

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС

Иван Трајков, Скопје

НЕКОИ УСЛОВНИ РАВЕНСТВА И УСЛОВНИ НЕРАВЕНСТВА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

Во броевите на Нумерус XX-1, XX-2 и XX-3 објавени се написи: *Докажување на услови равенства во алгебра*. Ви препорачуваме истите да ги прочитате. Овде ќе докажеме неколку занимливи услови равенства и неравенства во геометрија, повеќето за триаголник.

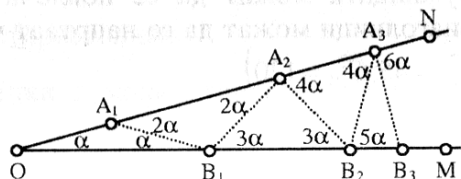
Пример 1. На краците ON и OM на $\angle MON = 15^\circ$ избрани се соодветно точките A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2 и B_3 така што;

$$\overline{OA_1} = \overline{A_1B_1} = \overline{B_1A_2} = \overline{A_2B_2} = \overline{B_2A_3} = \overline{A_3B_3}$$

Докажи: а) Дека искршената линија $OA_1A_2B_2A_3B_3$ не може понатаму да се продолжи на опишаниот начин:

б) Одреди за која големина на аголот MON искршената линија $OA_1A_2B_2A_3B_3$ се состои од најмногу десет еднакви отсечки.

Доказ а) Нека $\angle MON = \alpha = 15^\circ$. Триаголниците OB_1A_1 , $A_1B_1A_2$, $B_1B_2A_2$, $B_2B_3A_3$ се рамнокраки според условот на задачата $\angle B_1A_1A_2 = 2\alpha$ како надворешен агол на рамнокракиот $\triangle OB_1A_1$. Од исти причини $\angle A_2B_1B_2 = \angle B_2B_1A_2 = 3\alpha$, $\angle B_2A_2B_3 = \angle A_2B_2B_3 = 4\alpha$, $\angle A_3B_2B_3 = \angle B_3B_2A_3 = 5\alpha =$



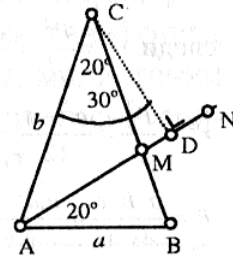
$$5 \cdot 15 = 75^\circ.$$

Ако имаме уште една отсечка B_3A_4 што е еднаква на отсечката OA_1 кон истата искршена отсечка тогаш $\triangle A_3B_3A_4$ е исто така рамнокрак па $\angle B_3A_3A_4 = \angle B_3A_4A_3 = 6\alpha = 90^\circ$, што е невозможно со што тврдењето е докажано.

б) Ако го имаме предвид претходниот доказ, тогаш можеме да заклучиме дека десеттата отсечка со деветтата ќе формира рамнокрак триаголник со агол при основата 9α , што е можно само ако $9\alpha < 90^\circ$, т.е. $\alpha < 10^\circ$.

Пример 2. Ако аголот при врвот на рамнокракиот $\triangle ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC} = b$ и $\overline{AB} = a$) е 20° тогаш важи равенството $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Докажи!

Доказ: Според условот на задачата $\triangle ABC$ е рамнокрак, а $\angle ACB = 20^\circ$. Да ја конструираме полуправата AN така што $\angle BAN = 20^\circ$. Ако $AN \cap BC = \{M\}$ тогаш $\triangle ABM$ е рамнокрак ($\overline{AB} = \overline{AM}$). $\triangle ABC \sim \triangle ABM$ бидејќи $\angle BAM = \angle ACB = 20^\circ$ и $\triangle ABC$ е заеднички. Оттука следи $\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$; $\frac{\overline{BM}}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow \overline{BM} = \frac{a^2}{b}$, па $\overline{CM} = b - \overline{BM} = b - \frac{a^2}{b}$.



На полуправата AN ја избираме точката D така што $\angle ACD = 30^\circ$. Бидејќи $\angle CAD = \angle CAB - \angle MAB = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, значи $CD \perp AN$ т.е. $\triangle ADC$ е правоаголен, па $\overline{AD} = \frac{b}{2}$ (како катета спроти агол од 30° во

правоаголен триаголник), а $\overline{MD} = \frac{b}{2} - a$ и $\overline{CD} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$.

Бидејќи $\triangle MDC$ е правоаголен, според Питагоровата теорема имаме $\overline{CM}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{CD}^2$. Со замена добиваме

$$\left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \Leftrightarrow 4a^4 = -4ab^3 + 12a^2b^2 \Leftrightarrow a^3 = 3ab^2 - b^3 \text{ или } a^3 + b^3 = 3ab^2, \text{ што требаше да се докаже.}$$

Пример 3. Ако должините на страните на еден триаголник се три последователни броја, тогаш меѓу радиусите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот важи равенството $R=2r+\frac{1}{2r}$, каде што R е радиус на опишаната, а r на впишаната кружница. Докажи!

Доказ: Да ги означиме должините на страните на триаголникот со: $a-1$, a и $a+1$, тогаш според Хероновата формула имаме $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$; $P = \frac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4}$. Од $P = r \cdot s$

$$\text{следи } r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{a^2-4}{12} \Leftrightarrow a^2 = 12r^2 + 4; \quad r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{a^2-4}{12} \Leftrightarrow a^2 = 12r^2 + 4;$$

$$r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{a^2-4}{12} \Leftrightarrow a^2 = 12r^2 + 4. \quad \text{Од } P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \quad \text{следи } R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4P};$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4s \cdot r} = \frac{a(a^2-1)}{6ar} = \frac{a^2-1}{6r} = \frac{12r^2+3}{6r} = 2r + \frac{1}{2r}, \quad \text{т.е. } R = 2r + \frac{1}{2r}, \quad \text{што требаше да се докаже.}$$

Пример 4. Ако страната $b = \overline{AC}$ во $\triangle ABC$ е аритметичка средина од страните $a = \overline{BC}$ и $c = \overline{AB}$, тогаш важи равенството $6R \cdot r = a \cdot c$ (R и r радиуси на опишаната и впишаната кружница на $\triangle ABC$). Докажи!

Доказ: Од условот на задачите имаме дека $b = \frac{a+c}{2}$ или $2b=a+c$. Од друга страна полупериметарот s на $\triangle ABC$ е

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(a+c)+b}{2} = \frac{3b}{2}. \quad \text{Познато е дека } r = \frac{P_{\Delta}}{s} \quad \text{и } R = \frac{abc}{4P_{\Delta}}, \quad \text{па}$$

$$\text{тогаш } R \cdot r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4P_{\Delta}} \cdot \frac{P_{\Delta}}{s} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4P_{\Delta}} \cdot \frac{P_{\Delta}}{\frac{3b}{2}} = \frac{a \cdot c}{6} \quad \text{или } 6Rr = a \cdot c \quad \text{што требаше}$$

да докажеме.

Задача 1. Ако t_a , t_b и t_c се должини на тежишните линии во правоаголникот триаголник ABC докажи: $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$

- *продолжува* -

Иван Трајков, Скопје

УСЛОВНИ РАВЕНСТВА И УСЛОВНИ НЕРАВЕНСТВА

- продолжение -

Ќе решиме уште неколку занимливи условни неравенства.

Пример 5. Ако a, b, c и d се должини на страните на еден четириаголник, а m и n должини на неговите дијагонали, тогаш важи неравенството $(a+b+c+d)(m+n) > 2(m^2+n^2)$. Докажи.

Доказ: Ќе разгледаме случаи кога четириаголникот е конвексен и кога тој е неконвексен.

