, доказати да важи

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geqslant 3R\sqrt{3}.$$

3. Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ произвољна инјективна функција таква да је $f(0) + f(1) = 1$. Доказати да постоје бројеви $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 \neq x_2$ такви да је $2f(x_1) < f(x_2) + \frac{1}{2}$.
Навести бар једно уопштење овог тврђења.

4. У троуглу ABC, симетрале углова код темена A и B секу наспрамне странице редом у тачкама D и E. Тачке F и G су редом подножја нормала из тачке C на праве AD и BE. Доказати да су праве FG и AB паралелне.

5. Означимо са $\sigma(S)$ и $\pi(S)$ редом збир и производ елемената непразног скупа бројева S. Доказати да је

(а) $\sum \dfrac{1}{\pi(S)} = n$ и

(б) $\sum \dfrac{\sigma(S)}{\pi(S)} = (n^2 + 2n) - (n+1)\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$,

где се сумира по свим непразним подскуповима S скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Посматрајмо полином $P(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + p$, где је p реалан број.

(а) Наћи p за које $P(x)$ има комплексан корен x_1 такав да је $|x_1| = 1$ и $Re(x_1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 3\right)$.

(б) За ту вредност p наћи остале корене полинома $P(x)$.

(в) Доказати да ни за које $n \in \mathbb{N}$ не важи $x_1^n = 1$.

5. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 20. и 21. мај 2000.

1. Одредити реалне корене x_1, x_2 полинома $x^5 - 55x + 21$ ако се зна да је $x_1 x_2 = 1$.

2. Нека су R и r редом полупречници описаног и уписаног круга троугла ABC. Нека је S тачка унутар троугла ABC и нека праве AS, BS и CS редом секу наспрамне странице троугла у тачкама X, Y и Z. Доказати да важи

$$\frac{BX \cdot CX}{AX^2} + \frac{CY \cdot AY}{BY^2} + \frac{AZ \cdot BZ}{CZ^2} = \frac{R}{r} - 1$$

ако и само ако је S центар уписаног круга троугла ABC.

3. Тројку природних бројева (x, y, z) зовемо Питагорином ако важи $x < y < z$ и $x^2 + y^2 = z^2$. За свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да се број 2^{n+1} појављује у тачно n различитих Питагориних тројки.

4. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важе неједнакости

$$\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} + \frac{ab}{c^2 + ab} \leqslant 1 \leqslant \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ab}.$$

5. Означимо са T_m број неподударних троуглова са обимом m чије су све странице целобројне. Доказати да је

(а) $T_{1999} > T_{2000}$ и

(б) $T_{4n+1} = T_{4n-2} + n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

6. Дат је троугао ABC у коме је $\sphericalangle ABC = 3 \sphericalangle CAB$. Тачке M и N су изабране на страници AC тако да је N између A и M и важи $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MBN = \sphericalangle NBA$. Нека је L произвољна унутрашња тачка дужи BN, а K тачка на дужи BM таква да је $LK \parallel AC$. Доказати да се праве AL, NK и BC секу у једној тачки.

6. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Лукавица, 19. и 20. мај 2001.

1. На кружници су дате тачке A, B и C које деле кружницу у размери $3:5:7$. Израчунати углове троугла ABC.

2. Природни бројеви x, y и z задовољавају једначину

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}.$$

Доказати да је $xyz \geqslant 3600$.

3. Одредити највећи природан број n за који постоји n-точлани подскуп S скупа $\{1,2,\dots,2001\}$ такав да једначина $y=2x$ нема решења x,y у скупу S.

4. У равни су дата два круга полупречника r_1 и r_2, један изван другог. Конструисане су обе спољашње и једна унутрашња заједничка тангента тих кругова. Унутрашња тангента сече спољашње тангенте у тачкама A и B и додирује један од датих кругова у тачки C. Доказати да је $AC\cdot BC=r_1r_2$.

5. Нека је n природан број већи од 1 и нека су $x_1,x_2,\dots,x_n$ позитивни бројеви такви да је $x_1+x_2+\dots+x_n=1$. Испитати да ли обавезно важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}.$$

6. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина

$$(x+y+z)^3=n^2xyz$$

има решење (x,y,z) у скупу природних бројева.

7. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Брчко, 11. и 12. мај 2002.

1. Реални бројеви x, y, z задовољавају једнакости

$$x + y + z = 3 \quad \text{и} \quad xy + yz + zx = a,$$

где је a неки реалан параметар. Одредити вредност a за коју је разлика између максималне и минималне вредности променљиве x једнака 8.

2. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праву која спаја подножја симетрала углова ABC и ACB. Затим кроз тачку пресека ове праве са симетралом угла BAC повуцимо праву паралелну правој BC. Нека ова права сече праве AB и AC у тачкама M и N, редом. Доказати да је $2MN = BM + CN$.

3. Ако је n природан број, доказати да $(n+1)(n+2)\cdots(n+10)$ није потпун квадрат.

4. Реални бројеви a, b и c су такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ca} + \frac{c^2}{1+2ab} \geqslant \frac{3}{5}.$$

5. Нека су p и q различити прости бројеви. У скупу целих бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} \frac{z+p}{x} + \frac{z-p}{y} &= q, \\ \frac{z+p}{y} - \frac{z-p}{x} &= q. \end{aligned}$$

6. Темена конвексног четвороугла $ABCD$ и пресечна тачка S његових дијагонала имају целобројне координате у координатној равни. Нека је P површина четвороугла $ABCD$, а P_1 површина троугла ABS. Доказати да важи

$$\sqrt{P} \geqslant \sqrt{P_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Неум, 10. и 11. мај 2003.

1. На табли су написани бројеви 5, 7 и 9. У сваком кораку бирамо два броја a и b са табле тако да је $a > b$ и на таблу дописујемо број $5a - 4b$. Може ли се после коначно много оваквих корака на табли написати број 2003?

2. Над страницама AB и BC троугла ABC конструисани су квадрати ABB_1A_1 и BCC_1B_2 ван троугла. Доказати да се праве AC_1 и CA_1 секу у тачки на висини из темена B.

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$(n-1)^n + 2n^n \leqslant (n+1)^n \leqslant 2(n-1)^n + 2n^n.$$

4. Нека су AD и BE висине троугла ABC, а L подножје нормале из тачке B на праву DE. Ако је $LB^2 = LD \cdot LE$, доказати да је троугао ABC једнакокраки.

5. Дат је правилан $2n$-тоугао ($n \geqslant 2$) са центром S. Посматрајмо све четвороуглове са теменима у теменима овог $2n$-тоугла. Означимо са u број таквих четвороуглова који садрже тачку S у унутрашњости, а са v број преосталих четвороуглова. Одредити $u - v$.

6. Нека су a, b и c реални бројеви такви да је $|a| \geqslant 2$ и $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$. Доказати да постоје реални бројеви x и y такви да је

$$a = x + \frac{1}{x}, \quad b = y + \frac{1}{y}, \quad c = xy + \frac{1}{xy}.$$

9. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 8. и 9. мај 2004.

1. Два круга изнутра додирују круг са центром O у тачкама S и T. Нека се ова два круга секу у тачкама M и N, при чему је тачка N ближа правој ST. Доказати да су праве OM и ON нормалне ако и само ако су тачке S, N и T колинеарне.

2. Испитати да ли постоји троугао чије странице имају целобројне дужине и чија је површина 2004.

3. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати неједнакост

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1.$$

4. На такмичењу на коме учествује 16 екипа одиграно је 55 утакмица. Доказати да међу овим екипама постоје три од којих никоје две нису играле међусобно.

5. За $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и произвољне реалне бројеве a и b доказати неједнакост

$$a^2 \operatorname{tg} x \sqrt[3]{\cos x} + b^2 \sin x \geqslant 2abx.$$

6. У равни су дати троугао ABC и паралелограм $ASCR$ (са дијагоналом AC). Права кроз тачку B паралелна правој CS сече праве AS и CR редом у тачкама M и P. Даље, права кроз тачку B паралелна правој AS сече праве AR и CS редом у тачкама N и Q. Доказати да се праве RS, MN и PQ секу у једној тачки.

1. Дадена кружница со центар во O одвнатре ја допираат две кружници во точките S и T. Нека овие кружници се сечат во точките M и N, при што N е поблиску до правата ST. Докажи дека правите OM и MN се заемно нормални ако и само ако точките S, N и T се колинеарни.

Решение. Нека тангентите во точките S и T се сечат во точката K (ако овие тангенти се паралелни, тогаш точките S,O,T се колинеарни па така M и N се еднакво оддалечени од ST, што противречи на условот на задачата). Тогаш $\measuredangle OSK = 90^\circ = \measuredangle OTK$, па затоа точките O,S,K,T припаѓаат на кружница со дијаметар OK, направи цртеж.

Исто така важи $\overline{KS}^2 = \overline{KM} \cdot \overline{KN} = \overline{KT}^2$, па затоа K припаѓа на радикалната оска MN на двете внатрешни кружници. Тоа значи дека точките M, N, K се колинеарни.

Ако S, N и T се колинеарни, тогаш

$$\measuredangle SMT = \measuredangle SMN + \measuredangle TMN = \measuredangle NSK + \measuredangle KTN = 180^\circ - \measuredangle SKT,$$

па затоа точките M, S, K, T, O се концициклични. Тогаш

$$\measuredangle OMN = \measuredangle OMK = \measuredangle OSK = 90^\circ.$$

Обратно, ако $OM \perp MN$, тогаш $\measuredangle OMK = \measuredangle OSK = 90^\circ$, па затоа точките M, S, K, T, O се концициклични, па затоа

$$\measuredangle SKT = 180^\circ - \measuredangle SMT = 180^\circ - \measuredangle SMN - \measuredangle TMN = 180^\circ - \measuredangle NSK - \measuredangle KTN.$$

Сега,

$$\measuredangle TNS = 360^\circ - \measuredangle NSK - \measuredangle SKT - \measuredangle KTN = 180^\circ,$$

па затоа точките S, N и T се колинеарни.

2. Испитај дали постои триаголникчија плоштина е 2004, а неговите страни имаат целобројни должини.

Решение. Нека претпоставиме дека таков триаголник постои. Тогаш од Хероновата формула следува

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = 2004^2,$$

од каде лесно следува дека s е природен број. Ставаме $s-a=x, s-b=y, \quad s-c=z$ и како $s = x+y+z$ добиваме

$$xyz(x+y+z) = 12^2 \cdot 167^2.$$

Бројот 167 е прост, па затоа можни се следниве битно различни случаи:

1) $167^2 \mid x$ и тогаш $xyz(x+y+z) > 167^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 167^2 > 2004^2$,

2) $167 \mid x, 167 \mid y$ и тогаш $xyz(x+y+z) > 167 \cdot 167 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 167 > 2004^2$,

3) $167 \mid x, 167 \mid x+y+z$ и тогаш $167 \mid y+z$.Понатаму, од $yz \geq y+z-1$ следува $yz \geq 166$, па затоа

$$xyz(x+y+z) > 167 \cdot 166 \cdot 2 \cdot 167 > 2004^2$$

4) $167^2 \mid x+y+z$, па затоа $x+y+z \geq 167^2$, од каде следува

$$xyz \geq \max\{x,y,z\} \geq \tfrac{x+y+z}{3} \geq \tfrac{167^2}{3} > 12^2, \text{ т.е.}$$

$$xyz(x+y+z) > 167^2 \cdot 12^2 = 2004^2.$$

Во сите четири случаи добиваме противречност, што значи дека не постои триаголник кој ги задоволува условоите на задачата.

3. Нека a,b,c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le 1. \qquad (1)$$

Решение. За позитивни реални броеви a и b важи $(a^3-b^3)(a^2-b^2)\ge 0$, т.е. $a^5+b^5\ge a^2b^2(a+b)$, па затоа

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}\cdot\frac{c^2}{c^2}=\frac{(abc)c}{(abc)^2(a+b)+(abc)c}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{a}{a+b+c} \text{ и } \frac{ca}{c^5+a^5+ca}\le\frac{b}{a+b+c}.$$

Поседните три неравенства ги собираме и го добиваме неравенството (1). Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

4. На турнир на кој учествуваат 16 тенисери се одиграни 55 натпревари. Докажи дека меѓу тенисрите постојат тројца така што никои двајца од нив не играле меѓу себе.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека меѓу секои три тенисери постојат двајца кои играле меѓусебно. Нека тенисерот A одиграл најмал број натпревари и тоа k натпревари. Секој тенисер кој играл со A изиграл најмалку k натпревари. Од преостанатите $15-k$ тенисери кои не играле со A секој играл со секој од преостанатите $14-k$ тенисери (тенисерот A со било кои двајца од преостанатите $14-k$ тенисери формира тројка во која тој не играл со другите двајца, па затоа тие играле меѓу себе). Затоа бројот на одиграните натпревари не е помал од

$$\tfrac{1}{2}(k^2+k+(15-k)(14-k))=k^2-14k+105=(k-7)^2+56\ge 56,$$

што е противречност.

5. Нека $x\in(0,\frac{®}{2})$ и a и b се произволни реални броеви. Докажи дека

$$a^2\operatorname{tg}x(\cos x)^{\frac{1}{3}}+b^2\sin x\ge 2xab.$$

Решение. Да го разгледаме изразот

$$F(a,b)=a^2\operatorname{tg}x(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2xab+b^2\sin x.$$

За $b\ne 0$ имаме

$$F(a,b)=b^2[(\tfrac{a}{b})^2\operatorname{tg}x(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2x\tfrac{a}{b}+\sin x].$$

За $a\ne 0$ имаме

$$F(a,b)=a^2[\operatorname{tg}x(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2x\tfrac{b}{a}+(\tfrac{b}{a})^2\sin x].$$

Во секој случај треба да докажеме дека $D<0$, каде

$$D=4[x^2-\operatorname{tg}x\sin x(\cos x)^{\frac{1}{3}}].$$

За $x\in(0,\frac{®}{2})$, неравенството $D<0$ е еквивалентно со неравенството

$$\cos x<(\tfrac{\sin x}{x})^3. \qquad (1)$$

Сега ако искористиме дека за $x\in(0,\frac{®}{2})$ важи

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \text{ и } \sin x > x - \frac{x^3}{6}, \qquad (2)$$

добиваме

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < (1 - \frac{x^2}{6})^3 < (\frac{\sin x}{x})^3,$$

т.е. точно е неравенството (1),што значи дека е точно и почетното неравенство.
Забелешка. Неравенствата (2) се познати и иститe се докажуваат со помош на Тејлоровата формула. Деталите ги оставаме на читателит за вежба.

6. Даден е триаголник ABC и во рамнината на овој триаголник паралелограм $ASCR$ со дијагонала AC. Нека правата која минува низ точката B и е паралелна со CS ги сече правите AS и CR соодветно во точките M и P, а правата која минува низ точката B и е паралелна со AS ги сече правите AR и CS соодветно во точките N и Q. Докажи дека правите RS, MN и PQ се сечат во една точка.

Решение. Да означиме $\overline{AM} = x, \overline{AN} = y, \overline{AR} = b$ и $\overline{AS} = a$, (направи цртеж). Нека $MN \cap RS = T$. Ќе докажеме дека точката P припаѓа на правата TQ. Доволно е да докажеме дека правата TQ ја сече правата CP во точка V таква што $\overline{CV} = a - x$, од каде ќе следува $\overline{RV} = x$ и како $\overline{RP} = x$, добиваме $V \equiv P$.
Нека $MN \cap RC = U$. Триаголникот AMN е сличен со триагоникот URN, па затоа $x : y = \overline{UR} : (b - y)$, т.е. $\overline{UR} = \frac{x(b-y)}{y}$. Нека $RS \cap BN = X$ и $\overline{NX} = z$. Од Талесовата теорема следува $z : \overline{UR} = (a - z) : \overline{RV}$, па затоа

$$\overline{RV} = \frac{\overline{UR} \cdot (a-z)}{z} = \frac{x(b-y)(a-z)}{zy}. \qquad (1)$$

Сега од повторно од Талесовата теорема добиваме $\frac{\overline{AS}}{\overline{NX}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{NR}}$, односно $\frac{a}{z} = \frac{b}{b-y}$, па затоа $a(b - y) = bz$, т.е. $(a - z)(b - y) = zy$. Конечно, од (1) и последното равенство следува $\overline{RV} = x$.

10. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Бања Лука, 7. и 8. мај 2005.

1. Тачка H је ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Доказати да су средишта дужи AB и CH и пресек симетрала углова CAH и CBH три колинеарне тачке.

2. Ако су a_1, a_2 и a_3 ненегативни реални бројеви за које је $a_1+a_2+a_3=1$, доказати да важи

$$a_1\sqrt{a_2}+a_2\sqrt{a_3}+a_3\sqrt{a_1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Дат је природан број $n\geqslant 2$. Нека су $x_1,x_2,\ldots,x_n$ произвољни различити природни бројеви и нека је S_i $(i=1,2,\ldots,n)$ збир свих ових бројева изузев x_i. Означимо

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\text{НЗД}(x_1,S_1)+\text{НЗД}(x_2,S_2)+\cdots+\text{НЗД}(x_n,S_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Наћи максималну вредност f по свим могућим n-торкама $(x_1,\ldots,x_n)$.

4. Тачка A је одабрана на правој која садржи пречник PQ круга $k(S,r)$, ван круга. Тангента t из тачке A на круг k додирује круг у тачки T. Нека су p и q редом тангенте на круг k у тачкама P и Q, и нека је $PT\cap q=\{N\}$ и $QT\cap p=\{M\}$. Доказати да су тачке A,M,N колинеарне.

5. Ако за пермутацију $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ бројева $1,2,\ldots,n$ важи

$$\frac{a_k^2}{a_{k+1}}\leqslant k+2\quad\text{за}\quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

доказати да је она идентична.

6. Нека су a, b и c цели бројеви такви да је

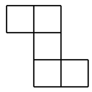
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3.$$

Доказати да је abc куб целог броја.

11. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 20. и 21. мај 2006.

1. *Z-фигура* је било која фигура подударна фигури на слици. Колико је најмање Z-фигура потребно да би се прекрила таблица 8×8, под условом да се свако поље Z-фигуре или поклапа са неким пољем таблице или је ван табле? Фигуре се могу међусобно преклапати.



2. Дат је троугао ABC. Одредити скуп центара свих правоугаоника уписаних у троугао ABC тако да једна страница правоугаоника лежи на страници троугла AB.

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\left\{n\sqrt{7}\right\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n},$$

где $\{x\}$ представља разломљени део реалног броја x. (На пример, разломљени део броја $4{,}3$ је $0{,}3$ јер је $4{,}3 = 4 + 0{,}3$.)

4. Доказати да свака бесконачна аритметичка прогресија облика $a, a+d, a+2d, \ldots$, где су a и d природни бројеви, садржи бесконачну геометријску прогресију облика $b, bq, bq^2, \ldots$, где су b и q природни бројеви и $q > 1$.

5. Оштроугли троугао ABC је уписан у круг са центром O. Нека је P тачка на краћем луку AB описаног круга. Нормала из тачке P на праву BO сече страницу AB у тачки S, а страницу BC у тачки T. Слично, нормала из тачке P на праву AO сече страницу AB у тачки Q, а страницу AC у тачки R.

(а) Доказати да је троугао PQS једнакокраки.

(б) Доказати да је $PQ^2 = QR \cdot ST$.

6. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реалне константе и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \cdots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Ако за реалне бројеве x_1 и x_2 важи $f(x_1) = f(x_2) = 0$, доказати да је $x_1 - x_2 = m\pi$ за неки цео број m.

12. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Кисељак, 19. и 20. мај 2007.

1. У троуглу ABC, дужина симетрале унутрашњег угла у темену B је једнака s, а дужине симетрале спољашњег угла у темену B је једнака s_1. Ако је $\frac{AB}{BC} = k$, одредити површину троугла ABC.

2. Решити једначину

$$x(x+2) = y^2(y^2+1)$$

у скупу целих бројева.

3. Наћи све целе бројеве x и реалне бројеве a такве да важи

$$\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x-a} + a.$$

4. Нека је $P(x)$ полином облика $P(x) = x^3 - 2x^2 + bx + c$. Познато је да све његове нуле леже у интервалу $(0,1)$. Доказати да је

$$8b + 9c \leqslant 8.$$

Када важи једнакост?

5. Дат је троугао ABC у коме је $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и $AC = 2BC$. Права паралелна страници AC сече праве AB и BC редом у тачкама M и N тако да је $CN = 2BN$. Праве CM и AN се секу у тачки O. На дужи ON одабрана је тачка K тако да је $OM + OK = KN$. Симетрала угла ABC и нормала из тачке K на праву AN секу се у тачки T. Израчунати $\sphericalangle MTB$.

6. Дат је скуп A са тачно $n > 4$ елемената. Одабрано је $n+1$ различитих трочланих подскупова скупа A. Доказати да међу овим подскуповима постоје два чији је пресек једночлан.

13. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 17. и 18. мај 2008.

1. Доказати да у једнакокраком троуглу важи

$$b > \pi r,$$

где је b крак, а r полупречник уписане кружнице.

2. Одредити све парове $m, n \in \mathbb{N}$ такве да

$$m^2 - n \mid m + n^2 \quad \text{и} \quad n^2 - m \mid n + m^2.$$

3. За округлим столом седи 30 људи. Сваки од њих је свезналица или незналица. На питање "Шта је сусед здесна - свезналица или незналица?" свезналица изриче истиниту тврдњу, док незналица може изрећи или истиниту или лажну тврдњу. Познато је да број незналица за столом није већи од N. Колики највећи може бити број N да бисмо, знајући све одговоре особа за столом, могли са сигурношћу да одредимо бар једног свезналицу?

4. Осам ученика је решавало осам задатака. Испоставило се да је сваки задатак решило бар 5 ученика. Доказати да се увек могу наћи два ученика таква да је сваки задатак решио бар један од њих.

5. Нека је AD висина троугла ABC, а R његов полупречник описаног круга. Означимо са E и F редом подножја нормала из тачке D на праве AB анд AC. Ако је $AD = R\sqrt{2}$, доказати да права EF пролази кроз центар описаног круга.

6. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y \quad \text{за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

14. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 9. и 10. мај 2009.

1. Нека су M и N подножја нормала из темена A на симетрале спољашњих углова у теменима B и C троугла ABC. Доказати да је дужина дужи MN једнака полуобиму троугла ABC.

2. Наћи све парове природних бројева (a, b) такве да је

$$\frac{a^2(b-a)}{b+a}$$

квадрат простог броја.

3. Реални бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ задовољавају услове

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100}, \quad a_1^2 + a_2^2 \geqslant 100 \quad \text{и} \quad a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2 \geqslant 100.$$

Колика је минимална вредност збира $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$?

4. Дата је таблица $1 \times n$, где је $n \geqslant 2$ природан број. Два играча наизменично уписују знакове "+" и "−" у слободна поља, при чему први играч увек уписује "+", а други "−". Није дозвољено да два иста знака буду уписана у два суседна поља. Губи играч који не може да одигра потез. Који играч има победничку стратегију?

5. Права сече странице AB и BC троугла ABC редом у тачкама M и K. Ако је површина троугла MBK једнака површини четвороугла $AMKC$, доказати да је тада

$$\frac{MB + BK}{MA + AC + CK} \geqslant \frac{1}{3}.$$

6. Нека је n природан број, а x позитиван број такав да ниједан од бројева $x, 2x, \ldots, nx$, као и ниједан од бројева $\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \ldots, \frac{[nx]}{x}$, није цео. Доказати да важи једнакост

$$[x] + [2x] + \cdots + [nx] + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[\frac{[nx]}{x}\right] = n[nx].$$

Као и обично, $[t]$ означава највећи цео број не већи од t.

1. Нека се M и N подножјата на нормалите повлечени од темето A кон симетралите на надворешните агли при темињата B и C на триаголникот ABC. Докажи дека должината на отсечката MN е еднаква на половина од должината на обиколката на триаголникот ABC

Решение. Нека E и E се средините на страните AB и AC на $\triangle ABC$. Бидејќи $\triangle ABM$ е правоаголен, точката E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABM$. Затоа $\overline{EB} = \overline{EM}$ и $\measuredangle EMB = \measuredangle EBM$ и овие агли се суплементни на $\measuredangle MBC$, од што следува дека $ME \parallel BC$ (направи цртеж). Но, $EF \parallel BC$, па затоа точките M, E, F и N се колинеарни. Според тоа,

$$\overline{ME} = \overline{EA} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}, \ \overline{FE} = \overline{FA} = \tfrac{1}{2}\overline{CA} \text{ и } \overline{EF} = \tfrac{1}{2}\overline{BC},$$

па затоа

$$\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EF} + \overline{FN} = \tfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}).$$

2. Најди ги сите парови природни броеви (a,b) такви што $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ е квадрат на прост број.

