ИВАН ТРАЈКОВ
ДРАГАН ГЕОРГИЕВ
СКОПЈЕ

ПРЕСМЕТУВАЊЕ НА ПЛОШТИНАТА НА ТРИАГОЛНИК СО ДАДЕНА ДОЛЖИНА НА НЕГОВИТЕ ВИСИНИ И СО ДАДЕНИ ДОЛЖИНИ НА НЕГОВИТЕ ТЕЖИШНИ ЛИНИИ

Во Нумерус бр.x-1 е изнесено како се пресметуваат страните на триаголник ако се дадени должините на висините.

Овде се поставува прашањето како би ја пресметале плоштината на триаголник ако се дадени должините на висините или пак должините на тежишните линии.

1. Да ги означиме должините на висините со h_a, h_b и h_c, а плоштината на триаголникот со P, тогаш познати се равенствата $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2P}$; $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2P}$ и $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2P}$. Со собирање на трите равенства имаме:

$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{P}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$, но $\frac{a+b+c}{2} = s$, па добиваме

$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{s}{P}$ од каде што за s добиваме:

$$s = P\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \text{- - - - - - - - - - - - (1).}$$

Од друга страна имаме: $a = \frac{2P}{h_a}$, $b = \frac{2P}{h_b}$ и $c = \frac{2P}{h_c}$ - - -(2).

Од равенствата (1) и (2) без тешкотија ги добиваме равенствата: $s-a = P\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{2}{h_a}\right) = P\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)$,

па аналогно и: $s-b = P\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)$ и

и $s-c = P\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)$.

Со замената на последните равенства во Хероновата формула за плоштината P на триаголникот:

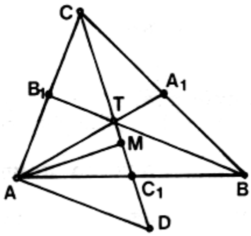
$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ добиваме:

$$P = P^2\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}$$

од каде што на крајот се добива:

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}$$

II. Ако се дадени должините на тежишните линии t_a, t_b и t_c, тогаш плоштината P на триаголникот ABC ќе ја пресметаме на следниот начин:



Да ја продолжиме отсечката TC_1 за $\frac{1}{3}t_c$ до точката D, тогаш плоштините на триаголниците ATC и ATD се еднакви, бидејќи имаат еднакви основи $\overline{CT} = \overline{TD} = \frac{2}{3}t_c$ заедничка висина спуштена од темето A, т.е. AM.

Лесно се докажува дека плоштината на триаголникот ATC е третина од плоштината на триаголникот ABC. Значи, и плоштината на триаголникот ATD е третина од плоштината на триаголникот ABC.

Страните на триаголникот ATD се $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}t_c$. Со примената на Хероновата формула за плоштината на триаголникот имаме:

$t = \frac{\frac{2}{3}t_a+\frac{2}{3}t_b+\frac{2}{3}t_c}{2} = \frac{1}{3}(t_a+t_b+t_c)$, тогаш добиваме:

$t - \frac{2}{3}t_a = \frac{1}{3}(t_b+t_c-t_a)$; $t-\frac{2}{3}t_b = \frac{1}{3}(t_a+t_c-t_b)$ и

$t - \frac{2}{3}t_c = \frac{1}{3}(t_a+t_b-t_c)$, па се добива

$P_{ATD} = \frac{1}{9}\sqrt{(t_b+t_c-t_a)(t_a+t_c-t_b)(t_a+t_b-t_c)t}$ бидејќи е

$P_{ABC} = 3\cdot P_{ATD}$ се добива:

$P_{ABC} = \frac{1}{3}\sqrt{(t_b+t_c-t_a)(t_a+t_c-t_b)(t_a+t_b-t_c)t}$ каде што е

$t = \frac{1}{3}(t_a+t_b+t_c)$.

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус