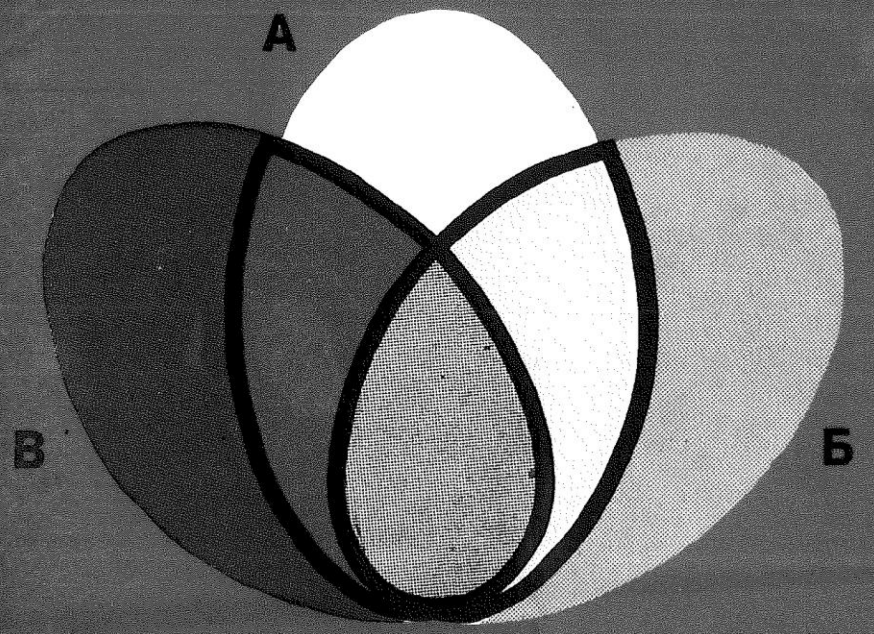
ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

АЛГЕБРА

ЗА I КЛАС НА СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

ПО ПРОГРАМА 5 ЧАСА



ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

АЛГЕБРА

ЗА I КЛАС НА СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

(ПО ПРОГРАМА 5 ЧАСА)

ВТОРО ИЗДАНИЕ

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1975

Рецензенти:

Академик д-р Благој Попов, професор на Природно-математичкиот факултет — Скопје;
Димитар Битраков, професор на Архитектонско-градежен факултет — Скопје и
Иван Трајков, професор во Гимназијата „Раде Јовчевски — Корчагин" — Скопје.

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 02-64/6 од 5 јули 1974 година се одобрува употребата на овој учебник

ПРЕДГОВОР

Учебников е работен според најновата Наставна програма по математика за средното образование, што е усвоена од Републичкиот педагошки совет на СРМ во 1972 год. и го опфаќа материјалот предвиден по алгебра за I клас на училиштата што работат по програма 5 часа неделно.

Учебников е поделен на 11 глави. Во глава I даден е елементарен преглед на некои делови (предвидени со наставната програма) од Теоријата на множествата. Имајќи го предвид огромното значење на поимот множество, авторот се трудеше тој да биде проткаен во целоит понатаму разгледуван материјал.

Во глава II изложен е развитокот на поимот број од природен до рационален и воведени се сите операции со нив. Во главите III и IV обработени се целите и дробните рационални алгебарски изрази и трансформациите со нив. Реалните броеви се изложени во глава V од аспект на стегање на интервали. Тука се внесени и некои поттеми (§ 39, § 40 и § 41) што не се предвидени со наставната програма. Тоа е сторено со цел реалните броеви да бидат построго и целосно изложени, а тие служат како фундамент за продлабочено проучување на останатите математички дисциплини.

Во глава VI е извршено проширување на поимот степен со показател цел и рационален број; воведени се операциите со нив и изложени се нивните својства. Корените, операциите со нив и нивните својства се воведени преку соодветните операции и својства на степените со показател рационален број. Во останатите глави се разгледуваат: функциите, пропорциите, линеарните равенки со една непозната, системите линеарни равенки со две и три непознати, детерминантите од II и III ред, линеарните неравенки и системите линеарни неравенки со една и две непознати.

Авторот настојуваше материјата да биде што појасно изложена, но истовремено и да одговара на новите барања на современата настава по математика.

Изложувањето на секоја тема е проследено со по неколку изработени примери. Учебникот содржи и мала збирка на задачи, која има повеќе методолошки карактер и треба да послужи за утврдување на изложениот материјал.

Се чувствувам пријатно задолжен да им изразам длабока благодарност на другарите рецензенти и на сите членови на Комисијата за учебници по математика при Издавачкото претпријатие „Просветно дело" за опстојното прегледување и драгоцените забелешки, кои придонесоа квалитетот на учебникот во голема мера да се подобри.

Очекувам и колегите — математичари кои ќе работат со овој учебник да го дадат своето мислење и да ми укажат на евентуалните недостатоци, што би требало да се отстранат. Сите предлози и сугестии што би придонесле за усовршување на учебников ќе ги примам со благодарност.

Авторот

ПРЕГЛЕД НА УПОТРЕБУВАНИТЕ СИМБОЛИ

I. ЗНАЧЕНИЕ НА СИМБОЛИТЕ

Симбол	Употреба	Значење
$\in$	$x \in M$	x е елемент на множеството M; или: x припаѓа на M
$\notin$	$x \notin S$	x не е елемент на S; или: x не му припаѓа на S
$\{\mid\}$	$\{x \mid P(x)\}$	Множество од сите x, кои имаат својство P
$\{\ \}$	$\{a, b, c\}$	Множество од елементите a, b и c
$\varnothing$	$\varnothing$	Празно множество
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A е подмножество на B; или A е вклучено (содржано) во B
$\subset$	$A \subset B$	A е стриктно подмножество (прав дел) од B; или: A е строго вклучено (стриктно содржано) во B
$\not\subseteq$	$A \not\subseteq B$	A не е подмножество од B; или: A не е вклучено (содржано) во B
$=$	$A = B$	Знак за равенство. A е еднакво (идентично) со B
$\stackrel{Df}{=}$	$a^2 \stackrel{Df}{=} a \cdot a$	a^2 по дефиниција е еднакво со $a \cdot a$; или: a^2 е замена за $a \cdot a$
$\neq$	$A \neq B$	A не е еднакво со B; или: A е различно од B
$\sim$	$A \sim B$	Множествата A и B се еквивалентни; или A е еквивалентно со B
$\cup$	$A \cup B$	Знак за унија на множества. A унија B
$\cap$	$A \cap B$	Знак за пресек на множества. A пресек B
$\setminus$	$A \setminus B$	Знак за разлика на множества. A без B; или: A минус B
A'_M	A'_M	Комплемент на A во однос на M
$P(M)$	$P(M)$	Партитивно множество на М; или: пе од M
kA	kA	Кардинален број на множеството A
$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	Знак за импликација. Ако е p, тогаш е q; или: од p следува q; или: p го повлекува q
$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	Знак за еквиваленција. p е еквивалентно со q; или: p ако и само ако q
$\stackrel{Df}{\Leftrightarrow}$	$p \stackrel{Df}{\Leftrightarrow} q$	По дефиниција p е еквивалентно со q
$+$	$a + b$	Знак за собирање. a плус b

$-$	$a-b$	Знак за вадење. a минус b
$\cdot$	$a \cdot b$	Знак за множење. a по b
$:$	$a:b$	Знак за делење. a поделено со b
$<$	$a<b$	a е помало од b
$>$	$a>b$	a е поголемо од b
$\leqslant$	$a \leqslant b$	a е помало или еднакво со b; или: a не е поголемо од b
$\geqslant$	$a \geqslant b$	a е поголемо или еднакво со b; или: a не е помало од b
$\approx$	$a \approx b$	a е приближно еднакво со b
$\| \ \|$	$\|a\|$	Апсолутна вредност (модул) на бројот a
(;)	$(a; b)$	Отворен интервал или само интервал
[;]	$[a; b]$	Затворен интервал
(,)	(a, b)	Подредена двојка броеви a и b
a^n	a^n	a на n-ти степен
$\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[n]{a}$	n-ти корен од a
$f(x)$	$f(x)$	Функција од x; или: f од x

II. БУКВИ СО СТАЛНО ЗНАЧЕНИЕ

U Универзално множество
N Множество на природните броеви
N_0 Проширено множество на природните броеви
Z Множество на целите броеви
Q Множество на рационалните броеви
I Множество на ирационалните броеви
R Множество на реалните броеви

УВОД

Математиката, како и секоја друга наука, работи со редица *поими*, што се изразуваат со разни „стручни термини" или „стручни изрази".

Реченицата, со која се разјаснува смислата и утврдува содржината на даден поим, се вика *дефиниција*.

Ние, можеби, одлично можеме да си претставиме што е квадрат, кружница, топка, број итн; но во математиката за нив можеме да говориме дури откако истите ќе ги дефинираме. Дефинирањето (определувањето) на даден поим (да речеме квадрат) се состои во тоа што тој се објаснува со помош на други „веќе познати" поими (на пример, паралелограм, ромб или правоаголник). Но, тие „веќе познати" поими сме биле должни порано да ги дефинираме со помош на некои други уште попорано познати поими итн.

Очевидно е дека тој синџир (на определување на еден поим со помош на друг) неминовно ќе прекине кога ќе дојдеме до некој поим, кој не може да се објасни, бидејќи „веќе познати" поедноставни поими нема. Таквите поими присилени сме да ги примиме без дефиниција и да ги објаснуваме единствено преку наведување на низа примери од секојдневниот живот.

Поимите, што ги прифаќаме без дефиниција, се викаат *појдовни* или *основни поими*, а сите други поими — *изведени* или *дефинирани поими*.

Во редот на основни поими спаѓаат поимите: *множество*, *точка*, *права*, *рамнина*, *величина*, *број* и др.

При дефинирањето на изведените поими нужно е да настојуваме дефинициите да бидат кратки, јасни, точни и во нив да „не се вртиме во круг", како на пример во дефинициите: Квадрат е ромб со прави агли, а Ромб е квадрат со неправи агли.

Математичките објекти, што се предмет на проучување во математиката, се карактеризираат со најразлични *својства* и се наоѓаат во одредени *соодноси* (*релации*).

По однос на многубројните својства на одделните објекти, како и нивните соодноси, често искажуваме одредени *тврдења* формулирани со соодветни реченици, или запишани со математички симболи.

Во математиката (како и во секоја наука) она што се тврди треба и да се докаже. Секое тврдење, дури откако ќе се докаже, станува призната математичка вистина.

Постапката со која се уверуваме во вистинитоста на некое тврдење по пат на аргументирано логичко размислување, се вика *доказ*.

При докажувањето на кое и да било тврдење, можеме да се повикуваме само на порано докажани вистини. Но тие „порано докажани" вистини сме биле должни да ги докажеме со помош на некои други уште попорано докажани вистини, итн.

Веднаш станува јасно (слично како и при дефинирањето на поимите) дека неминовно ќе дојдеме до некои тврдења кои веќе не можат да се докажат со помош на некои други порано докажани вистини, бидејќи такви нема. Таквите тврдења, кои не можат да се докажат со помош на некои поелементарни, а да би имале некоја основа на која би можеле да градиме (да ги докажуваме другите тврдења), присилени сме да ги прифатиме без доказ.

Тврдењата, што ги прифаќаме како вистинити без доказ, се викаат појдовни тврдења или аксиоми, а сите други тврдења — изведени тврдења или теореми.

Често велиме дека: „аксиома е очевидна вистина за која не е потребен доказ". Тоа е погрешно. Не секоја аксиома е толку очевидна, и само заради тоа ја прифаќаме без доказ. Има аксиоми кои не се попрости (поочевидни) од некои теореми.

Формулацијата на секоја теорема обично се состои од два дела: прв дел — *услов* или *претпоставка* (*хипотеза*), а втор — *заклучок* (*тврдење* или *теза*). Во првиот дел се говори за она што е дадено (или се претпоставува), а во вториот дел се говори за она што во теоремата се тврди и треба да се докаже. На пример, во теоремата „Во секој триаголник збирот на внатрешните агли (α, β и γ) изнесува 180°" претпоставка е: аглите α, β и γ да се внатрешни агли на еден ист (кој и да било) триаголник; а тврдење е: нивниот збир изнесува 180°. Истата теорема може да се формулира и вака: „Ако α, β и γ се внатрешни агли на некој триаголник, тогаш $\alpha+\beta+\gamma=180°$".

Теорема, која непосредно следува (лесно се увидува нејзината вистинитост) по докажувањето на некоја друга теорема, се вика *последица* на таа теорема. На пример, последица на погоре наведената теорема е следнава теорема: „Ако еден внатрешен агол во триаголникот е прав (или тап), тогаш другите два агла се остри"

Теорема, која ја користиме при докажувањето на некоја посложена теорема, се вика *помошна теорема* или *лема*.

Има теореми, чија примена е почеста, поради што и нивното значење е поголемо. Таквите теореми, за разлика од другите, понекогаш ги викаме уште и *закони*.

Истакнавме дека вистинитоста на теоремите ја утврдуваме со доказ. Доказот може да биде *директен* и *индиректен*.

Кај директниот доказ поаѓаме од претпоставката на теоремата и со примена на некои познати (докажани) теореми и аксиоми доаѓаме до вистинитоста на тезата. А кај индирекниот доказ (или *доказ од спротивното*) претпоставуваме да е тезата неточна, односно да е точно спротивното од она што го тврди теоремата. Ако по пат на логичко размислување дојдеме до некоја противречност (контрадикција) со претпоставката на теоремата (со она што е дадено), или со некоја аксиома или порано докажана теорема, тогаш од тоа извлекуваме заклучок: штом спротивното од она што тврди теоремата е неточно, останува да е точно тврдењето на теоремата.

И двата вида докази ќе ги илустрираме на повеќе примери до кои ќе наидеме во разгледувањето на темите.

Глава I

МНОЖЕСТВА

§ 1. МНОЖЕСТВО

1. ПОИМ ЗА МНОЖЕСТВО. ПРАЗНО МНОЖЕСТВО

Поимот за *множество* е еден од основните (најважни) поими во современата математика. Тој поим обично се зема за појдовен и како таков не се дефинира со помош на други поими. Неговата смисла и содржина ја разјаснуваме преку наведување на низа примери. Така, на пример, велиме дека множество образуваат: сите ученици во еден клас, сите жители на градот Скопје, сите риби во Преспанското Езеро, сите дрвја во една шума, сите молекули на едно парче железо, сите точки од една права итн.

Постојат и одделни зборови кои со своето значење кај нас создаваат претстава за множество објекти, како на пример, зборовите: *собор* (множество луѓе), *јато* (множество птици), *стадо* (множество овци) *рој* (множество пчели), *семејство*, *фамилија*, *ансамбл*, *колекција* итн.

Од наведениве примери гледаме дека *секое множество се состои од одредени објекти, што се обединети во една целина според некое нивно заедничко карактеристично својство*. Таа мисла основачот на Теоријата на множествата Георг Кантор (1845 — 1918) ја има искажано вака: „*Множеството е нешто многу, замислено како целина*".

Дефиниција 1. *Објектите од кои се состои множеството, се викаат елементи на множеството.* Претпоставуваме дека:

Сите елементи на едно множество се разликуваат еден од друг.

Множествата ги означуваме со големите печатни букви: A, B, C, ... M, N, ... а елементите на секое множество со малите ракописни букви: a, b, c, ... m, n, ... од латинската азбука.

Ако некое множество M е составено од елементите: a, b, c, d, e и f, тоа симболички го запишуваме вака:

$$M=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$$

а го читаме: *M е множество од елементите a, b, c, d, e и f.*

Разбирливо е, што множествата кои најчесто ќе ги користиме, да ги означуваме секогаш со едни исти букви. Така, на пример, примено е да се означува:

множеството на сите природни броеви со N, т. е.

$$N=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\ldots\}$$

множеството на сите цели броеви со Z,

множеството на сите рационални броеви со Q итн.

За елементите од кои е составено множеството, велиме дека *му припаѓаат* на тоа множество. Реченицата „*Елементот а му припаѓа на множеството М*", или „*а е елемент на множеството М*", симболички ја запишуваме:

$$a \in M.$$

Пример: $1 \in N;\quad 2 \in N;\quad 7 \in N;\quad -2 \in Z;\quad \frac{3}{5} \in Q;\quad 0 \in Z.$

Ако, пак, елементот *а не му припаѓа* на множеството M, или *а не е елемент* на M, тогаш пишуваме:

$$a \notin M.$$

Пример: $\frac{4}{5} \notin Z;\quad \pi \notin Q;\quad -2 \notin N.$

Елементите на множествата можат да бидат објекти од најразлична природа. На пример, тие можат да бидат: атоми, молекули, луѓе, букви, точки, прави, броеви, равенки, функции итн.

Математиката, поаѓајќи од одделните примери на множества со најразлични елементи, ги проучува оние својства што се заеднички на многуте „конкретни множества". Заклучоците и сознанијата, до кои доаѓаме при тоа проучување, еднакво се однесуваат (важат) како за броевите, така и за точките на геометриската фигура, а исто така и за множествата букви, или за кои да било други множества.

Со тоа се објаснува и широката примена на *теоријата на множествата* и математиката во најразличните области на науката (физиката, хемијата, биологијата, лингвистиката, економијата итн).

Често се случува да разгледуваме некое множество, чии елементи претставуваат пак множества. На пример: паралелките во училиштето можат да се разгледуваат како елементи на множеството од сите паралелки во училиштето; иако секоја паралелка сама за себе претставува множество од ученици.

За математиката од посебна важност се множествата кои се составени од „математички објекти" — броеви, точки, равенки, функции итн.