Решение. Нека $\frac{a^2(b-a)}{b+a} = p^2, a,b \in \mathbf{N}$ и p е прост број. Имаме $b = \frac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2} \in \mathbf{N}$. Ќе разгледаме два случаи:

1) Ако $\mathrm{NZD}(a,p)=1$, тогаш $\mathrm{NZD}(a^2+p^2, a^2-p^2) \mid 2$ и $\mathrm{NZD}(a^2-p^2, a) = 1$ од каде следува дека задачата нема решение бидејќи $a^2 - p^2 > 2$, па b не е природен број.

2) Ако $\mathrm{NZD}(a,p) \neq 1$, тогаш $a = kp, k \in \mathbf{N}$, па затоа

$$b = \frac{kp \cdot p^2(k^2+1)}{p^2(k^2-1)} = \frac{kp(k^2+1)}{k^2-1}.$$

Од $b \in \mathbf{N}$ следува $\mathrm{NZD}(k^2+1, k^2-1) \mid 2$ и $\mathrm{NZD}(k^2-1, k) = 1$, што значи дека $(k^2-1) \mid 2p$, односно $k^2 - 1 \in \{1, 2, p, 2p\}$.

- Ако $k^2-1=1$, тогаш $k^2=2$, што не е можно.
- Ако $k^2-1=2$, тогаш $k^2=3$, што не е можно.
- Ако $k^2-1=p$, тогаш $(k-1)(k+1)=p$, од каде добиваме $k=2, p=3$, па затоа $a=kp=6, b=10$.
- Ако $k^2-1=2p$, тогаш $(k-1)(k+1)=2p$. Бидејќи $k-1$ и $k+1$ се со иста парност и бидејќи десната страна е делива со 2, заклучуваме дека $k-1$ и $k+1$ се последователни парни броеви, па затоа еден од нив е делив со 4, а другиот со 2. Според тоа, левата страна е делива со 8, а десната не се дели со 8, што значи дека во овој случај задачата нема решение.

Конечно, единствено решение е $(a,b)=(6,10)$.

3. Нека $a_1, a_2, ..., a_{100}$ се реални броеви за кои важи

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{100} \geq 0$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 100$$
$$a_3^2 + a_4^2 + ... + a_{100}^2 \geq 100.$$

Која е најмалата можна вредност на збирот $a_1 + a_2 + ... + a_{100}$?

Решение. Од условите на задачата следува дека $a_2 > 0$. Понатаму, од

$$a_2a_3 + a_2a_4 + ... + a_2a_{100} \ge a_3^2 + a_4^2 + ... + a_{100}^2 \ge 100$$

следува

$$a_3 + a_4 + ... + a_{100} \ge \frac{100}{a_2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + ... + a_{100} &\ge a_1 + a_2 + \frac{100}{a_2} \\ &\ge 2a_2 + \frac{100}{a_2} \\ &\ge 2\sqrt{2a_2 \cdot \frac{100}{a_2}} \\ &= 20\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Бараниот минимум не е помал од $20\sqrt{2}$. Знак за равенство се достигнува за $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 5\sqrt{2}$ и $a_5 = a_6 = ... = a_{100} = 0$. Значи, бараната најмала вредност е еднаква на $20\sqrt{2}$.

4. Дадена е таблица $1 \times n, (n \ge 2)$. Двајца играчи во слободните полиња наизменично ги запишуваат знаците ,,+” и ,,-“. Првиот играч секогаш запишува ,,+”, а вториот играч секогаш запишува ,,-”. Не е дозволено два исти знака да бидат запишани во во две соседни полиња. Играта ја губи играчот кој не може да одигра потез. Кој од играчите има победничка стратегија?

Решение. Вториот играч има победничка стратегија. Стратегијата се состои во тоа да во првиот потез вториот играч запише ,,-” во некое од крајните полиња. Сега во натамошниот тек на играта може да игра на произволен начин, се разбира почитувајќи ги правилата за игра. Ќе докажеме дека со оваа стратегија тој стално победува. После k – от потез на првиот играч ако се изфрлат k полиња кои содржат ,,+”, таблицата се разбива на k поврзани делови кои содржат прани полиња или полиња со ,,-”. Бидејќи има $k-1$ минуси, добиваме дека останал еден дел кој содржи само празни полиња и вториот играч може да запише ,,-” во некое од тие полиња. Значи, вториот играч има потез после секој потез на првиот играч, што значи дека тој победува.

5. Права ги сече страните AB и BC на триаголникот ABC во точките M и K, соодветно. Ако плоштината на $\triangle MBK$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $AMKC$, докажи дека

$$\frac{\overline{MB}+\overline{BK}}{\overline{AM}+\overline{CA}+\overline{KC}} \ge \frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Решение. Да означиме $\overline{BK} = y, \overline{KC} = z, \overline{CA} = b, \overline{AM} = u$ и $\overline{MB} = x$ (направи цртеж). Бидејќи $P_{BMK} = P_{AMKC}$, важи $P_{BMK} > P_{MKC}$, т.е. $y > z$ и $P_{BMK} > P_{AMK}$, т.е. $x > u$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е.

$$\frac{\overline{MB}+\overline{BK}}{\overline{AM}+\overline{CA}+\overline{KC}} < \frac{1}{3}.$$

Од последното неравенство следува низата неравенства

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{u+b+z} < \frac{1}{3} &\Rightarrow 3x + 3y > u + b + z < x + y + b \\ &\Rightarrow 2x + 2y < b \\ &\Rightarrow x + u + y + z < 2x + 2y < b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ (x+u)+(y+z)<b$$
$$\Rightarrow\ \overline{AB}+\overline{BC}<\overline{CA},$$

што не е можно, па затоа точно е неравенството (1).

6. Нека n е природен број и x е позитивен реален број, таков што ниту еден од броевите $x, 2x, ..., nx$ и ниту еден од броевите $\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, ..., \frac{[nx]}{x}$ не е цел број. Докажи дека е точно равенството

$$[x]+[2x]+...+[nx]+[\tfrac{1}{x}]+[\tfrac{2}{x}]+...[\tfrac{[nx]}{x}]=n[nx]. \qquad (1)$$

Решение. Бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на нула е еднаков на бројот k, за кој важи $kx<1<(k+1)x$, а тоа е бројот $[\frac{1}{x}]$. Бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на 1 е еднаков на бројот на целите броеви k за кои важи $1<kx<2$, а тој број е еднаков на $[\frac{2}{x}]-[\frac{1}{x}]$. Воопшто, за секој $1<r<[nx]$ бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на r е еднаков на $[\frac{r+1}{x}]-[\frac{r}{x}]$. На крајот, ако $[nx]=L$, тогаш бројот на собирците во збирот $[x]+[2x]+...+[nx]$ кои се еднакви на L е еднаков на $n-[\frac{L}{x}]=n-[\frac{[nx]}{x}]$. Затоа е точно равенството

$$[x]+[2x]+...+[nx]=0\cdot[\tfrac{1}{x}]+1\cdot([\tfrac{2}{x}]-[\tfrac{1}{x}])+2\cdot([\tfrac{3}{x}]-[\tfrac{2}{x}])+...+[nx]\cdot(n-[\tfrac{[nx]}{x}])$$
$$=-[\tfrac{1}{x}]-[\tfrac{2}{x}]-...-[\tfrac{[nx]}{x}]+n[nx],$$

кое е еквивалентно на равенството (1).

15. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Мостар, 15. и 16. мај 2010.

1. **(а)** Нека су p и q различити прости бројеви такви да $p+q^2 \mid p^2+q$. Доказати да $p+q^2 \mid pq-1$.

(б) Одредити све просте бојеве p такве да $p+121 \mid p^2+11$.

2. Нека су AB и FD тетиве круга које се не секу, а P тачка на луку AB који не садржи тетиву FD. Праве PF и PD редом секу тетиву AB у тачкама Q и R. Доказати да је $\frac{AQ \cdot RB}{QR}$ константно када се тачка P креће луком AB.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ које задовољавају следећа два услова:

(i) $f(n)f(-n) = f(n^2)$ за све $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ за све $m, n \in \mathbb{Z}$.

4. Конвексан четвороугао подељен је дијагоналама на четири троугла чији су уписани кругови подударни. Доказати да је тај четвороугао ромб.

5. Нека су a, b и c дужине страница троугла чији обим није већи од 2. Доказати да је

$$\left|\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - \frac{a^3}{c} - \frac{c^3}{b} - \frac{b^3}{a}\right| < 3.$$

6. Доказати да је укупан број јединица које се појављују у свим неуређеним партицијама природног броја n једнак суми бројева различитих елемената тих партиција.

Напомена. За партицију $10 = 1+1+2+3+3$ број различитих елемената је једнак 3 јер су различити елементи у њој 1, 2 и 3.

16. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Лукавица, 14. и 15. мај 2011.

1. У троуглу ABC важи $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Нека су M и N редом средишта дужи AB и AC, а k кружница описана око троугла AMN. Доказати да центар кружнице уписане у троугао ABC лежи на кружници k.

2. На полукружници пречника $AB = d$ дате су тачке C и D тако да важи $BC = CD = a$ и $DA = b$, где су a, b и d различити природни бројеви. Одредити најмању могућу вредност броја d.

3. Бројеви $1, 2, \ldots, 2n$ су распоређени у два низа $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ и $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Доказати да је број

$$W = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

потпун квадрат.

4. Одредити највећу вредност броја a који има особину да, за било који распоред бројева $1, 2, \ldots, 10$ по кружници, морају да постоје три суседна броја чији је збир већи или једнак a.

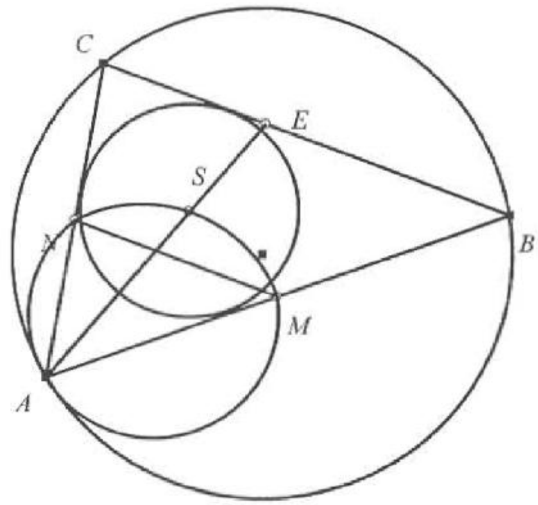
5. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви чији је збир 1. Доказати да важи неједнакост

$$a\sqrt[3]{1 + b - c} + b\sqrt[3]{1 + c - a} + c\sqrt[3]{1 + a - b} \leqslant 1.$$

6. У четвороуглу $ABCD$ са непаралелним страницама AD и BC, дијагонале AC и BD се секу у тачки E. Тачке F и G деле странице AB и DC редом у размери AD/BC. Ако су тачке E, F и G колинеарне, доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

1. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$. Нека се M и N средините на отсечките AB и AC и нека k е кружницата опишана околу $\triangle AMN$. Докажи дека центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ припаѓа на кружницата k.

Решение. Нека E е пресекот на симетралата на $\measuredangle BAC$ и отсечката BC. Тогаш важи



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}.$$

Оттука следува

$$\frac{\overline{AB}+\overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}+\overline{CE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

т.е.

$$\frac{2\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$$

а од овде следува

$$\overline{CE} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{CN}.$$

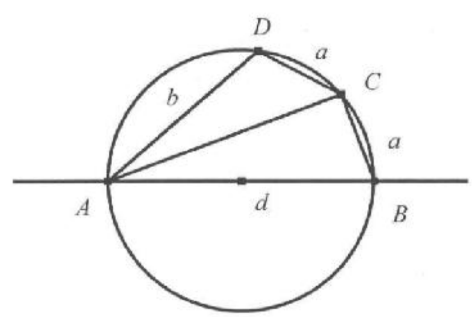
Аналогно се докажува дека

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{BM}.$$

Според тоа, триаголниците NEC и EMB се рамнокраки, па затоа симетралите на аглите $\measuredangle NCE$ и $\measuredangle MBE$ истовремено се и симетрали на отсечките NE и ME, соодветно. Нивниот пресек е точката S, центарот на опишаната кружница околу триаголникот MNE, па затоа припаѓа и на симетралата на отсечката MN. Точката S истовремено е центар и на впишаната кружница на триаголникот ABC, па затоа се наоѓа на симетралата на аголот $\measuredangle BCA$, односно на аголот $\measuredangle MAN$. Но, симетралата на внатрешниот агол и симетралата на спротивната страна на тој агол во триаголникот се сечат на кружницата опишана околу триаголникот, па затоа точката S лежи на кружницата k.

2. На полукружница со дијаметар со должина $\overline{AB} = d$ дадени се точки C и D такви да важи $\overline{BC} = \overline{CD} = a$ и $\overline{DA} = b$, каде a, b и d се различни природни броеви. Определи ја најмалата можна вредност на бројот d.

Решение. Јасно е дека $a, b < d$. Од $\overline{BC} = \overline{CD}$ следува $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \alpha$. Понатаму, триаголникот ADB е правоаголен, па важи



$$\overline{AD} = b = d\cos 2\alpha.$$

Слично, од правоаголниот триаголник ABC добиваме $\overline{BC} = a = d\sin\alpha$. Користејќи го идентитетот

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

добиваме

$$\frac{b}{d} = 1 - 2\frac{a^2}{d^2}, \text{ т.е. } bd + 2a^2 = d^2.$$

Ќе докажеме дека d не може да биде прост број. Во спротивно, од последното равенство следува $d \mid 2a^2$ и како според условот на задачата $d > 2$ добиваме $d \mid a^2$. Но, d е прост број, па затоа $d \mid a$, што не е можно бидејќи $a < d$.

Ако $d=2p$, каде p е прост број, добиваме $bp+a^2=2p^2$. Сега $p\,|\,a^2$, т.е. $p\,|\,a$, па затоа $p=a$ (следува од $a<d=2p$). Меѓутоа, тогаш и $b=p$, што противречи на условот $a\neq b$.

Првиот број кој не е прост и не е од видот $2p$, каде p е прост број е бројот 8. За $d=8$ добиваме $8b+2a^2=64$, т.е. $4b+a^2=32$. Според тоа, бројот a е парен и како $b>0$ добиваме дека може да биде $a=2$ или $a=4$. За $a=2$ добиваме $b=7$, а додека за $a=4$ добиваме $b=4$, што според условот на задачата не е можно.

Конечно, најмалата можна вредност на бројот d е 8.

3. Броевите $1,2,...,2n$ се распоредени во две низи

$$a_1<a_2<...<a_n \text{ и } b_1>b_2>...>b_n .$$

Докажи дека бројот $w=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ е точен квадрат.

Решение. Нека претпоставиме дека $b_n>a_n$. Тогаш важи

$$w=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|=|2n-1|+|2n-1-2|+...+|n+1-n|=n^2 .$$

Аналогно за $a_1>b_1$ се добиваме дека $w=n^2$.

Да ги разгледаме случаите во кои елементите на едната низа не се сите поголеми од сите елементи на другата низа, т.е. $a_1<b_1$ и $a_n>b_n$. Од последните две неравенства следува дека мора да постои индекс k за кој важи $a_k<b_k$ и $a_{k+1}>b_{k+1}$. Од условот на задачата имаме дека важи $b_{k-1}>b_k$ и $a_k>a_{k-1}$. Ако од се комбинира со $a_k<b_k$ заклучуваме дека $a_i<b_i, 1\le i\le k$. Аналогно заклучуваме дека важи $a_i>b_i$, $k+1\le i\le n$. Значи,

$$\begin{aligned} w&=b_1-a_1+...+b_k-a_k+a_{k+1}-b_{k+1}+...+a_n-b_n\\ &=\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)-2(a_1+...+a_k+b_{k+1}+...+b_n)\\ &=n(2n+1)-2(a_1+...+a_k+b_{k+1}+...+b_n). \end{aligned}$$

Меѓутоа,

$$a_1<a_2<...<a_k<b_k<b_{k-1}<...<b_1$$

и

$$b_n<b_{n-1}<...<b_{k+1}<a_{k+1}<...<a_n .$$

Значи, сите елементи на множеството $\{b_1,b_2,...b_k,a_{k+1},a_{k+2},...,a_n\}$ се поголеми од елементите на множеството $\{a_1,a_2,...,a_k,b_{k+1},b_{k+2},...,b_n\}$, па затоа

$$a_1+...+a_k+b_{k+1}+...+b_n=1+2+...+n=\tfrac{n(n+1)}{2} .$$

Конечно,

$$w=n(2n+1)-2\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}=n^2 .$$

4. Определи ја најголемата вредност на бројот a таков што за било кој распоред на кружница на броевите 1,2,3, ..., 10, мора да постојат три соседни броеви чиј збир е поголем или еднаков на a.

Решение. Да ги разгледаме сите последователни тројки броеви. Такви има 10 и да ги означиме со $S_1,S_2,...,S_{10}$. Важи

$$S_1+S_2+\ldots+S_{10}=3(1+2+\ldots+10)=165.$$

Оттука следува дека мора да постои $i\in\{1,2,\ldots,10\}$ таков што $S_i\geq\frac{165}{10}=16{,}5$. Значи, $a\geq 17$.

Ќе докажеме дека $a=18$. Ако го испуштиме бројот 1 ќе добиеме низа од девет броеви и истата да ја поделиме во три последователни збирови од по три броја T_1,T_2,T_3. Збирот на овие броеви ќе биде

$$2+3+\ldots+9=54=T_1+T_2+T_3.$$

Од овде следува дека $T_i\geq\frac{54}{3}=18$. Дека a не може да биде поголем од 18 следува врз основа на цикличното распоредување $(1,10,6,2,9,4,5,3,8,7)$.

5. Нека a,b,c се позитивни реални броеви чиј збир е еднаков на 1. Докажи дека важи неравенството

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

Решение. Јасно, $1+b-c=a+2b>0$, а слично и $1+c-a>0$ и $1+a-b>0$.
Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\geq\sqrt[3]{1+b-c}$$

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leq a\,\frac{3+b-c}{3}=a+\frac{ab-ac}{3}.$$

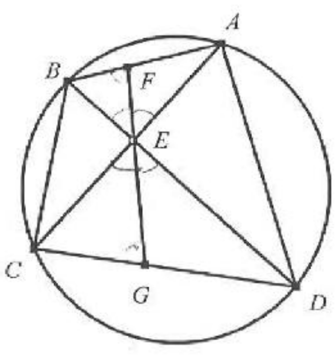
Аналогно добиваме

$$b\sqrt[3]{1+c-a}\leq b+\frac{bc-ba}{3},\qquad c\sqrt[3]{1+a-b}\leq c+\frac{ca-cb}{3}.$$

Конечно, ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме условот $a+b+c=1$, го добиваме бараното неравенство.

6. Во четириаголникот $ABCD$ страните AD и BC не се паралелни. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката E. Точките F и G ги делат соодветно страните AB и DC во однос $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$.

Ако точките E,F и G се колинеарни, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тетивен



Решение. Од теоремата на Менелај, применета на триаголниците BCD и ABC следува

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}\cdot\frac{\overline{DE}}{\overline{EB}}\cdot\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}=1,\qquad \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$$

при што $BC\cap FG=\{X\}$. Ако го искристиме условот на задачата $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$, после делењето на горните две равенства добиваме

$$\frac{\overline{DE}\cdot\overline{EA}}{\overline{EB}\cdot\overline{CE}}=\frac{\overline{AF}\cdot\overline{GD}}{\overline{FB}\cdot\overline{CG}}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BC}^2}. \qquad (*)$$

Од триаголниците ADE и BCE имаме:

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\measuredangle AED}=\frac{\overline{AE}}{\sin\measuredangle EDA}=\frac{\overline{ED}}{\sin\measuredangle EAD},\qquad \frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle BEC}=\frac{\overline{BE}}{\sin\measuredangle BCE}=\frac{\overline{EC}}{\sin\measuredangle CBE}$$

односно

$$\overline{AD}^2=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DE}\cdot\sin\measuredangle AED\cdot\sin\measuredangle AED}{\sin\measuredangle EDA\cdot\sin\measuredangle EAD},\qquad \overline{BC}^2=\frac{\overline{BE}\cdot\overline{CE}\cdot\sin\measuredangle BEC\cdot\sin\measuredangle BEC}{\sin\measuredangle BCE\cdot\sin\measuredangle CBE}.$$

Сега ако ги поделиме последните две равенства и ја искористиме (*) добиваме

$$1=\frac{\sin\measuredangle BCE\cdot\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle EDA\cdot\sin\measuredangle EAD},$$

од што последователно следува

$$\cos(\measuredangle EDA-\measuredangle EAD)=\cos(\measuredangle BCE-\measuredangle CBE)$$

$$\measuredangle EDA-\measuredangle EAD=\pm(\measuredangle BCE-\measuredangle CBE).$$

Освен тоа, важи

$$\measuredangle EDA+\measuredangle EAD=\measuredangle BCE+\measuredangle CBE$$

па затоа важи $\measuredangle EDA=\measuredangle BCE$ или $\measuredangle EDA=+\measuredangle CBE$. Вториот случја го отфрламе заради претпоставката дека страните AD и BC не се паралелни.

Значи, четириаголникот $ABCD$ е тетивен.

17. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 19. и 20. мај 2012.

1. У троуглу ABC је $AB < AC$. Нека је D средиште лука BAC описаног круга овог троугла. Доказати да подножје E нормале из тачке D на праву AC полови изломљену линију BAC.

2. Доказати да за све позитивне бројеве a, b, c који задовољавају услов $a^2+b^2+c^2 = 1$ важи

$$\frac{a^3}{b^2+c} + \frac{b^3}{c^2+a} + \frac{c^3}{a^2+b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

3. Нека је p непаран прост број. Доказати да постоји природан број m, $1 \leqslant m < p$, тако да за неке целе бројеве x_1, x_2 и x_3 важи

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = mp.$$

4. Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задовољава услове

(i) $f(1) = p + 1$;

(ii) $f(n+1) = f(1)f(2)\cdots f(n) + p$.

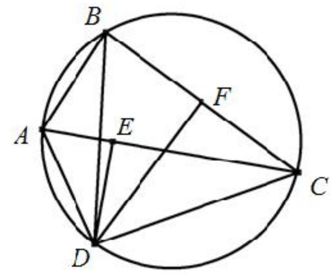
где је p прост број. Одредити све вредности p за које постоји природан број k такав да је $f(k)$ потпун квадрат.

5. Дат је троугао ABC. На полуправим AB и CB одабране су тачке K и M редом тако да важи $AK = CM = AC$. Доказати да је полупречник круга описаног око троугла BKM једнак IO и да је $IO \perp KM$, где су I и O редом центри уписаног и описаног круга датог троугла.

6. Квадрат странице 1 подељен је на области. Границе свих области састоје се од дужи паралелних страницама квадрата. Укупна дужина граничних дужи унутар квадрата једнака је $2n$. Доказати да постоји бар једна област са површином већом или једнаком $\frac{1}{(n+1)^2}$.

1. Нека D е средината на оној лак $\overset{\frown}{BC}$ на опишаната кружница на $\triangle ABC$ на кој е точката A и нека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Докажи дека подножјето E на нормалата повлечена од точката D на правата AC ја полови искршената линија составена од отсечките BA и AC.

Решение. *Прв начин*. Треба да докажеме дека $\overline{BA} + \overline{AE} = \overline{EC}$.



Бидејќи D е средина на лакот $\overset{\frown}{BC}$ важи $\overline{BD} = \overline{CD}$. Четириаголникот $ABCD$ е тетивен, па од теоремата на Птоломеј следува

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{BD} \cdot \overline{AC},$$

т.е.

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}). \qquad (1)$$

Нека F е подножјето на висината од темето D на страната BC. Важи $\overline{BF} = \overline{FC}$ и $\triangle AED \sim \triangle BFD$ ($\measuredangle AED = \measuredangle BFD = 90^\circ$, $\measuredangle DAE = \measuredangle DBF$). Затоа $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{DB}}{\frac{\overline{BC}}{2}}$, т.е.

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = 2\overline{AE} \cdot \overline{DB}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува

$$\overline{AC} - \overline{AB} = 2\overline{AE},$$
$$\overline{AE} + \overline{EC} - \overline{AB} = 2\overline{AE},$$
$$\overline{EC} = \overline{AB} + \overline{AE}.$$

Втор начин. Нека $¥ = \measuredangle BCD$. Од правоаголниот триаголник EAD и синусната теорема за триаголникот ADB следува

$$\overline{AE} = \overline{AD}\cos ¥ = 2R\sin\measuredangle ACD\cos ¥. \qquad (3)$$

Од правоагоилниот триаголник EDC и синусната теорема за триаголникот BDC следува

$$\overline{EC} = \overline{CD}\cos\measuredangle ACD = 2R\sin ¥\cos\measuredangle ACD. \qquad (4)$$

Од (3) и (4) следува

$$\overline{EC} - \overline{AE} = 2R(\sin ¥\cos\measuredangle ACD - \sin\measuredangle ACD\cos ¥)$$
$$= 2R\sin(¥ - \measuredangle ACD) = 2R\sin\measuredangle ACB = \overline{AB}.$$

2. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажи го неравенството

$$\frac{a^3}{b^2+c} + \frac{b^3}{c^2+a} + \frac{c^3}{a^2+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a(b^2+c) + b(c^2+a) + c(a^2+b))\left(\frac{a^3}{b^2+c} + \frac{b^3}{c^2+a} + \frac{c^3}{a^2+b}\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

па затоа е доволно да се докаже

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + ab + bc + ca \leq \frac{1}{\sqrt{3}} + 1.$$

Познато е дека

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Понатаму, повторно од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} = \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

па затоа е доволно да се докаже дека

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \le \tfrac{1}{3},$$

а последното равенство важи бидејќи

$$3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \le (a^2+b^2+c^2)^2 = 1.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Нека p е непарен прост број. Докажи дека постои природен број m, $1 \le m < p$ така што важи

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

за некои цели броеви x_1, x_2, x_3.

