

# Nekoliko formula za produkte sinusa i kosinusa kutova $1^\circ, 2^\circ, \dots, 89^\circ$

Vladimir Volenec\*

## Sažetak

C. A. Laisant je izračunao nekoliko zanimljivih produkata sinusa kutova  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 89^\circ, 90^\circ$ . Ovdje se istom metodom izračunavaju još neki takvi produkti.

**Ključne riječi:** *sinus, kosinus, komplementarni kut, adicijske formule*

# Several formulae for the products of sines and cosines of angles $1^\circ, 2^\circ, \dots, 89^\circ$

## Abstract

C. A. Laisant calculated several interesting products of the sines of angles  $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 89^\circ, 90^\circ$ . Here, we calculate some other such products by the same method.

**Keywords:** *sine, cosine, complementary angle, sine and cosine addition formulae*

U [1] je C. A. Laisant izveo formule za produkte

$$\begin{aligned}\Pi &= \sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ, \\ \Pi_1 &= \sin 3^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 9^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ, \\ \Pi_2 &= \sin 9^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 27^\circ \cdot \dots \cdot \sin 81^\circ, \\ \Pi'_2 &= \sin 18^\circ \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 72^\circ.\end{aligned}$$

---

\*Prirodoslovno matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu email: volenec@math.hr

pri čemu on na kraju ovih produkata dodaje i faktor  $\sin 90^\circ$ , kojeg ćemo mi ovdje ispustiti, jer je jednak 1, pa nije bitan. Pokazat ćemo najprije kako je to on napravio, uz neke sitne preinake. On polazi od njemu poznate formule

$$\sin 3x = 4 \cdot \sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x), \quad (1)$$

koju ćemo mi ipak ovdje dokazati. Primjenom adicijske formule za sinus, formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta, te za sinus i kosinus kuta  $60^\circ$  dobivamo redom

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x \\ &= 2 \cdot \sin x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \sin x \\ &= \sin x \cdot (3 \cos^2 x - \sin^2 x) = 4 \cdot \sin x \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot \cos^2 x - \frac{1}{4} \cdot \sin^2 x \right) \\ &= 4 \cdot \sin x \cdot (\sin^2 60^\circ \cdot \cos^2 x - \cos^2 60^\circ \cdot \sin^2 x) \\ &= 4 \cdot \sin x \cdot (\sin 60^\circ \cdot \cos x - \cos 60^\circ \cdot \sin x) \cdot (\sin 60^\circ \cdot \cos x + \cos 60^\circ \cdot \sin x) \\ &= 4 \cdot \sin x \cdot \sin(60^\circ - x) \cdot \sin(60^\circ + x). \end{aligned}$$

Primjenom formule (1) na slučajeve  $x = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 29^\circ$  dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 59^\circ \cdot \sin 61^\circ &= \sin 3^\circ, \\ 4 \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 58^\circ \cdot \sin 62^\circ &= \sin 6^\circ, \\ &\vdots \\ 4 \cdot \sin 29^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \sin 89^\circ &= \sin 87^\circ, \end{aligned}$$

a dodat ćemo i jednakost

$$4 \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}. \quad (2)$$

Množenjem ovih 30 jednakosti slijedi jednakost  $4^{30} \cdot \Pi = \Pi_1 \cdot \sqrt{3}$ , tj.

$$\Pi = \frac{\sqrt{3}}{2^{60}} \cdot \Pi_1. \quad (3)$$

Primjenom formule (1) na slučajeve  $x = 3^\circ, 6^\circ, \dots, 27^\circ$  dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 57^\circ \cdot \sin 63^\circ &= \sin 9^\circ, \\ 4 \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin 66^\circ &= \sin 18^\circ, \\ &\vdots \\ 4 \cdot \sin 27^\circ \cdot \sin 33^\circ \cdot \sin 87^\circ &= \sin 81^\circ \end{aligned}$$

NEKOLIKO FORMULA ZA PRODUKTE SINUSA I KOSINUSA KUTOVA  $1^\circ, 2^\circ, \dots, 89^\circ$

i opet dodajmo jednakost (2). Množenjem ovih 10 jednakosti dobivamo jednakost  $4^{10} \cdot \Pi_1 = \Pi_2 \cdot \sqrt{3}$ , tj.