Дефиниција 2. *Множества, чии елементи се броеви, се викаат бројни множества.*

Нужно е да истакнеме дека поимот „множество" во математиката не е синоним на зборот „многу" од секојдневниот живот. Во математиката се покажало многу корисно и згодно разгледувањето и на множества кои содржат само три или два елемента, па дури и само еден единствен елемент (*единично множество*). Исто така, се разгледуваат и „множества" кои не содржат ниту еден елемент.

Дефиниција 3. *Множество кое не содржи ниту еден елемент, се вика празно множество.* Го означуваме со симболот $\varnothing$.

На пример: Секој ден (па дури и секој час) дежурниот ученик го утврдува множеството на отсутните ученици од наставата. Однапред не знаеме дали тоа множество ќе биде празно или не. Велиме множеството на отсутните ученици е празно, само во случај кога нема отсутни ученици од наставата, а во секој друг случај тоа множество е непразно.

Други примери: а) Множеството на тристагодишни старци е празно множество; б) Множеството триаголници кои имаат по два прави агли е празно множество; в) Множеството постојани жители на Месечината (барем засега) е празно множество.

Бидејќи празното множество е без елементи, тоа сите празни множества се исти. Тој факт го искажуваме уште и вака:

Празното множество е единствено, т. е. нема две различни празни множества.

Множеството кое не е празно може да има конечно или бесконечно многу елементи. Според тоа, ќе разликуваме *конечни множества* (множеството ученици во класот, множеството букви во нашата азбука, множеството дрвја во градината итн.) и *бесконечни множества* (множеството точки на една права или рамнина, множеството на сите прави во една рамнина или во просторот итн.).

Во некои случаи елементите на множеството не се земаат како и да е, туку во еден определен ред (поредок). Подредувањето на елементите на дадено множество може да се врши на разни начини. На пример, множеството ученици во класот може да се подреди според азбучниот ред на нивните презимиња (кога правиме список), или според нивната височина (кога ги распоредуваме во клупите), или според нивниот успех, итн.

Дефиниција 4: *Множеството* $M=\{a, b, c, \ldots\}$ *е подредено, ако меѓу неговите елементи е утврден некој поредок што ги исполнува следниве услови (трихотомија):*

1°. За кои и да е два елемента a и b едниот од нив му *претходи* на другиот: или a му претходи на b, или b му претходи на a;

2°. За секои три елементи a, b и c од соодносите: „a му претходи на b" и „b му претходи на c" следува соодносот „a му претходи на c".

И поимите „припаѓа" и „претходи" спаѓаат во редот на основните поими. Покрај основните поими, постојат и такви математички поими чија смисла и содржина ја утврдуваме со помошта на некои од основните поими преку соодветни дефиниции. Таквите поими се викаат *дефинирани поими.*

2. НАЧИНИ НА ЗАДАВАЊЕ НА МНОЖЕСТВАТА

Дефиниција 5. *Едно множество велиме дека е зададено (добро дефинирано) кога за секој објект со сигурност може да се каже дали тој е елемент на тоа множество или не.*

Наједноставен начин на задавање на множеството е преку непосредното поединечно набројување на сите елементи што влегуваат во неговиот состав (аналитички начин). Потоа, точниот целосен список со називите на сите елементи на множеството го ставаме во големи загради. На пример, да го разгледаме множеството M на сите едноцифрени природни броеви. Јасно е дека елементи на множеството M се: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и освен нив, множеството M други елементи нема. Тоа го запишуваме:

$$M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Со заградите се истакнува дека објектите што се издвоени во нив образуваат една целина. Освен тоа, тие играат улога и на класификатор, бидејќи објектите се класифицираат на оние што се елементи на M и оние кои не се елементи на M. На пример: $2 \in M$: $0 \notin M$; $15 \notin M$.

Кога множеството е зададено преку составување на списокот на сите негови елементи (аналитички), поредокот на набројувањето на елементите не е битен. На пример: множеството составено од елементите: ○, △, □ може да биде запишано на кој и да е од следниве начини:

{○, △, □} или {△, ○, □} или {□, △, ○}.

Кога веќе зборуваме за симболичките записи, да го напомнеме уште и ова: Симболите $\{a\}$ и $\{\{a\}\}$ треба јасно да се разликуваат еден од друг. Тие означуваат три различни објекти. Симболот a означува елемент, симболот $\{a\}$ означува множество, кое содржи единствен елемент a; а симболот $\{\{a\}\}$ означува множество кое содржи единствен елемент — множеството $\{a\}$.

Слично на ова, треба да се прави разлика и меѓу симболите $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$. Објасни, што означува едниот, а што другиот симбол!

Не секое множество може да биде зададено со набројување на сите негови елементи. На пример: нека M е множество на сите непарни природни броеви. Елементи на множеството M се: 1, 3, 5, 7, 9, 11, . . .,но да се набројат сите непарни природни броеви е неможно. Затоа, по бројот 11 ставаме неколку точки, со кои истакнуваме дека во множеството има уште елементи, а списокот е прекинат бидејќи сите елементи не можеме да ги наведеме. Во таков случај пишуваме:

$$M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$$

Освен горниот начин на задавање на множество, постои и друг, универзален начин, со укажување на карактеристичното својство на елементите на множеството.

Множеството, согласно дефиницијата 5, ќе биде зададено ако е утврдено и наведено заедничкото својство што го имаат сите елементи, што припаѓаат на множеството, а го нема ниту еден елемент што не припаѓа на тоа множество. Тоа својство се вика *карактеристично својство* на множеството.

Нека P, е некое карактеристично својство на објектите и нека формулата $P(x)$ означува објектот x што го има (поседува) својството P; тогаш множеството M, зададено со карактеристичното својство P, симболички го запишуваме вака:

$$M = \{x \mid P(x)\},$$

а го читаме: „M е множество од сите објекти x, кои го имаат својството P". Карактеристичното својство на множеството може да биде формулирано најразлично. Ќе го покажеме тоа на неколку примери:

Пример 1. Множеството $M = \{5, 6, 7\}$ зададено со набројување на неговите елементи, како може да биде зададено со помош на некое карактеристично својство?

а) Карактеристично својство на множеството M може да биде својството P: да се биде во списокот, што е наведен во заградите. Тогаш $P(x)$ ќе означува: $x = 5$ или $x = 6$ или $x = 7$, а множеството M го запишуваме вака:

$$M = \{x \mid (x = 5, x = 6, x = 7)\}$$

б) Карактеристично својство на множеството M може да биде и својството: да се биде решение на равенката $(x-5)(x-6)(x-7)=0$. Тогаш множеството M го запишуваме:

$$M=\{x \mid (x-5)(x-6)(x-7)=0\},$$

а го читаме: Множеството M од сите x, такви кои да се решенија на равенката $(x-5)(x-6)(x-7)=0$.

Карактеристичното својство на множеството многу често ќе го изразуваме со помош на некоја равенка или неравенка.

в) За карактеристично својство на множеството M може да се земе и ова својство: да се биде природен број што се наоѓа меѓу броевите 4 и 8. Тогаш множеството M ќе го запишеме:

$$M=\{x \mid x \in N \text{ и } 4<x<8\},$$

а го читаме: Множество M од сите x, кои имаат својство: x е природен број и го задоволува условот $4<x<8$.

Пример 2. M е множество на сите многуаголници. Тоа множество го означуваме вака: $M=\{x \mid x \text{ е многуаголник}\}$.

Пример 3. S е множеството на сите точки од рамнината α, што имаат својство да бидат еднакво оддалечени од две фиксни точки A и B од таа рамнина. Множеството S од сите точки M што го имаат горното својство, кратко го запишуваме на следниов начин:

$$S=\{M \mid M \in \alpha,\ A \in \alpha,\ B \in \alpha \text{ и } MA=MB\}.$$

§ 2. НЕКОИ РЕЛАЦИИ (СООДНОСИ) МЕЃУ МНОЖЕСТВАТА

Познато е дека секои два броја се наоѓаат во некоја *релација* или *соодност*. Тие релации ги искажуваме со зборовите: „поголем“, „помал“, или „еднаков“. Две прави можат да се наоѓаат во релација да се „паралелни“, да се „нормални“ и др. Исто така, и меѓу луѓето постојат разни релации (соодноси). На пример, тие можат да бидат: „добри пријатели“, „соседи“, „врсници“, „браќа“, „соученици“, „сограѓани“ итн. Тука ќе се задржиме само на две релации меѓу множествата: *инклузија* (*вклучување*) и *еднаквост* (*идентичност*).

1. ПОДМНОЖЕСТВО

Нека се дадени множествата:

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\} \quad \text{и} \quad B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}.$$

A е множество на сите парни едноцифрени броеви, а B — множество на сите едноцифрени природни броеви.

Забележуваме дека сите елементи на множеството A претставуваат и елементи на множеството B. Во таков случај велиме дека множеството A е *вклучено* (е содржано) во множеството B, или дека множеството A е *подмножество* (или *дел*) на множеството B и симболички го означуваме:

$$A \subseteq B.$$

Симболот $\subseteq$ се вика симбол за инклузија (вклучување) или симбол за подмножество.

Тоа е одредена релација меѓу множествата A и B, која во општ вид ја дефинираме вака:

Дефиниција 1. *Множеството A е подмножество (или дел) на множеството B, ако и само ако секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B.*

Тоа симболички го запишуваме:

$$A \subseteq B \overset{Df}{\Leftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in B). \qquad (1)$$

Тука симболот $\Rightarrow$ е знак за *импликација*, при што исказот (импликацијата) $p \Rightarrow q$ се чита: „*Ако е p, тогаш е q*", или „*Од p следува q*" или „*p повлекува q*".

Симболот $\Leftrightarrow$ е знак за *еквиваленција* и се чита „*еквивалентно*" или „*ако и само ако*". Исказот $p \Leftrightarrow q$ означува дека истовремено важи и $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow p$.

Симболот, пак, $\overset{Df}{\Leftrightarrow}$ означува дека еквиваленцијата „$\Leftrightarrow$", односно формулата (1), е воведена по дефиниција, и се чита: „по *дефиниција ако и само ако*" или „*по дефиниција еквивалентно*".

Примери:

1. Множеството на трапезите е вклучено во множеството на четириаголниците (Секој трапез е четириаголник).

2. Множеството на ученичките во класот е подмножество на множеството на сите ученици во класот итн.

2. УНИВЕРЗАЛНО МНОЖЕСТВО. ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ.

Јасно е дека во различни области на науката се разгледуваат и различни множества на објекти. Така, на пример, елементите на множествата и нивните подмножества што ги проучуваме во аритметиката се броеви, во геометријата — точки, во хемијата — атоми и молекули, итн.

Во многу проучувања, разгледуваните множества претставуваат секогаш подмножества на некое множество U. Во таков случај множеството U во нашите проучувања, велиме дека има универзално значење, па затоа ќе го викаме *универзално множество* и ќе го означиме со U.

Дефиниција 2. *Множеството од сите елементи, што се предмет на проучување во дадена област на науката, се вика универзално множество за таа област.*

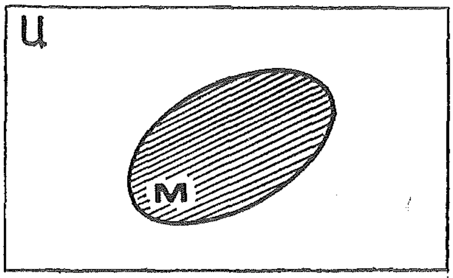
Како што се гледа, тој поим е многу релативен и варира од еден до друг проблем.

Со цел да се олеснат расудувањата и заклучувањата при разгледувањето на различните множества и нивните релации, се служиме со разни графички цртежи — наречени *Венови дијаграми.*

Универзалното множество независно од природата на неговите елементи, обично, графички го претставуваме со еден правоаголник или, поточно речено, со множеството точки од тој правоаголник.

Секое друго множество M, како подмножество на U, го претставуваме со дел од правоаголникот заграден со произволна крива затворена линија (сл. 1).

При тоа, означените точки, а понекогаш и сите точки од кривата и заградениот дел од рамнината со неа, ги сметаме како елементи на множеството M. Треба да се има предвид дека тоа се само скици, кои ни овозможуваат релациите меѓу различните множества графички да ги претставиме како релации меѓу множествата од точки во рамнината на цртежот.



Сл. 1

При комплицувани цртежи правоаголникот, со кој го означуваме универзалното множество U, замислуваме дека, е целиот лист хартија, па затоа не го цртаме.

Бројните множества и различните нивни подмножества, освен со Венови дијаграми, често графички ги претставуваме и со точки на бројната оска.

3. СВОЈСТВА НА РЕЛАЦИЈАТА ИНКЛУЗИЈА

Релацијата инклузија ги има следниве својства:

Теорема 1. *Секое множество е вклучено во само себе си,* т. е.

$$A \subseteq A.$$

Доказ: Тврдењето непосредно следува од дефиницијата на релацијата инклузија.

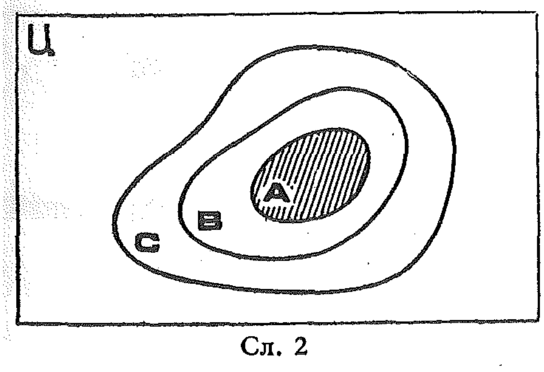
Својството да се биде во некоја релација со самиот себе се вика *рефлексивност*, а релацијата што го има (поседува) тоа својство се вика *рефлексивна релација.*

Теорема 2. Нека A, B и C се множества. Тогаш:

$$(A \subseteq B \text{ и } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C.$$

Ова својство се вика *транзитивност*, а релацијата што го има тоа својство се вика *транзитивна релација.*

Доказ: Бидејќи е $A \subseteq B$, тоа значи дека сите елементи на A се елементи и на B; но бидејќи е $B \subseteq C$, тоа значи дека сите елементи на B се елементи и на C. Следователно и сите елементи на A се елементи на C, т. е. ќе биде $A \subseteq C$.



Сл. 2

Тоа може да се види и од Веновиот дијаграм на сл. 2.

Бидејќи празното множество не содржи ниту еден елемент, затоа можеме да сметаме дека сите негови елементи се вклучени во кое и да е множество M. Поаѓајќи од горното, примено е дека:

Празното множество е подмножество на секое множество M, т. е

$$\varnothing \subseteq M.$$

4. ЕДНАКВОСТ (СОВПАЃАЊЕ) НА МНОЖЕСТВА

Нека A е множество на трапези со складни дијагонали; а B — множество на рамнокраки трапези.

Познато ни е дека секој трапез со складни дијагонали претставува и рамнокрак трапез, т. е. $A \subseteq B$. Но точно е и обратното: Секој рамнокрак трапез има складни дијагонали, т. е. $B \subseteq A$.

Во таков случај, кога $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, всушност множествата A и B се состојат од едни исти елементи, па велиме дека тие *се совпаѓаат* или дека се *еднакви* (*идентични*) и пишуваме

$$A = B$$

Тоа е исто една релација меѓу множествата A и B, која во општ вид ја дефинираме:

Дефиниција 3. *Множествата A и B се совпаѓаат* (*или се еднакви*) *тогаш и само тогаш, ако секој елемент на множеството A е елемент и на множеството B и ако секој елемент на B е елемент и на A*, т. е.

$$A = B \overset{Df}{\Leftrightarrow} (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A).$$

Примери: 1. $\{3, 4, 5\} = \{5, 3, 4\}$.

2. $\{3, 5, 5, 5, 7, 7, 8\} = \{3, 5, 7, 8\}$.

Тоа е затоа, бидејќи и двете множества се состојат од едни исти елементи — броевите 3, 5, 7, 8. Тоа покажува дека *секој елемент на множеството треба да се смета само по еднаш*, кое нешто е во полна согласност и со поимот за множество како *целина на различни елементи*.

Релацијата еднаквост на множествата ги има следниве својства, кои непосредно следуваат од самата дефиниција.

1°. *За секое A, важи* $A = A$ (Својството на *рефлексивност*).

2°. *За секои две множества*: $A = B \Rightarrow B = A$.

Ова својство се вика *симетричност*, а релацијата која го има тоа својство се вика *симетрична релација*.

3°. *За кои и да е три множества A, B, C важи*:

$$(A = B \text{ и } B = C) \Rightarrow A = C \quad (\text{Својство на } \textit{транзитивност})$$

Според тоа: Релацијата еднаквост на множествата е рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Да испитаме какви сé уште случаи можат да настанат меѓу две дадени множества A и B.

Од разгледаните две релации видовме дека:

1°. Ако сите елементи на A припаѓаат и на B, т. е. ако $A \subseteq B$, тогаш можни се два случаја: или сите елементи и на B припаѓаат на A, т. е. и $B \subseteq A$; или не сите елементи на B припаѓаат и на A, т. е. $B \nsubseteq A$.

Во првиот случај кога $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, како што видовме меѓу A и B постои релацијата еднаквост и пишуваме $A = B$.

Во вториот случај кога $A \subseteq B$ и $B \nsubseteq A$, т. е. ако постои макар и еден елемент од B, што не припаѓа на A, тогаш велиме дека множеството A е *строго вклучено* во B, или A е *вистинско подмножество* (или *прав дел*) на множеството B.

Ако сакаме овој случај да го разграничиме од општиот случај $A \subseteq B$, тогаш пишуваме $A \subset B$. Значи:

$$A \subset B \overset{Df}{\Leftrightarrow} (A \subseteq B \text{ и } B \nsubseteq A).$$

2°. Ако не сите елементи на A припаѓаат на B, т. е. ако $A \nsubseteq B$, тогаш можни се исто така два случаја во зависност од тоа дали пак сите елементи на B припаѓаат или не припаѓаат на A.

Во првиот случај: Ако $A \nsubseteq B$ и $B \subseteq A$, тогаш $B \subset A$.