Решение. Нека $x_1, x_2 \in \{0,1,...,\frac{p-1}{2}\}$ и $x_1 > x_2$. Ако $x_1^2 \equiv x_2^2 (\mathrm{mod}\ p)$, тогаш $p \mid x_1 - x_2 < p$ или $p \mid x_1 + x_2 < p$, што е противречност. Според тоа, важи $x_1^2 \not\equiv x_2^2 (\mathrm{mod}\ p)$. Значи, за $y_1, y_2 \in \{0,1,...,\frac{p-1}{2}\}$ и $y_1 \ne y_2$ важи

$$-1 - y_1^2 \not\equiv -1 - y_2^2 (\mathrm{mod}\ p).$$

Сега, од принципот на Дирихле следува дека меѓу $p+1$ броеви

$$x_0^2, x_1^2, ..., x_{\frac{p-1}{2}}^2, -1-y_0^2, -1-y_1^2, ..., -1-y_{\frac{p-1}{2}}^2,$$

такви $x_i, y_i \in \{0,1,...,\frac{p-1}{2}\}$ и $x_i \ne x_j$, $y_k \ne y_l$ за $i \ne j$, $k \ne l$ постојат два броја кои при делење со p даваат ист остаток, т.е. мора да важи

$$x_s^2 \equiv -1 - y_t^2 (\mathrm{mod}\ p),$$

т.е.

$$x_s^2 + y_t^2 + 1 = mp,$$

при што важи $0 < mp < (\frac{p}{2})^2 + (\frac{p}{2})^2 + 1 = \frac{p^2}{2} + 1 < p^2$, т.е. $1 \le m < p$.

4. Функцијата $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ги задоволува условите

1) $f(1) = p+1$,

2) $f(n+1) = f(1)f(2)...f(n) + p$

каде p е прост број. Определи го p така што постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $f(k)$ е точен квадрат.

Решение. Прво да провериме кога $f(1)$ е точен квадрат. Тогаш $p+1=m^2$, од каде добиваме $p=(m-1)(m+1)$, па затоа $m-1=1$, т.е. $m=2$ и $p=3$.

Понатаму, бидејќи $f(2) = f(1) + p = 2p+1$ и равенката $2p+1=m^2$ нема решение, заклучуваме дека $f(2)$ не е точен квадрат за ниту еден прост број p. Понатаму, $f(3) = f(1)f(2) + p = (p+1)(2p+1) + p = 2p^2 + 4p + 1$ и равенката $2p^2+4p+1=m^2$ нема решение, што е очигледно за $p=2$, а за $p>2$ левата страна дава остаток 2 при делење со 4, а остатокот на квадрат на природен број при делење со 4 може да биде 0 или 1.

Сега, да разгледаме $f(n), n \ge 4$. Јасно, $f(n-1) > 2p^2$, $f(n) > p^4$ и

$$f(n)=f^2(n-1)-pf(n-1)+p.$$

Нека претпоставиме дека $f(n)=k^2$. Тогаш

$$\begin{aligned}&f^2(n-1)-pf(n-1)+p-k^2=0,\\&4f^2(n-1)-4pf(n-1)+p^2-4k^2=p^2-4p,\\&(2f(n-1)-p)^2-4k^2=p^2-4p,\\&(2f(n-1)-p-2k)(2f(n-1)-p+2k)=p^2-4p.\end{aligned}$$

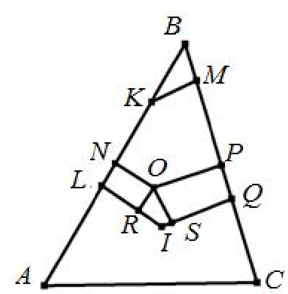
За $p>3$ десната страна во последното равенство е позитивен број, па затоа мора да важи $2f(n-1)-p-2k\geq 1$. Според тоа,

$$\begin{aligned}(2f(n-1)-p-2k)(2f(n-1)-p+2k)&\geq 2f(n-1)-p+2k\\&\geq 4p^2-p+2p^2>p^2-4p,\end{aligned}$$

што е противречност. За $p=3$ видовме дека $f(1)$ е точен квадрат, а за $p=2$ лесно се докажува дека нема точни квадрати. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Даден е триаголник ABC. На полуправите AB и CB избрани се точки K и M такви што $\overline{AK}=\overline{CM}=\overline{AC}$. Докажи дека радиусот на кружницата опишана околу триаголникот BKM е еднаков на OI, каде I е центар на вписаната, O е центар на опишаната кружница на триаголникот ABC и дека $IO\perp KM$.

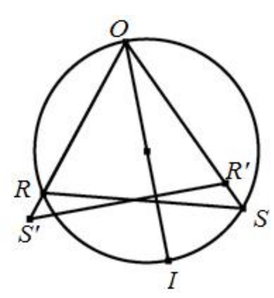
Решение. Нека N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката O соодветно на страните AB и AC, и нека L и Q се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката I соодветно на страните AB и AC (цртеж десно). Тогаш,



$$\begin{aligned}&\overline{BK}=c-b,\ \overline{BM}=a-b,\ \overline{BN}=\tfrac{c}{2},\ \overline{BP}=\tfrac{a}{2},\\&\overline{BL}=\overline{BQ}=s-b,\ \overline{PQ}=\tfrac{c-b}{2},\\&\overline{NL}=\overline{AN}-\overline{AL}=\tfrac{c}{2}-(s-a)=\tfrac{a-b}{2}.\end{aligned}$$

Нека R и S се точки соодветно на IL и IQ такви што $OR\parallel AB$ и $OS\parallel BC$. Тогаш $OR\perp IL$ и $OS\perp QI$. Оттука следува дека $\measuredangle ROS=\measuredangle KBM$, како агли со паралелни краци, и $\triangle ORS\sim\triangle BKM$ (еднаков агол и еднакви односи на страните кои го градат тој агол). Бидејќи односот на страните е $\frac{1}{2}$, следува дека коефициентот на сличноста е $k=\frac{1}{2}$.

Бидејќи OI е дијаметар во тетивниот четириаголник $ORIS$ и $k=\frac{1}{2}$ следува дека дијаметарот на кружницата опишана околу триаголникот BKM е еднаков на $2\overline{OI}$, т.е. радиусот на кружницата опишана околу триаголникот BKM е еднаков на $\overline{OI}$.



Нека $\overline{OS'}=\overline{OS}$ и $\overline{OR'}=\overline{OR}$, при што S' и R' припаѓаат на OR и OS, соодветно (цртеж десно). Сега $\triangle OR'S'\sim\triangle BKM$ и OR' е пропорционална со BM, а OS' е пропорционална со BK. Оттука следува $KM\parallel R'S'$. Сега е доволно да се докаже дека $IO\perp R'S'$. Имаме,

$$\measuredangle IOR'+\measuredangle S'R'O=\measuredangle IOS+\measuredangle SRO=\measuredangle IOS+\measuredangle SIO=90^\circ,$$

при што заради складноста важи $\measuredangle S'R'O=\measuredangle SRO$.

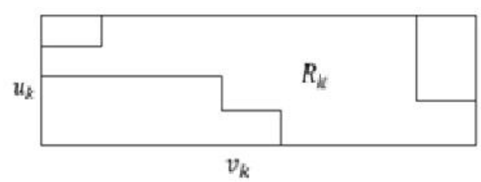
6. Квадрат со страна 1 е поделен на многуаголници. Страните на сите многуаголници се паралелни со страните на квадратот. Вкупната должина на внатрешните страни на многуаголниците е еднаква на $2n$. Докажи дека постои барем еден многуаголник чија плоштина е поголема или еднаква на $\frac{1}{(n+1)^2}$.

Решение. Нека претпоставиме дека квадратот е поделен на многуаголниците $R_1, R_2, ..., R_m$. Нека P_{R_i} и O_{R_i} се плоштината и периметарот на многуаголникот R_i, соодветно. Тогаш, бидејќи секоја отсечка на поделбата се јавува во периметарот на два многуаголници, имаме

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_{R_i} \quad \text{и} \quad 4 + 2 \cdot 2n = \sum_{i=1}^{m} O_{R_i} .$$

Сега, да разгледаме некој многуаголник R_k (цртеж долу). Да опишеме минимален правоаголник околу многуаголникот R_k и енак должините на страните на овој правоаголник се u_k и v_k. Сега важи

$$P_{R_k} \le u_k v_k \le \frac{(u_k + v_k)^2}{4},$$
$$O_{R_k} \ge 2(u_k + v_k),$$



т.е.

$$\sqrt{P_{R_k}} \le \frac{u_k + v_k}{2} \le \frac{O_{R_k}}{4} .$$

Од последното неравенство следува

$$\sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_{R_k}} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{O_{R_k}}{4} = \frac{4n+4}{4} = n + 1 .$$

Нека претпоставиме дека $P_{R_k} < \frac{1}{(n+1)^2}$ за секој многуаголник R_k. Според тоа,

$$1 = \sum_{i=1}^{m} P_{R_i} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_{R_k}} \sqrt{P_{R_k}} < \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_{R_k}} \le \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) = 1 ,$$

што е противречност. Конечно од добиената противречност следува дека постои барем еден многуаголник чија плоштина е поголема или еднаква на $\frac{1}{(n+1)^2}$.

18. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Високо, 18. и 19. мај 2013.

1. У троуглу ABC са правим углом код темена C, симетрале унутрашњих углова код темена A и B редом секу наспрамне странице у тачкама M и N. Висина CH сече праве AM и BN редом у тачкама P и Q. Доказати да је права која пролази кроз средишта дужи QN и PM паралелна хипотенузи AB.

2. Низ је задат условима

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \quad \text{и} \quad a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4$$

за сваки природан број $n \geqslant 1$. Доказати да су сви чланови овог низа потпуни квадрати.

3. Нека је n природан број. Доказати да се у сваком скупу од $\binom{2n}{n}$ људи може наћи $n+1$ људи који се сви међусобно познају или $n+1$ људи који се сви међусобно не познају.

4. Одредити све просте бројеве p и q за које важи $p \mid 30q-1$ и $q \mid 30p-1$.

5. Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ненегативни реални бројеви за које је $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Означимо

$$F_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1).$$

Доказати да је:

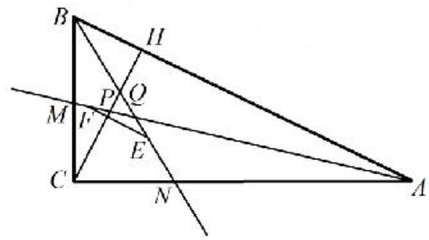
(а) $\min F_3 = -\frac{1}{3}$; **(б)** $\min F_4 = -\frac{1}{4}$; **(в)** $\min F_5 = -\frac{1}{5}$.

6. Нека су O и I редом центри описаног и уписаног круга троугла ABC. На дужима IA, IB и IC редом одабране су тачке P, Q и R тако да важи

$$IP \cdot IA = IQ \cdot IB = IR \cdot IC.$$

Доказати да Ојлерова права троугла PQR садржи тачке I и O.

1. Нека ABC е правоаголен триаголник, со прав агол во темето C, и нека симетралите на внатрешните агли во темињата A и B ги сечат спротивните катети соодветно во точките M и N. Висината CH ги сече правите AM и BN соодветно во точките P и Q. Докажи дека правата која минува низ средините на отсечките QN и PM е паралелна со хипотенузата AB.



Решение. Нека E и F се соодветно средините на отсечките MP и NQ. Да означиме $\measuredangle MAC = \measuredangle MAB = \frac{\sim}{2}$. Од правоаголните триаголници AMC и APH следува $\measuredangle CMA = 90^\circ - \frac{\sim}{2} = \measuredangle APH = \measuredangle CPM$. Според тоа, триаголникот CPM е рамнокрак и $CF \perp MP$. Бидејќи $\measuredangle CFA = \measuredangle CHA = 90^\circ$, заклучуваме дека точките C, F, H, A лежат на иста кружница, па затоа $\measuredangle FCH = \measuredangle FAH = \measuredangle FAC = \measuredangle FHC$. Според тоа, триаголникот CFH е рамнокрак и $\overline{FC} = \overline{FH}$. Значи, точката F се наоѓа на симетралата на отсечката CH. Аналогно, може да се покаже дека и точката E се наоѓа на симетралата на отсечката CH. Затоа $EF \perp CH$ о како $CH \perp AB$ добиваме $EF \parallel AB$.

2. Дадена е низата $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4$, за $n \geq 1$. Докажи дека сите членови на оваа низа се точни квадрати.

Решение. Ја воведуваме смената $a_n = b_n + c$ и ја добиваме рекурзијата $b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1} + 12c - 4$, од која константата c ќе ја определиме така што се анулира слободниот член. Според тоа, $c = \frac{1}{3}$ и рекурзијата има облик $b_0 = b_1 = \frac{2}{3}, b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1}$. Нејзината карактеристична равенка е $t^2 - 14t + 1 = 0$, со решенија $t_{1,2} = 7 \pm 4\sqrt{3}$. Според тоа,

$$b_n = \sim(7-4\sqrt{3})^n + \quad (7+4\sqrt{3})^n. \qquad (1)$$

Ако во (1) ставиме $n = 0,1$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} \sim + \quad = \frac{2}{3} \\ \sim(7-4\sqrt{3}) + \quad (7+4\sqrt{3}) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

чии решенија се $\sim = \frac{2+\sqrt{3}}{6}, \quad = \frac{2-\sqrt{3}}{6}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2+\sqrt{3}}{6}(7-4\sqrt{3})^n + \frac{2-\sqrt{3}}{6}(7+4\sqrt{3})^n + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{6}[(2-\sqrt{3})^2]^n + \frac{2-\sqrt{3}}{6}[(2+\sqrt{3})^2]^n + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}(2-\sqrt{3})^{2n-1} + \frac{1}{6}(2+\sqrt{3})^{2n-1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}]^{2n-1} + \frac{1}{6}[\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}]^{2n-1} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^{4n-2} + 2\cdot 2^{2n-1} + (\sqrt{3}+1)^{4n-2}}{3\cdot 2^{2n}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}-1)^{4n-2} + 2\cdot(\sqrt{3}-1)^{2n-1}(\sqrt{3}+1)^{2n-1} + (\sqrt{3}+1)^{4n-2}}{3\cdot 2^{2n}} \\ &= (\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1} + (\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n})^2. \end{aligned}$$

Ќе докажеме дека $c_n=\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}+(\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n}$ е цел број за секој природен број n. Имаме,

$$c_n=\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}+(\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n+\frac{3-\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n.$$

Бидејќи $2\pm\sqrt{3}$ се решенија на квадратната равенка $t^2-4t+1=0$, следува дека c_n е решение на рекурзијата $c_0=c_1=1, c_{n+1}=4c_n-c_{n-1}$. Оттука следува дека $c_n\in\mathbb{N}$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и $a_n=c_n^2$, што и требаше да се докаже.

3. Докажи дека во множество од $\binom{2n}{n}$ луѓе, $n\in\mathbb{N}$, може да се најдат $n+1$ особа кои меѓусебно сите се познават или $n+1$ особа кои меѓусебно сите не се познаваат.

Решение. Ќе докажеме поопшто тврдење: Во множество од $\binom{p+q}{q}$ луѓе, $p,q\in\mathbb{N}$, може да се најдат $p+1$ особи кои сите меѓусебно се познаваат или $q+1$ особи кои сите меѓусебно не се познаваат. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $p+q$.

Ако $p+2=2$, тогаш $p=q=1$, па тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека имаме $\binom{p+q}{q}$ луѓе. Да избереме произволна особа A. Можни се следниве случаи:

1) Ако A познава $\binom{(p-1)+q}{p-1}$ лица, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека меѓу познаниците на A може да се најдат p кои сите меѓусебно се познаваат и кои заедно со A се бараните $p+1$ лица кои сите меѓусебно се познаваат, или $q+1$ лица кои сите меѓусебно не се познаваат.
2) Ако A не познава барем $\binom{p+(q-1)}{p}$ луѓе, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека меѓу лицата кои не го познават A може да се најдат $p+1$ лица кои сите меѓусебно не се познаваат или q лица кои сите меѓусебно не се познаваат, па овие лица заедно со A се $q+1$ лица кои сите меѓусебно не се познаваат.
3) Случајот кога A познава најмногу $\binom{(p-1)+q}{p-1}-1$ лица и не познава најмногу $\binom{p+(q-1)}{p}-1$ не е можен, бидејќи
$$\binom{(p-1)+q}{p-1}-1+\binom{p+(q-1)}{p}-1=\binom{p+q}{p}-2<\binom{p+q}{p}-1.$$

4. Определи ги сите прости броеви p и q такви што $p\,|\,30q-1$ и $q\,|\,30p-1$.

Решение. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(pq,30)=1$, т.е. $p,q\neq 2,3,5$. Од условот лесно се добива дека $pq\,|\,30(p+q)-1$. Оттука заклучуваме дека постои природен број n таков што $\mathrm{NZD}(n,30)=1$ и за кој важи
$$pqn=30(p+q)-1. \qquad (1)$$
Ќе ги разгледаме следниве случаи:

1) $n=1$ и авенката (1) го добива видот $pq=30(p+q)-1$, т.е.
$$(p-30)(q-30)=899=29\cdot 31=1\cdot 899.$$
Оттука ги добиваме решенијата

$$(p,q)\in\{(59,61),(61,59),(31,929),(929,31)\}.$$

2) $n>1$, од каде следува $n\geq 7$. Сега имаме

$$7pq\leq npq=30(p+q)-1<30pq.$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме $p\leq q$ и ако последната неравенка ја поделиме со $30pq$ добиваме

$$\frac{7}{30}<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{2}{p}.$$

Оттука следува $p\leq\frac{60}{7}<9$, а како $p\geq 7$, заклучуваме дека $p=7$. Сега од $q\,|\,7\cdot 30-1=209=11\cdot 19$ следува $q=11$ или $q=19$. Но, $7\,|\,30\cdot 11-1=329=7\cdot 47$ и $7\nmid 30\cdot 19-1=569$, па затоа решение е само $q=11$. Значи, во овој случај решенија се $(p,q)\in\{(7,11),(11,7)\}$.

Конечно, решенија на задачата се

$$(p,q)\in\{(7,11),(11,7),(59,61),(61,59),(31,929),(929,31)\}.$$

5. Нека $n\geq 3$ е природен број и нека се $x_i\geq 0$, $i=1,2,...,n$ реални броеви за кои важи $x_1+x_2+...+x_n=1$. Да означиме

$$F_n=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2-2(x_1x_2+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n+x_nx_1).$$

Докажи дека

а) $\min F_3=-\frac{1}{3}$, б) $\min F_4=-\frac{1}{4}$, в) $\min F_5=-\frac{1}{5}$.

Решение. а) Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}F_3&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\\&=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)^2\\&\geq\tfrac{2}{3}(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1+x_2+x_3)^2=-\tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}$.

б) Од неравеснтвото меѓу аритметичката и квадратната средина и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}F_3&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2(x_1+x_3)(x_2+x_4)\\&\geq\tfrac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-3\tfrac{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}{4}=-\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{4}$.

в) Нека

$$A=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1 \text{ и } B=x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_1+x_5x_2.$$

Тогаш неравенството

$$F_n=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)\geq-\frac{1}{5}$$

е еквивалентно со неравенството

$$1-4A-2B\geq-\frac{1}{5}\qquad\Leftrightarrow$$

$$2A+B\leq\frac{3}{5}\qquad\Leftrightarrow$$

$$2A+B \le x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+2A+2B-\tfrac{2}{5} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{2}{5} \le x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+B.$$

Последното неравенство следува од

$$\begin{aligned} & x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_1+x_5x_2= \\ & =\tfrac{1}{2}[(x_1+x_3)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3+x_5)^2+(x_4+x_1)^2+(x_5+x_2)^2] \\ & \ge \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}(x_1+x_3+x_2+x_4+x_3+x_5+x_4+x_1+x_5+x_2)^2=\tfrac{2}{5}. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=\tfrac{1}{5}$.

6. Нека I е центар на впишаната кружница на $\triangle ABC$. На отсечките IA, IB, IC соодветно се избрани точки P, Q, R такви што важи

$$\overline{IP}\cdot\overline{IA}=\overline{IQ}\cdot\overline{IB}=\overline{IR}\cdot\overline{IC}.$$

Докажи дека Ојлеровата права за $\triangle PQR$ ги содржи точките I и O, каде O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Од условот на задачата $\frac{\overline{IP}}{\overline{IB}}=\frac{\overline{IQ}}{\overline{IA}}$ следува $\triangle IPQ \sim \triangle IBA$, а оттука следува дека четириаголникот $ABQP$ е тетивен, па затоа $\measuredangle IPQ=\frac{}{2}$ и $\measuredangle IQP=\frac{\sim}{2}$. Аналогно добиваме дека четириаголниците $BCRQ$ и $ACRP$ се тетивни (направи цртеж). Според тоа, аглите на $\triangle PQR$ се

$$\measuredangle RPQ=90^\circ-\frac{\sim}{2}, \measuredangle PQR=90^\circ-\frac{}{2} \text{ и } \measuredangle QRP=90^\circ-\frac{\text{¥}}{2}.$$

Од равенството $\measuredangle IPQ+\measuredangle PQR=90^\circ$, следува дека $PI \perp RQ$, па затоа точката I е ортоцентар на $\triangle PQR$. Нека S е средината на опишаната кружница на $\triangle PQR$ и C', B', A' се соодветно центрите на опишаните кружници околу четириаголниците $ABQP, ACRP, BCRQ$. Бидејќи точките A' и B' лежат на симетралата на отсечката CR следува дека $A'B' \parallel PQ$. Слично имаме $B'C' \parallel RQ$ и $A'C' \parallel PR$. Сега имаме

$$\measuredangle OB'C'=\measuredangle IAC=\frac{\sim}{2} \text{ и } \measuredangle OC'B'=\measuredangle IAB=\frac{\sim}{2},$$

како агли со нормални краци. Според тоа, O е центар на опишаната кружница околу $\triangle A'B'C'$. Триаголниците $A'B'C'$ и PQR се хомотетични, со центар на хомотетија во пресекот на правите $A'P, B'Q, C'R$. Точката S е ортоцентар на $\triangle A'B'C'$ и центар на опишаната кружница околу $\triangle PQR$. Значи, центарот на хомотетија лежи во пресекот на правите SI и OS, што значи дека точките S, I и O се колинеарни.

19. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 10. и 11. мај 2014.

1. Дата је кружница k и на њој тачке A и B које нису дијаметрално супротне. На мањем луку AB дата је тачка C. Нека су D, E и F редом подножја нормала из тачке C на тетиву AB и на тангенте на кружницу k у тачкама A и B. Доказати да је $CD = \sqrt{CE \cdot CF}$.

2. Нека су a, b и c различити реални бројеви.

(а) Израчунати вредност израза:

(1) $\dfrac{1+ab}{a-b} \cdot \dfrac{1+bc}{b-c} + \dfrac{1+bc}{b-c} \cdot \dfrac{1+ca}{c-a} + \dfrac{1+ca}{c-a} \cdot \dfrac{1+ab}{a-b}$;

(2) $\dfrac{1-ab}{a-b} \cdot \dfrac{1-bc}{b-c} + \dfrac{1-bc}{b-c} \cdot \dfrac{1-ca}{c-a} + \dfrac{1-ca}{c-a} \cdot \dfrac{1-ab}{a-b}$.

(б) Доказати неједнакост

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Да ли може наступити знак једнакост?

3. Наћи сва решења једначине $7^x - 2 \cdot 5^y = -1$ у скупу ненегативних целих бројева.

4. Низ (a_n) је задат условима

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1} \quad \text{за } m > 1.$$

Одредити збир $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ за произвољно $k \in \mathbb{N}$.

5. Дат је правилан n-тоугао, где је $n \geqslant 6$. Колико има троуглова са теменима у теменима n-тоугла којима су странице дијагонале тог n-тоугла?

6. Нека су D и E редом подножја висина из темена A и B троугла ABC, F пресечна тачка симетрале угла C са страницом AB, а O, I и H редом центри описане и уписане кружнице и ортоцентар троугла ABC. Ако је $\frac{CF}{AD} + \frac{CF}{BE} = 2$, доказати да је $OI = IH$.