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2^{20}} \cdot \Pi_2. \quad (4)$$

Sada primijenimo formulu  $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ , tj.

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \sin(90^\circ - x), \quad (5)$$

na slučajeve  $x = 9^\circ, 18^\circ, 27^\circ, 36^\circ$  i dobivamo jednakosti

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sin 9^\circ \cdot \sin 81^\circ &= \sin 18^\circ, \\ 2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \sin 72^\circ &= \sin 36^\circ, \\ 2 \cdot \sin 27^\circ \cdot \sin 63^\circ &= \sin 54^\circ, \\ 2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 54^\circ &= \sin 72^\circ, \end{aligned}$$

a dodajmo i jednakost

$$2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Množenjem ovih 5 jednakosti dobivamo jednakost  $2^5 \cdot \Pi_2 = \Pi'_2 \cdot \sqrt{2}$ , tj.

$$\Pi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2^5} \cdot \Pi'_2, \quad (6)$$

dok množenjem samo druge i četvrte od tih jednakosti slijedi jednakost  $2^2 \cdot \Pi'_2 = \sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ$ , tj.

$$\Pi'_2 = \frac{1}{2^2} \cdot \sin 36^\circ \cdot \sin 72^\circ. \quad (7)$$

Ostalo je još da se izračunaju vrijednosti od  $\sin 36^\circ$  i  $\sin 72^\circ$ , što ćemo ovdje napraviti, dok Laisant te vrijednosti koristi kao dobro poznate činjenice. Imamo najprije ovaj izvod

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\ &= (1 - 2 \cdot \sin^2 x) \cdot \cos x - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x = (1 - 4 \cdot \sin^2 x) \cdot \cos x, \end{aligned}$$

pa zato slijedi dalje

$$2 \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ = \sin 36^\circ = \cos 54^\circ = (1 - 4 \cdot \sin^2 18^\circ) \cdot \cos 18^\circ.$$

To znači da je  $\sin 18^\circ$  pozitivno rješenje kvadratne jednadže  $4 \cdot \sin^2 18^\circ + 2 \cdot \sin 18^\circ - 1 = 0$ , pa lako dobivamo redom

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1), & \sin^2 18^\circ &= \frac{1}{16}(6 - 2\sqrt{5}), \\ \sin^2 72^\circ = \cos^2 18^\circ &= \frac{1}{16}(10 + 2\sqrt{5}),\end{aligned}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}, \quad (8)$$

$$\sin^2 36^\circ = 4 \cdot \sin^2 18^\circ \cdot \cos^2 18^\circ = 4 \cdot \frac{1}{8}(3 - \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{8}(5 + \sqrt{5}) = \frac{1}{16}(10 - 2\sqrt{5}),$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}. \quad (9)$$

Zbog (8) i (9) iz (7) slijedi

$$\Pi'_2 = \frac{\sqrt{5}}{2^4}, \quad (10)$$

jer je  $\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{80} = 2^2\sqrt{5}$ , a zatim iz (6), (4) i (3) dobivamo redom

$$\Pi_2 = \frac{\sqrt{10}}{2^9}, \quad (11)$$

$$\Pi_1 = \frac{\sqrt{30}}{2^{29}}, \quad (12)$$

$$\Pi = \frac{3\sqrt{10}}{2^{89}}. \quad (13)$$

Kako je kosinus kuta jednak sinusom njemu komplementarnog kuta, a u svakom od produkata  $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \Pi'_2$  se javljaju sinusi parova komplementarnih kutova, to odmah slijedi da je na primjer produkt  $\Pi$  ujedno i produkt  $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \cos 89^\circ$ , a slično vrijedi i za produkte  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi'_2$ .