Во вториот случај: $A \nsubseteq B$ и $B \nsubseteq A$, т. е. кога ниту A е подмножество на B, ниту B е подмножество на A; а независно од тоа дали тие имаат или немаат заеднички елементи, велиме дека множествата A и B се *неспоредливи*.

Примери: 1. $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$.

2. Множествата $\{1, 6, 5\}$ и $\{1, 5, 7\}$ се неспоредливи, бидејќи $\{1, 6, 5\} \nsubseteq \{1, 5, 7\}$ и $\{1, 5, 7\} \nsubseteq \{1, 6, 5\}$.

5. ПАРТИТИВНО МНОЖЕСТВО

Нека M е произволно множество. Да ги образуваме сите различни подмножества на даденото множество M. Сите тие ќе образуваат едно ново множество кое го викаме *партитивно множество* на множеството M.

Дефиниција 4. *Партитивно множество на множеството M го викаме множеството $P(M)$ (читај пе од M), чии елементи се сите подмножества на множеството M,* т. е.

$$P(M) \overset{Df}{=} \{x \mid x \subseteq M\}$$

Симболот $\overset{Df}{=}$ се чита: „*по дефиниција еднакво*" или „*замена за*"

Пример: Нека е дадено множеството $A = \{1, 2, 3\}$, тогаш

$$P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\} \ \{3\}, \{1, 2\}, \{1,3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

е партитивно множество на множеството A.

ЗАДАЧИ

1. Запиши го множеството: а) на сите денови во неделата, б) на сите градови во нашата Република што имаат над 20000 жители, в) на сите бои во сончевиот спектар, г) на сите прости броеви што се помали од 50!

2. Наведи неколку елементи од множеството на сите зборови што започнуваат со буквата s.

3. Нека A е множество на буквите од македонската азбука, а B множество на буквите од српската азбука. Запиши кои од следниве букви: д, ѓ, ќ, њ, з, џ, се елементи, а кои не се елементи на множеството: а) A, б) B!

4. Запиши го, со набројување на сите елементи, множеството на сите позитивни делители на бројот: а) 60, б) 48, в) 15.

5. Запиши го на два начина множеството на сите природни броеви што го задоволуваат условот: а) $x < 7$, б) $x \leqslant 5$, в) $3 \leqslant x \leqslant 8$.

6. Одреди какви се множествата, конечни или бесконечни: а) $S = \{$книги во библиотеката$\}$, б) $M = \{$кружни линии, што минуваат низ две дадени точки во рамнината$\}$, в) $P = \{$прави што минуваат низ две дадени точки$\}$.

7. Во каква релација се наоѓаат множествата: а) A — множество на сите рамнокраки трапези и B — множество на сите четириаголници со складни дијагонали, б) C — множество на сите правоаголни рамнокраки триаголници и D — множество на сите рамнокраки триаголници, в) S — множество на сите делители на бројот 24 и M — множество на сите прости множители на бројот 36.

8. Во каква релација се наоѓаат множествата:

а) $A = \{x \mid x \in N$ и $x < 7\}$ и $B = \{x \mid x \in N$ и $3 \leqslant x \leqslant 5\}$.

б) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ и $M = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$?

9. Што можеш да кажеш за множеството A, ако важи релацијата $A \subseteq \varnothing$?

10. Нека е $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Запиши ги следниве подмножества од S: а) сите парни броеви од S, б) сите непарни броеви од S, в) сите прости броеви од S, г) сите броеви од S кои се деливи со 2 и со 3 истовремено!

11. Одреди какви се (вистинити или невистинити) следниве искази:

а) $\{$сите прости броеви$\} \subset \{$сите непарни броеви$\}$;

б) $\{$сите броеви деливи со 8$\} \subset \{$сите парни броеви$\}$;

в) $\{$сите квадрати$\} \subset \{$сите правоаголници$\}$;

г) $\{$сите ромбови$\} \subset \{$сите квадрати$\}$?

12. Кои од следниве искази се вистинити: а) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4\}$; в) $2 \in \{1, 2, 3\}$; г) $2 \subset \{1, 2, 3\}$

д) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}\}$?

13. Дадено е множеството $A = \{x, y, z\}$. Запиши го партитивното множество на множеството A.

14. Одреди ги партитивните множества на множествата:

а) $A = \{1, 2\}$; $B = \{1\}$; б) $C = \{\varnothing\}$; $D = \{1, \{2\}\}$.

§ 3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАТА

1. ПРЕСЕК НА МНОЖЕСТВА

Нека се дадени множествата: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

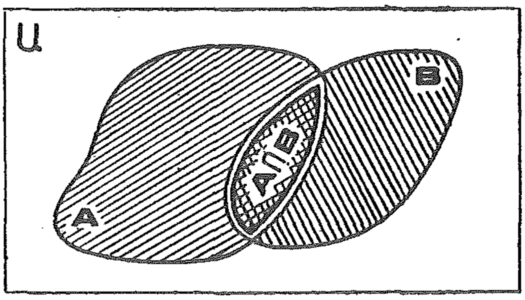
Гледаме тие имаат некои заеднички елементи. Тоа се броевите 3, 4 и 5. Од нив може да се образува ново множество P, за кое велиме да е добиено како резултат на некоја операција извршена над множествата A и B. Така добиеното ново множество P, како и операцијата со чија помош е тоа добиено, се вика *пресек* на множествата A и B и се означува со симболот: $P = A \cap B$.

Оваа операција над две дадени множества во општ вид ја дефинираме:

Дефиниција 1. *Пресек (или оишш дел) на множесшваша A и B се вика множесшвошо $A \cap B$ кое е сосшавено од оние и само оние елеменши кои ӣриӣаѓааш исшовремено и на множесшвошо A и на множесшвошо B,* т. е.

$$A \cap B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \ \text{и} \ x \in B\}.$$

На дијаграмот на сл. 3 пресекот $A \cap B$ е шрафиран два пати и ограничен е со здебелена линија.



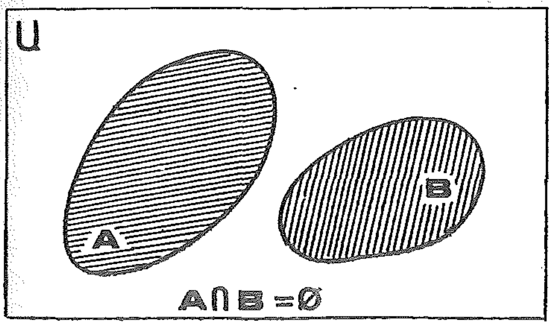
Сл. 3

Примери: 1. Нека R е множество на сите рамнокраки триаголници, а P — множество на сите правоаголни триаголници. Пресекот $R \cap P$ е множество на сите рамнокраки правоаголни триаголници.

2. Ако ги усвоиме следниве дефиниции: а) Ромб е рамностран паралелограм, б) Правоаголник е правоаголен паралелограм, в) Квадрат е рамностран правоаголен паралелограм; и ако A е множество на сите ромбови, а B — множество на сите правоаголници, тогаш пресекот на тие две множества $A \cap B$ е множеството на сите квадрати.

3. $\{2, 3, 5, 7, 9\} \cap \{3, 9, 15\} = \{3, 9\}$.

Ако множествата A и B немаат заеднички елементи (сл. 4), тогаш нивниот пресек е празно множество $\varnothing$.



Сл. 4

Тука може да се види (осети) што се добива со воведувањето на поимот празно множество. Имено, доколку не го воведеме тој поим, пресекот на две произволни множества немаше секогаш да биде пак множество.

Дефиниција 2. *Две множесшва, чиј ӣресек е ӣразно множесшво, се викааш дисјункшни множесшва.*

Примери: 1. Нека A е множество на сите градови во СР Македонија, а B — множество на сите градови во СР Словенија. Тие две множества се дисјунктни, бидејќи $A \cap B = \varnothing$ (Зошто?)

2. $\{1, 3, 5, 7,\} \cap \{2, 4, 6\} = \varnothing$.

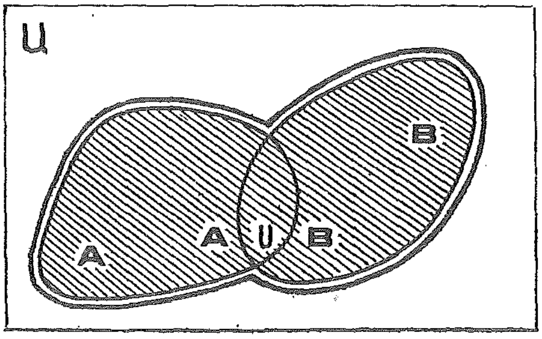
2. УНИЈА НА МНОЖЕСТВА

Нека се дадени множествата $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Ако ги здружиме (соединиме) тие две множества во едно, ќе го добиеме множеството $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Гледаме елементите 3, 4, 5 влегуваат и во множеството A и во множеството B, но во здруженото множество S земени се само по еднаш. (Зошто?

Така образуваното ново множество S го викаме *унија* на множествата A и B и симболички го означуваме: $S = A \cup B$ (читај: A унија B). Унија ја викаме уште и операцијата што е извршена над множествата A и B, како резултат на која е добиено множеството S. Унијата на две дадени множества во општ вид ја дефинираме:



Сл. 5

Дефиниција 3. *Унија на множествата A и B се вика множеството $A \cup B$, кое е составено од сите оние и само оние елементи кои припаѓаат барем на едно од тие множества,* т. е.

$$A \cup B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

На дијаграмот на сл. 5 унијата $A \cup B$ е шрафирана и ограничена со здебелена линија.

Примери: 1. $\{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

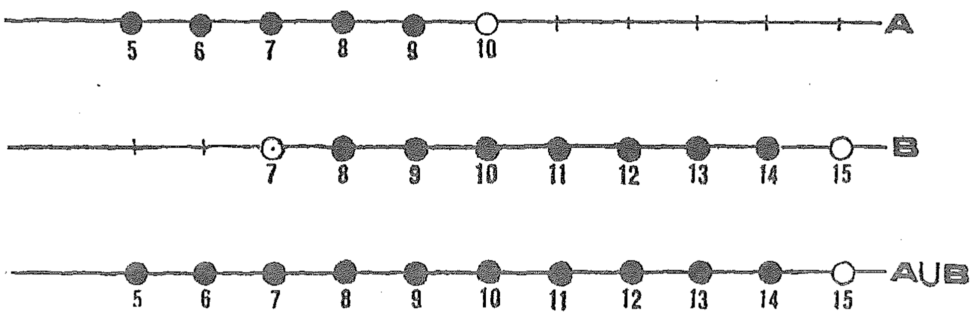
2. Нека A е множество на сите непарни природни броеви, а B — множество на сите парни природни броеви. Тогаш $A \cup B = N$ е множеството на сите природни броеви.

3. Дадени се множествата $A = \{x \mid x \in N$ и $5 \leqslant x < 10\}$ и

$B = \{x \mid x \in N$ и $7 < x < 15\}$ (сл. 6), тогаш

$A \cup B = \{x \mid x \in N$ и $5 \leqslant x < 15\}$.

4. $\{a, b, c\} \cup \{x, y, u, v\} = \{a, b, c, x, y, u, v\}$.



Сл. 6

3. РАЗЛИКА НА ДВЕ МНОЖЕСТВА

Нека $A = \{a, b, c, d, e, h\}$, е множество на учениците од шаховската секција во класот, а $B = \{a, c, m, n, p, r, s\}$ множество на учениците од фото-секцијата во класот. Од тие две множества може да се формираат и следниве две множества $\{b, d, e, h\}$ и $\{m, n, p, r, s\}$.

Првото од нив претставува множество на учениците само од шаховската секција, а кои не се членови и на фото-секцијата. Тоа множество го викаме *разлика* (или *диференција*) на множеството A и множеството B, симболички го означуваме $A \setminus B$.

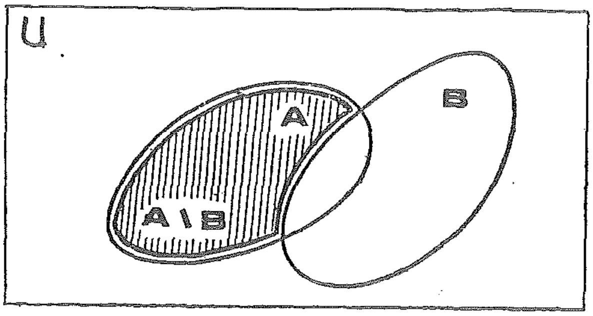
Аналогно, второто множество претставува множество на учениците од фото-секцијата, а кои не се членови и во шаховската секција. Тоа множество е исто разлика, но на множеството B и множеството A. Симболички го означуваме $B \setminus A$ а го читаме: „B без A", или „B минус A".

Како што гледаме множествата $A \setminus B$ и $B \setminus A$ во општ случај не се совпаѓаат, т. е.

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

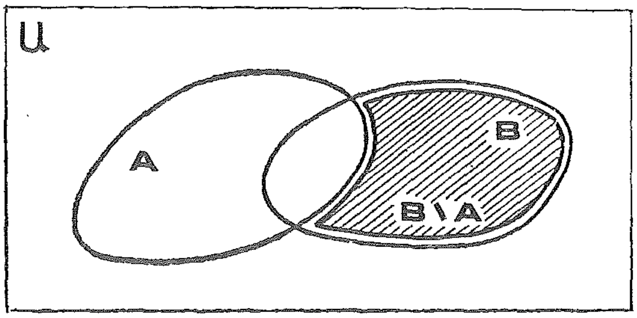
Во општ вид разликата ја дефинираме:

Дефиниција 4. *Разлика меѓу множеството A и множеството B се вика множеството $A \setminus B$ кое е составено од оние и само оние елементи на множеството A, кои не припаѓаат на множеството B* т. е.



Сл. 7

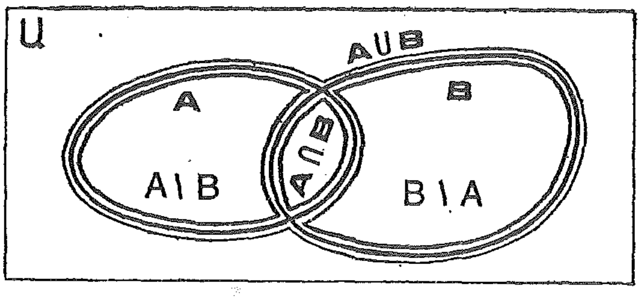
$$A \setminus B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$



Сл. 8

Аналогно: $$B \setminus A \overset{Df}{=} \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}.$$

Разликите $A \setminus B$ и $B \setminus A$ претставени се поединечно со дијаграми на сл. 7 и 8 и заедно на сл. 9.



Сл. 9

Примери: 1. $\{2, 4, 5, 7, 8\} \setminus \{3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 8\}$.

2. Нека A е множество на сите правоаголни триаголници, а B — множество на сите рамнокраки триаголници. Тогаш $A \setminus B$ ќе биде множество на сите правоаголни нерамнокраки триаголници, а $B \setminus A$ множество на сите рамнокраки неправоаголни триаголници.

4. ПОИМ ЗА КОМПЛЕМЕНТ

Нека се дадени множествата: $A = \{3, 6, 9\}$ и $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

M е множество од сите едноцифрени природни броеви, а A е множество од сите едноцифрени природни броеви деливи со 3. Гледаме $A \subset M$.

Ако ја формираме разликата $M \setminus A$, ќе добиеме:

$$M \setminus A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}.$$

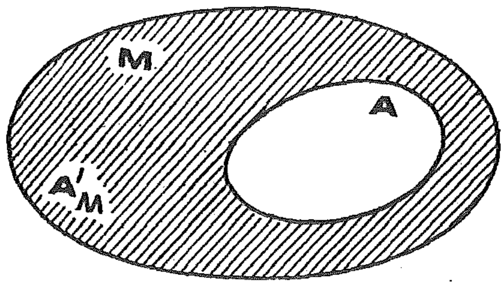
Тоа е множество од сите едноцифрени природни броеви што не се деливи со 3.

Во случајов кога $A \subset M$, разликата $M \setminus A$ се вика уште и *комплемент* (или *дополнение*) *на множеството A во однос на множеството M*, а се означува симболички на еден од следниве начини:

$$C_M(A), \quad C(A), \quad A'_M \text{ или само } A'.$$

Ние ќе ги користиме последниве два симбола.

Всушност, комплементот A'_M претставува разлика на две множества при одреден услов.



Сл. 10

Дефиниција 5. *Комплемент на множеството A во однос на множеството M, ја викаме разликата $M \setminus A$, под услов да е $A \subset M$,* т. е.

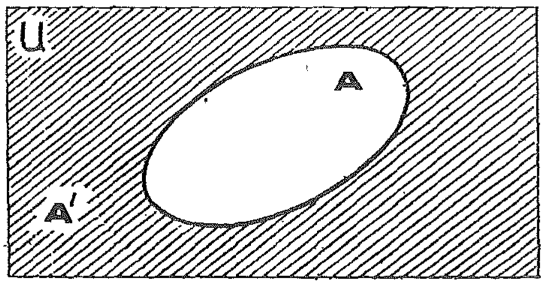
$$A'_M \overset{Df}{=} M \setminus A, \text{ ако } A \subset M.$$

Сосема е очевидно дека (на тоа упатува и дијаграмот на сл. 10) комплементот ги има следниве својства:

$$A \cup A'_M = M \quad \text{и} \quad A \cap A'_M = \varnothing,$$

по кои се одликува и издвојува од разликата $M \setminus A$ во општ случај.

Множеството M, во кое е вклучено даденото множество A, може да биде некое познато множество и како такво да претставува универзално множество. Во таков случај, ако M е некое познато универзално множество, т. е. ако $M = U$, тогаш наместо симболот A'_u кратко пишуваме A' и говориме само за комплемент на множеството A (сл. 11).