1. Дадена е кружница k и на неа точки A и B кои не се дијаметрално спротивни. На помалиот лак $\overset{\frown}{AB}$ земена е точка C. Нека D,E,F се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од точката C на тетивата AB и тангентите на кружницата k во точките A и B. Докажи дека $\overline{CD}=\sqrt{\overline{CE}\cdot\overline{CF}}$.

   Решение. Точките D и E припаѓаат на кружницата со дијаметар AC, а точките D и F припаѓаат на кружницата со дијаметар BC. Според тоа, четириаголниците $ADCE$ и $BDCF$ се тетивни. Имајќи го ова предвид и користејќи го равенството на аголот меѓу тангентата и тетивата и периферниот агол над тетивата, добиваме

$$\measuredangle EDC=\measuredangle EAC=\measuredangle ABC=\measuredangle DFC.$$

   Аналогно се докажува дека $\measuredangle FDC=\measuredangle DEC$. Од еднаквоста на овие агли следува дека триаголникот EDC е сличен со триаголникот DFC, па затоа

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{CD}},$$

   т.е. $\overline{CD}=\sqrt{\overline{CE}\cdot\overline{CF}}$.

2. Нека a,b,c се различни реални броеви.

   1) Пресметај ги вредностите на изразите

      а) $\frac{1+ab}{a-b}\cdot\frac{1+bc}{b-c}+\frac{1+bc}{b-c}\cdot\frac{1+ca}{c-a}+\frac{1+ca}{c-a}\cdot\frac{1+ab}{a-b}$.

      б) $\frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c}+\frac{1-bc}{b-c}\cdot\frac{1-ca}{c-a}+\frac{1-ca}{c-a}\cdot\frac{1-ab}{a-b}$.

   2) Докажи го неравенството

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\geq\frac{3}{2}.$$

      Дали може да важи знак за равенство?

   Решение. 1) а) После сведување на заеднички именител и средување добиваме дека вредноста на изразот е еднаква на 1.

   б) После сведување на заеднички именител и средување добиваме дека вредноста на изразот е еднаква на -1.

   2) Ќе ги користиме познатите неравенства

$$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx \text{ и } x^2+y^2+z^2\geq -2(xy+yz+zx),$$

   кои важат за секои реални броеви x,y,z, како и равенството

$$2(t^2+u^2)=(t+u)^2+(t-u)^2.$$

   Имаме

$$\begin{aligned}2\left(\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2}\right)&=\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2+\left(\frac{1+bc}{b-c}\right)^2+\left(\frac{1+ca}{c-a}\right)^2+\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2+\left(\frac{1-bc}{b-c}\right)^2+\left(\frac{1-ca}{c-a}\right)^2\\&\geq\frac{1+ab}{a-b}\cdot\frac{1+bc}{b-c}+\frac{1+bc}{b-c}\cdot\frac{1+ca}{c-a}+\frac{1+ca}{c-a}\cdot\frac{1+ab}{a-b}+(-2)\left(\frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c}+\frac{1-bc}{b-c}\cdot\frac{1-ca}{c-a}+\frac{1-ca}{c-a}\cdot\frac{1-ab}{a-b}\right)\\&=1+(-2)\cdot(-1)=3.\end{aligned}$$

   Знак за равенство важи за $a=-\sqrt{3}, b=0, c=\sqrt{3}$.

3. Во множеството цели ненегативни броеви реши ја равенката

$$7^x-2\cdot5^y=-1.$$

   Решение. За $y\leq3$ ги добиваме решенијата (0,0) и (2,2). Нека $y>3$.

Разгледувајќи ги остатоците по модул 4 заклучуваме дека x е парен, а разгледувајќи ги остатоците по моул 3 заклучуваме дека y е парен.

Значи, $x = 2x_1,\ y = 2y_1,\ x_1, y_1 \in \mathbb{N},\ y_1 > 1$. Од таблицата на остатоците

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$49^n \pmod{125}$	49	26	24	51	-1	-49	-26	-24	-51	1

заклучуваме дека мора да важи $x_1 = 10x_2 + 5,\ x_2 \in \mathbb{N}$.

Сега равенката го добива видот

$$49^{10x_2+5} + 1 = 2 \cdot 25^{y_1}\text{, т.е. } (49^5)^{2x_2+1} + 1 = 2 \cdot 25^{y_1},$$

од каде следува дека бројот $49^5 + 1 = (49+1)(49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1)$ мора да е делител на бројот $2 \cdot 25^{y_1}$. Значи, $49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1$ треба да е степен на бројот 25, што не е точно, бидејќи

$$49^4 - 49^3 + 49^2 - 49 + 1 \equiv (-1)^4 - (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1 \equiv 5 \pmod{25}.$$

Значи, единствени решенија на дадената равенка се (0,0) и (2,2).

4. Низата $\{a_n\}$ е зададена со $a_1 = \frac{1}{2},\ a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1},\ m > 1$. Пресметај го збирот $a_1 + a_2 + ... + a_k$, за произволен $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$a_m = \frac{1}{2m + \frac{1}{a_{m-1}}}. \tag{1}$$

Нека $b_m = \frac{1}{a_m},\ m \in \mathbb{N}$. Од (1) следува дека $b_m = 2m + b_{m-1}$. Оттука со математичка индукција добиваме $b_m = m(m+1)$. Значи,

$$a_m = \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1},$$

па затоа

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

5. Даден е правилен n – аголник, $n \geq 6$. Колку триаголници има со темиња во темињата на n – аголникот, чии страни се дијагоналите на n – аголникот?

Решение. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен n – аголник. Да ги разгледаме бараите триаголници за кои едно теме е A_1. Ова теме може да се поврзе со било кое теме од n – аголникотот, освен со темињата A_2 и A_n. Такви две точки може да се изберат на $\binom{n-3}{2}$ начини. Од овој број треба да го одземеме бројот на триаголниците од видот $A_1A_kA_{k+1}$, $k = 3, 4, ..., n-2$, кои ги има $n-4$ на број, па затоа A_1 е теме на $\binom{n-3}{2} - (n-4)$ такви триаголници. Ако постапката ја повториме за останатите темиња, секој триаголник ќе го броиме триапти, па затоа бараниот број триаголници е еднаков на

$$\frac{1}{3}n(\binom{n-3}{2} - (n-4)) = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

6. Нека D и E се подножните точки на висините спуштени соодветно од темињата A и B на $\triangle ABC$, F е пресечната точка на симетралата на аголот аголот во темето C со страната AB,

а O, I и H се соодветно центарот на опишаната кружница, центарот на впишаната кружница и ортоцентарот на $\triangle ABC$. Докажи дека, ако $\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}}=2$, тогаш $\overline{OI}=\overline{IH}$.

Решение. Нека $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \measuredangle ACB=¥, \measuredangle CAB=\sim, \overline{CF}=s_c$. Бидејќи

$$P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AFC}+P_{\triangle BFC},$$

направи цртеж, следува дека

$$\frac{1}{2}bs_c\sin\frac{¥}{2}+\frac{1}{2}as_c\sin\frac{¥}{2}=\frac{1}{2}ab\sin¥ \text{, т.е. } s_c=\frac{2ab\cos\frac{¥}{2}}{a+b}.$$

Понатаму, од $\overline{AD}=b\sin¥$ и $\overline{BE}=a\sin¥$ следува

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}}=\frac{2a\cos\frac{¥}{2}}{(a+b)\sin¥}+\frac{2b\cos\frac{¥}{2}}{(a+b)\sin¥}=\frac{1}{\sin\frac{¥}{2}}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\right)=\frac{1}{\sin\frac{¥}{2}}.$$

Оттука и од условот на задачата следува $\sin\frac{¥}{2}=\frac{1}{2}$, т.е. $¥=\frac{®}{3}$. Нека правата CF ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката M . Тогаш $OM \perp AB$. Но, како $CH \perp AB$ следува дека $\measuredangle OMC=\measuredangle MCH$, т.е. $\measuredangle OCM=\measuredangle MCH$.

Од $\triangle HCE$, бидејќи $\measuredangle EHC=\frac{®}{2}-\measuredangle ECH=\frac{®}{2}-(\frac{®}{2}-\sim)=\sim$ добиваме дека $\overline{CH}=\frac{\overline{CE}}{\sin\sim}$. Од $\triangle BCE$ следува $\overline{CE}=\frac{a}{\sin\sim}\cos¥=2R\cos¥$, па ко е $¥=\frac{®}{3}$ добиваме $\overline{CE}=R$.

Оттука следува дека триаголниците CHI и COI се складни, па затоа $\overline{OI}=\overline{IH}$, што и требаше да се докаже.

20. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 16. и 17. мај 2015.

1. Одредити најмању могућу вредност израза

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c такве да је $a+b+c \leqslant 3$.

2. Нека је D произвољна тачка на страници AB троугла ABC. Кружнице описане око троуглова BCD и ACD секу странице AC и BC редом у тачкама E и F. Симетрала дужи EF сече праву AB у тачки M, а нормалу на AB кроз тачку D у тачки N. Праве AB и EF се секу у тачки T, а описана кружница троугла CDM сече праву TC у тачки $U \neq C$. Доказати да је $NC = NU$.

3. Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да n дели $3^{n-1}-2^{n-1}$.

4. Скуп X који се састоји од осам узастопних природних бројева подељен је на два дисјунктна подскупа A и B са једнаким бројем елемената. Ако је збир квадрата елемената скупа A једнак збиру квадрата елемената скупа B, доказати да је тада збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B.

5. Нека је N природан број. Дат је скуп тегова који задовољава следеће услове:

(i) сваки тег из скупа има неку од тежина $1, 2, \ldots, N$;

(ii) за свако $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ у датом скупу постоји тег тежине i;

(iii) збир тежина свих ових тегова је паран број.

Доказати да се тај скуп тегова може разбити на два скупа једнаких тежина.

6. Уписана кружница троугла ABC има центар у тачки I и додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Нека је P подножје нормале из тачке I на праву AD и нека је M средиште дужи DE. Ако се праве PM и AC секу у тачки N, доказати да је $DN \parallel EF$.

1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c \leq 3$. Определи ја најмалата можна вредност на изразот

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\begin{aligned}\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c+2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)\\ &\geq \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{(a+2)+(b+2)+(c+2)} \geq \frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=2.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$, па затоа бараната најмала вредност е 2.

2. Нека D е произволна точка на страната AB на $\triangle ABC$. Кружниците опишани околу триаголниците BCD и ACD ги сечат соодветно ги сечат страните AC и BC во точките E и F. Симетралата на отсечката EF ја сече AB во точката M, а нормалата на AB во точката D во точката N. Правите AB и EF се сечат во точката T, а втората пресечна точка на кружницата опишана околу $\triangle CDM$ и правата TC е U. Докажи дека $\overline{NC}=\overline{NU}$.

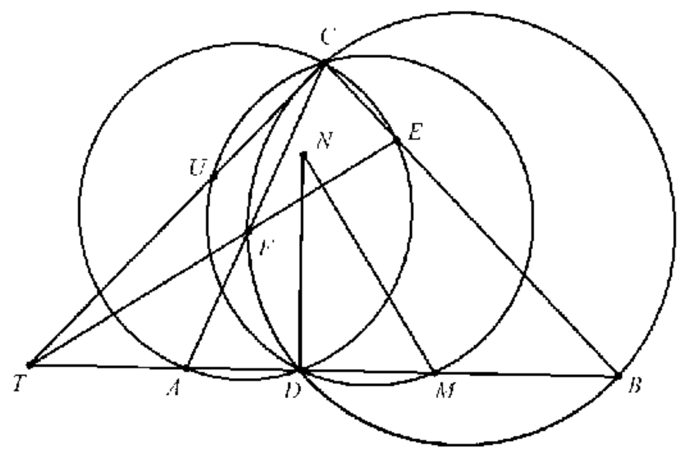
Решение. Од тетивните четириаголници $BCFD$ и $ADEC$ следува

$\measuredangle FDA=180^\circ-\measuredangle FDB=\measuredangle ACB$ и $\measuredangle EDB=180^\circ-\measuredangle EDA=\measuredangle ACB$,

па затоа

$$\measuredangle FDN=90^\circ-\measuredangle ABC=\measuredangle EDN,$$

т.е. DN е симетрала на $\measuredangle FDE$.



Да го разгледаме триаголникот FDE. Во него точката N е пресек на симетрала на агол и симетрала на спротивна страна, па затоа се наоѓа на опишаната кружница на тој триаголник, т.е. четириаголникот $FDEN$ е тетивен. Затоа

$$\measuredangle FNE=180^\circ-\measuredangle EFD=180^\circ-(180^\circ-2\measuredangle ACB)=2\measuredangle ACB.$$

Покрај тоа важи $\overline{NF}=\overline{NE}$, што значи дека N е центар на опишаната кружница на $\triangle FEC$.

За да докажеме дека $\overline{NC}=\overline{NU}$, доволно е да докажеме дека четириаголникот $UFEC$ е тетиве (во тој случај N е центар на опишаната кружница околу тој четириаголник, па ќе важи $\overline{NC}=\overline{NU}$). Последното ќе го докажеме ако докажеме дека $\overline{TU}\cdot\overline{TC}=\overline{TF}\cdot\overline{TE}$. Меѓутоа, од степенот на точката T имаме $\overline{TU}\cdot\overline{TC}=\overline{TD}\cdot\overline{TM}$, па затоа доволно е да докажеме дека $\overline{TD}\cdot\overline{TM}=\overline{TF}\cdot\overline{TE}$, т.е. доволно е да докажеме дека четириаголникот $DMEF$ е тетивен.

Ќе докажеме дека NM е дијаметар на кружницата опишана околу четириаголникот $FDEN$. Нека NM' е дијаметар на таа кружница. Од една страна, точката M' припаѓа на правата NM (тоа е симетрала на отсечката EF), а од друга страна $\measuredangle NDM' = 90^\circ$, што значи дека $M = M'$. Значи и точката M припаѓа на кружницата опишана околу четириаголникот $FDEN$, па затоа четириаголникот $DMEF$ е тетивен, што и требаше да се докаже.

3. Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

Решение. Нека $x, y \in \mathbb{N}$. Ако $x \mid y$, тогаш $3^x - 2^x \mid 3^y - 2^y$, па затоа бројот n ќе го побараме во облик $3^s - 2^s$. За да важи $3^s - 2^s \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}$, доволно е да важи $s \mid n-1$, т.е. доволно е да важи $s \mid 3^s - 2^s - 1$. Нека $s = 2^t$. Бидејќи за секој природен број t важи $t \le 2^t$, добиваме $s \mid 2^s$. Значи доволно е $2^t = s \mid 3^s - 1 = 3^{2^t} - 1$. Последното ќе го докажеме со математичка индукција. За $t = 1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $2^t \mid 3^{2^t} - 1$. Имаме, $3^{2^{t+1}} - 1 = (3^{2^t} - 1)(3^{2^t} + 1)$. Според индуктивната претпоставка првиот множител на десната страна на последното равенство се дели со 2^t, а вториот множител е парен, добиваме дека $2^{t+1} \mid 3^{2^{t+1}} - 1$, па од принципот на математичка индукција следува дека $2^t \mid 3^{2^t} - 1$, за секој природен број t. Значи, за бројот $n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$ важи $n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}$. Меѓутоа, за $t \ge 2$ важи

$$3^{2^t} - 2^{2^t} = (3^{2^{t-1}} - 2^{2^{t-1}})(3^{2^{t-1}} + 2^{2^{t-1}})$$

и очигледно тоа е сложен број. Според тоа, постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што n е делител на $3^{n-1} - 2^{n-1}$.

4. Множеството X се состои од осум последователни природни броеви и е поделено на две дисјунктни подмножества A и B со еднаков број елементи. Ако збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството B, докажи дека тогаш збирот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на елементите на множеството B.

Решение. Ако a е најмалиот елемент на множеството X, тогаш

$$X = \{a, a+1, a+2, ..., a+7\}.$$

Нека $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ и нека збирот на квадратите на елементите на множеството A е еднаков на збирот на квадратите на елементите на множеството B. Со S_X, S_A, S_B да ги означиме збиротвите на квадратите на елементите на множествата X, A, B, соодветно. Според условот на задачата имаме $S_A = S_B = \frac{1}{2} S_X$. Ќе го определиме збирот S_X. Имаме

$$S_X = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + ... + (a+7)^2 = 8a^2 + 56a + 140.$$

Значи, $S_A = S_B = 4a^2 + 28a + 70$.

Имаме, $a + 7 \in X$ и $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a + 7 \in A$ и $a + 7 \notin B$. Нека $a+i, a+j, a+k, i, j, k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ се останатите елементи на множеството A. Тогаш

$$S_A = (a+i)^2 + (a+j)^2 + (a+k)^2 + (a+7)^2$$
$$= 4a^2 + 2a(i+j+k+7) + i^2 + j^2 + k^2 + 49.$$

Но, $S_A = 4a^2 + 28a + 70$, па затоа

$$4a^2 + 28a + 70 = 4a^2 + 2a(i+j+k+7) + i^2 + j^2 + k^2 + 49\,,$$

т.е.

$$2a(i+j+k+7) = 21 - (i^2 + j^2 + k^2)\,. \qquad (1)$$

Збирот на елементите на множеството X е $a+28$, а збирот на елементите на множеството A е $i+j+k+7$. Треба да докажеме дека множествата A и B имаат еднакви збирови на елементите, т.е. дека збирот на елементите на множеството A е еднаков на $4a+14$, од каде добиваме $i+j+k=7$.

Нека претпоставиме дека $i+j+k>7$, т.е. $i+j+k \ge 8$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за различните ненегативни броеви следува $\sqrt{\frac{i^2+j^2+k^2}{3}} > \frac{i+j+k}{3} \ge \frac{8}{3}$, па затоа

$$i^2 + j^2 + k^2 \ge \tfrac{64}{3} > 21\,. \qquad (2)$$

Од $i+j+k>7$, следува дека левата страна на (1) е позитивна, па затоа и десната страна треба да е позитивна, т.е. $21-(i^2+j^2+k^2)>0$, па затоа $i^2+j^2+k^2>21$, што противречи на (2). Од добиената противречност следува $i+j+k \le 7$. Нека претпоставиме дека $i+j+k<7$. Левата страна на (1) е парен број, па затоа и десната мора да е парен број. Но, тогаш $i^2+j^2+k^2$ е непарен број, па затоа и $i+j+k$ е непарен број. Бидејќи овој број е помал од 7, тој може да биде или 1 или 3 или 5.. Но, i,j,k се различни елементи од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, па затоа можни се следниве случаи: $\{i,j,k\} \in \{\{0,1,2\},(0,1,4\},\{0,2,3\}\}$. Оттука следува дека $i^2+j^2+k^2 \in \{5,13,17\}$, т.е. $i^2+j^2+k^2<21$, па затоа десната страна на (1) е позитивна, а од $i+j+k<7$ следува дека левата страна на (1) е негативна, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $i+j+k=7$, што и требаше да се докаже.

5. Нека N е природен број. Дадено е множество тегови кое ги задоволува следниве услови:

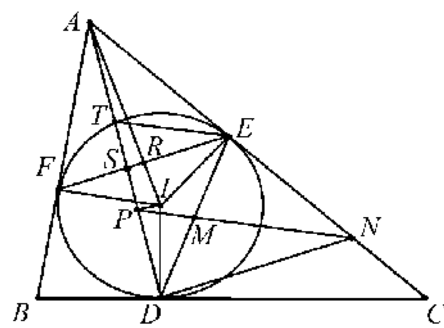
1) Секој тег од множеството има некоја од тежините $1,2,...,N$;
2) За секој $i \in \{1,2,...,N\}$ постои тег со тежина i.
3) Збирот на тежините на сите тегови од даденото множество е парен број.

Докажи дека даденото множество тегови може да се разбие на две подмножества кои имаат еднакви тежини.

Решение. Нека $2S$ е збирот на тежините на сите тегови. Нека T е најголем збир на тежини кој можеме да го добиеме во едната група, но таков да $T \le S$. Ако $T=S$, тогаш тврдењето е докажано. Нека $T<S$. Нека A е група која има збир на тежни T, а нека B е групата која има збир на тежини $2S-T$. Ако некој тег со тежина 1 се наоѓа во групата B, тогаш можеме да го префрлиме во групата A, па тогаш групата A ќе има тежина поголема од T која и понатаму е помала или еднаква на S, што противречи на претпоставката дека T е најголемиот збир на кој е помал или еднаков на S. Значи, сите тегови со тежина 1 се наожаат во групата A. Понатаму, ако некој тег со тежина 2 се наоѓа во групата B, тогаш

овој тег го префрламе во A и еден од теговите со тежина 1 од групата A го префрламе во групата B, и повторно групата A ќе има тежина поголема од T која е помала или еднаква на S, што е противречност. Значи, сите тегови со тежина 2 се наоѓаат во групата A. Продолжувајќи ја постапката, после $N-1$ чекори, добиваме дека сите тегови со тежина $N-1$ се наоѓаат во групата A, па затоа во групата B се наоѓаат само тегови со тежина N. Ако сега тег со тежина $N-1$ од групата A замениме со тег со тежина N од групата B, повторно групата A ќе има тежина поголема од T која е помала или еднаква на S, што е противречност со претпоставката дека T е најголемиот збир на тежини кој е помал или еднаков на S. Конечно, претпоставката дека $T<S$ доведува до противречност, па затоа $T=S$.

6. Нека D,E,F се точки во кои впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC,CA,AB, соодветно, и нека I е центарот на таа кружница. Понатаму, нека P е подножната точка на нормалата спуштена од точката I на правата AD и нека M е средина на отсечката DE. Ако $N=PM\cap AC$, докажи дека $DN \parallel EF$.



Решение. Нека R и S се пресечните точки на отсечката EF со AI и AD, соодветно и нека T е втората пресечна точка на впишаната кружница со правата AD. Од $\overline{IT}=\overline{ID}$, следува дека P е средина на TD, па затоа PM е средна линија на $\triangle DTE$, од каде следува $PM \parallel TE$, т.е. $PN \parallel TE$. Сега, од Талесовата теорема добиваме дека $\frac{\overline{AE}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{AP}}$. Од друга страна, за да важи $DN \parallel EF$, доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{AE}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{AD}}$, па всушност доволно е да се докаже дека дека важи $\frac{\overline{AT}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AS}}{\overline{AD}}$, т.е. $\overline{AS}\cdot\overline{AP}=\overline{AT}\cdot\overline{AD}$. Но, четириаголникот $PIRS$ е тетивен ($\measuredangle IPS = \measuredangle IRS = 90^\circ$), па затоа од степенот на точката A имаме $\overline{AS}\cdot\overline{AP}= \overline{AR}\cdot\overline{AI}$. Понатаму, од сличноста на триаголниците ARE и AIE (заеднички агол при темето A и прав агол), добиваме $\overline{AE}^2=\overline{AR}\cdot\overline{AI}$. Значи, $\overline{AS}\cdot\overline{AP}=\overline{AE}^2=\overline{AT}\cdot\overline{AD}$, при што последното равенство важи од степенот на точката A на впишаната кружница.

21. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Високо, 14. и 15. мај 2016.

1. Четвороугао $ABCD$ уписан је у кружницу k. Праве AB и CD се секу у тачки E, при чему је $AB = BE$. Тангенте у тачкама B и D на кружницу k секу се у тачки F. Ако су праве AB и DF паралелне, доказати да су тачке A, C и F колинеарне.

2. Нека је n природан, а t цео број. На табли је написано n различитих целих бројева. Боб, који је у суседној соби, жели да зна да ли међу тим бројевима постоји одређени број њих са сумом t. Алиса, која се налази пред таблом, помоћи ће му у томе. Она му на почетку каже само укупан збир свих бројева на табли. Након тога, он јој у сваком потезу говори једну од следеће 4 реченице:

(i) Да ли међу бројевима на табли постоји број k?
(ii) Ако на табли постоји број k, избриши га.
(iii) Ако на табли не постоји (цео) број k, допиши га.
(iv) Да ли се бројеви на табли могу поделити у два скупа са једнаким збиром елемената?

На питања му Алиса одговара са *да* или *не*, а операције које он каже она изведе на табли ако је могуће, притом му не говорећи да ли их је извела. Доказати да у мање од $3n$ потеза Боб може сазнати да ли се међу бројевима написаним на почетку налазе неки чији је збир једнак t.

3. За бесконачан низ природних бројева $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ кажемо да је *леп* ако за сваки природан број n важи $a_{2n} = 2a_n$. Доказати следећа тврђења:

(а) за сваки леп низ и прост број $p > a_1$ постоји члан низа који је дељив са p;
(б) за сваки прост број $p > 2$ постоји леп низ у коме ниједан члан није дељив са p.

4. Одредити највећи природан број n који се не може написати у облику збира три броја већа од 1 и узајамно проста по паровима.