Sada ćemo oponašajući Laisantov postupak izvesti još neke slične formule za produkte

$$\begin{aligned}\Pi'_1 &= \sin 6^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \dots \cdot \sin 84^\circ = \cos 6^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \cos 18^\circ \cdot \dots \cdot \cos 84^\circ, \\ P &= \sin 2^\circ \cdot \sin 4^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ = \cos 2^\circ \cdot \cos 4^\circ \cdot \cos 6^\circ \cdot \dots \cdot \cos 88^\circ,\end{aligned}$$

NEKOLIKO FORMULA ZA PRODUKTE SINUSA I KOSINUSA KUTOVA  $1^\circ, 2^\circ, \dots, 89^\circ$

$$P_1 = \sin 4^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \sin 12^\circ \cdot \dots \cdot \sin 88^\circ = \cos 2^\circ \cdot \cos 6^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \dots \cdot \cos 86^\circ,$$

$$P'_1 = \sin 2^\circ \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \dots \cdot \sin 86^\circ = \cos 4^\circ \cdot \cos 8^\circ \cdot \cos 12^\circ \cdot \dots \cdot \cos 88^\circ,$$

$$N = \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 5^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ = \cos 1^\circ \cdot \cos 3^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \dots \cdot \cos 89^\circ,$$

$$N_1 = \sin 3^\circ \cdot \sin 9^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \dots \cdot \sin 87^\circ = \cos 3^\circ \cdot \cos 9^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \dots \cdot \cos 87^\circ.$$

Primjenom formule (5) na slučajeve  $3^\circ, 6^\circ, \dots, 42^\circ$  dobivamo jednakosti

$$2 \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 87^\circ = \sin 6^\circ,$$

$$2 \cdot \sin 6^\circ \cdot \sin 84^\circ = \sin 12^\circ,$$

$$\vdots$$

$$2 \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 48^\circ = \sin 84^\circ,$$

a dodajmo i jednakost  $2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ . Množenjem ovih 15 jednakosti slijedi jednakost  $2^{15} \cdot \Pi_1 = \sqrt{2} \cdot \Pi'_1$ , odakle zbog (12) dobivamo

$$\Pi'_1 = \frac{\sqrt{15}}{2^{14}}. \quad (14)$$

Primjenom formule (5) na slučajeve  $x = 1^\circ, 2^\circ, \dots, 44^\circ$  dobivamo jednakosti

$$2 \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 89^\circ = \sin 2^\circ,$$

$$2 \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 88^\circ = \sin 4^\circ,$$

$$\vdots$$

$$2 \cdot \sin 44^\circ \cdot \sin 46^\circ = \sin 88^\circ,$$

a dodajmo i jednakost  $2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ . Množenjem ovih 45 jednakosti slijedi jednakost  $2^{45} \cdot \Pi = \sqrt{2} \cdot P$ , iz koje zbog (13) dobivamo

$$P = \frac{3\sqrt{5}}{2^{44}}. \quad (15)$$

Množenjem jednakosti

$$2 \cdot \sin 2^\circ \cdot \sin 88^\circ = \sin 4^\circ,$$

$$2 \cdot \sin 4^\circ \cdot \sin 86^\circ = \sin 8^\circ,$$

$$\vdots$$

$$2 \cdot \sin 44^\circ \cdot \sin 46^\circ = \sin 88^\circ,$$

dobivamo  $2^{22} \cdot P = P_1$ , pa zbog (15) slijedi

$$P_1 = \frac{3\sqrt{5}}{2^{22}}. \quad (16)$$

Kako je očito  $P_1 \cdot P'_1 = P$ , to iz (15) i (16) dobivamo

$$P'_1 = \frac{1}{2^{22}}. \quad (17)$$

Isto tako iz jednakosti  $P \cdot N = \Pi$  zbog (13) i (15) slijedi

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}. \quad (18)$$

Primjenom formule (1) na slučajeve  $x = 1^\circ, 3^\circ, \dots, 29^\circ$  dobivamo 15 jednakosti