Сл. 11

Примери: 1. Множеството на сите триаголници нека е универзално множество, а множеството A — множество на сите правоаголни триаголници. Комплемент на множеството A, т.е. A' ќе биде множеството на сите неправоаголни триаголници.

2. Комплемент на множеството на сите прости природни броеви во множеството на сите природни броеви претставува множеството на сите непрости природни броеви.

3. Нека S е множество на сите согласки во нашата азбука. Тогаш S' ќе претставува множество на сите самогласки.

ЗАДАЧИ

1. Дадени се множествата: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{3, 6, 9\}$. Образувај ги следниве множества: а) $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$. б) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$; в) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$; г) $B \setminus A$, $C \setminus A$, $C \setminus B$.

2. Образувај ги пресекот и унијата од множествата:
$A = \{x \mid x \in N$ и $x \leqslant 5\}$ и $B = \{x \mid x \in N$ и $3 \leqslant x < 7\}$.

3. Запиши го множеството $M = \{x \mid x \in N$ и $2 < x < 8\}$ како пресек на две множества!

4. Запиши го множеството $S = \{x \mid x \in N,\ x < 5$ или $x > 9\}$ како унија на две множества!

5. Одреди го пресекот на множеството A на сите парни природни броеви и множеството B на сите природни броеви што се деливи со 3.

6. Нека е $A = \{$правоаголници$\}$, $B = \{$ромбови$\}$. Одреди што претставува множеството: а) $A \cap B$, б) $A \cup B$.

7. Дадени се множествата: $A = \{x \mid x \in N$ и $x \leqslant 8\}$ и $B = \{x \mid x \in N$ и $9 < x < 15\}$. Одреди ги разликите $A \setminus B$ и $B \setminus A$.

8. Во една паралелка имало 32 ученика. Од нив 20 ученици се членови на групата млади математичари, 14 се членови на шах-секцијата, а 8 ученици не членуваат ни во една од тие две секции. Колку млади математичари се членови на шах-секцијата?

9. Нека A е кое и да е множество. На што се еднакви множествата:
а) $A \cap A$, $A \cap \varnothing$, б) $A \cup A$, $A \cup \varnothing$, в) $A \setminus A$, $A \setminus \varnothing$?

10. Ако е $c \in C$, дали секогаш е: а) $c \in (C \cap M)$, б) $c \in (C \cup M)$, в) $c \in (C \setminus M)$, г) $c \notin (M \setminus C)$?

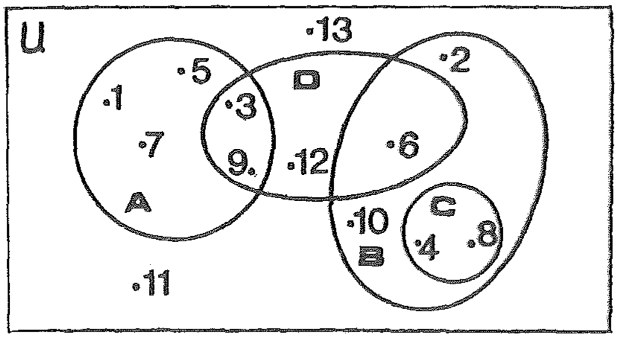
11. Што може да се каже за множеството B, ако за секое множество A важи: а) $A \cap B = B$, б) $A \cup B = A$?

12. Што претставува пресекот, а што унијата на множествата A и B, ако $A \subset B$?

13. Нека M е множество на две прави што се сечат во точката S. Дали смееме да пишуваме: $S \in M$?

14. Кое од следниве две множества е подмножество на другото и запиши го тоа:
а) A и $A \cap B$, б) A и $A \cup B$, в) $A \cap B$ и $A \cup B$.

15. Во кои случаи ќе бидат точни равенствата:
а) $A \cap B = B$, б) $A \cap B = A \cup B$, в) $A \setminus B = A$.



Сл. 12

16. Нека е U, — множество на сите триаголници. Одреди ги комплементите на следниве множества: а) A — множество на сите неправоаголни триаголници, б) B — множество на сите рамнокраки триаголници, в) C — множество на сите триаголници што имаат по два агла еднакви на 60°

17. На што е еднаков комплементот на: а) празното множество, б) универзалното множество? Наведи примери!

18. На што се еднакви множествата: а) $A \cap U$, $A \cap A'$,
б) $A \cup U$, $A \cup A'$, в) $A \setminus U$, $A \setminus A'$?

19. Од Веновиот дијаграм на сл. 12 одреди ги следниве множества:
а) $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap D$, б) $A \cup B$, $B \cup C$, $B \cup D$,
в) $A \setminus B$, $A \setminus D$, $B \setminus C$, г) A', B', C', $A' \cup C$, $A' \cap B'$.

20. Дадени се две дисјунктни множества A и B, што се подмножества на универзалното множество U. На Веновиот дијаграм одреди ги множествата:

а) $A' \cap B$, $A \cap B'$, б) $A \cup B'$, $A' \cup B'$, в) $A \setminus B'$, $A' \setminus B$.

21. Испитај ја вистинитоста на следниве искази:

а) $3 \in \{2, \{3, 5\}\} \cup \{5\}$; б) $a \notin \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\}$, в) $2 \in \{2, 3, 4\} \setminus \{2, 5\}$.

22. Што можеш да кажеш за множествата A и B, ако е:

а) $A \cap B = \varnothing$, б) $A \cap B \neq \varnothing$, в) $A \setminus B = \varnothing$?

§ 4. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА ОПЕРАЦИИТЕ НАД МНОЖЕСТВА

Операциите пресек, унија и разлика се операции што се извршуваат над парови множества; или како што уште велиме тоа се *бинарни операции*.

Бинарни операции се исто така и операциите со броеви: собирање, множење, вадење и делење.

Операциите, пак, комплемент на дадено множество и степенување на броеви се операции што се изведуваат над еден објект. Таквите операции се викаат *унарни операции*.

Нека U е некое универзално множество, а $P(U)$ — партитивно множество, т. е. множество од сите подмножества на множеството U. Јасно е дека: над елементите на множеството $P(U)$ ќе можат да се изведуваат операциите: пресек, унија и комплемент (во однос на множеството U); па при тоа секогаш ќе добиеме некое множество (резултат на извршената операција), кое е исто така некое подмножество на U и како такво и тоа е елемент на $P(U)$.

Велиме дека множеството $P(U)$ *е затворено* во однос на операциите пресек, унија и комплемент; а тоа значи дека при изведувањето на тие операции над кои и да е елементи од множеството $P(U)$, секогаш ќе добиеме како резултат множества што се елементи на истото множество $P(U)$.

Следователно: Ако $A \in P(U)$ и $B \in P(U)$; тогаш е

$$A \cap B \in P(U); \quad A \cup B \in P(U) \quad \text{и} \quad A' \in P(U).$$

Операциите пресек, унија и комплемент се викаат уште и *Булови операции* над множествата.

Понекогаш унијата на множества се разгледува аналогно како собирањето на броеви, а операцијата разлика на множества аналогно како вадење на броеви. Но таа аналогија не е потполна. На пример, ако $A \cup B = C$, во општ случај не следува дека е $A = C \setminus B$.

Пример: Нека $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 5, 6\}$, тогаш

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus B = \{1, 3, 7\} \neq A$.

Меѓутоа правилниот заклучок гласи:

$$(A \cup B = C \quad \text{и} \quad A \cap B = \varnothing) \Rightarrow A = C \setminus B.$$

За операциите над множества, како што ќе видиме, важат аналогни закони како и за операциите со броеви и некои други.

1. КОМУТАТИВНИ ЗАКОНИ

Тоа се равенствата:

$A \cap B = B \cap A$ (Комутативен закон на пресекот) (1)

$A \cup B = B \cup A$ (Комутативен закон на унијата) (2)

Доказ: За да докажеме дека важи равенството (1) треба да докажеме дека: а) ако $x \in A \cap B$, тогаш $x \in B \cap A$ и б) ако $x \in B \cap A$, тогаш $x \in A \cap B$.

Според дефиницијата на пресек меѓу две множества A и B; $x \in A \cap B$ ако и само ако е $x \in A$ и $x \in B$. Но тогаш ќе биде и $x \in B \cap A$. Ќе важи исто така и обратното, т. е. ако $x \in B \cap A$, тогаш $x \in A \cap B$. Следователно: $A \cap B = B \cap A$. Аналогно се докажува и равенството (2).

2. АСОЦИЈАТИВНИ ЗАКОНИ

Така се викаат равенствата:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Асоцијативен закон на пресекот) (3)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Асоцијативен закон на унијата) (4)

Доказ: Ќе го докажеме прво равенството (4).

а) Нека $x \in [(A \cup B) \cup C]$. Тогаш согласно дефиницијата за унија имаме: $x \in (A \cup B)$ или $x \in C$, односно $x \in A$ или $x \in B$ или $x \in C$.

Ако е вистинито $x \in B$, тогаш ќе биде вистинито и $x \in B \cup C$, а исто така и $x \in [A \cup (B \cup C)]$.

Значи: ако $x \in [(A \cup B) \cup C]$, тогаш $x \in [A \cup (B \cup C)]$.

Со тоа докажавме дека за секое x: $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

б) Нека $x \in [A \cup (B \cup C)]$. Тогаш ќе биде: $x \in A$ или $x \in (B \cup C)$, односно $x \in A$ или $x \in B$ или $x \in C$.

Ако е вистинито $x \in A$, тогаш ќе биде вистинито и $x \in A \cup B$, а исто така и $x \in [(A \cup B) \cup C]$.

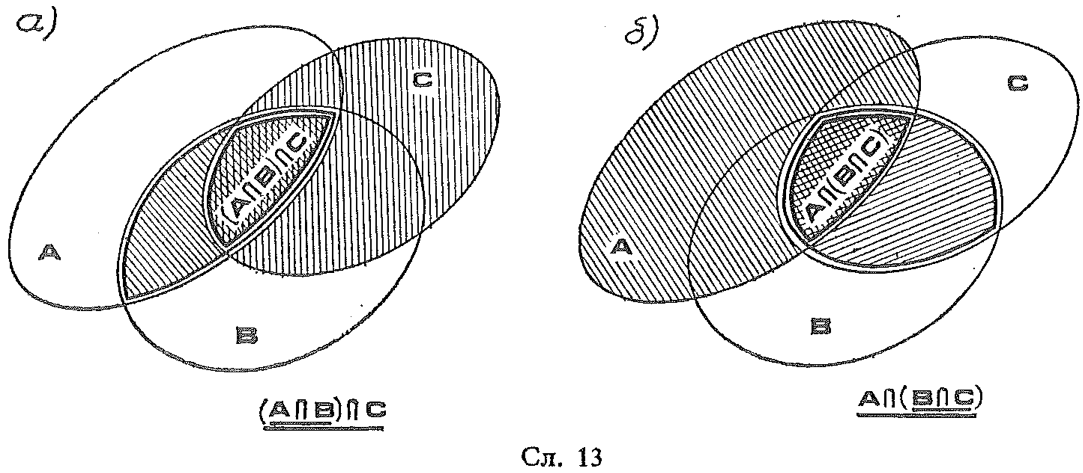
Значи: ако $x \in [A \cup (B \cup C)]$, тогаш $x \in [(A \cup B) \cup C]$.

Со тоа докажавме: за секое x дека: $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.

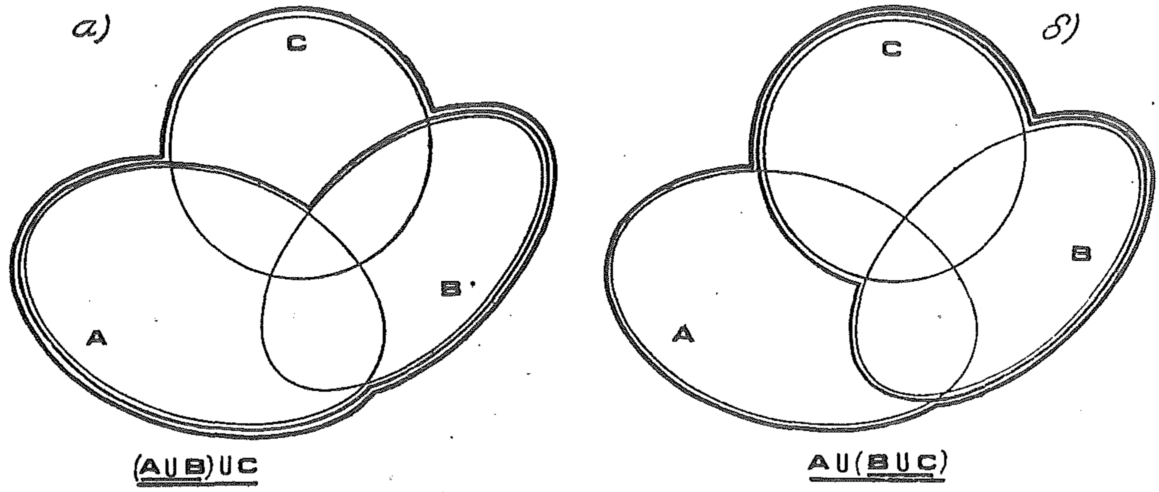
Следователно: бидејќи е $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ и $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$, тогаш е $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, ш. т. д.

Аналогно се докажува и равенството (3).

Асоцијативните закони на пресекот и унијата едноставно се уочуваат и со помош на Веновите дијаграми (сл. 13 и 14).



Сл. 13



Сл. 14

Од асоцијативноста на пресекот и унијата следува дека изразите $(A\cap B)\cap C$ и $(A\cup B)\cup C$ можат да се запишуваат и без загради, т. е. вака $A\cap B\cap C$ и $A\cup B\cup C$.

3. ДИСТРИБУТИВНИ ЗАКОНИ

Тоа се равенствата:

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (Дистрибутивен закон на пресекот во однос на унијата (5)

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (Дистрибутивен закон на унијата во однос на пресекот. (6)

Доказ: Множествата што се наоѓаат на левата и десната страна на равенството (5) да ги означиме соодветно со L и D.

Ако сакаме да докажеме дека множествата $L=(A\cap(B\cup C)$ и $D=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ се еднакви, доволно е да докажеме дека: а) $x\in L\Rightarrow x\in D$, т, е. $L\subseteq D$ и б) $x\in D\Rightarrow x\in L$, т. е. $D\subseteq L$.

а) Нека $x\in L$. Согласно дефиницијата за пресек тоа значи дека $x\in A$ и $x\in B\cup C$; а последното (согласно дефиницијата на унија) означува дека $x\in B$ или $x\in C$.

Ако е вистинито $x\in A$ и $x\in B$, тогаш ќе биде вистинито и $x\in A\cap B$, а исто така и $x\in[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$, т. е. $x\in D$.

Со тоа докажавме дека $x\in L\Rightarrow x\in D$, т. е. $L\subseteq D$.

б) Нека $x\in D$. Тогаш ќе имаме: $x\in A\cap B$ или $x\in A\cap C$, односно: $x\in A$ и $x\in B$, или $x\in A$ и $x\in C$.

Ако е вистинито $x\in A$ и $x\in B$, тогаш ќе биде вистинито $x\in B\cup C$ (Зошто)?, а исто така и $x\in A\cap(B\cup C)$, т. е. $x\in L$.

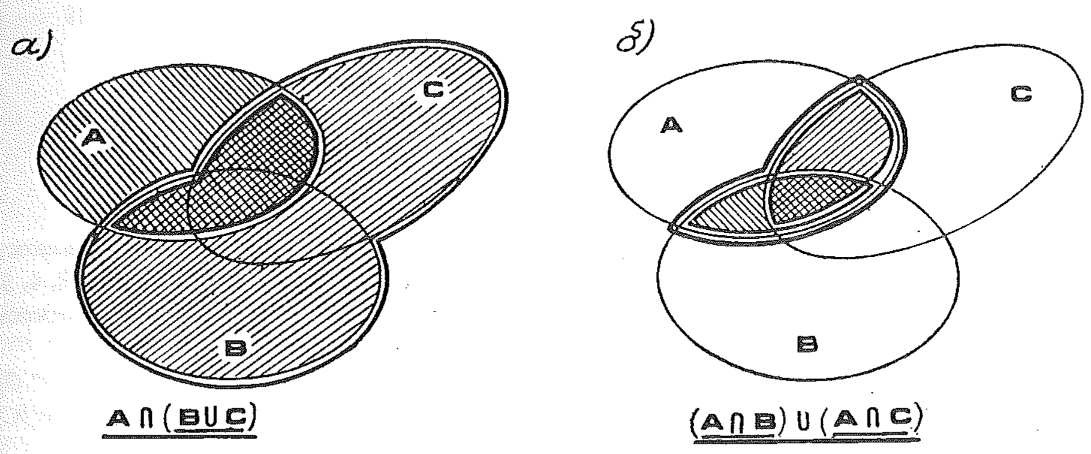
Со тоа докажавме дека $x\in D\Rightarrow x\in L$, т. е. $D\subseteq L$.

Следователно, бидејќи е $L\subseteq D$ и $D\subseteq L$, тогаш е $L=D$, односно $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ што требаше да докажеме.