5. Нека је k кружница описана око оштроуглог троугла ABC ($AC < BC$). Даље, нека је CL симетрала угла ACB ($L \in AB$), M средиште лука AB кружнице k на којем се налази и тачка C, а I центар уписане кружнице троугла ABC. Кружница k сече по други пут праву MI у тачки k и сече кружницу над пречником CI у тачки H. Ако кружница описана око троугла CLK поново сече праву AB у тачки T, доказати да су тачке T, H и C колинеарне.

6. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ које задовољавају услов

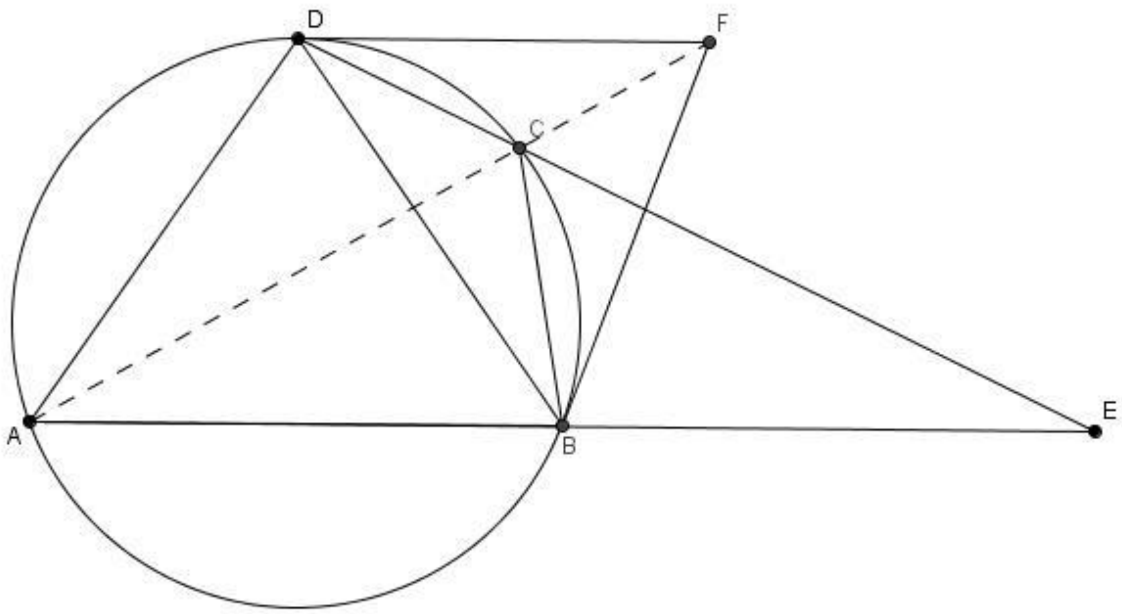
$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \quad \text{за све} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

1. Opisana je kružnica k četverokutu $ABCD$. Pravci AB i CD se sijeku u točki E, te vrijedi $|AB| = |BE|$. Neka je točka F sjecište tangenti na kružnicu k povučenih u točkama B i D te kružnice. Ako su pravci AB i DF paralelni, dokazati da su točke A, C, F kolinearne.

.

Rješenje 1:

Kako je $DF||AB,$ to je D polovište luka $AB,$ pa je $|AD| = |BD|$. Iz potencije točke E na kružnicu k je $2|AB|^2 = |EB| \cdot |EA| = |EC| \cdot |ED|$ (1). Sa druge strane, kako je $\measuredangle DCB = 180° - \measuredangle DAB = 180° - \measuredangle ABD = \measuredangle DBE$, to su trokuti DCB i DBE slični, pa vrijedi da je $\frac{|DB|}{|DE|} = \frac{|DC|}{|DB|}$, tj. $|DB|^2 = |DC| \cdot |DE|$ (2). Sada dijeljenjem (1) sa (2) imamo $\frac{2|AB|^2}{|DB|^2} = \frac{|EC|}{|DC|}$ $(*)$. Međutim, kako je $\measuredangle FDB = \measuredangle DAB$, to su jednakokraki trokuti ABD i DBF slični, odakle je $\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|DB|}$, tj. $|DB|^2 = |AB| \cdot |DF|$. Uvrštavajući posljednju jednakost u $(*)$, dobijamo $\frac{|EC|}{|DC|} = \frac{2|AB|}{|DF|} = \frac{|AE|}{|DF|}$, pa kako vrijedi i $\measuredangle AEC = \measuredangle CDF$, to su trokuti AEC i DCF slični, što znači da je $\measuredangle ACE = \measuredangle DCF$, pa su tačke A, C, F kolinearne, što je i trebalo dokazati.



Rješenje 2:

Kao i u prvom rješenju, zaključujemo da je $AD = BD$ i $\frac{DA}{AB} = \frac{FD}{DB}$, tj. $\frac{DB}{AB} = \frac{FD}{DA}$. Dalje, iz sličnosti trouglova ACE i DBE imamo $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{BE} = \frac{BD}{AB} = \frac{FD}{AD}$. Kako je uz to i $\measuredangle ADF = 180° - \measuredangle BAD =$

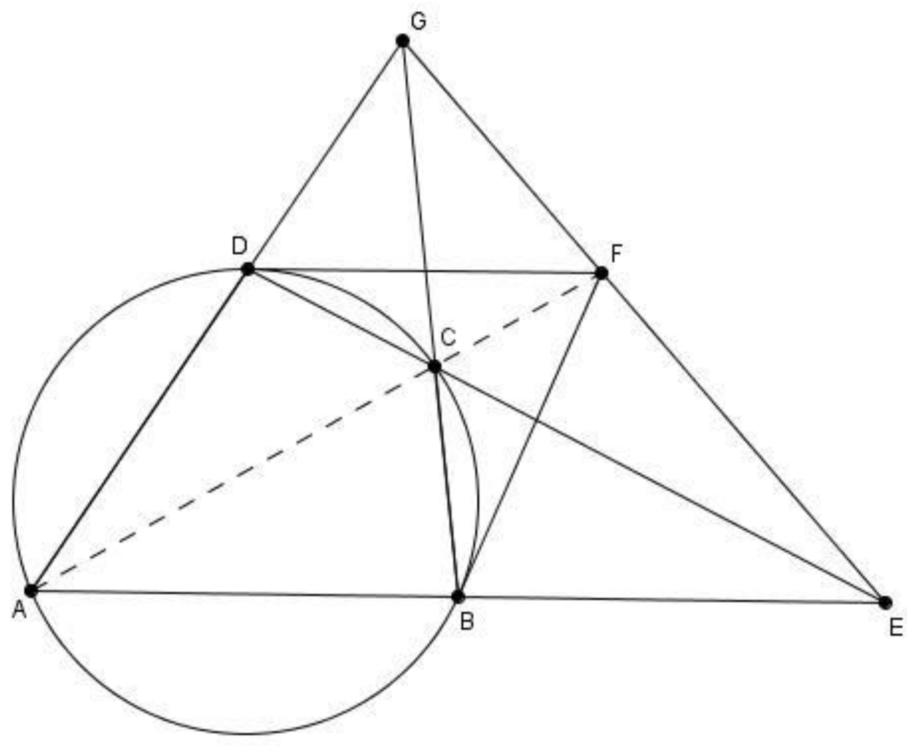
$180° - \measuredangle ABD = 180° - \measuredangle ACD = \measuredangle ACE$, to su trouglovi ACE i ADF slični, pa je $\measuredangle CAE = \measuredangle DFC$, odakle slijedi da su tačke A, C, F kolinearne.

Rješenje3:

Da bi dokazali da su tačke A, C, F kolinearne, dovoljno je dokazati da je $\frac{\sin \measuredangle BAC}{\sin \measuredangle DAC} = \frac{\sin \measuredangle BAF}{\sin \measuredangle DAF}$. Vidimo da je $\frac{\sin \measuredangle BAC}{\sin \measuredangle DAC} = \frac{BC}{DC}$. S druge strane, iz sinusne teoreme na trouglove BAF i DAF, imamo $\frac{\sin \measuredangle BAF}{\sin \measuredangle ABF} = \frac{BF}{AF} = \frac{DF}{AF} = \frac{\sin \measuredangle DAF}{\sin \measuredangle ADF}$, tj. $\frac{\sin \measuredangle BAF}{\sin \measuredangle DAF} = \frac{\sin \measuredangle ABF}{\sin \measuredangle ADF}$. Kako je $\measuredangle ABF = \measuredangle ABC + \measuredangle CBF = \measuredangle ABC + \measuredangle BAC = 180° - \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ADB$ i $\measuredangle ADF = 180° - \measuredangle DAB$, to je $\frac{\sin \measuredangle ABF}{\sin \measuredangle ADF} = \frac{\sin \measuredangle ADB}{\sin \measuredangle DAB} = \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BD}$. Sada je potrebno dokazati $\frac{BC}{DC} = \frac{BE}{DB}$, što slijedi iz sličnosti trouglova DCB i DBE (koja je dokazana u rješenju 1). Ovim je dokaz završen.

Rješenje 4:

Iz Paskalove teoreme na (degenerisani) šestougao $ABBCDD$ imamo da se prave AD, BC i EF sijeku u jednoj tački ili su paralelne (jer je $E = AB \cap CD$ i $F = BB \cap DD$). Ako se sijeku u jednoj tački, neka je to tačka G.



Da bi A, C, F bile kolinearne, dovoljno je dokazati da se prave AF, GB i ED sijeku u jednoj tački, tj. (po Čevinoj teoremi) da vrijedi $\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GD}{DA} = 1.$ Posljednja jednakost vrijedi zbog $AB = BE$ i $\frac{GD}{AD} = \frac{FG}{FE}$ (Talesova teorema).

2. Neka je n prirodan, a t cijeli broj. Na tabli je napisano n različitih cijelih brojeva. Bob, koji je u susjednoj sobi, želi da zna da li među tim brojevima postoji određeni broj njih sa sumom t. Alisa, koja se nalazi pred tablom, će mu pomoći u tome. Na početku, ona mu kaže samo ukupan zbir svih brojeva na tabli. Nakon toga, on joj u svakom potezu govori jednu od sljedeće 4 rečenice:

i. Da li među brojevima na tabli postoji broj k?
ii. Ako na tabli postoji broj k, izbriši ga.
iii. Ako na tabli ne postoji (cijeli) broj k, dodaj ga.
iv. Da li se brojevi na tabli mogu podijeliti u dva skupa sa jednakom sumom elemenata?

Na pitanja mu Alisa tačno odgovara sa da ili ne, a operacije koje on kaže ona izvede na tabli (ako je moguće), pri tom mu ne govoreći da li ih je izvela. Dokazati da u manje od $3n$ poteza Bob može saznati da li se među brojevima napisanim na početku nalaze neki čija je suma jednaka t.

Rješenje:

Neka je ukupna suma brojeva na ploči na početku jednaka s. Bob će najprije pitati da li među brojevima postoji broj $2t - s$. Ako njega nema, u sljedećem potezu će ga Bob dodati i tada će ukupna suma brojeva na ploči biti $2t$. Sada Bob pita 4. pitanje i ako je potvrdan odgovor, znači da imamo dva disjunktna podskupa početnog skupa i suma brojeva oba skupa je t, u jednom od njih se sigurno ne nalazi broj $2t - s$, pa samim tim u početnom skupu imamo skup sa sumom t. A ako je negativan odgovor, očigledno se u početnom skupu ne nalazi podskup sa sumom t. Znači, ako se broj $2t - s$ ne nalazi u početnom skupu, u dva pitanja Bob može saznati odgovor na svoje pitanje. Ako je broj $2t - s$ u skupu, Bob kaže Alisi da ga izbriše, a zatim pita pitanje 4. Ako je potvrdan odgovor, pošto je suma elemenata na tabli $s - (2t - s) = 2s - 2t$, to znači da postoji skup sa sumom $s - t$, i kad tom skupu dodamo element $2t - s$, dobijamo skup sa sumom t i u tom slučaju je Bob već saznao odgovor. A ako smo dobili negativan odgovor, onda sigurno ne postoji među početnim brojevima skup njih koji sadrži elemenat $2t - s$ i čija je suma t(jer bi onda među brojevima bez $2t - s$ postojao skup sa sumom $s - t$, što nije tačno). Znači, ako je negativan odgovor, ne postoji skup sa sumom t koji sadrži elemenat $2t - s$, ali vidimo da je Bob potrošio 3 poteza i već je saznao odgovor ili je saznao da jedan od n elemenata sigurno ne učestvuje u traženoj sumi. Nastavljajući ovako, nakon svaka 3 pitanja Bob sazna odgovor ili izbaci jedan element. Što znači, nakon $3(n - 1)$ poteza Bob će saznati odgovor ili će ostati još samo jedan broj na tabli kojeg će Bob znati, jer u svakom trenutku on zna sumu brojeva na tabli, što znači da će tada sigurno znati odgovor, što je i trebalo dokazati.

Komentar:

Granica $3(n-1)$ je optimalna samo za $n=1$(tada imamo 0 pitanja). Inače Bob može saznati odgovor sa još manje pitanja(lagano se može dobiti $3n-5$ za $n \geq 2$, samo posebno riješimo slučaj sa 2 elementa).

3. Za beskonačni niz $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ prirodnih brojeva kažemo da je „lijep“, ako za svaki prirodan broj n vrijedi $a_{2n} = 2a_n$. Dokazati sljedeće tvrdnje:

c) Ako je dat „lijep“ niz i prost broj $p > a_1$, postoji neki član niza koji je djeljiv sa p;
d) Za svaki prost broj $p > 2$, postoji „lijep“ niz takav da nijedan član tog niza nije djeljiv sa p.

Rješenje:

a) Neka je d najmanja razlika dva uzastopna člana niza, tj. $d = \min\{\, a_{i+1} - a_i, i \in \mathbb{N}\,\}$ i neka je $d = a_{k+1} - a_k$. Tada je $2d = 2a_{k+1} - 2a_k = a_{2k+2} - a_{2k}$, pa kako je $a_{2k+2} - a_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} + a_{2k+1} - a_{2k} \geq d + d = 2d$ (nejednakost vrijedi zbog izbora broja d), to je $a_{2k+2} - a_{2k+1} = a_{2k+1} - a_{2k} = d$. Slično dobijamo da za svaki prirodan broj t važi $2^t \cdot d = 2^t \cdot a_{k+1} - 2^t \cdot a_k = a_{2^t\cdot(k+1)} - a_{2^t\cdot k} = a_{2^t\cdot(k+1)} - a_{2^t\cdot(k+1)-1} + a_{2^t\cdot(k+1)-1} - a_{2^t\cdot(k+1)-2} + \cdots + a_{2^t\cdot k+1} - a_{2^t\cdot k} \geq d + d + \cdots + d = 2^t \cdot d$, pa je $a_{2^t\cdot(k+1)} - a_{2^t\cdot(k+1)-1} = a_{2^t\cdot(k+1)-1} - a_{2^t\cdot(k+1)-2} = \cdots = a_{2^t\cdot k+1} - a_{2^t\cdot k} = d$. Uzmimo sada t takvo da je $2^t > p$, pa sigurno imamo p uzastopnih članova niza koji se razlikuju za d. Međutim, kako je $p > a_1 = 2a_1 - a_1 = a_2 - a_1 \geq d$, to vrijedi da je $(p,d) = 1$ (jer je p prost), pa onda ti uzastopni članovi niza obrazuju potpun sistem ostataka po modulu p. Zbog toga je neki od tih članova djeljiv sa p, $q.e.d.$

b) 1. način:
Za svaki prirodan broj n, neka je $f(n)$ prirodan broj s takav da vrijedi $2^s \leq n < 2^{s+1}$ (tj. neka je $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$). Posmatrajmo sada niz zadat sa $a_n = np + 2^{f(n)}$. Očigledno je ovaj niz rastući. Također, zbog definicije broja $f(n)$, jasno je da vrijedi $f(2n) = f(n) + 1$. Zbog toga vrijedi $a_{2n} = 2np + 2^{f(2n)} = 2np + 2^{f(n)+1} = 2\left(np + 2^{f(n)}\right) = 2a_n$. Dakle, ovaj niz je „lijep“, a očigledno p ne dijeli nijedan član niza (jer bi onda vrijedilo da $p|2^{f(n)}$, što je nemoguće). Ovim smo dokazali tvrdnju zadatka.
2. način:

Definišimo niz sa $a_1 = p + 1$, te $a_{2n} = 2a_n, a_{2n+1} = a_{2n} + p$ za $n \geq 1$. Očigledno za ovaj niz vrijedi $a_{2n} = 2a_n$, za sve prirodne brojeve n. Dokažimo da je rastući.

Dokazat ćemo i jaču tvrdnju, tj. da je $a_{i+1} - a_i \geq p$ (ovako smo konstruisali niz upravo zbog dokaza pod a)) Pretpostavimo suprotno. Neka je i najmanji indeks takav da je $a_{i+1} - a_i < p$. Zbog definicije niza jasno je da i mora biti neparan, neka je $i = 2k - 1$. Zbog izbora broja i vrijedi $a_k - a_{k-1} \geq p$, pa je $2p \leq 2a_k - 2a_{k-1} = a_{2k} - a_{2k-2} = a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-1} - a_{2k-2} = a_{i+1} - a_i + p < p + p = 2p$, što je kontradikcija. Lagano matematičkom indukcijom dokazujemo da ne postoji član niza koji je djeljiv sa p (jer iz $p \nmid a_n$ slijedi $p \nmid a_{2n}$, a iz $p \nmid a_{2n}$ slijedi $p \nmid a_{2n+1}$). Ovim je dokaz završen.

4. Odrediti najveći prirodan broj n koji se ne može napisati kao zbir tri broja veća od 1 koji su po parovima relativno prosti.

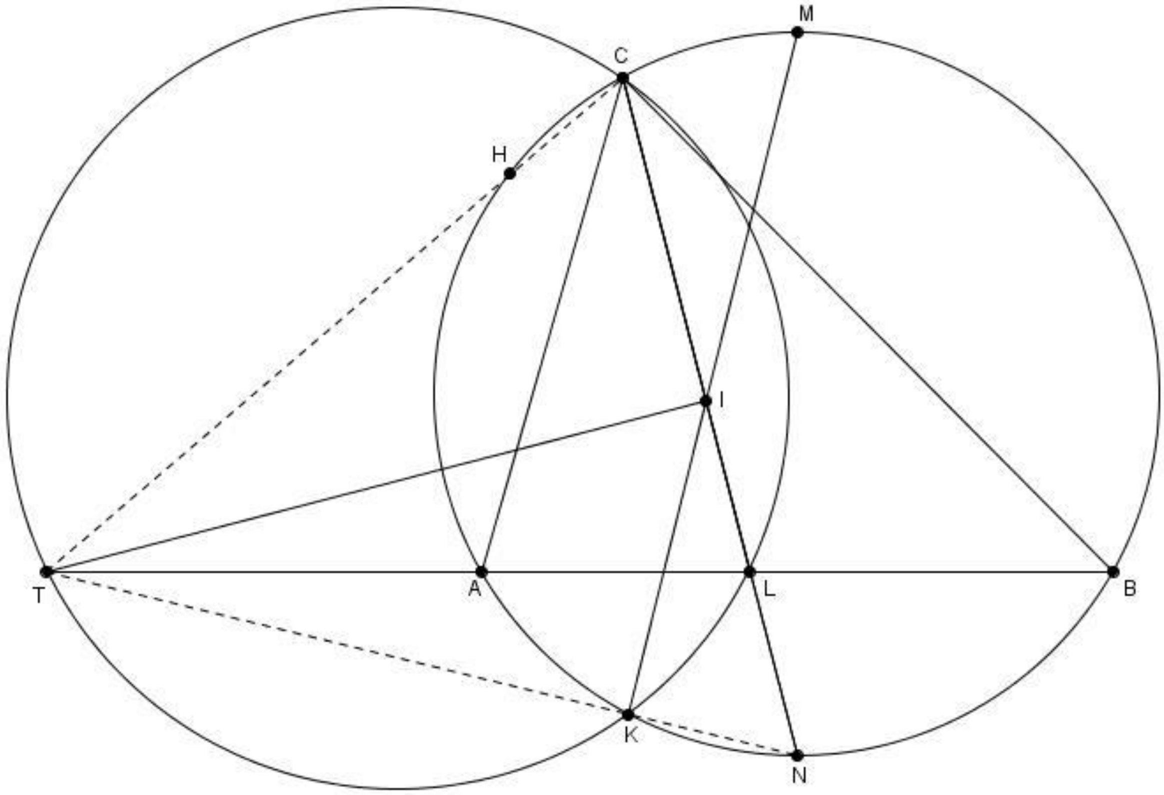
Rješenje:

To je broj 17. Dokažimo da 17 ne možemo napisati kao zbir 3 broja koji su po parovima relativno prosti. Pretpostavimo suprotno. Ta tri broja moraju biti neparni, te mora među njima biti broj 3, jer bi inače najmanji mogući zbir bio $5 + 7 + 9 = 21 > 17$. Zato među njima ne smije biti broj 9. Najmanji mogući zbir je $3 + 5 + 7 = 15 < 17$, a sljedeći najmanji mogući je $3 + 5 + 11 = 19 > 17$. Zbog toga je nemoguće napisati broj 17 u traženom obliku.

Dokažimo sada da je moguće svaki broj veći od 17 napisati u traženom obliku. Dokažimo prvo za parne brojeve. Vrijedi $6k + 4 = (6k - 1) + 2 + 3, 6k + 2 = (6k - 5) + 3 + 4, 6k = (6k - 5) + 2 + 3$ (vidimo da čak sve parne brojeve veće od 8 možemo napisati u datom obliku). Mogli smo i drugačije dokazati da se svi parni brojevi mogu napisati , naime $4k + 2 = (2k - 1) + (2k + 1) + 2$, a $4k = (2k - 3) + (2k + 1) + 2$.

Dokažimo sada tvrdnju za neparne brojeve. Tu ćemo razdvojiti slučajeve po modulu 12. Naime, $12k + s = (6k + 1) + (6k - 1) + s$, gdje $s \in \{3,9\}$. Dalje, $12k + 7 = (6k - 1) + (6k + 5) + 3, 12k + 1 = (6k - 7) + (6k - 1) + 9, 12k + 5 = (6k - 5) + (6k + 1) + 9, 12k + 11 = (6k + 1) + (6k + 7) + 3$. Lako se provjerava da su u svim slučajevima brojevi po parovima relativno prosti. Primijetimo još da su za $k >= 1$ svi sabirci veći od 1 osim u rastavljanju $12k + 5$ i $12k + 1$ za $k = 1$, ali to su onda redom brojevi 17 i 13, koji su manji od 17.

5. Neka je k kružnica opisana oko oštrouglog trougla ABC $(AC < BC)$. Dalje, neka je CL simetrala ugla $\measuredangle ACB$ $(L \in AB)$, M sredina luka AB kružnice k na kojem se nalazi i tačka C, te I centar upisane kružnice trougla ABC. Kružnica k siječe po drugi put pravu MI u K i kružnicu sa prečnikom CI u H. Ako kružnica opisana oko trougla CLK siječe AB ponovo u T, dokazati da su tačke T, H, C kolinearne.



Rješenje:

Neka simetrala ugla $\measuredangle ACB$ siječe k u N. Tada je $\measuredangle NKC + \measuredangle CKT = \measuredangle NAC + \measuredangle CLT = \measuredangle NAC + \measuredangle ABC + \measuredangle LCB = \measuredangle NAC + \measuredangle ANC + \measuredangle ACN = 180°$, pa su tačke T, K, N kolinearne. Poznato je (i lako dobijamo) da je $NA = NB = NI$. Kako je $\measuredangle NAB = \measuredangle NCB = \measuredangle NCA$, to su trouglovi NAL i NAC slični, pa je $NA^2 = NL \cdot NC$. Iz potencije tačke N na kružnicu opisanu oko četverougla $TKLC$ je $NL \cdot NC = NK \cdot NT$. Sada imamo $NI^2 = NA^2 = NL \cdot NC = NK \cdot NT$, pa su trouglovi NKI i NTI slični, odakle je $\measuredangle TIN = \measuredangle IKN = 90°$ (očigledno je MN prečnik kružnice k). Primijetimo da se kružnica k_1 opisana oko trougla ABI (čiji je centar N) i kružnica k_2 sa prečnikom CI dodiruju u tački I (jer su centri i tačka I na istoj pravoj). Zato je TI zajednička tangenta tih kružnica. Posmatrajmo sada kružnice k, k_1, k_2. Prave AB, TI i CH su redom radikalne osi kružnica k i k_1, k_1 i k_2, k_2 i k, pa se sijeku u jednoj tački, odakle slijedi da su tačke T, H, C kolinearne, $q.e.d.$

6. Naći sve funkcije $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ koje zadovoljavaju uvjet

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

za sve $x, y \in \mathbb{Z}$.