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sin 1^\circ \cdot \sin 59^\circ \cdot \sin 61^\circ &= \sin 3^\circ, \\ 4 \cdot \sin 3^\circ \cdot \sin 57^\circ \cdot \sin 63^\circ &= \sin 9^\circ, \\ &\vdots \\ 4 \cdot \sin 29^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \sin 89^\circ &= \sin 87^\circ, \end{aligned}$$

a njihovim množenjem slijedi  $4^{15} \cdot N = N_1$ , tj. zbog (18)

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2^{15}}. \quad (19)$$

Među onih posljednjih 15 jednakosti nalazi se (na osmom mjestu) i jednakost  $4 \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 75^\circ = \sin 45^\circ$ , pa odmah i bez poznavanja vrijednosti  $\sin 15^\circ$  i  $\sin 75^\circ$  zaključujemo da je  $\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}$ . Zanimljivo je da se te dvije vrijednosti kao i one u formulama (8) i (9) mogu naći na stranici 263 našeg malo starijeg udžbenika [2] u obliku vrlo korisne tablice, koju ovdje reproduciramo u obliku tablice 1. Nažalost u [1] nije navedeno (to i nije običaj raditi u udžbenicima!), kako je ta tablica sastavljena. To je možda preuzeto iz nekog starijeg izvora, a bilo bi tada zanimljivo saznati, koji je to izvor. Jedna takva tablica nalazi se na primjer u [3] na stranici 74.

Tablica 1. Sinusi i kosinusi višekratnika od  $3^\circ$  u I. kvadrantu.

stupnjevi	sinus	kosinus	
0	0	1	90
3	$s_2 r_1 - t_1 r_2$	$t_1 r_1 + s_2 r_2$	87
6	$\frac{1}{2}(t_2 \sqrt{3} - s_1)$	$\frac{1}{2}(s_1 \sqrt{3} + t_2)$	84
9	$\frac{1}{2}(s_1 \sqrt{2} - t_2 \sqrt{2})$	$\frac{1}{2}(s_1 \sqrt{2} + t_2 \sqrt{2})$	81
12	$\frac{1}{2}(t_1 - s_2 \sqrt{3})$	$\frac{1}{2}(t_1 \sqrt{3} + s_2)$	78
15	$r_2$	$r_1$	75
18	$s_2$	$t_1$	72
21	$t_2 r_1 - s_1 r_2$	$s_1 r_1 + t_2 r_2$	69
24	$\frac{1}{2}(s_1 \sqrt{3} - t_2)$	$\frac{1}{2}(t_2 \sqrt{3} + s_1)$	66
27	$\frac{1}{2}(t_1 \sqrt{2} - s_2 \sqrt{2})$	$\frac{1}{2}(t_1 \sqrt{2} + s_2 \sqrt{2})$	63
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	60
33	$s_2 r_1 + t_1 r_2$	$t_1 r_1 - s_2 r_2$	57
36	$t_2$	$s_1$	54
39	$s_1 r_1 - t_2 r_2$	$t_2 r_1 + s_1 r_2$	51
41	$\frac{1}{2}(t_1 \sqrt{3} - s_2)$	$\frac{1}{2}(t_1 + s_2 \sqrt{3})$	48
45	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	45
	kosinus	sinus	stupnjevi

Ovdje je:  $r_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ ,  $r_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ,  $s_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ ,  
 $s_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ ,  $t_1 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ ,  $t_2 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ .

## Literatura

- [1] C. A. LAISANT, *Calcul du produit de tous les sinus du premier quadrant, de degré en degré*, Assoc. Franç. Avanc. Sci. 4 (1875), 159–161.
- [2] Đ. KUREPA, S. ŠKREBLIN, J. BREČEVIĆ, *Geometrija za VII. razred gimnazije*, Školska knjiga, Zagreb 1958.
- [3] E. W. HOBSON, *Plane trigonometry*, 4. ed., Cambridge Univ. Press 1918.