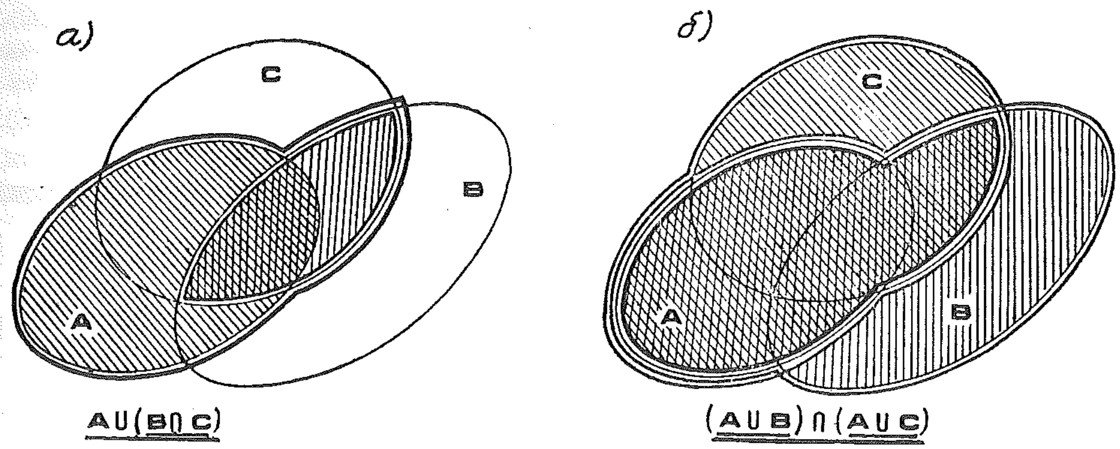
Аналогно се докажува и равенството (6).

Геометриска илустрација на дистрибутивните закони дадена е со дијаграмите на сл. 15 и 16.

Од дијаграмите исто гледаме дека важат равенствата (5) и (6).



Сл. 15



Сл. 16

4. СВОЈСТВА НА ПРАЗНОТО И УНИВЕРЗАЛНОТО МНОЖЕСТВО

На основа дефиницијата на празното и универзалното множество лесно се уверуваме дека важат следниве равенства:

$$A \cap \varnothing = \varnothing; \qquad A \cup \varnothing = A \qquad (7)$$
$$A \cap U = A; \qquad A \cup U = U \qquad (8)$$
$$A \cap A' = \varnothing; \qquad A \cup A' = U \qquad (9)$$
$$\varnothing' = U; \qquad U' = \varnothing. \qquad (10)$$

За илустрација ќе го докажеме само равенството (8). Другите предлагаме сами да ги докажете.

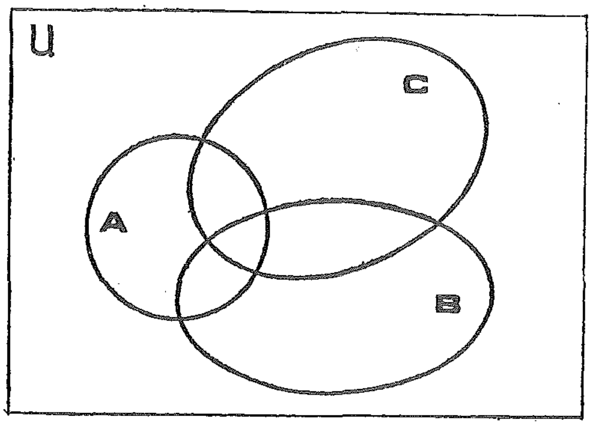
Доказ: Според дефиницијата на универзалното множество U, имаме секое множество A да е подмножество на U. Притоа претпоставуваме: елементите на A и U да имаат иста природа. Оттука станува јасно дека множеството $A\cap U$ ќе ги содржи сите елементи на множеството A и никои други, а множеството пак $A\cup U$ ќе ги содржи сите елементи на множеството U.

Следователно: $A\cap U=A$ и $A\cup U=U$.

ЗАДАЧИ

1. Покажи дека важат тврдењата: а) $x\in(A\cap B)\Rightarrow(x\in A$ и $x\in B)$;

б) $x\in(A\cup B)\Rightarrow(x\in A$ или $x\in B)$; в) $x\in(A\setminus B)\Rightarrow(x\in A$ и $x\notin B)$.



Сл. 17

2. На примерите со множествата: $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$, $C=\{3, 5, 6, 7\}$ провери ја точноста на равенствата:

а) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

б) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

3. На сл. 17 претставени се со Венов дијаграм множествата A, B и C. Загради го: а) со зелена линија дијаграмот на $(A\cap B)\cup C$, а со црвена линија дијаграмот на $(A\cup C)\cap(B\cup C)$; б) со жолта линија дијаграмот на $(A\cup B)\cap C$, а со здебелена црна линија дијаграмот на $(A\cap C)\cup(B\cap C)$. Што забележуваш?

4. На сл. 18 претставени се со Венов дијаграм множествата A, B и C. Шрафирај го дијаграмот на множеството:

а) $(A\cap C)\cup B$, б) $(A\setminus C)\cap B$, в) $(A'\cup B')\cap C'$.

5. Со помош на Венови дијаграми покажи дека важат равенствата:

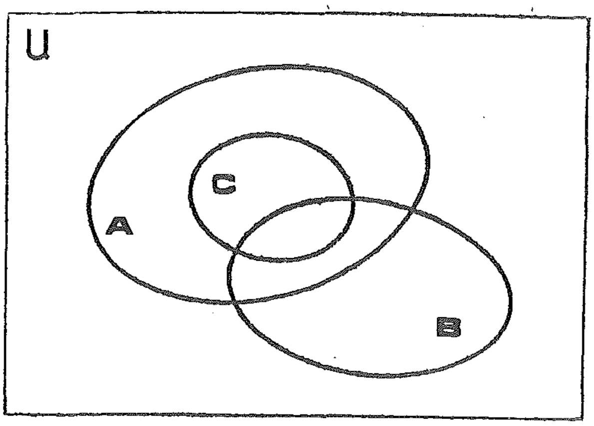
а) $A\setminus(B\setminus A)=A$,

б) $A\cap(A\cup B)=A$.

6. Множеството A се состои од сите ученици во нашата школа што го знаат рускиот јазик, множеството B, — ученици што го знаат францускиот јазик, а множеството C — ученици што го знаат англискиот јазик. Окарактеризирај ги следниве множества:

а) $A\cup B\cup C$, б) $A\cap B\cap C$,

в) $(A\cap B)\cup C$, г) $(A\cup B)\cap C$.



Сл. 18

7. Ако е $A\subset B\subset C$, испитај ја вистинитоста на исказите:

а) $(A\cup B)\subset C$, б) $A\setminus C=B\setminus C$, в) $C\setminus A=C\setminus B$.

8. Докажи ги тврдењата:

а) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$, б) $B\subseteq A\Leftrightarrow A\cup B=A$.

9. Докажи дека важат равенствата:

а) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$, б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

в) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$, г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

10. Ако се A и B подмножества од S, покажи дека важат равенствата:

а) $S \setminus (S \setminus A) = A$, б) $S \setminus (A \cap B) = (S \setminus A) \cup (S \setminus B)$;

в) $S \setminus (A \cup B) = (S \setminus A) \cap (S \setminus B)$.

11. Докажи дека: а) $A \subset A \cup B$, б) $A \cap B \subset A$, в) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$.

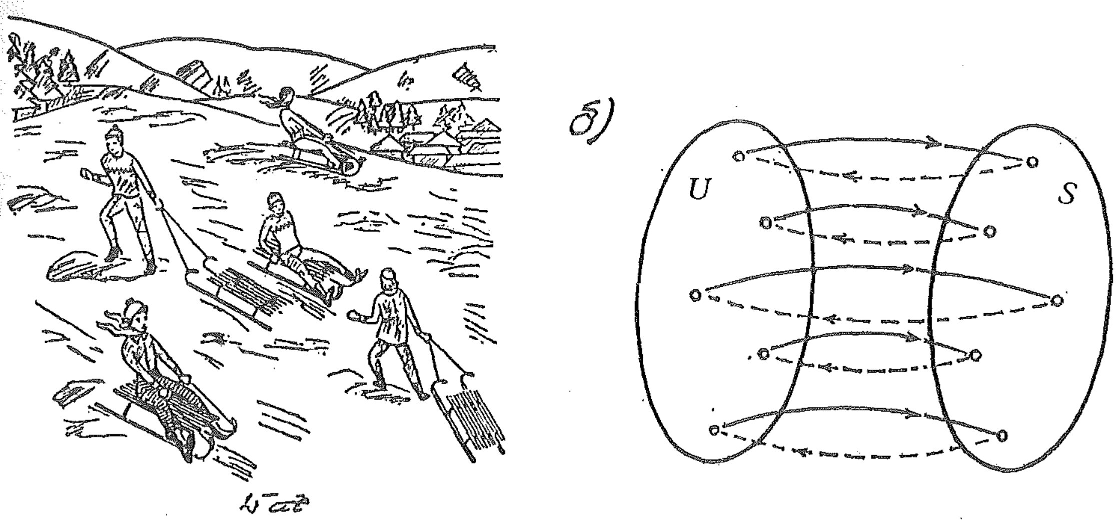
§ 5. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

1. ОБРАТНО ЕДНОЗНАЧНО СООДВЕТСТВО

Дефиниција 1. *Ако на секој елемент од едно множество M може да му се придружи по еден елемент од некое друго множество N,* и обратно *ако секој елемент од множеството N е придружен само со по еден елемент од множеството M, велиме дека меѓу елементите и множествата M и N е воспоставено обратно еднозначно соодветство или обратна еднозначна кореспонденција.*

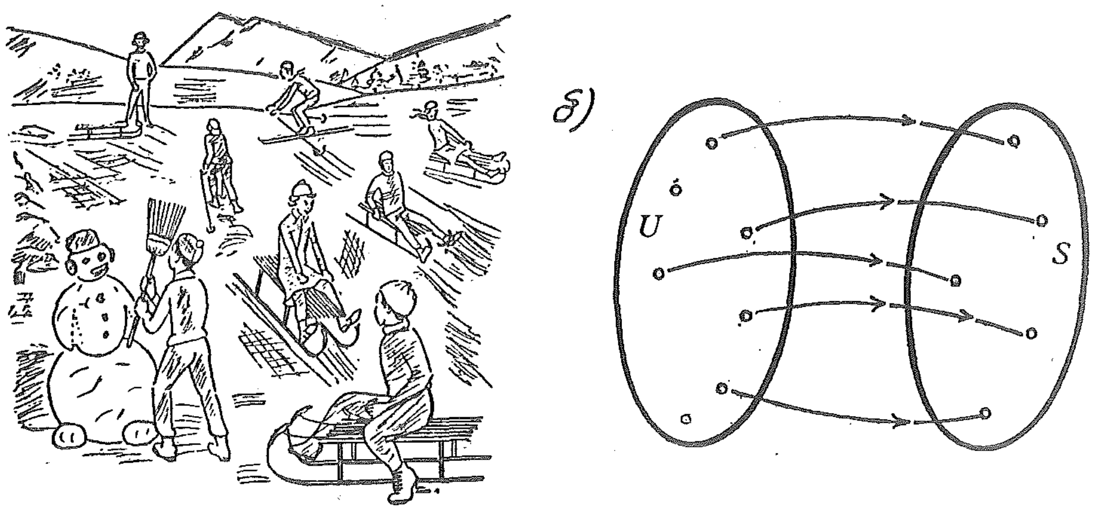
Пример: Учениците претставени на сл. 19 а образуваат едно множество, а нивните санки образуваат друго множество. Бидејќи секоја санка си има свој сопственик, а секој ученик — своја санка, тоа на секој ученик (елемент на првото множество) може да му се придружи само по една санка - неговата, а секоја санка (елемент од второто множество може да се придружи само кон еден ученик — нејзиниот сопственик. Во таков случај велиме дека меѓу елементите на тие две множества постои обратно еднозначно соодветство.

Обратното еднозначно соодветство меѓу елементите на множеството ученици (U) и множеството санки (S), што го гледаме на сл. 19 а, графички може да се прикаже со помош на Веновите дијаграми и како на слика 19 б.



Сл. 19

Од сликата гледаме: од секој елемент на множеството U поаѓа по една и само една стрелка кон елементот што му соодветствува од множеството S; и обратно: од секој елемент на множеството S се враќа по една и само една стрелка кон нему соодветниот елемент од множеството U.



Сл. 20

Ако, пак, некој ученик нема своја санка (сл. 20 а), тогаш меѓу множеството ученици (U) и множеството санки (S) не може да се воспостави еднозначно соодветство, бидејќи кога кон секоја санка ќе се придружи по еден ученик, некои ученици (кои немаат санки) ќе останат непридружени. Таа ситуација со помош на Венови дијаграми прикажана е на слика 20 б. Од неа гледаме дека во множеството U постојат елементи од кои не поаѓа стрелка кон ниеден елемент од множеството S.

2. ЕКВИВАЛЕНТНИ МНОЖЕСТВА

Дефиниција 2. *Две множества A и B меѓу елементите на кои може да се воспостави обратно еднозначно соодветство, се викаат еквивалентни множества*; тоа го означуваме

$$A \sim B,$$

а го читаме: *A е еквивалентно* на B.

Пример: Множествата $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{k, l, m, n\}$ се еквивалентни. За да се увериме во тоа, на секој елемент од A му придружуваме по еден елемент од B на следниот шематски начин:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ k & l & m & n \end{array}$$

Множеството ученици и множеството санки на сл. 19 а се исто така, еквивалентни множества.

Од дефиницијата за еквивалентност на множествата следуваат следниве својства на релацијата „$\sim$“.

1°. *Својство на рефлексивност*: $A \sim A$, т. е. секое множество е еквивалентно на себеси.

2°. *Својство на симетричност*: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.

3°. *Својство на транзитивност*: $(A \sim B$ *и* $B \sim C) \Rightarrow A \sim C$.

3. КАРДИНАЛНИ БРОЕВИ

Нека A е множество на сите прсти на човечката рака, а $B = \{a, e, u, v, y\}$ — множество на сите самогласки од нашата азбука.

Множеството B е еквивалентно на множеството A и пишеме $B \sim A$.

Еквивалентни на множеството A се исто и множествата:

$$C = \{+, -, :, x, \cdot\}, \quad D = \{\square, \triangle, \bigcirc, \star, \diamond\} \text{ и др.}$$

Множеството A и сите еквивалентни на него множества $B, C, D \ldots$ велиме образуваат едно ново множество — *класа еквивалентни множества.*

Еквивалентните множества често се викаат уште и *еднаквобројни множества,* искажувајќи со тоа дека тие имаат еднаков број елементи.

Во смисла на тоа, наместо записот $A \sim B$, често пишуваме: $kA = kB$, а го читаме: *кардиналниот број на множеството A е еднаков на кардиналниот број на множеството B.*

Ако се A, B, C и D погоре зададените попарно еквивалентни множества, тогаш пишуваме: $kA = kB = kC = kD = 5$.

Притоа со симболот $kA = 5$ — кардинален број на множеството A го изразуваме заедничкото карактеристично својство (бројноста) на сите множества, што се еквивалентни на A — множество на прстите на чевечката рака.

Поимот кардинален број на множеството во општ вид го дефинираме вака:

Дефиниција 5. *Нека M е произволно множество. Множеството од оние и само оние множества, што се еквивалентни на M, се вика кардинален број на множеството M и се означува со kM.*

Пример: Кардинални броеви на множествата се:
$k\{\triangle\} = 1$, $k\{\varnothing\} = 1$, $k\{1, 2\} = 2$; $k\{1, 2, 3\} = 3$, $k\{1, 2, 3, 4\} = 4$;
$k\{a, e, u, o, y\} = 5$ итн.

Кардинален број на празното множество е нулата, т. е. $k\varnothing = 0$.

ЗАДАЧИ

1. Еквивалентни ли се множествата
а) $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x \mid x = 1$ или $x = 3$ или $x = 8\}$?

2. Дадено е множеството $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Образувај ги сите подмножества на множеството C што се еквивалентни на $M = \{a, b, c\}$.

3. Одреди ги кардиналните броеви на множествата: $A = \{1, 5\}$; $B = \{a, b, c\}$; $C = \{\varnothing\}$; $D = \varnothing$; $E = \{\{2\}; \{1, 2, 3\}; 5; a + 1; c - 2\}$.

4. Дадени се множествата: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$ и $C = \{3, 4, 5\}$. Одреди ги: kA, kB, kC, $k(A \cup B)$, $k(A \cap B)$, $k(A \cap C)$, $k(A \setminus C)$, $k(B \cup C)$, $k(B \setminus C)$, $k(A \cup B \cup C)$, $k(A \cap B \cap C)$.

5. Во кои случаи се точни равенствата:
а) $k(A \cup B) = kA + kB$; б) $k(A \setminus B) = kA - kB$.

6. Покажи дека: Ако A и B се конечни множества, тогаш важи:

$$kA + kB = k(A \cup B) + k(A \cap B).$$

7. Нека се дадени множествата: $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$.
Покажи дека важи равенството: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.

Глава II

РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

§ 6. МНОЖЕСТВО НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Поимот *број* е еден од основните математички поими. До него е дојдено во историскиот развиток на човештвото преку споредувањето на различните множества. Во текот на развојот на математиката, главно, поради потребите на практиката и теоријата, тој постојано еволуирал се додека не ја добил денешната содржина.

Овде накратко ќе го изложиме развојот на поимот број, почнувајќи од множеството на природните броеви.

Дефиниција 1. *Секоја класа конечни еквивалентни множества дефинира одреден број со кој се карактеризира количеството елементи во секое од нив.*

Кардиналните броеви на конечните непразни множества се викаат природни броеви.

Така, на пример: На сите множества, еквивалентни на множеството $\{\alpha\}$, им одговара природен број што го означуваме со симболот 1; на множествата еквивалентни на множеството $\{\alpha, \beta\}$ им одговара природниот број 2; на множествата еквивалентни на множеството $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ им одговара природниот број 3 итн. Така ја добиваме низата од природните броеви:

$$1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$$

во која природниот број n ни го дава бројот на елементите на некое дадено конечно множество. Постапката на добивањето на природниот број n се вика *броење* на елементите на тоа множество.

Резултатот од броењето на елементите на еквивалентните множества не зависи од видот на нивните елементи, ниту пак од редот по кој го вршиме броењето на елементите.

Бидејќи, колку и да е голем природниот број n, секогаш постои и природен број $n+1$, што е поголем од n, тоа велиме дека:

Низата на природните броеви $1, 2, 3, \ldots\ldots n, n+1, \ldots$ е бесконечна.