Rješenje 1:

Označimo se $(*)$ početnu jednadžbu. Ako stavimo u (*) $x = 0$ i $y = f(0)$, imamo da za $z = -f(f(0))$ vrijedi $f(z) = -1$. Ako u $(*)$ ubacimo $y = z$ dobivamo da je

$$f(x+1) = f\big(f(x)\big) \qquad (1)$$

za sve $x \in \mathbb{Z}$. Tako da sada $(*)$ postaje

$$f\big(x - f(y)\big) = f(x+1) - f(y) - 1. \quad (2)$$

Iz (2), za $y = x$ dobivamo

$$f(x+1) - f(x) = f\big(x - f(x)\big) + 1 = f(f\big(x - 1 - f(x)\big) + 1.$$

Kako je iz (2) $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - f(x) - 1 = -1$, to dobivamo

$$f(x+1) = f(x) + A,$$

gdje je $A = f(-1) + 1$ neka konstanta.

Sada lako matematičkom indukcijom u oba smjera dobivamo da je $f(x) = Ax + B$, gdje je $B = f(0)$. Ako zamjenimo ovo u (1) dobivamo

$$Ax + (A + B) = A^2x + (AB + B)$$

za sve $x \in \mathbb{Z}$. Ako primjenimo to na $x = 0$ i $x = 1$ dobivamo redom $A + B = AB + B$ i $A^2 = A$. Druga jednadžba nam daje $A = 0$ ili $A = 1$. U slučaju $A = 1$, iz prve jednadžbe dobivamo $B = 1$, što nam daje rješenje $f(x) = x + 1$. Ako je $A = 0$, slijedi da je rješenje $f(x) = -1$. Dakle, jedina rješenja su $f(x) = x + 1$ i $f(x) = -1$, što lako provjeravamo.

Rješenje 2:

Kao i u prvom rješenju dobivamo jednakosti (1) i (2). Ako je f injektivna funkcija, iz (1) slijedi da je $f(x) = x + 1$. Pretpostavimo suprotno, da postoje a i b $(a > b)$ takvi da je $f(a) = f(b)$. Koristeći (1), lako matematičkom indukcijom dobivamo da je $f(a + n) = f(b + n)$ za $n \in \mathbb{N}$, pa je niz $c_n = f(b + n)$ periodičan, a samim tim i ograničen, pa postoje cijeli brojevi $m = \min c_n$ $(n \geq 0)$ i $M = \max c_n$ $(n \geq 0)$. Uzmimo y takvo da je $f(y) = m$ i cijeli broj $x \geq a$ takav da je $f\big(x - f(y)\big) = m$. Zbog definicije broja m iz (2) imamo da vrijedi

$$m \leq f(x+1) = f\big(x - f(y)\big) + f(y) + 1 = 2m + 1,$$

pa je $m \geq -1$. Slično dobivamo da je $M \leq -1$, pa zbog $m \leq M$ vrijedi $f(t) = -1$ za sve $t \geq a$.

Konačno, za dati cijeli broj y, možemo naći x takvo da je $x + 1 \geq a$ i $x - f(y) \geq a$. Tada iz (2) dobivamo da je

$$f(y) = f(x+1) - f\big(x - f(y)\big) - 1 = (-1) - (-1) - 1 = -1.$$

Ovim je zadatak riješen.

ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА БМО2016

1. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ таков што $\overline{AB}=\overline{AD}$. Точките M и N припаѓаат на страните CD и BC, соодветно и важи $\overline{DM}+\overline{BN}=\overline{MN}$. Докажи дека центарот на кружницата опишана околу триаголникот AMN припаѓа на отсечката AC.

Решение. На продолжението на отсечката CD преку точката D земаме точка K така што $\overline{DK}=\overline{BN}$. Од $\overline{KD}=\overline{BN}$, $\overline{AB}=\overline{AD}$ и $\measuredangle KDA=\measuredangle NBA$ следува дека триаголниците KDA и NBA се складни. Според тоа,

$$\overline{KA}=\overline{NA},\ \overline{KM}=\overline{DK}+\overline{DM}=\overline{BN}+\overline{DM}=\overline{NM},$$

па затоа триаголниците KMA и NMA се складни. Оттука $\measuredangle MAN=\frac{1}{2}\measuredangle DAB$. Нека O и C се пресечните точки на отсечката AC со кружницата опишана околу триаголникот MNC. Од

$$\measuredangle MCO=\measuredangle DCA=\measuredangle BCA=\measuredangle NCO,$$

следува $\overline{MO}=\overline{NO}$. Освен тоа,

$$\measuredangle MON=180^\circ-\measuredangle MCN=180^\circ-\measuredangle DCB=\measuredangle DAB=2\measuredangle MAN.$$

Од ова равенство и $\overline{MO}=\overline{NO}$ следува дека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот AMN.

2. Броевите 1117 и 1171 се прости, а броевите 1711 и 7111 се сложени ($29|1711$ и $13|7111$). Докажи дека за секој $n\geq 2$ меѓу броевите запишани со помош на n единици и една седумка има барем еден сложен број.

Решение. Ако $n=2m$, тогаш

$$9\cdot 7\underbrace{11...1}_{2m}=63\underbrace{99...9}_{2m}=8\underbrace{00...0}_{m}{}^2-1=8\underbrace{00...0}_{m-1}1\cdot 7\underbrace{99...9}_{m}=9\cdot\underbrace{88...8}_{m-1}9\cdot 7\underbrace{99...9}_{m},$$

т.е.

$$7\underbrace{11...1}_{2m}=\underbrace{88...8}_{m-1}9\cdot 7\underbrace{99...9}_{m},$$

што значи дека $7\underbrace{11...1}_{2m}$ е сложен број.

Ако $n=6m+5$, тогаш збирот на цифрите на дадениот број е еднаков на $6m+5+7=6(m+2)$, па затоа тој е делив со 3.

Ако $n=6m+3$, тогаш бидејќи броевите 7111 и 111111 се деливи со 13, бројот 7111...1 е делив со 13.

Ако $n=6m+1$ тогаш бидејќи броевите 11171111 и 111111 се деливи со 7, бројот 111711...1 е делив со 7.

3. Нека m и n се заемно прости природни броеви. Во секое поле на бесконечна шаховска табла запишан е по еден реален број така што важи: збирот на броевие во секој правоаголник $m\times n$ или $n\times m$ е еднаков на нула. Докажи дека барем два од запишаните броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Броевите m и n се заемно прости, па затоа при делење на броевите $m,2m,3m,...,(n-1)m$ со бројот n се добиваат остатоците $1,2,...,n-1$. Според тоа, за некој $k\in\{1,2,...,n-1\}$ бројот $km+1$ е делив со n, па затоа и бројот $mn-(km+1)$ е делив со n, т.е. $mn-1=km+nl$, каде l е природем број.

На шаховската табла да воведеме правоаголен координатен систем така што точките со целобројни координати се темиња на полињата на таблата. Квадратот $ABCD$ со темиња $A(0,0), B(mn,0), C(mn,mn), D(0,mn)$, може да се разбие на правоаголници со димензии $m\times n$ или $n\times m$. Затоа збирот на броевите кои се запишани внатре во квадратот $ABCD$ е еднаков на нула. Воведуваме означи $B_1(mn-1,0), B_2(km,0), C_1(mn-1,mn), C_2(km,mn)$. Тогаш секој од правоаголниците AB_2C_2D и $B_2B_1C_1C_2$ може да се разбие на правоаголници со димензии $m\times n$ или $n\times m$. ЗБирот на сите тие броеви кои се запишани внатре во правоаголникот AB_1C_1D е еднаков на нула, што значи дека и збирот на броевите кои се запишани внатре во правоаголникот B_1BCC_1 е еднаков на нула. Аналогно се докажува дека исто својство има и правоаголникот FEE_1F_1 каде

$$F(mn,1),\ F_1(mn-1,1),\ E(mn,mn+1),\ E_1(mn-1,mn+1).$$

Според тоа, во полињата BFF_1B_1 и CEE_1C_1 се запишани исти броеви.

4. Докажи го неравенството

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8n}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{3n-1} < \frac{1}{\sqrt[3]{7n}}.$$

Решение. Прво со математичка индукција ќе го докажеме левото неравенство. За $n=1$ имаме $\frac{1}{\sqrt[3]{8\cdot 1}} \le \frac{1}{2}$, т.е. неравенството важи. Нека левото неравенство важи за n. Тогаш од индуктивната претпоставка за $n+1$ добиваме

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{n+1}} = \frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{3n-1}\cdot\frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}},$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{2\sqrt[3]{n}}{2\sqrt[3]{n+1}} \le \frac{3n+1}{3n+2}$. Последното неравенство важи, бидејќи по дигањето на трет степен и средувањето тоа се сведува на очигледното неравенство $0 \le 2n+1$.

За да го докажеме десното неравенство, со математичка индукција ќе докажеме појако неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{3n-1} \le \frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}.$$

За $n=1$ имаме $\frac{1}{2} \le \frac{1}{\sqrt[3]{7\cdot 1+1}}$, т.е. неравенствот важи. Нека неравенството важи за n. Тогаш од индуктивната претпоставка за $n+1$ добиваме

$$\frac{1}{\sqrt[3]{7n+8}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7n+1}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}} \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{3n-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}},$$

па затоа доволно е да докажеме дека $\frac{\sqrt[3]{7n+1}}{\sqrt[3]{7n+8}} \ge \frac{3n+1}{3n+2}$. Последното неравенство важи, бидејќи по дигањето на трет степен и средувањето тоа се сведува на очигледното неравенство $0 \le 27n^2 + 13n$.

22. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 13. и 14. мај 2017.

1. Кружница уписана у троугао ABC, са центром у тачки I, додирује странице AB и AC у тачкама P и Q, редом. Праве BI и CI секу праву PQ у тачкама K и L, редом. Доказати да кружница описана око троугла ILK додирује кружницу уписану у троугао ABC ако и само ако је $AB + AC = 3BC$.

2. Нека је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да, за све природне бројеве m и n, број $f(m) + f(n) - mn$ је различит од нуле и дели $mf(m) + nf(n)$.

3. Наћи све реалне бројеве c за које постоји строго растући низ $a_1, a_2, \ldots$ природних бројева такав да је

$$\frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_n} = c$$

за све природне бројеве n.

4. Нека је n природан број. На конференцији се налази $6n + 4$ математичара. Одржава се $2n + 1$ састанака. На сваком састанку математичари седе за једним округлим столом са 4 места и n округлих столова са 6 места. Растојања између свака два суседна места за једним столом су једнака. Кажемо да су два математичара у *специјалној* позицији ако седе за истим столом и ако су суседи или су на дијаметрално супротним позицијама. За које природне бројеве n је могуће да, након што се заврше сви састанци, никоја два математичара нису била у специјалној позицији више од једном?

5. Наћи најмању реалну константу C такву да је за било које позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 (не нужно различите) могуће одабрати различите индексе i, j, k и l тако да важи

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leqslant C.$$

6. Нека је ABC оштроугли троугао. Тачка M је произвољна тачка на страници AB, а N је средиште странице AC. Нека су P и Q подножја нормала из темена A на праве MC и MN, редом. Доказати да центар кружнице описане око троугла PQN лежи на фиксној правој док се M креће по страници AB.

1. Во триаголник ABC впишаната кружница со центар I ги допира страните AB и AC во точките P и Q, соодветно. Правите BI и CI ја сечат правата PQ во точките K и L, соодветно. Докажи дека опишаната кружница околу триаголникот ILK ја допира впишаната кружница во триаголникот ABC ако и само ако $\overline{AB}+\overline{AC}=3\overline{BC}$.

Решение. *Прв начин*. Означуваме:

$$\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=b, \measuredangle BAC=\sim, \measuredangle CBA=\ \ , \measuredangle ACB=\text{¥} \text{ и } \overline{IP}=\overline{IQ}=r .$$

Нека $CK\cap BL=\{D\}$, направи цртеж. Од

$$\measuredangle BKL=\measuredangle BKP=180^\circ-\measuredangle BPK-\measuredangle KBP=\measuredangle APK-\measuredangle KBP=90^\circ-\frac{\sim}{2}-\frac{\ }{2},$$

т.е. $\measuredangle IKL=\frac{\text{¥}}{2}$ и $\measuredangle IKQ+\measuredangle QCI=180^\circ-\frac{\text{¥}}{2}+\frac{\text{¥}}{2}=180^\circ$, следува дека четириаголникот $IKQC$ е тетивен, при што $\measuredangle IKC=\measuredangle IQC=90^\circ$. Аналогно се добива дека $\measuredangle ILB=90^\circ$. Сега, $\measuredangle BKC=\measuredangle BLC=90^\circ$, што значи дека четириаголникот $CBLK$ е тетивен, а како $\measuredangle ILD=\measuredangle DKI=90^\circ$ заклучуваме дека и четириаолникот $ILDK$ ететивен дијаметрите на кружниците опишани околу четириаголниците $CBLK$ и $ILDK$ се отсечките BC и ID, соодветно). Од синусната теорема за $\triangle LDK$ следува $\overline{KL}=\overline{ID}\sin\measuredangle LDK=\overline{ID}\cos\measuredangle LCK$. Слично, од $\triangle CLK$ следува $\overline{LK}=a\sin\measuredangle LCK$, па затоа $\overline{ID}=a\operatorname{tg}\measuredangle LCK$. Од $\triangle CBK$ добиваме $\measuredangle ICK=90^\circ-\frac{\text{¥}}{2}-\frac{\ }{2}=\frac{\sim}{2}$, т.е. $\measuredangle LCK=\frac{\sim}{2}$, што значи дека $\overline{ID}=a\operatorname{tg}\frac{\sim}{2}$. Исто така, имаме дека $r=\overline{AQ}\operatorname{tg}\frac{\sim}{2}=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\sim}{2}$. Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID}=r$, што значи ако и само ако $a\operatorname{tg}\frac{\sim}{2}=\frac{b+c-a}{2}\operatorname{tg}\frac{\sim}{2}$, т.е. ако и само ако $b+c=3a$ што и требаше да се докаже.

Втор начин. Ќе ги користиме истите ознаки како и при првиот начин на решавање, при што се s ќе го означиме полупериметарот на $\triangle ABC$. Слично како во првиот начин на решавање докажуваме $\measuredangle IKC=\measuredangle ILB=90^\circ$, како и тоа дека четириаголникот $DKIL$ е тетивен. Нека впишаната кружница во $\triangle ABC$ ја допира страната BC во точката R. Да забележиме дека I е ортоцентар на $\triangle CBD$, па затоа $DI\perp BC$, т.е. точките D,I,R се колинеарни. Кружницата KIL ја допира кружницата ABC ако и само ако $\overline{ID}=r$, т.е. $\overline{RD}=2r$. Од $\measuredangle KDI=\measuredangle KLI=\measuredangle KBC=\measuredangle IBR$ следува дека правоаголните триаголници CRD и IRB се слични, па затоа $\frac{\overline{CR}}{\overline{RD}}=\frac{\overline{IR}}{\overline{BR}}$, т.е.

$$\overline{DR}\cdot r=\overline{DR}\cdot\overline{IR}=\overline{BR}\cdot\overline{CR}=(s-b)(s-c),$$

па затоа $\overline{RD}=2r$ ако и само ако $(s-b)(s-c)=2r^2=\frac{2P^2}{s^2}=\frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$, односно ако и само ако $b+c=3a$, што и требаше да се докаже.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви m и n целиот број $f(m)+f(n)-mn$ е различен од 0 и е делител на $mf(m)+nf(n)$.

Решение. За $m=n=1$ добиваме $2f(1)-1\,|\,2f(1)$, од каде следува дека важи $2f(1)-1\,|\,2f(1)-(2f(1)-1)=1$, па затоа $f(1)=1$. Нека $p\geq 7$ е прост број. Ако земеме $m=p$ и $n=1$ добиваме $f(p)-p+1\,|\,pf(p)+1$, па затоа

$$f(p)-p+1\,|\,pf(p)+1-p(f(p)-p+1)=p^2-p+1. \qquad (1)$$

Ако $f(p)-p+1=p^2-p+1$, тогаш $f(p)=p^2$. Сега да претпоставиме дека $f(p)-p+1\neq p^2-p+1$. Бидејќи p^2-p+1 е непарен број, од (1) следува $3(f(p)-p+1)\leq p^2-p+1$, односно

$$f(p)\leq \tfrac{1}{3}(p^2+2p-2)/ \qquad (2)$$

За $m=n=p$ од условот на задачата следува $2f(p)-p^2\,|\,2pf(p)$, па затоа

$$2f(p)-p^2\,|\,2pf(p)-p(2f(p)-p^2)=p^3. \qquad (3)$$

Од (2) и фактот дека $f(p)\geq 1$, бидејќи $p\geq 7$ следува

$$-p^2<2f(p)-p^2\leq \tfrac{2}{3}(p^2+2p-2)-p^2<-p.$$

Последното шротивречи на (3). Според тоа, $f(p)=p^2$ за секој прост број $p\geq 7$.
Нека сега n е произволен природен број и p е доволно голем прост број. Земаме $m=p$ и добиваме

$$f(p)+f(n)-pn\,|\,pf(p)+nf(n)-n(f(p)+f(n)-pn)=pf(p)-nf(p)+pn^2.$$

Бидејќи $f(p)=p^2$, добиваме $p^2+f(n)-pn\,|\,p(p^2-pn+n^2)$. Бидејќи p е доволно голем прост број важи $\mathrm{NZD}(p,p^2+f(n)-pn)=1$, па затоа важи $p^2+f(n)-pn\,|\,p^2-pn+n^2$. Сега добиваме

$$p^2+f(n)-pn\,|\,p^2-pn+n^2-(p^2+f(n)-pn)=n^2-f(n),$$

за секој доволно голем прост број p. Последното е можно само ако $n^2-f(n)=0$, односно $f(n)=n^2$ за секој природен број n. Јасно, оваа функција го задоволува условоте на задачата, бидејќи

$$f(m)+f(n)-mn=m^2-mn+n^2\,|\,m^3+n^3=mf(m)+nf(n).$$

Конечно, функцијата $f(n)=n^2$ е единствебо решение на задачата.

3. Определи ги сите реални броеви c за кои постои строго растечка низа $\{a_n\}$ природни броеви така $\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n}=c$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Јасно, $\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n}=c$ е позитивен рационален број. ќе докажеме дека c мора да биде природен број. Нека $c=\frac{p}{q}$ каде $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Значи, $pa_n=q(a_{2n-1}+a_{2n})$, од каде што следува $q\,|\,a_n$ за секо природен број n. Нека $b_n=\frac{a_n}{q}$, $n\in\mathbb{N}$. Забележуваме дека и за низата $\{b_n\}$ е исполент условот $\frac{b_{2n-n}+b_{2n}}{b_n}=c$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Според тоа, $q\,|\,b_n$, односно $q^2\,|\,a_n$ за секој природен број n. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $q^k\,|\,a_n$ за секој природен број k, од каде што следува $q=1$, па затоа c е природен број. Бидејќи низата е строго растечка важи $c=\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n}>\frac{2a_n}{a_n}=2$.

Ќе докажеме дека за $c=3$ ваква низа не постои. Ја разгледуваме низата $r_n=a_{n+1}-a_n$. Имаме

$$\begin{aligned}3r_n &= 3a_{n+1} - 3a_n = a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= a_{2n} - a_{2n-1} + 2(a_{2n+1} - a_{2n}) + a_{2n+2} - a_{2n+1} \\ &= r_{2n-1} + 2r_{2n} + r_{2n+1}.\end{aligned}$$

Јасно, барем еден од броевите $r_{2n-1}, r_{2n}, r_{2n+1}$ е помал од r_n. Значи, постои строго опаѓачка подниза на низата r_n, а бидејќи тоа е низа природни броев, добиваме противречност.

Сега ќе докажеме дека за секој природен број $c > 3$ постои низа која го задоволува условот на задачата.

За $c = 4$ низата $a_n = 2n - 1$ очигледно го задовлува условот на задчата.

За $c > 4$ земаме $a_1 = 1$ и нека $a_{2n-1} = \left\lfloor \frac{ca_n - 1}{2} \right\rfloor$ и $a_{2n} = \left\lfloor \frac{ca_n}{2} \right\rfloor + 1$. Лесно се проверува дека вака дефинираната низа ги задоволува условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

4. Нека n е природен број. Не една конференција се наоѓаат $6n + 4$ математичари, Се одржуваат $2n + 1$ состаноци. На секој состанок математичарите седат околу една тркалезна маса со 4 места и n тркалзени маси со п 6 места. Растојанието меѓу секои две соседни столици на една маса се еднакви. Ќе велиме дека двајца математичари се во специјална положба ако седат на иста маса и ако се соседи или ако седат на дијаметрално спротивни столици. За кои природни броеви n е можно по завршувањето на сите состаноци никои двајца математичари да не биле во специјална положба повеќе од еднаш?

Решение. *Одговор*: за секој природен број n.

Лема. За секој придоедн број k може да се организира турнир на кој ќе учествуваат $2k + 1$ тимови, кој има $2k + 1$ кола и во кој секои две екипи ќе играат точно еднаш една против друга.

Доказ. Земаме правилен $(2k + 1)$ – аголник $A_1 A_2 ... A_{2k+1}$. Нека тимовите ги претставуваат темињата, а отсечките кои ги поврзуваат нека се меѓусебните натпревари на тимовите. Турнирот го организираме на следновначин: ако во едно коло играат тимовите A_i и A_j ($i \neq j$) тогаш во тоа коло играат и сите тимови претставени со темињата A_k и A_l така што важи $A_i A_j \| A_k A_l$ (забележуваме дека имаме $k - 1$ вакви отсечки кои се паралелни со $A_i A_j$, а се различни од неа и дека точно едно теме не е крајна точка на ниту една од овие отсечки (со тоа теме е претставен тимот кој е слободен во тоа коло). Бидејќи од секое теме излегуваат $2k$ различни отсечки ќе имаме точно $2k$ кола во кои ќе игра тмот претставен со тоа еме и едно коло во кое овој тим ќе биде слбоден, што вкупно дава $2k + 1$ кола. Со ова доказот на лемата е завршен. ■

Сега ќе дадеме конструкција, т.е. ќе покажеме како математичарите може да се распоредат на масите на сите овие состаноци за секој природен број n.

Множеството од $6n + 4$ математичари ќе го поделиме на $2n + 2$ дисјунктни подмножества, од кои $2n + 1$ се триелементни и едно множество во кое се наоѓа само еден математичар (да го означиме со A). Според лемата, на $2n + 1$ состанови, на секоја маса која има 6 места, можеме да ги ставиме математичарите од две од воочените тројки, така што било кои две од воочените тројки на иста маса седат точно еднаш. Притоа математичарите од овие тројки околу масата ги распоредуваме наизменично, што значи дека никои два математиари од иста тројка нема да бидат соседи, а нема да седат и на дијаметрално спротивни столици. На масата која има 4 столициги на произволен начин ги распоредуваме трите математиари од тројката која преостанала, т.е. чии членови не седат на масите со 6 столици и математичарот A, кој на секој состанок седи на масата со 4 столици. Јасно, A со секој од преостанатите математиари точно еднаш ќе биде во специјална положба. Двајца математичари од секоја тројка во специјална положба ќе бидат само на масата со 4 столици, а математичарите од различни тројки само кога нивните тројки ќе се состанат на маса со 6 столици.

5. Определи ја најмалата можна константа C таква што за било кои позитивни реални броеви a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (не задолжително различни) можи да се изберат различни индекси i, j, k, l такви што

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \le C . \tag{1}$$

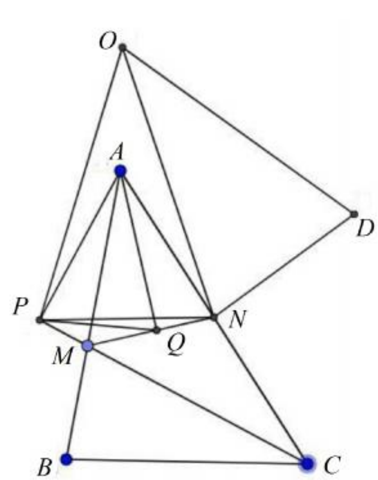
Решение. *Одговор:* Најмалата можна константа C е $\frac{1}{2}$.

Прво ќе докажеме дека $C \le \frac{1}{2}$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Да ги разгледаме дропките $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5}$, во овој редослед, секоја од кои е во интервалот $(0,1]$. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку три од овие дропки припаѓаат интервалот $(0, \frac{1}{2}]$ или на интервалот $(\frac{1}{2}, 1]$. Значи, постојат две соседни дропки кои припаѓаа на интервал со должина $\frac{1}{2}$. Бидејќи индексите кои учествуваат во секои две соседни дропки се различни, тоа се бараните индекси i, j, k, l, па затоа $C \le \frac{1}{2}$.