Користејќи го односот меѓу страните кај триаголниците имаме:

$$a+b > m \text{ и } c+d > m \quad \dots(1)$$

$$a+d > n \text{ и } b+c > n \quad \dots(2)$$

Со собирање на неравенствата добиваме $a+b+c+d > 2m$ и

$a+b+c+d > 2n$. Ако овие две неравенства ги помножиме соодветно со m и n ($m > 0, n > 0$) добиваме $(a+b+c+d)m > 2m^2$ и $(a+b+c+d)n > 2n^2$ со собирање на овие две неравенства добиваме

$$(a+b+c+d)(m+n) > 2(m^2+n^2)$$

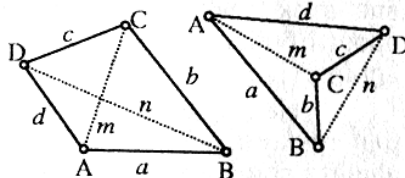
со што неравенството е докажано.

Пример 6. Ако $\triangle ABC$ е правоаголен со должина на катети a, b и хипотенуза c , тогаш важи неравенството $c^3 > a^3 + b^3$. Докажи!

Доказ: Бидејќи $\triangle ABC$ е правоаголен, т.е. $a^2 + b^2 = c^2$ и $c > a, c > b$. Ако во неравенствата помножиме со a^2 , односно со b^2 соодветно, а потоа ги собереме добиваме: $c \cdot a^2 > a \cdot a^2$ и $c \cdot b^2 > b \cdot b^2$; $c \cdot a^2 + c \cdot b^2 > a \cdot a^2 + b \cdot b^2$, $c \cdot c^2 > a^3 + b^3$ т.е. $c^3 > a^3 + b^3$, со што неравенството е докажано.

Пример 7. Ако триаголникот ABC е рамнострани со страна a чии темиња лежат на три паралелни прави p, q и t (p е меѓу t и q), а растојанијата од правата p до другите две прави се соодветно c и b , тогаш важи неравенството $a \geq 2\sqrt{b \cdot c}$. Докажи!

Доказ: Дадено е дека $\triangle ABC$ е рамностран со страна a и дека се дадени растојанијата c и b на правата p до правите q и t ($p \parallel q, q \parallel t$). Нека темињата A, B и C лежат соодветно на правите t, q и p . Кон-

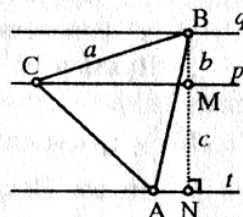


струраме $\overline{BN} \perp t$ и нека е $\overline{BN} \cap p = \{M\}$ при што $N \in t$. Од условот имаме дека $\overline{BM} = b$ и $\overline{MN} = c$. Очигледно е дека

$\overline{AB} \geq \overline{BN}$ или $a \geq b+c$... (1). Познато е уште дека аритметичката средина е поголема од геоме-

триската средина на два броја, т.е. $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$.

Имајќи ги предвид равенството (1) и последното неравенство добиваме $\frac{a}{2} \geq \sqrt{bc}$, т.е.



$a \geq 2\sqrt{bc}$. Равенството ќе важи ако $a = b+c$ и $b = c$. Во тој случај $\overline{AB} \perp t$ се совпаѓа со $\overline{BN}$ и $\overline{BM} = \overline{MN}$, т.е. правата p е еднакво оддалечена од правите q и t.

Пример 8. Должините на страните на $\triangle ABC$ го задоволуваат равенството $a^3 = b^3 + c^3$.

Докажи дека важи неравенството $b^2 + c^2 > a^2$.

Доказ: Бидејќи $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, тогаш од условот $a^3 = b^3 + c^3$ следува дека $a > b$ и $a > c$. Ако неравенствата ги помножиме соодветно со b^2 и c^2 добиваме $ab^2 > b^3$ и $ac^2 > c^3$, со собирање на овие неравенства (лева со лева, а десна со десна страна) добиваме $ab^2 + ac^2 > b^3 + c^3 \Leftrightarrow a(b^2 + c^2) > b^3 + c^3$. Од $b^3 + c^3 = a^3$, имаме $a(b^2 + c^2) > a^3$ т.е. $b^2 + c^2 > a^2$, со што тврдењето е докажано.