Сите природни броеви го образуваат *множеството на природни броеви* кое го означуваме со буквата N, т. е.

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots n,\ n+1, \dots\}.$$

Бројот 1 како елемент на множеството n се вика уште и *единица*.

Множеството на природните броеви се карактеризира со следниве својства кои ги усвојуваме како аксиоми — *Пеанови аксиоми*:

1°. *Бројот 1 е природен број.*

2°. *Секој природен број а има и свој следбеник* a' $(a'=a+1)$.

3°. *Бројот 1 не е следбеник на никој природен број, т. е.* $a' \neq 1$.

4°. *Два природни броја се еднакви, ако тие имаат еднакви следбеници,* т.е.

$$a'=b' \Rightarrow a=b.$$

5°. *Ако некое множество S — составено од природни броеви ги има следниве својства*: а) $1 \in S$ *и* б) *Ако произволен природен број а се содржи во S, а исто така и неговиот следбеник* a' *се содржи во S; тогаш множеството S ги содржи сите природни броеви и идентично е со множеството (N) на сите природни броеви.*

Првата аксиома утврдува дека множеството на природните броеви не е празно множество, бидејќи според неа $1 \in N$. Втората аксиома утврдува всушност да е множеството на природните броеви бесконечно множество, а третата — бројот 1 да е почетен елемент на тоа множество. Со четвртата аксиома се утврдува релацијата на еднаквост во множеството на природните броеви, а со петтата аксиома се утврдува дека множеството на природните броеви е единствено.

Во множеството на природните броеви ги воведуваме и релациите на нееднаквост: „$>$" — *поголем од* и „$<$" — *помал од*. Нив ги воведуваме со следнава:

Дефиниција 2. *Ако некој природен број а во низата на природните броеви следува по друг природен број b, тогаш велиме дека а е поголем од b и пишуваме* $a > b$; *а за бројот b велиме дека е помал од а и пишуваме* $b < a$.

Релацијата за еднаквост „$=$" во множеството на природните броеви ги има следниве својства, кои произлегуваат од соодветните својства на еквивалентните множества:

1°. *Својство на рефлексивност*: $a=a$, *т. е. Секој природен број е еднаков на себеси.*

2°. *Својство на симетричност*: $a=b \Rightarrow b=a$.

3°. *Својство на транзитивност*: $(a=b$ и $b=c) \Rightarrow a=c$.

Релациите пак за нееднаквост („$>$" и „$<$") во множеството на природните броеви го имаат само својството на

4°. транзитивност: $(a>b$ и $b>c) \Rightarrow a>c$, но ги немаат својствата на рефлексивност и симетричност (зошто?)

Теорема: *Множеството на природните броеви е подредено множество.*

Доказ: Со горниве аксиоми и дефиницијата 2 е утврден и поредокот меѓу елементите на множеството на природните броеви, кој ги исполнува условите на трихотомија:

а) За кои и да е два природни броја a и b постои една и само една од следниве релации:

$$\text{или } a<b \text{ или } a=b \text{ или } a>b.$$

б) За секои три различни природни броеви a, b и c

ако е $a < b$ и $b < c$; тогаш ќе биде и $a < c$.

Или симболички запишано:

$$(a \in N \text{ и } b \in N) \Rightarrow (\text{или } a<b \text{ или } a=b \text{ или } a>b)$$
$$(a<b \text{ и } b<c) \Rightarrow a<c.$$

Природните броеви ги делиме на *парни*: 2, 4, 6, . . . и *непарни*: 1, 3, 5, 7, . . . Парните броеви ги обележуваме со $2k$, а непарните со $2k+1$ (или $2k-1$), каде што k е кој и да било природен број.

Природните броеви ги делиме уште и на *прости* и *сложени*.

Даден природен број (освен бројот 1) е прост, ако е делив само со самиот себе и со бројот 1; а сложен е ако е делив, освен со самиот себеси и бројот 1, барем уште со еден или неколку други природни броеви. Прости броеви се, на пример: 2, 3, 5, 7, 11, . . . , а сложени: 4, 6, 8, 9, 10, 12.

§ 7. ОПЕРАЦИИ СО ПРИРОДНИ БРОЕВИ

1. СОБИРАЊЕ И ВАДЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Нека се A и B две конечни множества без заеднички елементи, чиј број на елементи е даден соодветно со природните броеви a и b.

Дефиниција 1. *Збир на природните броеви a и b го викаме природниот број s што го карактеризира бројот на елементите на множеството S — унија на дадените множества A и B, и пишуваме:*

$$a+b=s.$$

Броевите a и b се викаат *собироци*, а извршената операција — *собирање*.

Бидејќи за кои и да било две конечни множества секогаш постои трето множество — нивна унија, тоа ќе важи теоремата:

Теорема 1. *Збирот на кои и да било два природни броја секогаш е пак природен број, т. е.*

$$(a \in N \text{ и } b \in N) \Rightarrow (a+b) \in N.$$

Оваа теорема ја искажуваме уште и вака: *Множеството на природните броеви е затворено во однос на операцијата собирање.*

Забелешка: Збирот на три природни броја a, b и c го дефинираме како збир од збирот на првите два броја и третиот број c, т. е.

$$a+b+c=(a+b)+c.$$

За собирањето на природните броеви важат следниве закони (теореми):

1. Закон за комутативност: *Збирот не зависи од промената на редот на собироците*, т. е.

$$a+b=b+a.$$

Доказ: Нека се A и B две конечни множества со соодветно a и b елементи за кои претпоставуваме дека немаат заеднички елементи. Тогаш униите $A \cup B$ и $B \cup A$ ќе претставуваат две множества, чиј број на елементи соодветно е $a+b$ и $b+a$.

Бидејќи $A \cup B \sim B \cup A$ (дури тие две множества се и идентични $A \cup B = B \cup A$. Зошто?), тоа е и

$$a+b=b+a.$$

2. Закон за асоцијативност: *Збир се додава кон даден број, кога кон тој број се додаде последователно секој собирок*, т. е. ако a, b и c се три кои и да било природни броеви, секогаш ќе биде:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Доказот на овој закон е сличен на првиот. Предлагаме сами да го изведете.

3. Закон монотоност: *Ако кон два еднакви (односно нееднакви) природни броја a и b додадеме по еден ист произволен природен број m, ќе добиеме пак еднакви (односно нееднакви) природни броеви*, т. е.

$$1^{\circ}.\ a=b \Rightarrow a+m=b+m;$$
$$2^{\circ}.\ a>b \Rightarrow a+m>b+m;$$
$$3^{\circ}.\ a<b \Rightarrow a+m<b+m.$$

Доказ: Ќе го докажеме само својството 2°. Бидејќи е $a > b$, јасно е дека во низата на природните броеви a следува по бројот b, тоа можеме да напишеме дека $a = b + k$, каде што k е некој природен број. Тогаш ќе имаме:

$$a+m=(b+k)+m,$$

а со примената на законот за асоцијативност и комутативност, добиваме:

$$a+m=b+(k+m)=(b+m)+k.$$

Одовде следува дека:

$$a+m>b+m.$$

Забелешка: Врз основа на горните закони можат да се докажат и следниве својства:

$$1^{\circ}\ (a=b \text{ и } c=d) \Rightarrow a+c=b+d;$$
$$2^{\circ}\ (a>b \text{ и } c>d) \Rightarrow a+c>b+d;$$
$$3^{\circ}\ (a<b \text{ и } c<d) \Rightarrow a+c<b+d.$$

Доказ: Вр основа на законот за монотоност имаме $a+c=b+c$; $c+b=d+b$, а од нив, согласно својството за транзитивност, следува:

$$a+c=b+c=b+d, \text{ односно } a+c=b+d.$$

Својствата 2° и 3° докажете ги сами!

Операцијата вадење ја дефинираме како *обратна операција* на собирањето, а имено:

Дефиниција 2. *Да извадиме од еден природен број a друг даден природен број b, значи да најдеме таков трет природен број x, кој собран со бројот b, да го даде бројот a*; тоа симболички го означуваме:

$$a-b=x; \text{ ако е } b+x=a.$$

Пример: $8-5=3$, бидејќи е $5+3=8$.

Бројот a се вика *намаленик*, бројот b — *намалител*, а бараниот број x — *разлика* на a и b.

Се поставува прашањето, дали за секои два природни броја a и b постои разлика $a-b$ и, ако постои, дали таа е еднозначно определена.

Имајќи предвид дека: намалителот + разликата = намаленикот, како и тоа дека: Збирот на два природни броја е секогаш поголем од секој собирок, заклучуваме дека ќе важи следнава:

Теорема: *Разликата* $a-b$ *на природните броеви* a *и* b *постои и е еднозначно определена само кога намаленикот е поголем од намалителот, т. е. ако е* $a > b$.

Ако е пак $a \leqslant b$, разликата $a-b$ не постои, т. е. нѐма природен број x, за кој ќе биде $b+x=a$.

2. МНОЖЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Нека се дадени b конечни множества M_1; M_2; M_3; . . . M_b, кои немаат заеднички елементи, а бројот на елементите на секое од нив да е еднаков на a.

Ако образуваме ново множество — унија на дадените множества M_1, M_2, M_3, ... M_b, тогаш бројот на елементите на тоа множество ќе биде еднаков на збирот:

$$\underbrace{a+a+a+\ .\ .\ .\ .\ .\ +a}_{b \text{ собироци}},$$

кој е некој природен број p. Така определениот природен број p го викаме *производ* на природните броеви a и b и го означуваме со ab.

Дефиниција 3. *Производ на природните броеви* a *и* $b \neq 1$ *е збирот на* b *собироци, од кои секој е еднаков на* a, и симболички го означуваме вака:

$$a \cdot b \overset{Df}{=} \underbrace{a+a+a+\ .\ .\ .\ .\ +a}_{b \text{ собироци}}$$

Бројот a го викаме *множеник*, бројот b — *множител*, а самата операција — *множење*.

Според дадената дефиниција производот $a \cdot 1$ нема смисла, но за да се прошири примената на множењето и кога множителот е 1, по договор земаме:

Дефиниција 4. *Производот на даден број* a *и бројот* 1 *е самиот број* a, т. е.

$$a \cdot 1 \overset{Df}{=} a$$

Бидејќи производот $a \cdot b$ е збир на b собироци сите еднакви на бројот a, а збирот секогаш постои и е еднозначно определен затоа ќе важи:

Теорема 3. *Производот на кои и да било два природни броја секогаш е пак природен број*, т. е.

$$(a \in N \text{ и } b \in N) \Rightarrow (ab) \in N.$$

Значи: *Множеството на природните броеви е затворено во однос на операцијата множење.*

Производот на три природни броја a, b и c го дефинираме како производ од производот на првите два броја a и b и третиот број c, т. е.

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c.$$

За множењето на природните броеви важат следниве закони (теореми):

1. Закон за комутативност: *Производот не се менува ако множеникот и множителот ги променат своите места и улоги,* т. е.

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Ете зошто множеникот и множителот со заедничко име се викаат уште и *множители.* Ова наоѓа оправдување и затоа што во производот можат да учествуваат и повеќе од два броја.

Точноста на овој закон ќе ја земеме како очигледна. (Тој може и да се докаже, но тоа нешто излегува од рамките на нашата програма.)

2. Закон за дистрибутивност: *Збир се множи со природен број, кога секој собирок се помножи со тој број и добиените производи потоа се собираат,* т. е. за три произволни природни броја a, b и c, секогаш ќе биде:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Доказ: Ако е $c = 1$, равенството е точно, бидејќи:

$$(a+b) \cdot 1 = a + b \quad \text{и} \quad a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b.$$

Ако е $c > 1$, можеме да напишеме:

$$(a+b) \cdot c = \underbrace{(a+b) + (a+b) + \ldots + (a+b)}_{c \text{ собироци}}.$$

А врз основа на асоцијативниот и комутативниот закон на збирот, имаме:

$$\underbrace{(a+b) + (a+b) + \ldots + (a+b)}_{c \text{ собироци}} = \underbrace{(a + a + \ldots + a)}_{c \text{ собироци}} + \underbrace{(b + b \ldots + b)}_{c \text{ собироци}} =$$

$$= a \cdot c + b \cdot c, \qquad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

3. Закон за асоцијативност: *Производ се множи со даден природен број, кога со тој број се помножи само еден од множителите на производот, а потоа добиениот резултат се помножи со другиот множител,* т. е. ако a, b и c се кои и да било три природни броја, секогаш ќе биде:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \text{ или } (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b.$$

Доказ: Ако $c = 1$, равенството е точно бидејќи

$$(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot b \text{ и } b \cdot 1 = b, \text{ т. е. } (a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot (b \cdot 1).$$

Ако е $c > 1$, можеме да напишеме: $(a \cdot b) \cdot c = \underbrace{a \cdot b + a \cdot b + \ldots + a \cdot b}_{c \text{ собироци}}$

Согласно дистрибутивниот закон, имаме:

$$\underbrace{a \cdot b + a \cdot b + \ldots + a \cdot b}_{c \text{ собироци}} = a \cdot \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{c \text{ собироци}} = a \cdot (b \cdot c).$$

4. Закон за монотоност: *Ако два еднакви (односно нееднакви) природни броја* a *и* b *ги помножиме со еден ист природен број, ќе добиеме пак еднакви (односно нееднакви) природни броеви,* т. е.

а) $a = b \Rightarrow a \cdot m = b \cdot m;$

б) $a > b \Rightarrow a \cdot m > b \cdot m;$

в) $a < b \Rightarrow a \cdot m < b \cdot m.$

Доказ: Ќе го докажеме својството под б): Бидејќи е $a > b$, тоа $a = b + k$, каде што k е некој природен број. Во таков случај:

$$am = (b + k)\ m, \text{ односно } a \cdot m = b \cdot m + km,$$

од каде следува дека

$$a \cdot m > b \cdot m.$$

Другите случаи под а) и в) докажете ги сами!

Забелешки: На основа горните закони можат да се докажат и следниве својства на релациите за еднаквост и нееднаквост:

$$1^\circ.\ (a = b \text{ и } c = d) \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d;$$
$$2^\circ.\ (a > b \text{ и } c > d) \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d;$$
$$3^\circ.\ (a < b \text{ и } c < d) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d.$$

3. ДЕЛЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

Операцијата делење ја дефинираме како *обратна операција* на множењето, а имено:

Дефиниција 5. *Да се подели даден природен број a со друг природен број b, значи да се најде таков трет природен број x, којшто помножен со бројот b да го даде брјот a*; кое симболички го означуваме:

$$a : b = x \text{ или } \frac{a}{b} = x, \text{ ако е } b \cdot x = a.$$

Пример: $21 : 3 = 7$; бидејќи $3 \cdot 7 = 21$.

Бројот a се вика *деленик*, бројот b *делител*, а бараниот број x—*количник* или *однос* на броевите a и b.

Од самата дефиниција на делењето, следува дека:

Делeникот е производ на делителот и количникот.

Како и кај операцијата вадење, и овде се поставува прашањето: дали секогаш постои количник на кои и да било два природни броја a и b и, ако постои, дали тој е еднозначно определен?

Од горното својство непосредно следува дека количникот на два природни броја ќе постои само ако делeникот е добиен со множење на делителот и некој друг природен број.

Пример: Природните броеви 28 и 7 имаат количник: бројот 4, т. е. $28 : 7 = 4$, бидејќи $4 \cdot 7 = 28$.

Ќе покажеме дека има природни броеви кои немаат количник, на пример броевите $a = 7$ и $b = 3$. Ако постои природен број $\frac{7}{3} = x$, тогаш треба да е $3 \cdot x = 7$. Бидејќи е $3 \cdot 1 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$; $3 \cdot 3 = 9$, заклучуваме дека не постои природен број кој помножен со 3 да дава 7.

Може да се докаже и во општ случај теоремата:

Теорема 4. *Количникот на кои и да било два природни броја не постои секогаш, но, ако постои, тој е еднозначно определен.*

Ако за природните броеви a и b постои количник природен број q, така што $a : b = q$, велиме дека природниот број *a се дели* со природниот број b. Ако таков природен број q не постои, тогаш велиме дека бројот a *не се дели* со b.

Кога природниот број a не се дели со b, тогаш се воведува таканаречено *делење со остаток*. Тоа се сведува на изнаоѓањето таков најголем природен број, кој, помножен со делителот, да дава број што не е поголем од деленикот. Бараниот природен број се вика *нейолн количник*, а разликата помеѓу деленикот и производот од делителот и неполниот количник се вика *осшашок*. Остатокот е секогаш помал од делителот.

Пример: $23:7=3$ и остаток 2, каде што $2<3$.

Може да се докаже во општ случај теоремата:

Теорема 5. *Ако a и b се два йриродни броја, йри шшо a $(a>b)$ не се дели со b, шогаш йосшои единсшвена двојка йриродни броеви q и r, за кои ќе биде:*

$$a=b\cdot q+r \quad \text{и} \quad r<b,$$

каде шшо q е нейолн количник на броевише a и b, а r—осшашок.

Операцијата дељење ги има следниве поважни својства:

Од дефиницијата на операцијата дељење, следува следнава:

Теорема 6. *Производош од количникош и делишелош е еднаков на деленикош*, т. е.

$$\frac{a}{b}=q \Rightarrow (q\cdot b=a \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}\cdot b=a).$$

Теорема 7. *Збир се дели со даден број шака шшо секој собирок се дели со шој број, а йошоа добиенише количници се собирааш*, т. е.

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}.$$

Доказ: Претпоставуваме дека равенството е точно. Тогаш врз основа на теоремата 6 и примената на законот за дистрибутивност, добиваме:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)\cdot m=\frac{a}{m}\cdot m+\frac{b}{m}\cdot m+\frac{c}{m}\cdot m=a+b+c.$$

Значи: изразот $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$ навистина е количник од дељењето на збирот $a+b+c$ и бројот m.