Сега ќе покажеме дека C не може да е помала од $\frac{1}{2}$. Да ги разгледаме броевите $1, 2, 2, 2, n$ каде n е голем реален број. Дропките кои ги формираат некои два од овие броеви во растечки редослед се $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{1}$. Бидејќи индексите i, j, k, l треба да се различни, дропките $\frac{1}{n}$ и $\frac{2}{n}$ не може истовремено да се избрани. Значи, најмалата разлика која може да се добие на левата страна на (1) е $\frac{1}{2} - \frac{2}{n}$. Јасно, кога n се стреми кон бесконечност, оваа вредност се приближува кон 2, па затоа C не може да е помала од $\frac{1}{2}$.

Од претходните разгледувања заклучуваме дека $C = \frac{1}{2}$ е најмалата можна константа.

6. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека M е произволна точка од страната AB, а N е средината на AC. Нека P и Q се подножјата на нормалите повлечени од темето A на правите MC и MN, соодветно. Докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQN припаѓа на фиксна права додека M се менува на страната AB.



Решение. Нека $\measuredangle BAC = \sim$ и $\measuredangle ACM = x$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQN.

Нека точката D лежи на спротивната страна од точката B во однос на правата AC и е таква што $\measuredangle AND = 2\sim$ и

$\overline{ND} = \frac{\overline{AC}}{2}$. Триаголникот APC е правоаголен, па затоа $\overline{NP} = \overline{NC}$, од што следува $\measuredangle ANP = 2x$. Понатаму, важи

$$\begin{aligned} \measuredangle PQN &= 180^\circ - \measuredangle PQM = 180^\circ - \measuredangle PAM \\ &= 90^\circ + \measuredangle PMA = 90^\circ + \measuredangle BMC \\ &= 90^\circ + \sim + x. \end{aligned}$$

Според тоа, $\measuredangle PON = 180^\circ - 2\sim - 2x$, па затоа добиваме

$$\begin{aligned} &\measuredangle ONP = \sim + x, \\ &\measuredangle ONA = \measuredangle ONP - \measuredangle ANP = \sim - x, \\ &\measuredangle OND = \sim + x. \end{aligned}$$

Понатаму, од

$$\overline{NP} = \overline{ND}, \overline{NO} = \overline{NO} \text{ и } \measuredangle ONP = \measuredangle OND$$

следува $\triangle OND \cong \triangle ONP$. Од ова следува

$\overline{OP} = \overline{OD} = \overline{ON}$, што значи дека O припаѓа на симетралата на отсечката ND, додека M се менува на страната AB.

ИЗБОРНО ЗА БМО2017

1. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот
$$1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+...+n^{\varphi(n)}$$
е заемно прост со бројот n. ($\varphi(n)$ е Ојлеровата функција.)

Решение. Нека p пост делител на бројот n. Нека природниот број a не е делив со p. Од теоремата на Ојлер следува $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\operatorname{mod} p)$. Бидејќи бројот на природните броеви помали или еднакви на n кои не се деливи со p е еднаков на $n-\frac{n}{p}$, добиваме
$$1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+...+n^{\varphi(n)}\equiv n-\frac{n}{p}\equiv -\frac{n}{p}(\operatorname{mod} p).$$
Според тоа, p не е делител на $1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+...+n^{\varphi(n)}$ ако и само ако p не е делител на $\frac{n}{p}$, што значи ако и само ако p^2 не е делител на n. Последното значи дека n и $1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+...+n^{\varphi(n)}$ се заемно прости ако и само ако n е производ на различни прости броеви.

2. Нека P е точка во внатрешноста на остроаголниот триаголник ABC таква што $\measuredangle BAP=\measuredangle ACP$ и $\measuredangle CAP=\measuredangle ABP$. Нека M и N се центрите на впишаните кружници во триаголниците ABP и ACP, соодветно. Ако R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот AMN, докажи дека важи
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AP}}.$$

Решение. Нека O е центарот на опишаната круница околу триаголникот AMN. Тогаш $\measuredangle MON=2\measuredangle MAN=\measuredangle BAC$. Бидејќи PM и PN се соодветно симетрали на $\measuredangle APB$ и $\measuredangle APC$, важи
$$\measuredangle MPN=\measuredangle APB=180^\circ-\measuredangle ABP-\measuredangle BPA=180^\circ-\measuredangle BAC,$$
што значи дека четириаголникот $OPMN$ е тетивен. Од $\overline{OM}=\overline{ON}$ следува дека PO е симетрала на $\measuredangle MPN$, па оттука следува дека точката O лежи на отсечката PA. Исто така, бидејќи M и N се центри на впишаните кружници на сличните триаголници APB и CPA, важи $\overline{MP}:\overline{NP}=\overline{AP}:\overline{BP}$. Бидејќи $\measuredangle MPN=\measuredangle APB$, заклучуваме дека триаголниците NPM, APB и CPA се слични, од каде што следува $\measuredangle BAP=\measuredangle MNP=\measuredangle MOP$, па затоа важи $MO\,||\,AB$ и $NO\,||\,CA$. Со E да ја означиме пресечната точка на правите PM и AB, а со r радиусот на впишаната кружница во триаголникот ABP. Сега
$$\frac{\overline{AP}}{R}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{EP}}{\overline{EM}}=\frac{P_{\triangle APB}}{P_{\triangle AMB}}=\frac{r(\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{AB})}{r\overline{AB}}=1+\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}=1+\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}},$$
од каде добиваме $\frac{1}{R}=\frac{1}{\overline{AB}}+\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AP}}$.

3. Даден е правилен $n-$аголник. Повлечени се некои дијагонали на $n-$аголникот, така што никои две не се сечат во внатрешна точка и тие го делат $n-$аголникот на триаголници. Притоа од секое теме на $n-$аголникот излегуваат парен број дијагонали. Определи ги сите природни броеви $n\geq 4$ за кои ова е можно.

Решение. *Одговор*. Сите природни броеви n деливи со 3.

Тврдењето ќе го докажеме за сите конвексни $n-$аголници.

Прво ќе докажеме дека за $n=3k$ постои конфигурација. Нека $A_1, A_2, ..., A_{3k}$ се темињата на $n-$аголникот. Го повтзуваме A_1 со A_{3i} и со A_{3i+2} и ги поврзуваме A_{3i} и A_{3i+2} за секој $i=1,2,...,k-1$.

Нека претпоставиме дека многуаголникот е поделен со дијагонали на саканиот начин. Тогаш внатрешностите на добиените триаголници може да се обојат со две бои, сина и црвена, така што секои два триаголници кои имаат заедничка страна се обоени во различни бои. Ова се постигнува така што многуаголникот на почетокот се бои во една боја, а потоа се конструираат дијагоналите една по друга и по секоја конструкција на нова дијагонала, сите обоени површини од една страна на дијагоналата се пребојуваат во друга боја. Очигледно е дека секои два триаголника, кои имаат дијагонала како заедничка страна, се обоени со различни бои. Забележуваме, дека заради условот на задачата дека од секое теме излегуваат парен број дијагонали, сите триаголници кои имаат страна која се совпаѓа со страна на многуаголникот се обоени со иста боја. Без ограничување на општоста нека тоа е сината боја. Ако s е бројот на сините триаголници, а c е бројот на црвените триаголници, тогаш $n+3c=3p$, бидејќи секоја дијагонала е страна на еден син и еден црвен триаголник, а секоја страна на многуаголникот е страна само на еден син триаголник. Затоа n мора да е делив со 3.

4. а) Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што не постои рационален број $\frac{a}{b}$ таков што a и b се природни броеви за кои важи

$$0<b\le\sqrt{n} \text{ и } \sqrt{n}\le\tfrac{a}{b}\le\sqrt{n+1}.$$

б) Докажи дека за секој природен број n постои рационален број $\frac{a}{b}$ таков што a и b се природни броеви за кои важи

$$0<b\le\sqrt{n}+1 \text{ и } \sqrt{n}\le\tfrac{a}{b}\le\sqrt{n+1}.$$

Решение. а) Нека $n=k^2-2$, каде k е природен број поголем или еднаков на 2. Нека претпоставиме дека постојат природни броеви a и b такви што се исполнети условите на задачата. Сега имаме

$$0<b\le k-1, \tag{1}$$

$$(k^2-2)b^2\le a^2\le(k^2-1)b^2. \tag{2}$$

Имаме $a<kb$, па затоа

$$a^2\le k^2b^2-2kb+1. \tag{3}$$

Од (2) и (3) следува $(k^2-2)b^2\le k^2b^2-2kb+1$, па затоа $2kb\le 2b^2+1$, што противречи на (1). Значи, за $n=k^2-2$ такви броеви a и b не постојат, од што следува тврдењето на задачата.

б) Секој природен број n може да се запише во видот

$$n=k^2+t \text{, каде } 0\le t\le 2k. \tag{1}$$

Сега условите на задачата се

$$0<b\le k+1 \text{ и } (k^2+t)b^2\le a^2\le(k^2+t+1)b^2.$$

Ако t е парен, земаме $b=k, a=k^2+\frac{t}{2}$. Сега треба да докажеме дека

$$k^4+k^2t\le k^4+k^2t+(\tfrac{t}{2})^2\le k^4+k^2t+k^2,$$

што е точно заради (1).

Ако t е парен, земаме $b=k+1, a=(k+1)^2-\frac{2k+1-t}{2}$. Сега имаме

$$(k+1)^4-(k+1)^2(2k+1-t) \le (k+1)^4-(k+1)^2(2k+1-t)+(\tfrac{2k+1-t}{2})^2$$
$$\le (k+1)^4-(k+1)^2(2k+1-t)+(k+1)^2.$$

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ БиХ ЗА ЕГМО 2017.
Сарајево, 25.2.2017. године

ЗАДАЦИ

Вријеме за рад: 240 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

1. Дат је низ дужине 2017 који се састоји од првих 2017 природних бројева поредани у произвољном редослиједу (сваки број се појављује тачно једном). Уочимо први број у том низу. Нека је то природан број k. Од датог низа формирамо нови низ дужине 2017 који има исте чланове као и почетни, тако да су првих k чланова новог низа исти као првих k чланова почетног низа, само у обрнутом редослиједу, док остатак низа остаје непромијењен. Доказати да ће се, ако наставимо овај поступак, појавити низ чији је први члан 1.

2. Дат је троугао ABC и тачке P и Q на страницама AB и AC, редом, тако да је $PQ \parallel BC$. Нека су X и Y редом пресјечне тачке правих BQ и CP са кружницом k описаном око троугла APQ, а D и E редом пресјечне тачке правих AX и AY са страницом BC. Ако је $2DE = BC$, доказати да кружница k садржи пресјечну тачку симетрале угла $\angle BAC$ са страницом BC.

3. За природан број n нека је $f(n)$ збир свих његових позитивних дјелилаца (укључујући 1 и n). Одредити све природне бројеве c за које постоји бесконачни строго растући низ природних бројева $n_1, n_2, n_3, \ldots$, такав да за свако $i \in \mathbb{N}$ вриједи да је $f(n_i) - n_i = c$.

4. Нека су a, b, c, d, e различити позитивни реални бројеви такви да вриједи

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

   a) Доказати да међу ових датих пет бројева постоји тројка таква да они не могу бити мјерни бројеви дужина страница троугла.

   b) Доказати да у а) постоји бар 6 таквих различитих тројки.

23. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 21. и 22. април 2018.

1. У оштроуглом троуглу ABC $(AB < AC)$ тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека су P и Q тачке на правој EF такве да је $DP \perp EF$ и $BQ = CQ$. Доказати да је $\sphericalangle ADP = \sphericalangle PBQ$.

2. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k и M природни бројеви за које важи

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{и} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Ако је $M > 1$, доказати да израз

$$M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

није једнак нули ни за један позитиван реалан број x.

3. Одредити све парове природних бројева a и b за које се у темена правилног $(a+b)$-тоугла може поставити a јединица и b нула тако да је задовољен следећи услов:

Уписане бројеве је могуће заротирати за неки угао тако да, у односу на почетни положај, једна суседна јединица и нула замене места, а бројеви у свим осталим теменима остану непромењени.

4. Сви квадратићи табле 1000×1000 су обојени црно или бело. Познато је да постоји квадрат 10×10 чији су сви квадратићи црни, као и квадрат 10×10 чији су сви квадратићи бели. За сваки квадрат K димензије 10×10 дефинишемо његову *моћ* $m(K)$ као апсолутну вредност разлике бројева црних и белих поља у квадрату K. Нека је T квадрат 10×10 који има најмању моћ. Одредити највећу могућу вредност $m(T)$.

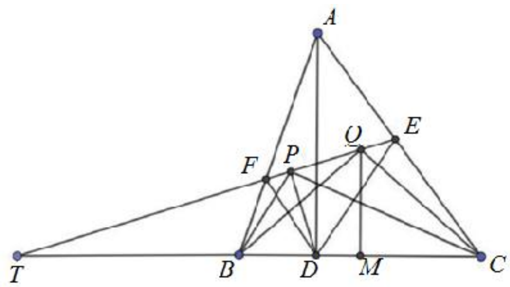
5. Нека је p прост број и нека је $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$. Играчи A и B играју следећу игру. Они играју наизменично, при чему A игра први. Играч на потезу бира број i из скупа $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ који није раније одабран и уместо a_i уписује неку цифру (могуће и нулу). Циљ играча A је да по завршетку игре број M буде дељив са p. Доказати да он има победничку стратегију.

6. Нека је O центар описаног круга оштроуглог неједнакокраког троугла ABC. Права OA сече висине троугла ABC из темена B и C редом у тачкама P и Q. Ако је H ортоцентар троугла ABC, доказати да центар описаног круга троугла PQH лежи на тежишној линији троугла ABC повученој из темена A.

1. Во остроаголен триаголник ABC ($\overline{AB} < \overline{AC}$) нека точките D, E, F се подножјата на висините повлечени од темињата A, B, C, соодветно. Нека P и Q се точки на правата EF такви што $DP \perp EF$ и $\overline{BQ} = \overline{CQ}$. Докажи дека $\measuredangle ADP = \measuredangle PBQ$

Решение. Нека M е средина на страната BC, а T е пресекот на правите BC и EF. Четириаголникот $BCEF$ е тетивен, бидејќи

$$\measuredangle BFC = \measuredangle BEC = 90^\circ .$$



Исто така и четриаголникот $FDME$ е тетивен, бидејќи овие точки припаѓаат на Ојлеровата кружница на триаголникот ABC. Сега, од $\measuredangle QMD = \measuredangle DPQ = 90^\circ$ следува дека и четириаголникот $PDMQ$ е тетивен. Од степенот на точката T во однос на овие кружници важи

$$\overline{TB} \cdot \overline{TC} = \overline{TF} \cdot \overline{TE} = \overline{TD} \cdot \overline{TM} = \overline{TP} \cdot \overline{TQ} ,$$

од каде што следува дека четириаголникот $BCQP$ е тетивен. Забележуваме дека

$$\measuredangle PBQ + \measuredangle QBC = \measuredangle PBC = \measuredangle PTB + \measuredangle TPB ,$$

од каде заради

$$\measuredangle QBC = \measuredangle QCB = 180^\circ - \measuredangle BPQ = \measuredangle TPB ,$$

важи $\measuredangle PBQ = \measuredangle PTD$. Конечно,

$$\measuredangle PBQ = \measuredangle PTD = 90^\circ - \measuredangle TDP = \measuredangle PBQ = \measuredangle PDA .$$

2. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$, k и M се природни броеви за кои важи

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{и} \quad a_1 a_2 ... a_n = M .$$

Ако $M > 1$, докажи дека изразот $M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$ не е еднаков на нула за ниту еден позитивен реален број x.

Решение. Ќе докажеме дека дадениот израз е ненегативен за секој позитивен реален број x, т.е. дека важи

$$M(x+1)^k < (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n) .$$

Левата страна на дадениот израз е еднаква на

$$a_1 a_2 ... a_n (x+1)^{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = a_1 (x+1)^{\frac{1}{a_1}} a_2 (x+1)^{\frac{1}{a_2}} ... a_n (x+1)^{\frac{1}{a_1}} .$$

Од неравенството межу аритемтичката и геометриската средина за броевите $x+1, 1, 1, ..., 1$ следува $\frac{x+a_i}{a_i} \geq (x+1)^{\frac{1}{a_i}}$, односно

$$x + a_i \geq a_i (x+1)^{\frac{1}{a_i}} , \text{ за } i = 1, 2, ..., n .$$

Множејќи гиовие неравенства добиваме

$$a_1 (x+1)^{\frac{1}{a_1}} a_2 (x+1)^{\frac{1}{a_2}} ... a_n (x+1)^{\frac{1}{a_1}} \leq (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n) .$$

Но, $x+1 > 1$, па затоа знак за равенство важи само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$, што не е можно бидејќи $M > 1$.

3. Определи ги сите парови природни броеви a и b за кои во темињата на правилен $(a+b)$ – аголник може да се постават a единици и b нули така што броевите кои се поставени во темињата може да се заротираат за некој агол и по ротацијата во однос на почетната положба во две соседни темиња нулата и единицата ги заменат местата, а во сите останати темиња се наоѓаат истите броеви како во почетната положба.

Решение. Полињата на многуаголникот да ги нумерираме со броевите $1,2,...,a+b$. Ќе докажеме дека паровите заемно прости броеви ги задоволуваат условите на задачата. Бидејќи a и b се заемно прости, добиваме дека и броевите a и $a+b$ се заемно прости. Затоа постои единствен природен број $k<a+b$ таков што $ka \equiv 1(\bmod a+b)$. Единиците ги поставуваме во полињата $1, k+1, 2k+1, ..., (a-1)k+1$ (нумерирањето на полињата е по модул $a+b$). Забележуваме дека ниту еден од овие броеви не е конгруентен со 2 по модул $a+b$ (во спротивно за некој $i<a$ ќе важи $ik \equiv 1(\bmod a+b)$, што не е можно). Затоа при ротација за k места последниот број се пресликува во нулата која е соседна на првата единица (бидејќи се пресликува во местото нумерирано со бројот 2), додека очигледно сите преостанати единици се пресликуваат во единици. Единствено во првата единица не се пресликува некоја друга единица, што значи дека во неа се пресликува некоја нула, додека преостанатите нули се пресликуваат во нули. Затоа единствени два броја кои си ги смениле мсетата се броевите на местата 1 и 2, со што доказот е завршен.

Сега ќе докажеме дека ако a и b не се заемно прости, тогаш единиците и нулите не може да се распоредат на саканиот начин. Нека претпоставиме дека е можно да се распоредат нулите и единиците на саканиот начин и дека со ротација за k места се добива саканата конфигурација. Да го разгледаме збирот на индексите на кои се единиците по модул $a+b$. При ротација за k места збирот на сите индекси се зголемува за ka по мудул $a+b$. Од условот на задачата следува дека овој збир треба да се зголеми или намали за 1 по мудул $a+b$, од каде следува дека ka е конгруентен со 1 или -1 по модул $a+b$. Последното не е можно бидејќи броевите a и $a+b$ не се заемно прости.

4. Сите квадратчиња на табла 1000×1000 се обоени црно или бело. Познато е дека постојат квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се црни и квадрат 10×10 во кој сите квадратчиња се бели. За секој квадрат K со димензии 10×10 дефинираме негова моќ $m(K)$ како апсолутна вредност на разликата на бројот на црните и белите полиња во квадратот K. Нека T е 10×10 квадрат кој има најмала моќ меѓу сите квадрати на дадената табла со димензија 10×10. Определи ја најголемата можна вредност за $m(T)$.

Решение. За секојм квадрат X со димензии 10×10 нека $b(X)$ е бројот на белите квадратчиња во него, а $c(X)$ е бројот на црните квадратчиња и нека $r(X)=b(X)-c(X)$. Нека Y е 10×10 квадратот кој целиот е бел, а Z е 10×10 квадратот кој целиот е црн. Тогаш $r(Y)=100$ и $r(Z)=-100$. Нека W е променлив 10×10 квадрат кој на почетокот ќе го поставиме во Y. Го поместуваме квадратот W се додека не се преклопи со Z, при што под еден чекор поместување го подразбираме поместувањето на квадратот W за едно место паралелно со страните на квадратот. Забележуваме дека $r(W)$ во еден чекор може да се промени најмногу за 20. Бидејќи на почетокот $r(W)=100$, а на крајот $r(W)=-100$, тогаш во некој чекор важи $-10 \le r(W) \le 10$. Тоа значи дека $m(T) \le 10$.

Од друга страна, ќе докажеме дека $m(T) \ge 10$, од каде ќе следува дека бараната најголема можна вредност на $m(T)$ е 10.

Да ги обоиме сите квадратчиња на 1000×1000 под главната дијагонала црно, а преостанатите бело. На оваа табла да земеме произволен 10×10 квадрат. Ако неговата главна дијагонала е црна, тогаш под неа сите квадратчиња се црни, па затоа бројот на црните квадратчиња е најмалку за 10 поголем од бројот на белите. Слично, ако главната дијагонала е бела, тогаш бројот на белите квадратчиња е најмалку за 10 поголем од бројот на црните. Според тоа, не постои ниту еден 10×10 чија моќ е помала од 10, со што доказот е завршен.

5. Нека p е прост број и нека $M=a_0+10a_1+...+10^{p-1}a_{p-1}$. Играчите A и B играат игра, при што играчот A игра прв. Тие наизменично бираат број i од множеството $\{0,1,...,p-1\}$ кој претходно не е избран, па на местото на a_i запишуваат некоја цифра (може и нула). Целта на играчот A е по завршување на играта бројот M да биде делив со p. Докажи дека A има победничка стратегија.

Решение. Ќе велиме дека играчот прави потез (i,a_i) ако во својот потез избира индекс i, потоа број a_i од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ако $p=2$ или $p=5$, тогаш играчот A во првиот потез го избира потезот (0,0) и победува независно од следните потези бидејќи M на крајот на играта ќе биде делив со 10.

Сега нека p е прост број различен од 2 и 5. Играчот A во првиот потез го избира потезот $(p-1,0)$. Од малата теорема на Ферма следува

$$(10^{\frac{p-1}{2}})^2\equiv1(\mathrm{mod}\,p),\ \text{т.е.}\ \ p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}})^2-1=(10^{\frac{p-1}{2}}-1)(10^{\frac{p-1}{2}}+1).$$

Бидејќи p е прост број погоолем од 2 разликуваме два случаја.

1) $p\,|\,10^{\frac{p-1}{2}}+1$. Во овој случај секогаш кога играчот B ќе направи потез (i,a_i), играчот A ќе направи потез $(j,a_j)=(i+\frac{p-1}{2},a_i)$ ако $i<\frac{p-1}{2}$ или потез $(j,a_j)=(i-\frac{p-1}{2},a_i)$ ако $i\ge\frac{p-1}{2}$. Забележуваме дека p е делител на $a_i10^i+a_j10^j$, па затоа по секој потез на A збирот на дотогаш избраните членови ќе биде делив со p. На овој начи $p-1$ членови се поделени во парови чиј збир е делив со p, па затоа на крајот од играта M ќе биде делив со p, т.е. A има победничка стратегија.

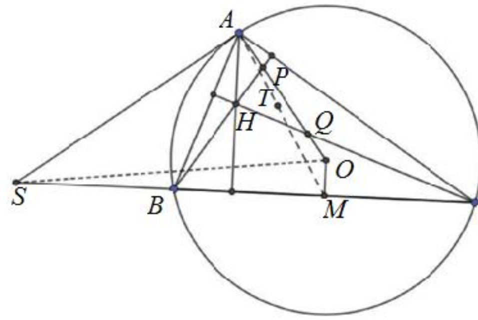
2) $p\,|\,10^{\frac{p-1}{2}}-1$. Во овој случај секогаш кога играчот B ќе направи потез (i,a_i), играчот A ќе направи потез $(j,a_j)=(i+\frac{p-1}{2},9-a_i)$ ако $i<\frac{p-1}{2}$ или потез $(j,a_j)=(i-\frac{p-1}{2},9-a_i)$ ако $i\ge\frac{p-1}{2}$. Важи $a_i10^i+a_j10^j=\ 9\cdot10^i$, па затоа на крајот на играта имаме

$$M=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}}9\cdot10^i=10^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv0(\mathrm{mod}\,p),$$

што значи дека A има победничка стратегија.

6. Нека O е центар на опишаната кружница на разбжностраниот триаголник ABC. Правата OA ги сече висините на триаголникот ABC повлечени од темињата B и C во точките P и Q, соодветно. Ако H е ортоцентарот на триаголникот ABC, докажи дека центарот на опишаната кружница на триаголникот PQH лежи на тежишната линија на

триаголникот ABC повлечена од темето A.



Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{AB} < \overline{AC}$. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle PQH &= 90^\circ - \measuredangle QAB \\ &= 90^\circ - \measuredangle OAB \\ &= \tfrac{1}{2}\measuredangle AOB = \measuredangle ACB.\end{aligned}$$

Слично, $\measuredangle QPH = \measuredangle ABC$. Значи, триаголниците ABC и HPQ се слични. Нека k и k_1 се кружниците опишани околу триаголниците ABC и HPQ, соодветно. Од $\measuredangle AHP = 90^\circ - \measuredangle HAC = \measuredangle ACB = \measuredangle HQP$ следува дека правата AH е тангента на кружницата k_1. Нека T е центарот на кружницата k_1 и нека правите AT и BC се сечат во точката M. Нека S е точка на правата BC таква што AS е тангента на кружницата k. На точката S за триаголникот ABC и соодветствува точката A за триаголникот HPQ, па затоа важи $\measuredangle OSM = \measuredangle OAT = \measuredangle OAM$. Според тоа, четириаголникот $SAOM$ е тетивен и како $AS \perp AO$ важи $\measuredangle OMS = 180^\circ - \measuredangle OAS = 90^\circ$. Последното значи дека точката M е ортогонална проекција на точката O на страната BC, па значи M е средина на отсечката BC. Значи, AM е тежипна линија и на неа лежи T, што и требаше да се докаже.

ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ЕГМО2018

1. а) Докажи дека постојат пет ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1 и се такви што како и да се распоредат овие пет броеви на кружница, постои два соседни броја чиј производ не е помал од $\frac{1}{9}$.

   б) Докажи дека било кои пет ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1 може да се распоредат на кружница така што на секои два соседни броја не е поголем од $\frac{1}{9}$.

   Решение. а) Да ги разгледаме броевите $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,0$. Бидејќи како и да ги распоредиме овие броеви секогаш ќе има два соседни броја еднакви на $\frac{1}{3}$, заклучуваме дека секогаш постојат два соседни броја чиј производ не е помал од $\frac{1}{9}$.

   б) Нека се дадени броевите x_1,x_2,x_3,x_4 и x_5 и нека за овие броеви важи $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$. Овие броеви да гипоставиме во насока на двужењето на стрелките на часовникот во редослед x_1,x_5,x_2,x_3,x_4. Бидејќи важи $x_1x_5 \leq x_1x_4$, $x_2x_5 \leq x_2x_3$ и $x_3x_4 \leq x_2x_3$, доволно е да докажеме дека важи $x_1x_4 \leq \frac{1}{9}$ и $x_2x_3 \leq \frac{1}{9}$.

   Прво ќе докажеме дека $x_2x_3 \leq \frac{1}{9}$. Ако $x_1 \leq \frac{1}{3}$, тогаш $x_2 \leq \frac{1}{3}$ и $x_3 \leq \frac{1}{3}$, па очигледно важи $x_2x_3 \leq \frac{1}{9}$. Ако $x_1 > \frac{1}{3}$, тогаш $x_2 + x_3 < \frac{2}{3}$, па затоа важи $\sqrt{x_2x_3} \leq \frac{x_2+x_3}{2} < \frac{1}{3}$, т.е. $x_2x_3 \leq \frac{1}{9}$.

   Сега ќе докажеме дека $x_1x_4 \leq \frac{1}{9}$. Нека претпоставиме дека $x_1x_4 > \frac{1}{9}$. Тогаш $x_1x_2 \geq x_1x_3 \geq x_1x_4 > \frac{1}{9}$, па затоа $x_1(x_2+x_3+x_4) > \frac{1}{3}$. Сега од неравенството меѓу аритметилчката и геометриската средина следува

   $$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2} \geq \sqrt{x_1(x_2+x_3+x_4)} > \sqrt{\frac{1}{3}},$$

   односно

   $$x_1+x_2+x_3+x_4 > \sqrt{\frac{4}{3}} > 1,$$

   што е противречност.

2. Докажи дека за секој пар природни броеви (m,n) поголеми од 2 постои природен број k и природни броеви $a_0,a_1,...,a_k$ кои се поголеми од 2 такви што $a_0 = m$, $a_k = n$ и за секој $i = 0,1,...,k-1$ важи

   $$a_i + a_{i+1} \mid a_ia_{i+1} + 1.$$

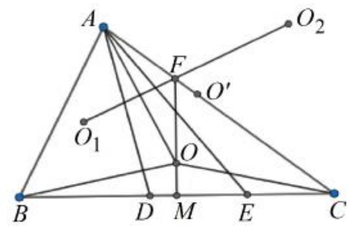
   Решение. За броевите m и n кои ги задоволуваат условите на задачата ќе велиме дека се поврзани. Од $2k-1+2k+1 \mid (2k-1)(2k+1)+1$, за $k = 2,3,...$ следува дека секои два непарни природни броеви поголеми од 2 се поврзани. Сега, доволно е да докажеме дека за секој парен број $2a$ поголем од 2 постои непарен природен број $2b-1$ поголем од 2 така што важи

   $$2a+2b-1 \mid 2a(2b-1)+1 = 4ab-2a+1. \qquad (1)$$

   Бидејќи $2a+2b-1 \mid 2a(2a+2b-1) = 4a^2+4ab-2a$, добиваме дека условот (1) е еквивалентен со условот $2a+2b-1 \mid 4a^2-1$. Но, за $b = 2a^2-a > 2$ ова важи, што значи дека секој парен број $2a$ е поврзан со еден непарниот број $2(2a^2-a)-1$. Од претходните разгледувања следува дека сите природни броеви поголеми од 2 се поврзани, што и требаше да се докаже.

3. Нека O е опишаната кружница на остроаголниот триаголник ABC и нека O_1 и O_2 се центрите на опишаните кружници околу триаголниците OAB и OAC, соодветно. Кружниците опишани околу триаголниците OAB и OAC по втор пат ја сечат страната BC во точките D и E, соодветно. Симетралата на страната BC ја сече страната AC во точката F $(F \neq A)$. Докажи дека центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE припаѓа на AC ако и само ако точката F припаѓа на правата O_1O_2.

Решение. Нека M е средина на BC и O' е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ADE. Тогаш



$$\begin{aligned}\measuredangle O'AE &= \tfrac{1}{2}(180° - (360° - 2\measuredangle ADE)) \\ &= \measuredangle ADE - 90° = 90° - \measuredangle ADB \\ &= 90° - \measuredangle AOB = 90° - 2\measuredangle ACB.\end{aligned}$$

Оттука добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle CAE &= \measuredangle OAC - \measuredangle OAE = (90° - \measuredangle ABC) - \measuredangle OCB \\ &= (90° - \measuredangle ABC) - (90° - \measuredangle BAC) = \measuredangle BAC - \measuredangle ABC.\end{aligned}$$

Значи, $O' \in AC$ ако и само ако $90° - 2\measuredangle ACB = \measuredangle BAC - \measuredangle ABC$. Забележуваме дека

$$\begin{aligned}F \in O_1O_2 \Leftrightarrow \overline{AF} = \overline{OF} \quad &\Leftrightarrow \quad \measuredangle OAF = \measuredangle AOF &\Leftrightarrow \\ &90° - \measuredangle ABC = \measuredangle AOC + \measuredangle COM - 180° &\Leftrightarrow \\ &90° - \measuredangle ABC = 2\measuredangle ABC + \measuredangle BAC - 180° &\Leftrightarrow \\ &180° - \measuredangle BAC - 3\measuredangle ABC = 90° &\Leftrightarrow \\ &\measuredangle BAC - \measuredangle ABC + 2\measuredangle ACB = 90°\end{aligned}$$

Според тоа, $O' \in AC$ ако и само ако $F \in O_1O_2$

4. Даден е природен број n. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ (не задолжително различни) природни броеви чиј збир е еднаков на $2S$ (S е природен број). Природниот број k го нарекуваме сепаратот ако може да се изберат k различни индекси $i_1, i_2, ..., i_k$ од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што

$$a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_k} = S .$$

Определи го најмголемиот број сепаратори (во зависност од n).

Решение. Да забележиме дека ако бројот k е сепаратот, тогаш и бројот $n-k$ е сепаратор. Исто така, да забележиме дека ако бројот 1 е сепаратот, тогаш ниту еден друг број освен $n-1$ не може да биде сепаратор. Според тоа, бројот на сепаратори е сигурно помал или еднаков на $\max\{n-3, 2\}$ ($n-3$ е максимум во случај кога 1 не е сепаратор, а 2 е максимум ако 1 е сепаратор). Со ¡$_n$ да го означиме бараниот максимум. Очигледно е ¡$_1 = 0$, ¡$_2 = 1$ (на пример броевите 1,1), ¡$_3 = 2$ (на пример броевите 1,2,3), ¡$_4 = 2$ (на пример броевите 1,2,3,6). Ќе докажеме дека ¡$_n = n-3$ за $n \geq 5$. Веќе докажавме дека ¡$_n \leq n-3$ (бидејќи $2 \leq n-3$ за $n \geq 5$).

За $n = 2k$ моижеме да ги земеме броевите

$$1,1,1,1,2,2,4,4,8,8,...,2^{k-2},2^{k-2}.$$

Тогаш $1+1+1+1+2+2+4+4+8+8+...+2^{k-2}+2^{k-2}=2^k$, па затоа $S=2^{k-1}$, што може да се запише како

$$2^{k-2}+2^{k-2}=2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-3}=...=2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-4}+...+2+1+1.$$

Исто така, за $n=2k$ моижеме да ги земеме броевите

$$1,1,2,2,2,4,4,8,8,...,2^{k-1},2^{k-1}.$$

Тогаш збирот на броевите $2S$ е еднаков на 2^{k+1}, т.е. $S=2^{k-1}$, што може да се запише како

$$2^{k-1}+2^{k-1}=2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-2}=...=2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+...+4+2+1+1.$$

26. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БИХ

Бања Лука / Сарајево, 13.6.2021.

Језик: српски

1. Нека су x, y, z реални бројеви из интервала $[0,1]$. Одредити максималну вриједност израза

$$W = y \cdot \sqrt{1-x} + z \cdot \sqrt{1-y} + x \cdot \sqrt{1-z}.$$

Рјешење:

Уведимо смјене: $a = \sqrt{1-x},\ b = \sqrt{1-y},\ c = \sqrt{1-z}$, при чему вриједи да $a, b, c \in [0, 1]$. Након тих смјена израз постаје

$$W = a(1-b^2) + b(1-c^2) + c(1-a^2).$$

Ако је $a = 0$, тада је $W = (1-c^2)b + c \leq 1 - c^2 + c = \frac{5}{4} - \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$. Аналогно се покаже да ако је $b = 0$ или $c = 0$ такођер вриједи да је $W \leq \frac{5}{4}$. Вриједност $\frac{5}{4}$ се може достићи нпр. за $a = 0, b = 1, c = \frac{1}{2}$, тј. $x = 1, y = 0, z = \frac{3}{4}$.

Ако је $a = 1$, слично је $W = 1 - b^2 + b(1-c^2) \leq 1 - b^2 + b \leq \frac{5}{4}$. Аналогно се покаже да ако је $b = 1$ или $c = 1$ такођер вриједи да је $W \leq \frac{5}{4}$.

Нека је $W = f(a, b, c)$ и претпоставимо да је $W_{max} = f(a_1, b_1, c_1) > \frac{5}{4}$, при чему су $a_1, b_1, c_1 \in (0, 1)$.

Посматрајмо

$$g(a) = -c_1 a^2 + (1 - b_1^2)a + b_1(1 - c_1^2) + c_1.$$

Ово је парабола која максимум на интервалу $[0,1]$ достиже у тјемену или на крајевима интервала. Како $a_1 \notin \{0,1\}$, то мора вриједити $a_1 = \frac{1-b_1^2}{2c_1}$ (иначе би могли одабрати $a_2 \in (0,1)$ тако да вриједи $f(a_2, b_1, c_1) > f(a_1, b_1, c_1)$, што је контрадикција). Дакле, $2a_1c_1 = 1 - b_1^2$ (1).

Аналогно се добије да мора вриједити $2a_1b_1 = 1 - c_1^2$ (2) и $2b_1c_1 = 1 - a_1^2$ (3).

Сабирањем ових једначина добијамо $(a_1 + b_1 + c_1)^2 = 3$, тј. $a_1 + b_1 + c_1 = \sqrt{3}$. Одузимањем друге једначине од прве добијамо да је $2a_1(c_1 - b_1) = (c_1 - b_1)(c_1 +$

b_1), одакле је $c_1 = b_1$ или $2a_1 = c_1 + b_1$. Аналогно добијамо $a_1 = b_1$ или $2c_1 = a_1 + b_1$. Ако је $c_1 = b_1$, онда било која од једначина $a_1 = b_1$ или $2c_1 = a_1 + b_1$ повлачи $a_1 = b_1 = c_1$. Ако је $2a_1 = c_1 + b_1$, такођер било која од једначина $a_1 = b_1$ или $2c_1 = a_1 + b_1$ повлачи $a_1 = b_1 = c_1$. Дакле, $a_1 = b_1 = c_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Међутим, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} < \frac{5}{4}$. Дакле, максимум траженог израза је $\frac{5}{4}$.

Примједба: Максимум функције $f(a, b, c)$, при чему $a, b, c \in [0,1]$, постоји јер је функција непрекидна и дефинисана на затвореној коцки, па се због тога могло претпоставити да постоји $W_{max} = f(a_1, b_1, c_1)$.

2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да постоји пермутација $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ бројева $1,2, \dots, p-1$ таква да је број $1^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + (p-1)^{k_{p-1}}$ дјељив са p.
Напомена: Бројеви $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ су пермутација бројева $1,2, \dots, p-1$ ако се сваки од бројева $1,2, \dots, p-1$ појављује тачно једном међу бројевима $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$.

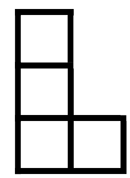
Рјешење:

Означимо са $p' = \frac{p-1}{2}$. Примијетимо најприје да због Мале Фермаове теореме за произвољан број $a \in \{1,2, \dots, p-1\}$ вриједи $0 \equiv a^{p-1} - 1 = (a^{p'} - 1)(a^{p'} + 1)(mod\, p)$, па како је p прост број, вриједи $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$ или $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$.
Доказат ћемо да је за сваки број $a \in \{1,2, \dots, p'\}$ могуће одабрати пар $(i, j), i, j \in \{1,2, \dots, p-1\}$ такав да вриједи $|i - j| = p'$ и $a^i + (p-a)^j \equiv 0(mod\, p)$, при чему су сви ти парови дисјунктни. Из ове тврдње очигледно слиједи тврдња задатка.
Нека је $p = 4k - 1, k \in \mathbb{N}$. Тада је p' непаран број, па вриједи $a^{p'} \equiv -(p - a)^{p'}(mod\, p)$, тј. један од бројева $a^{p'}, (p-a)^{p'}$ је конгруентан 1, а други -1 по модулу p. Узмимо произвољан број $i \in \{1,2, \dots, p'\}$. Ако је i непаран број, онда је $a^i \equiv -(p-a)^i\ (mod\, p)$, па ако је $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$, онда је $a^{i+p'} + (p-a)^i \equiv 0\ (mod\, p)$, а у супротном је $(p-a)^{p'} \equiv 1(mod\, p)$, одакле је $a^i + (p-a)^{i+p'} \equiv 0(mod\, p)$. Слично, ако је i паран број, због $a^i \equiv (p-a)^i\ (mod\, p)$ у случају $(p-a)^{p'} \equiv -1(mod\, p)$ вриједи $a^i + (p-a)^{i+p'} \equiv 0(mod\, p)$, а у случају $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$ вриједи $a^{i+p'} + (p-a)^i \equiv 0\ (mod\, p)$. На овај начин очигледно можемо конструисати тражене парове.
Нека је $p = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$. Тада је p' паран број, па вриједи $a^{p'} \equiv (p-a)^{p'}(mod\, p)$. Ако посматрамо слично као у претходном случају, примијетимо да бројеве a за које вриједи $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$, тражено упаривање можемо конструисати само уколико је i (а самим тим и j) непаран број, а за бројеве a за које вриједи $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$, тражено упаривање можемо конструисати само уколико је i (а самим тим и j) паран број. Како је једнак број парних и непарних бројева у скупу $\{1,2, \dots, p'\}$, довољно је доказати да је једнак број бројева $a \in \{1,2, \dots, p'\}$ таквих да

вриједи $a^{p'} \equiv 1(mod\, p)$ као и оних за које вриједи $a^{p'} \equiv -1(mod\, p)$. По Ојлеровом критерију вриједи $a^{p'} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)(mod\, p)$, па је довољно доказати да постоји једнак број квадратних остатака и неостатака у скупу $\{1,2,\dots,p'\}$. Како је $p \equiv 1(mod\, 4)$ то је $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{-a}{p}\right)$, па је довољно доказати да је једнак број квадратних остатака и неостатака у скупу $\{1,2,\dots,p-1\}$, што се лако доказује (јер за $x, y \in \{1,2,\dots,p-1\}, x \neq y$, из $x^2 \equiv y^2(mod\, p)$ слиједи $p|(x-y)(x+y)$, тј. $x = p-y$, па имамо тачно $\frac{p-1}{2}$ квадратних остатака).

3. Задатак ће накнадно бити објављен у електронском облику.

4. Фигуру у облику слова L састављену од 4 јединична квадрата (као што је приказано на слици) називамо *L-домина*. Одредити максималан број L-домина које је могуће поставити на таблу димензија $n \times n$, гдје је n природан број, тако да се никоје двије домине не преклапају и да је могуће доћи од горњег лијевог до доњег десног угла табле крећући се само преко оних квадрата који нису прекривени доминама. (Кретањем прелазимо са неког квадрата на њему сусједни квадрат, тј. квадрат са којим дијели страницу).

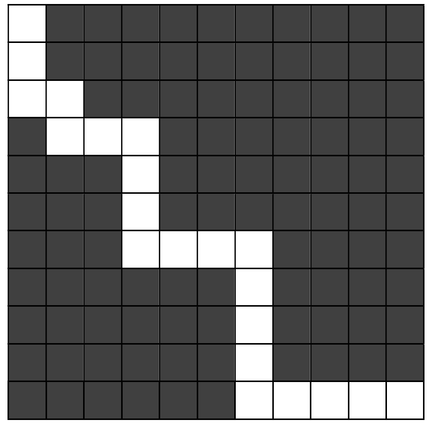


Напомена: L-домине могу да се ротирају, као и да се *преврну*, чиме се добија осно симетрична фигура у односу на ову која је приказана на слици.

Рјешење:

Сваки пут од горњег десног до доњег лијевог поља плоче садржи барем $n-1$ хоризонталних и барем $n-1$ вертикалних корака, па садржи барем $2\text{н}-1$ поља. Дакле, L-домине не смију покрити више од $n^2-(2n-1)=(n-1)^2$ поља, па број постављених L-домина не прелази $\left\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\right\rfloor$, односно $\frac{(n-1)^2}{4}$ за непарно n те $\frac{n^2-2n}{4}$ за парно n.

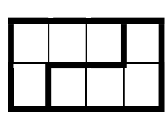
Докажимо да се за $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ не може на плочу поставити $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-домина тако да је услов задовољен. Претпоставимо супротно. Тада постоји тачно $2n-1$ слободних поља, што је најмањи број поља који пут од једног угаоног поља плоче до супротног може имати. Тај број се достиже ако и само ако сви кораци на том путу прелазе или у десног или у доњег сусједа.



Дакле, плоча има један слободан пут дужине $2n-1$, а сва остала поља су покривена L-домином (као у примјеру на слици изнад, гдје су заузета поља осјенчена). Пут дијели плочу на два дијела (при чему један од дијелова може имати 0 поља). Примијетимо да помјерањем свих квадратића горњег дијела за једно мјесто дијагонално (доле-лијево) добијамо плочу димензија $(n-1)\times(n-1)$ састављену од заузетих поља. Наиме, на тај начин остају празни први ред и задња колона, а очигледно не може доћи до преклапања између горњег и доњег дијела или излажења са плоче. Будући да су оба дијела поплочана L-доминама, и добијена плоча $(n-1)\times(n-1)$ је поплочана L-доминама. Доказат ћемо да је то немогуће.

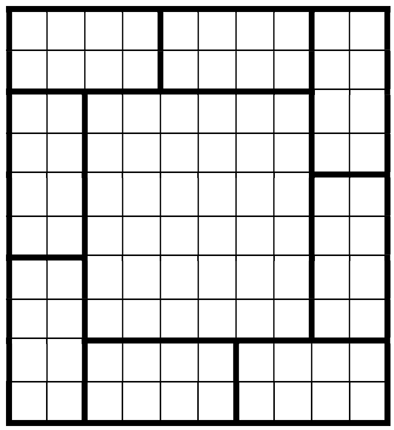
Обојимо поља парних редова плоче црном бојом, а непарних бијелом. Тада свака L-домина покрива 3 црна и једно бијело (овакве L-домине назовимо *тип* 1) или 3 бијела и једно црно поље (овакве L-домине назовимо *тип* 2). Како је $n\equiv 3\ (mod\ 4)$, то је $n-1\equiv 2\ (mod\ 4)$, па има једнак број црних и бијелих поља у сваком реду, а самим тим и укупно. Слиједи да у поплочавању постоји једнак број L-домина типа 1 и типа 2, па је укупни број L-домина паран. С друге стране, укупни број домина је $\frac{(n-1)^2}{4}$ што је за $n-1\equiv 2\ (mod\ 4)$ непаран број. Дакле, претпоставка да је за $n\equiv 3\ (mod\ 4)$ могуће поставити $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-домина довела је до контрадикције, па је нетачна. Зато се у овом случају не може поставити више од $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ L-домина.

Доказат ћемо да је могуће поставити $\frac{n^2-2n}{4}$ L-домина за парно n, $\frac{(n-1)^2}{4}$ L-домина за $n\equiv 1\ (mod\ 4)$ и $\frac{(n-1)^2}{4}-1$ L-домина за $n\equiv 3\ (mod\ 4)$, и то тако да је слободан пут који се састоји од прве колоне и задњег реда плоче. Примијетимо најприје да двије L-домине могу покрити 2×4 правоугаоник:



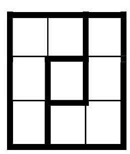
За $n \equiv 1\ (mod\ 4)$ горња десна $(n-1) \times (n-1)$ плоча може се подијелити на 2×4 правоугаонике, па се може поплочати L-доминама.

За $n \equiv 3\ (mod\ 4)$ горња десна $(n-1) \times (n-1)$ плоча може бити поплочана тако да је централни 2×2 квадрат слободан, а остала поља покривена. За $n = 3$ ово је тривијално. За $n > 3$, како је $n - 1 \equiv 2 (mod\ 4)$ могуће је поплочати оквир плоче ширине 2 поља на сљедећи начин (на слици су означени 2×4 правоугаоници који се L-доминама поплочавају на већ описани начин):

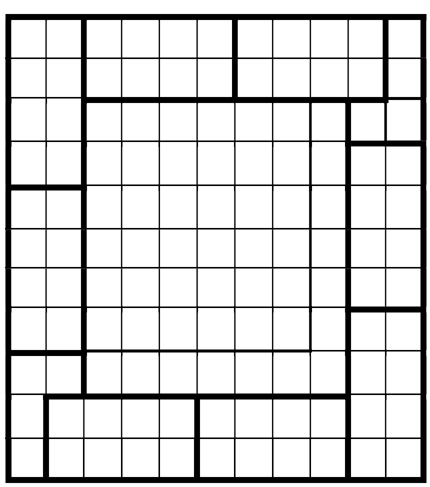


На овај начин непоплочани дио има димензије за 4 мање од почетне плоче, па се поступак може наставити док у центру не остане плоча 2×2.

За парно n могуће је поплочати горњу десну $(n-1) \times (n-1)$ плочу тако да само централно поље остане слободно. За $n = 2$ ово је тривијално, а за $n = 4$ то можемо урадити на сљедећи начин:

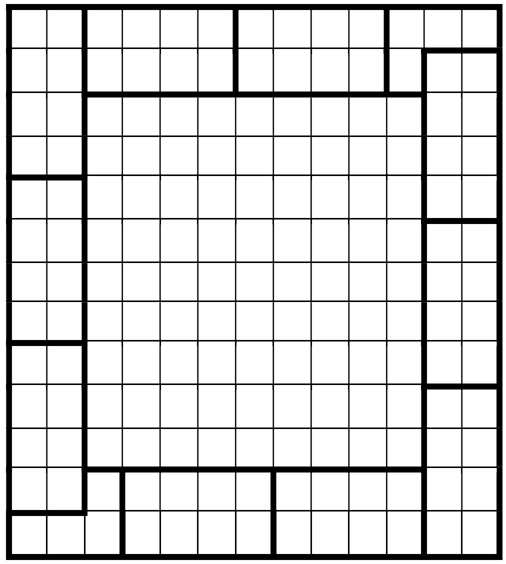


За $n \equiv 0\ (mod\ 4)$ је $n - 1 \equiv 3\ (mod\ 4)$ па се оквир може поплочати на сљедећи начин:



Непоплочани дио има димензије за 4 мање од почетне плоче, па се поступак може наставити док у центру не остане плоча 3×3 која се поплочава на раније описани начин.

За $n \equiv 2 \ (mod\ 4)$ је $n - 1 \equiv 1 (mod\ 4)$ па се оквир може поплочати на сљедећи начин:



Слично као у претходним случајевима, поступак је могуће наставити док се не добије само једно слободно поље у центру.