Пример 9. Докажи дека должините на страните a, b и c на $\triangle ABC$ ги задоволуваат неравенствата

$$ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc).$$

Доказ: Бидејќи a, b и c се должини од зависноста на страните на $\triangle ABC$ следува дека $(a-b) < c$, $(b-c) < a$ и $(c-a) < b$. Со квадрирање на овие неравенства ги добиваме неравенствата $a^2 + b^2 - 2ab < c^2$, $b^2 + c^2 - 2bc < a^2$ и $c^2 + a^2 - 2ac < b^2$, ако ги собереме лева со лева и десна со десна страна на последните три неравенства добиваме

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) < a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc) \quad \dots (1)$$

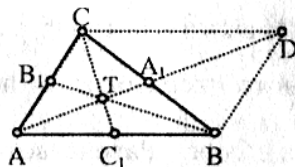
Од друга страна, познато е дека $(a-b)^2 \geq 0$, $(b-c)^2 \geq 0$ и $(c-a)^2 \geq 0$ од каде добиваме дека $2ab \leq a^2 + b^2$, $2bc \leq b^2 + c^2$ и $2ac \leq a^2 + c^2$ па со собирање на лева со лева и десна со десна страна на последните три равенства добиваме

$$2(ab+ac+bc) \leq 2(a^2+b^2+c^2), \text{ т.е. } ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2 \quad \dots(2)$$

Од неравенствата (1) и (2) следува дека $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc)$. Равенство важи ако е $a=b=c$, т.е. ако $\triangle ABC$ е рамностран.

Пример 10. Ако a , b и c се должини на страните, а t_a , t_b и t_c должини на тежишните линии на $\triangle ABC$ тогаш важат неравенствата $\frac{3}{4}(a+b+c) < t_a+t_b+t_c < a+b+c$. Докажи!

Доказ: Нека A_1 , B_1 и C_1 се соодветно средини на страните BC , AC и AB на $\triangle ABC$ а точката D централно симетрична со темето A во однос на A_1 . Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм во кој



$\overline{AD} = 2\overline{AA_1}$, па за $\triangle ABD$ важи неравенството: $2\overline{AA_1} < \overline{AB} + \overline{AD}$. Ако M и N соодветно се централно симетрични со темињата C и B , тогаш се обиваат паралелограмите $AMBC$ и $ABCN$ за коишто важи:

$$2\overline{CC_1} < \overline{BC} + \overline{AC}; \quad 2\overline{BB_1} < \overline{BC} + \overline{AB}.$$

Со собирање на трите неравенства добиваме

$$\overline{AA_1} + \overline{CC_1} + \overline{BB_1} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} \text{ т.е.}$$

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c \quad \dots (1)$$

Нека T е тежиште на $\triangle ABC$. Од триаголниците ABT , BCT и ACT имаме: $\frac{2}{3} \overline{AA_1} + \frac{2}{3} \overline{BB_1} > \overline{AB}$, $\frac{2}{3} \overline{BB_1} + \frac{2}{3} \overline{CC_1} > \overline{BC}$ и $\frac{2}{3} \overline{AA_1} + \frac{2}{3} \overline{CC_1} > \overline{AC}$.

Со собирање на овие три неравенства добиваме $\frac{4}{3}(\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1}) > \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$, т.е. $\frac{4}{3}(t_a + t_b + t_c) > a + b + c$, односно

$$t_a + t_b + t_c > \frac{3}{4}(a + b + c) \quad \dots (2)$$

Од неравенствата (1) и (2) се добива бараното неравенство

$$\frac{3}{4}(a + b + c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c.$$

Задачи:

1. Ако за должините на страните a , b и c на еден $\triangle ABC$ важи $a > b > c$ тогаш важи неравенството $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} > 0$. Докажи!

2. За $\triangle ABC$ познато е дека $h_a \geq a$ и $h_b \geq b$. Докажи дека триаголникот ABC е правоаголен.