Теорема 8. *Производ на два броја се дели со даден број, шака шшо само еден множишел се дели со шој број, а добиениош количник се множи со другиош број*, т. е.

$$\frac{ab}{m}=\frac{a}{m}\cdot b. \tag{1}$$

Доказ: Врз основа на теоремата 6, а со проверка на извршеното делење добиваме:

$$\left(\frac{a}{m}\cdot b\right)\cdot m=\left(b\cdot\frac{a}{m}\right)\cdot m=b\cdot\left(\frac{a}{m}\cdot m\right)=b\cdot a=ab.$$

Значи, изразот $\frac{a}{m}\cdot b$ навистина е количник од делењето на производот ab и бројот m.

Ако равенството (1) го напишеме во вид $\frac{a}{m}\cdot b=\frac{ab}{m}$, го добиваме следново:

Правило: *Количник на два броја се множи со даден број така што деленикот се множи со тој број, а потоа добиениот производ се дели со делителот.*

Теорема 9. *Количникот на два природни броја не се менува, ако делителот и деленикот се помножат (или разделат) со еден исти природен број,* т. е.

$$1^\circ. \quad \frac{a}{b}=\frac{am}{bm} \qquad 2^\circ. \quad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}.$$

Доказ: $\frac{a}{b}=q \Rightarrow a=b\cdot q$. Врз основа на законот за монотоност, имаме: $a=bq \Rightarrow a\cdot m=bmq$,

односно: $am=bmq \Rightarrow \frac{am}{bm}=q$, т. е. $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

Слично се докажува и $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$.

ЗАДАЧИ

1. Запиши го: а) првиот, б) третиот, в) петтиот, г) n-тиот број, што доаѓа по бројот a во низата на природните броеви!

2. Докажи дека:
   а) Збирот на два непарни броја е парен број;
   б) Збирот на еден парен и еден непарен број е непарен број;
   в) Збирот на два парни броја е пак парен број!

3. Докажи дека:
   а) Производот на два парни броја е пак парен број;
   б) Производот на два непарни броја е пак непарен број;
   в) Производот на парен и непарен број е парен број;

4. Ако се a и b парни броеви, а c — непарен број, кажи какви ќе бидат броевите:
   а) $a+b$; б) $a+c$; в) $a+b+c$; г) $a+b\cdot c$; д) $a+1$; ѓ) $ac+b$;
   е) $(a+c)\cdot b$; ж) $c+3$; з) $(a+b)c$; ѕ) $ab+c$.

5. Испитај дали множеството на: а) парните броеви, б) непарните броеви е затворено во однос на операциите собирање и множење!

6. Пресметај ги следниве производи со групирање на множителите на најпогоден начин:
   а) $5\cdot5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2$; б) $4\cdot7\cdot25\cdot6$; в) $9\cdot125\cdot6\cdot8$!

7. Запиши ги во пократка форма збировите:
   а) $9+9+9+9+9$; б) $3\cdot5+3\cdot5+3\cdot5+3\cdot5+3\cdot5$;
   в) $(8+7)+(8+7)+(8+7)$!

8. Најди го брјот x, ако е:
   а) $5+x=a$; б) $x-3=c$; в) $a-x=c$; г) $x\cdot4=28$; д) $a\cdot x=c$;
   ѓ) $x:2=b$; е) $42:x=7$!

9. Одреди го непознатиот деленик при следниве делења со остаток:
   б) $x:5=7$ и остаток 2; б) $x:a=b$ и остаток r.

10. Спореди ги броевите; а) a и s; б) b и s; в) a и s-b; г) b и s-a ако е $a+b=s$, а a, b и s да се природни броеви!

11. Спореди ги броевите: а) a и b; б) a и r; в) a и $b+r$; г) b и $a-r$ ако знаеш дека $a-b=r$, а a, b и r да се природни броеви.

12. Спореди ги броевите: а) a и c; б) b и c; в) a и $c:b$; г) b и $c:a$ ако е познато дека $a \cdot b = c$, а a, b и c се природни броеви!

13. Докажи дека: Количникот на два природни броја, ако делителот не е 1, секогаш е помал од деленикот!

§ 8. ПРОШИРУВАЊЕ НА МНОЖЕСТВОТО N СО НУЛАТА

Множеството на природните броеви е затворено во однос на операциите собирање и множење. Тоа значи дека збирот односно производот, на два природни броја е пак точно определен природен број. Но, таков не е случајот и со операциите вадење и делење. Во множеството на природните броеви вадењето може да се изврши само ако намаленикот е поголем од намалителот, а делењето — ако деленикот е содржател на делителот.

За да можат и овие операции да се извршуваат без ограничување, потребно е да се изврши проширување на множеството на природните броеви со нови броеви.

Првото проширување на поимот за број е извршено со присоединувањето на нулата кон множеството на природните броеви.

Со природните броеви обично утврдуваме колку елементи содржи дадено конечно множество, а со бројот нула (0) означуваме дека множеството е празно, т. е. дека тоа не содржи ниту еден елемент.

Операциите помеѓу природните броеви и бројот нула се дефинирани така што и во проширеното множество да важат законите на операциите само со природните броеви. На пример:

Дефиниција 1. *Под збир на природен број и нула или на нула и природен број го подразбираме самиот природен број*, т. е.

$$a+0 \overset{Df}{=} a \quad и \quad 0+a \overset{Df}{=} a.$$

Од оваа дефиниција следува дека во проширеното множество важи комутативниот закон на збирот, т. е.

$$a+0=0+a.$$

Дефиницијата за производ на бројот 0 и некој природен број a останува иста како и за производ на два природни броја, т. е.

$$0 \cdot a = \underbrace{0+0+0+\ldots+0}_{a \text{ собироци}} = 0.$$

Но по оваа дефиниција производот $a \cdot 0$ нема смисла. Меѓутоа, за да може да важи комутативниот закон и за ваков производ, по дефиниција земаме дека е $a \cdot 0 = 0$, т. е.

$$0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

Дефиниција 2. *Производот на кој и да било природен број и бројот нула еднаков е на нула.*

Операциите вадење и делење се дефинираат, како и кај природните броеви, како обратни на собирањето и множењето.

Пример: $a - 0 = a$, бидејќи е $a + 0 = a$
$a - a = 0$, бидејќи е $0 + a = a$. Оттука:

Дефиниција 3. *Разликата на два еднакви природни броја е еднаква на нула.*

Ова често го земаме и како дефиниција на бројот нула.

Дефиниција 4. *Количникот од бројот* 0 *и кој и да било природен број* a *еднаков е на нула*, т. е.

$$0 : a = 0, \text{ бидејќи } a \cdot 0 = 0.$$

Но обратно: *Делењето на природен број со нула во математиката не се дефинира, бидејќи е невозможно.*

Ако допуштиме дека е тоа можно, т. е. дека е $a : 0 = b$, тогаш при $a \neq 0$, ќе дојдеме до следново противречно равенство $b \cdot 0 = a$ (Зошто)?

Ако $a = 0$, тогаш *количникот* $0 : 0$ *е нееднозначно определен,* бидејќи производот на секој број и нула е еднаков на нула.

Пример: $0 : 0 = 8$, бидејќи $8 \cdot 0 = 0$; $0 : 0 = 17$, бидејќи $17 \cdot 0 = 0$ итн.

Затоа, кога имаме да делиме со број означен со буква, претходно треба да се договориме дека тој број не е нула.

Дефиниција 5. *Унијата од множеството* N *на природните броеви и бројот нула се вика проширено множество на природните броеви и се означува со*: N_0, т. е.

$$N_0 \overset{Df}{=} N \cup \{0\}.$$

§ 9. МНОЖЕСТВО НА ДРОБНИ БРОЕВИ

Со текот на времето природните броеви се покажале недоволни за задоволување на нараснатите потреби во проширените дејности на човекот.

Ново проширување на поимот за број било извршено со воведувањето на *дропките* (обични и децимални)

Воведувањето на дропките е тесно сврзано со мерењето на величините, кога единицата мерка не се содржи цел број пати во мерената величина.

Меѓутоа, барањето за проширување на множеството на природните броеви со нови броеви — дропките — го поставува и математиката, така што новото проширено множество да биде затворено и во однос на операцијата делење. Тоа значи, количникот на кои и да било два броја од проширеното множество да биде секогаш пак некој број од истото множество.

Кога множеството на природните броеви се прошири со нулата и со сите дропки, се добива ново множество на броеви — *множество на дробни броеви.*

Дропките во аритметиката ги дефинираме на следниов начин:

Дефиниција 1. *Дропка се вика симболот* $\frac{a}{b}$, *што соодветствува на секоја подредена двојка природни броеви* a *и* b, *во која бројот* a *се вика броител а бројот* b — *именител на дропката.*

Двојката природни броеви a и b, се вика *подредена* бидеќи двојките броеви (a, b) и (b, a) во општ случај дефинираат различни дропки.

Толкувањето на дропките, во зависност од целите за кои се тие воведени, може да биде различно. На пример:

1°. *Дропката* $\frac{a}{b}$ *покажува дека некоја величина е разделена на* b *еднакви делови и од нив се земени (издвоени)* a *такви делови,* или:

2°. *Дропката* $\frac{a}{b}$ *претставува количник на природните броеви* a и b,

т. е.

$$a:b = \frac{a}{b}; \text{ при што } b \cdot \frac{a}{b} = a.$$

Дефиниција 2. *Под дропката* $\frac{a}{1}$ *го подразбираме природниот број* a,

т. е.

$$\frac{a}{1} \overset{Df}{=} a$$

Оттука следува дека: *Множеството на дробните броеви го содржи во себеси и множеството на природните броеви.*

Дефинирањето на поимите за еднаквост и нееднаквост на две дропки, како и дефинирањето на операциите со нив го вршиме така што: а) Основните закони на операциите во претходното множество да важат и во проширеното множество на броеви и б) природните броеви, нулата и операциите со нив да претставуваат специјален случај од дробните броеви и операциите со нив.

Дропките го имаат следново основно својство:

Својство: *Дропката не се менува ако броителот и именителот ги помножиме (или поделиме) со еден ист број различен од нула,* т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \text{ и } \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Пример: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$; $\quad \frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$.

Кога ги помножиме и броителот и именителот на една дропка со бројот $m \neq 0$, велиме дропката *ја прошируваме* со бројот m; а кога броителот и именителот ги поделиме со нивниот заеднички делител q, велиме дека дропката *ја скратуваме* со бројот q.

Ова својство непосредно следува од соодветното својство на количникот, кое порано го докажавме.

Како примена на горното својство ќе покажеме дека кои и да било две или неколку дропки можат да се доведат на еднакви именители.

Пример: Нека се дадени дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$. Ако првата дропка ја прошириме со бројот n, а втората со бројот b, ќе ги добиеме дропките;

$$\frac{a}{b}=\frac{an}{bn} \quad \text{и} \quad \frac{m}{n}=\frac{mb}{nb},$$

кои имаат еднакви именители.

Во натамошното разгледување понекогаш една дропка ќе ја означуваме и само со една грчка или друга буква.

Дефиниција 3. *Дропката* $\frac{a}{b}$ *е помала* ($<$), *еднаква* ($=$) *или поголема* ($>$) *од дропката* $\frac{m}{n}$ *според тоа која од релациите е исполнета:*

$$an < mb; \qquad an = mb; \qquad an > mb.$$

Ако е $b=1$ и $n=1$, доаѓаме до еднаквоста и нееднаквоста на природните броеви a и m како специјален случај од еднаквоста и нееднаквоста на дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{m}{n}$.

Теорема: *Множеството на дробните броеви е подредено множество.*

Доказ: Согласно последната дефиниција и својствата на природните броеви заклучуваме дека се исполнети условите на трихотомија:

1°. За кои и да било две дропки α и β важи една, и само една, од следниве три релации:

$$\text{или } \alpha < \beta \text{ или } \alpha = \beta \text{ или } \alpha > \beta.$$

2°. За кои и да било три дропки α, β и γ: $(\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma) \Rightarrow \alpha < \gamma$.

Горното ни овозможува да вршиме споредување не само на дропка со дропка, туку и на природни броеви со дропка.

Дефиниција 4. *Ако дадена дропка е помала од бројот* 1, *таа е права дропка; а ако е еднаква или поголема од* 1, *тогаш таа е неправа дропка.*

Според тоа: *Дропката* $\frac{a}{b}$ *е права, ако е* $a<b$; *а е неправа, ако е* $a \geqslant b$.

Релациите за еднаквост и нееднаквост во множеството на дропките, како и во множеството на природните броеви, ги имаат својствата на:

1°. *Рефлексивност*, т. е. $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$;

2°. *Симетричност*, т. е. $\frac{a}{b}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{a}{b}$;

3°. *Транзитивност*, т. е. $\left(\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \text{ и } \frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\right) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3}$;

$$\left(\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2} \text{ и } \frac{a_2}{b_2}<\frac{a_3}{b_3}\right) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}<\frac{a_3}{b_3}; \text{ или } \left(\frac{a_1}{b_1}>\frac{a_2}{b_2} \text{ и } \frac{a_2}{b_2}>\frac{a_3}{b_3}\right) \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}>\frac{a_3}{b_3}$$

Обиди се да ги докажеш тие својства!

§ 10. ОПЕРАЦИИ СО ДРОПКИ

1. СОБИРАЊЕ И ВАДЕЊЕ НА ДРОПКИ

Нека се дадени две кои и да било дропки α и β. Тие секогаш можат да се доведат на еднакви именители.

Дефиниција 1. *Збир на дропките со еднакви именители* $\frac{a}{m}$ и $\frac{b}{m}$ е *дропката* $\frac{a+b}{m}$, т. е.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\overset{Df}{=}\frac{a+b}{m}; \quad m\neq 0.$$

Пример: $\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5+2}{9}=\frac{7}{9}$; $\quad \frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{19}{12}$.

Ќе покажеме дека при собирањето на дропките важи комутативниот закон, т. е.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{b}{m}+\frac{a}{m}.$$

Доказ: Врз основа на дефиницијата за збир на две дропки и законот за комутативност при собирањето на природните броеви, имаме:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}=\frac{b+a}{m}=\frac{b}{m}+\frac{a}{m}.$$

Предлагаме да докажете дека при собирањето на дропките важат и законите за асоцијативност и монотоност.

Дефиниција 2. *Разлика на дропките* $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$ *е некоја дропка* $\frac{x}{y}$, *која собрана со дропката* $\frac{c}{d}$ *дава дропката* $\frac{a}{b}$, т. е.

$$\frac{d}{b}-\frac{c}{d}=\frac{x}{y}, \text{ така што } \frac{c}{d}+\frac{x}{y}=\frac{a}{b}.$$

За постоење на разликата $\frac{x}{y}$ потребен и доволен услов е намаленикот да не е помал од намалителот, т. е. $\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}$.

Ќе докажеме дека важи теоремата (правилото):

Теорема 1. *Разликата на две дропки со еднакви именители* $\frac{a}{m}$ и $\frac{b}{m}$, *еднаква е (ако постои) на дропката* $\frac{a-b}{m}$, т. е.

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}, \quad m\neq 0.$$

Д о к а з: Ако намалителот и разликата ги собереме, ке го добиеме намаленикот:

$$\frac{b}{m}+\frac{a-b}{m}=\frac{b+(a-b)}{m}=\frac{a}{m}.$$

Значи, разликата на дропките е провилно одредена. Таа ке постои ако постои разлика $a-b$ на природните броеви a и b.

Примери: $\frac{5}{7}-\frac{2}{7}=\frac{5-2}{7}=\frac{3}{7}$; $\frac{5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{10}{12}-\frac{9}{12}=\frac{10-9}{12}=\frac{1}{12}$.

2. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА ДРОПКИ

Множењето на дропките го дефинираме на следниов начин:

Дефиниција 3. *Производ на две дропки е дропка чиј броител е еднаков на производот од броителите, а именителот — на производот од именителите на дадените дропки,* т. е.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\overset{Df}{=}\frac{a\cdot c}{b\cdot d};\quad b\neq 0;\quad d\neq 0.$$

Пример: $$\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 8}=\frac{21}{40}.$$

Од дефиницијата на производот на две дропки следува дека тој секогаш постои и е еднозначно определен.

Лесно се уверуваме дека при множењето на дропките е сочуван законот за дистрибутивност на производот:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)\cdot\frac{p}{q}=\frac{a+b}{m}\cdot\frac{p}{q}=\frac{(a+b)p}{mq}=\frac{ap+bp}{mq}=\frac{ap}{mq}+\frac{bp}{mq}=\frac{a}{m}\cdot\frac{p}{q}+\frac{b}{m}\cdot\frac{p}{q},$$

односно $$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)\frac{p}{q}=\frac{a}{m}\cdot\frac{p}{q}+\frac{b}{m}\cdot\frac{p}{q}.$$

Покажете дека при множењето на дропките важат и останатите закони за комутативност, асоцијативност и монотоност на производот!

Делењето на дропки е операција обратна на множењето.

Дефиниција 4. *Да се подели дропката* $\frac{a}{b}$ *со дропката* $\frac{c}{d}$, *значи да се најде таква дропка* $\frac{x}{y}$ *чиј производ со дропката* $\frac{c}{d}$ *да биде еднаков на дропката* $\frac{a}{b}$, т. е.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{x}{y},\text{ така што }\frac{c}{d}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a}{b}.$$

Ќе докажеме дека дропките се делат согласно теоремата:

Теорема 2. *Количникот на две драпки е нова дропка, чиј броител е еднаков на производот од броителот на деленикот и именителот на делите-*

лот, а именителот е еднаков на производот од именителот на деленикот и броителот на делителот, т. е.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Д о к а з: Доволно е да покажеме дека производот од делителот и количникот е еднаков на делителот:

$$\frac{c}{d}\cdot\frac{ad}{bc}=\frac{c\cdot(ad)}{d\cdot(bc)}=\frac{a\cdot(cd)}{b\cdot(cd)}=\frac{a}{b}.$$

Со тоа горното правило е докажано.

Примери: $\frac{5}{8}:\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 2}=\frac{15}{16}$; $\quad\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 3}=\frac{5}{6}$.

Нека е даден дробниот број $\alpha=\frac{a}{b}$; $a\neq 0$; $b\neq 0$.

Дефиниција 5. *Ако е* $\alpha=\frac{a}{b}$, *тогаш за бројот* $\alpha_1=\frac{b}{a}$ *велиме дека е реципрочен на* α.

Обратно, очевидно е дека реципрочен број на α_1 е α. Затоа дропките α и α_1 се викаат реципрочни една на друга.

Врз основа на дефинициите за множење и делење на дропките имаме:

$$\alpha\cdot\alpha_1=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1 \text{ или } \alpha=\frac{1}{\alpha_1}.$$

Од самата дефиниција следува дека: секој дробен број, освен нулата, има свој единствен реципрочен број.

Пример: Реципрочен број на бројот $\frac{3}{5}$ е $\frac{5}{3}$; на $\frac{1}{4}$ е 4; а на 4 е $\frac{1}{4}$.

Од дефиницијата за споредување на две дропки очевидно е дека: ако α и α_1 се два реципрочни броја, тогаш:

$$\alpha>1\Rightarrow\alpha_1<1;\quad \alpha=1\Rightarrow\alpha_1=1;\quad \alpha<1\Rightarrow\alpha_1>1.$$

Ќе покажеме дека со помош на поимот за реципрочен број, делењето на две дропки може да се сведе на множење, согласно теоремата:

Теорема 3. *Дропка се дели со дропка, кога првата дропка — деленик се помножи со реципрочната дропка на втората дропка — делител.*

Д о к а з: Врз основа на правилото за делење имаме $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Но од друга страна: $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

Според тоа $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

Примери: $\frac{7}{12}:\frac{3}{5}=\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{3}=\frac{35}{36}$; $\quad\frac{1}{2}:\frac{3}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{6}$.

Од дефинициjата и правилата за делење на дропките следува:

Теорема 4. *Количникот на две дропки* α *и* $\beta \neq 0$ *секогаш постои и е еднозначно определен.*

Бидејќи природните броеви можеме да ги разгледуваме и како дропки со именител 1, тоа следува дека и количникот на два природни броја секогаш постои, само што во некои случаи тој количник нема да биде природен, туку дробен број.

Пример: $a:b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

Според тоа: *Множеството на дробните броеви е затворено во однос на операцијата делење, кога делителот не е нула.*

Дефиниција 6. *Дропките од видот* $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ *се викаат двојни дропки.*

Тие, всушност, претставуваат количник на две дропки. Кога се има предвид тоа, тие лесно можат да се претворат во обични дропки.

Примери: $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{7} : \frac{5}{8} = \frac{3}{7} \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{35}$; $\quad \dfrac{4}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{1} : \frac{3}{5} = 4 \cdot \frac{5}{3} = \frac{20}{3}$.

§ 11. ПЕРИОДИЧНИ ДЕЦИМАЛНИ ДРОПКИ

Дефиниција 1. *Дропка чиј именител е некоја декадна единица* (10, 100, 1000 *итн.) се вика децимална дропка.*

Пример: Децимални дропки се $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{37}{100}$; $\frac{249}{1000}$ итн.

Децималните дропки можат да се запишуваат пократко и без именител, така што се пишува броителот и во него оддесно на лево се одделуваат со децимална запирка толку цифри колку што нули има во декадната единица во именителот на дропката.

Примери: $\frac{245}{10} = 24{,}5$; $\frac{387}{100} = 3{,}87$; $\frac{6723}{1000} = 6{,}723$.

Ако бројот на цифрите во броителот е помал од бројот на нулите во именителот, тогаш напишуваме потребен број нули лево од броителот, така што и пред децималната запирка да остане една нула.

Примери: $\frac{3}{100} = \frac{003}{100} = 0{,}03$; $\frac{1}{1000} = \frac{0001}{1000} = 0{,}001$; $\frac{45}{10000} = \frac{00045}{10000} = 0{,}0045$.

Цифрите што стојат десно од децималната запирка се викаат *децимали.* На прво место по децималната запирка стојат десетинките, на второ место — стотинките, на трето место — илјадитите итн.

Децималните дропки, кога се запишани без именител се викаат уште *децимални броеви.*

Децималните броеви го имаат следново главно својство:

Својство: *Децималниот број не ја менува својата вредност ако кон него од левата или десната страна допишеме колку што сакаме нули.*

Пример: 7,25 = 007,25, бидејќи му додадовме 0 стотки и 0 десетки;
12,5 = 12,5000, бидејќи му додадовме: 0 стотинки, 0 илјадити и 0 десетилјадити.
И секој природен број може да се напише во вид на децимален број.

Пример: 4=4,0=4,00=4,000 итн.

Секоја обична дропка може да се претвори во децимална дропка, кога нејзиниот броител се подели со именителот.

Примери: $\frac{3}{5} = 3:5 = 0{,}6$; $\frac{7}{8} = 7:8 = 0{,}875$.

Во повеќето случаи тој процес на делење, колку и да го продолжуваме, не завршува на одреден број децимали, туку продолжува бескочно.

Примери: $\frac{2}{3} = 2:3 = 0{,}6666\cdots$; $\frac{5}{33} = 5:33 = 0{,}151515\ldots.$

Во таков случај обичната дропка преминува во *децимална дропка со бесконечно многу децимали.* Останатите децимални дропки, кои имаат конечно многу децимали, се викаат уште и *конечни децимални дропки.*

Дефиниција 2. *Секоја децимална дропка со бесконечно многу децимали, во која една или неколку цифри без прекин се повторуваат по еден ист ред, се вика периодична децимална дропка.*

Цифрата или групата цифри што се повторува се вика *период* на периодичната децимална дропка. За пократко пишување периодот се пишува само еднаш и тоа затворен во заграда.

Примери: Наместо 0,666 . . . пишуваме: 0,(6),
Наместо 0,151515 . . . пишуваме: 0,(15)
Наместо 0,583333 . . . пишуваме: 0,58(3); а се чита 0 цели 58 стоти и 3 во период.

Периодична децимална дропка кај која периодот започнува веднаш по децималната запирка се вика *чиста периодична децимална дропка,* а периодична децимална дропка кај која помеѓу децималната запирка и периодот се наоѓа една или неколку цифри што не се повторуваат се вика *мешана периодична децимална дропка.* Цифрата или групата цифри што се наоѓаат помеѓу децималната запирка и периодот се вика *претпериод.*

Може да се покаже дека:

1°. *Секоја децимална дропка, со бесконечно многу децимали, што е добиена од претворањето на некоја обична дропка мора да биде периодична.*

2.° *Во чиста периодична децимална дропка се претвара секоја обична редуцирана дропка, чиј именител не ги содржи множителите 2 и 5.*

3°. *Во мешана периодична децимална дропка се претвара секоја обична редуцирана (нескратлива) дропка чиј именител покрај другите прости множители, ги содржи и множителите 2 или 5, или и обата.*

Примери: $\frac{2}{11} = 2:11 = 0{,}1818\ldots = 0{,}(18)$.

$\frac{5}{6} = \frac{5}{2\cdot 3} = 5:6 = 0{,}8333\ldots = 0{,}8(3)$; $\frac{8}{15} = \frac{8}{3\cdot 5} = 8:15 = 0{,}5333\ldots = 0{,}5(3)$.

ЗАДАЧИ

1. Каков дел претставуваат: а) 8 минути од часот, б) 5 часа од денот, в) 7 l од хектолитарот? Запиши ги тие делови се дропки!

2. Часовникот покажува 15 часот. Запиши ги со дропки изминатиот и преостанатиот дел од денот!

3. Спореди ги дропките:

а) $\frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$; б) $\frac{7}{8}$ и $\frac{7}{5}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\frac{7}{15}$; г) $\frac{8}{9}$ и $\frac{11}{12}$ и д) $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{15}$!

4. Одреди го непознатиот број x:

а) $x + 2\frac{1}{3} = 3\frac{5}{6}$; б) $4\frac{3}{25} - x = \frac{7}{15}$; в) $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$;

г) $x\cdot\frac{3}{4} = 2\frac{1}{2}$; д) $1\frac{2}{3} : x = 2\frac{4}{9}$; ѓ) $x : \frac{2}{5} = \frac{5}{8}$.

5. Изврши ги назначените операции:

а) $\frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{15}$; б) $8 - 3\frac{2}{5} + \frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{3}{4}$; г) $\frac{32}{35} : \frac{6}{7}$;

д) $3\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} + \frac{3}{4} : \frac{1}{6} - 1 : \frac{4}{9}$; ѓ) $\left(1\frac{5}{12} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right)$;

е) $\dfrac{4 - 2\frac{1}{2}}{1\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}$; ж) $\dfrac{6 - \frac{2}{5}}{7 + 1 : \frac{3}{7}}$; з) $\dfrac{4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7} : \frac{3}{23}}{6\frac{1}{4} : \frac{5}{7}\cdot 5\frac{3}{4}}$.

6. Кои нули можеш да ги изоставиш во следниве децимални броеви: 3,050; 005,020; 40,800 а притоа бројот да не се промени!

7. Како ќе се промени вредноста на бројот 0,075, ако од него се изостави децималната запирка!

8. Подреди ги броевите така што да растат по големина:

2,03; 5; 7,2; 1,01; 1,012; 0,503; 2,008; 7,185; 0,52; 1,1!

9. Спореди ги производите: а) $56\cdot 0{,}4$ и $56\cdot 3$; б) $0{,}48\cdot 0{,}5$ и $0{,}48\cdot 0{,}2$ без да ги пресметуваш претходно!

10. Изврши ги назначените операции:

а) $(1{,}5\cdot 2{,}4 - 2{,}6)\cdot 3{,}05 + 4{,}5\cdot 0{,}2$; б) $(7{,}54 - 3{,}45 + 0{,}72 : 1{,}8)\cdot 2{,}5 + 0{,}16 : 3{,}2$

11. Испитај дали важат равенствата:

а) $\frac{1717}{2525} = \frac{17}{25}$; б) $\frac{3131}{7575} = \frac{31}{75}$.

12. За кои вредности на c дропките: $\frac{c}{c-3}$, $\frac{2}{3c-1}$, $\frac{c-1}{2c}$ немаат смисла?

13. За кои вредности на x дропката $\frac{5}{x-2}$ ќе биде поголема од 1?

§ 12. МНОЖЕСТВО НА РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Следново проширување на поимот за број претставува воведување на поимот *рационален број*.

И воведувањето на рационалните броеви е условено од потребите на секојдневната практика во животот. Тие се сврзани со потребата за нумеричко изразување на резултатите од мерењето на оние величини кои се менуваат во две заемно спротивни насоки, како што се: температурата, водостојот на водата на реките, надморската висина, времето и др.

Но, воведувањето на рационалните броеви го бара и математиката, главно заради неограниченоста на изведувањето на операциите вадење и делење. Рационалните броеви ги дефинираме на следниов начин:

Дефиниција 1. *Рационални броеви се симболите* $+a$ *и* $-a$, *што соодветствуваат на кој и да било природен или дробен број* a. *Рационалните броеви од видот* $+a$ *ги викаме позитивни, а од видот* $-a$ *негативни броеви.*

Новото множество на броеви за да ги содржи и сите природни и дробни броеви усвоено е позитивните рационални броеви да се поистоветат со природните и дробните броеви, т. е. ќе важи:

Дефиниција 2. *Секој позитивен рационален број* $+a$ *е еднаков на природниот или дробниот број* a т. е. $+a=a$.

Кај рационалните броеви се воведуваат и поимите *спротивни рационални броеви* и *апсолутна вредност* на рационалните броеви. Нив ги дефинираме со следните дефиниции:

Дефиниција 3. *На секој рационален број му соодветствува еден единствен спротивен рационален број и тоа: на бројот* $+a$ *спротивен му е бројот* $-a$, *а на бројот* $-a$, *спротивен му е* $+a$; тоа симболички го означуваме:

$$-(+a)=-a; \qquad -(-a)=+a.$$

Според тоа, броевите $+a$ и $-a$ се спротивни рационални броеви.

Такви се броевите: $+5$ и -5; -11 и $+11$; $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$; $-0{,}3$ и $+0{,}3$.

Бројот нула е спротивен на самиот себеси, т. е. $-0=+0=0$.

Апсолутната вредност или модул на рационалниот број a, која се означува со $|a|$, ја дефинираме на следниов начин:

Дефиниција 4. *Апсолутна вредност на позитивен број и нулата е самиот тој број; а апсолутна вредност на негативен број е неговиот спротивен позитивен број*, т. е.

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{ако е } a \text{ позитивен број или нула} \\ -a, & \text{ако е } a \text{ негативен број} \end{cases}$$

Примери: $|+7|=+7$; $|-7|=+7=7$; $|0|=0$; $\left|-\frac{4}{9}\right|=\frac{4}{9}$ итн.

Според тоа, записите; 7, $+7$, $|7|$ и $|-7|$ ќе означуваат еден ист позитивен број седум, т. е. $7=+7=|+7|=|7|=|-7|$.

Дефиниција 5. *Множеството на рационалните броеви го сочинуваат сите позитивни броеви, нулата и сите негативни броеви,* кое го означуваме со буквата Q.

Во множеството на рационалните броеви природните броеви ќе ги викаме уште и *цели позитивни броеви*; додека спротивните на нив негативни броеви, ќе ги викаме *цели негативни броеви.*

Дефиниција 6. *Множеството од сите цели позитивни броеви, нулата и сите цели негативни броеви го викаме множество на целите броеви,* и го обележуваме со

$$Z = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n, \ldots\}.$$

Врз основа на дефинициите на горниве множества, следува дека:

$$N \subset Z \subset Q \text{ односно } Q \supset Z \supset N.$$

Секој рационален број a може да се претстави во вид на дропка

$$\frac{p}{q} \text{ при што е } p \in Z,\ q \in N.$$

Но, бидејќи секоја обична дропка може да се изрази во вид на конечна децимална дропка или во вид на периодична децимална дропка, тоа можеме да кажеме дека:

Множеството на рационалните броеви го сочинуваат сите цели броеви (позитивни и негативни), нулата, сите конечни децимални дропки (позитивни и негативни) и сите периодични децимални дропки (позитивни и негативни).

Споредувањето на рационалните броеви го вршиме врз основа на:

Дефиниција 7. а) *Секој позитивен број е поголем од нулата и од кој и да било негативен број.*

Примери: $\frac{3}{4} > 0$; $7 > 0$; $0{,}2 > -5$.

б) *Секој негативен број е помал од нулата и од кој и да било позитивен број.*

Примери: $-5 < 0$; $-9 < 3\frac{1}{2}$; $-1 < 0{,}1$ итн.

в) *Од два негативни броја поголем е оној што има помала апсолутна вредност и обратно.*

Примери: $-6 > -11$, бидејќи е $|-6| < |-11|$; $-7 < -2$, бидејќи е $|-7| > |-2|$.

Забелешка: Ако сакаме да означиме дека бројот a е позитивен, тогаш пишуваме $a > 0$, ако пак сакаме да означиме дека a е негативен, пишуваме $a < 0$.

Лесно можеме да покажеме дека:

Релацијата еднаквост „$=$" во множеството на рационалните броеви, исто како и во множеството на природните и дробните броеви, ги има својствата на:

1°. *Рефлексивност*: $a = a$ за секој рационален број a,
2°. *Симетричност*: $a = b \Rightarrow b = a$,
3°. *Транзитивност*: $(a = b$ и $b = c) \Rightarrow a = c$.

Релациите, пак, на нееднаквост („$>$" и „$<$") во множеството на рационалните броеви го имаат својството на:

4°. *Транзитивност*: $(a > b$ и $b > c) \Rightarrow a > c$ или
$(a < b$ и $b < c) \Rightarrow a < c$,

но ги немаат својствата на рефлексивност и симетричност (зошто?).

Множеството на рационалните броеви ги има следниве поважни својства:

Теорема 1. *Множеството на рационалните броеви е подредено множество.*

Доказ: Со последната дефиниција 7 утврден е поредокот меѓу елементите на множеството на рационалните броеви, кој ги исполнува условите на трихотомија:

1°. За кои и да било два рационални броја a и b постои една и само една од следниве три релации:

$$\text{или } a > b \text{ или } a = b \text{ или } a < b$$

2°. За кои и да било три рационални броја a, b и c:

$$(a > b \text{ и } b > c) \Rightarrow a > c.$$

Дефиниција 8. *За едно подредено множество броеви велиме да е дискретно, ако и само ако меѓу кои и да било два различни броја од тоа множество лежат конечно многу негови броеви.*

Пример на дискретни множества претставуваат множествата на природните и целите броеви, На пример, меѓу природните броеви 3 и 10 лежат конечен број природни броеви и тоа: 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Во множествата на природните и целите броеви разликуваме *сукцесивни* (*последователни*) *броеви*. На пример, во множеството на природните броеви такви се броевите n и $n+1$, а во множеството на целите броеви k и $k+1$.

Јасно е дека меѓу кои и да било два сукцесивни природни (односно цели) броја не постои ниту еден природен (односно цел) број.

Дефиниција 9. *За едно подредено множество броеви велиме да е густо, ако и само ако меѓу кои и да било два различни броја од тоа множество лежат бесконечно многу негови броеви.*

Теорема 2. *Множеството на рационалните броеви е густо, т. е. меѓу кои и да било два различни рационални броеви* a *и* b $(a < b)$ *има бесконечно многу рационални броеви.*

Доказ: Нека се a и b два различни рационални броја и тоа $a < b$. На основа законот за монотоност на збирот, од $a < b$ имаме:

$$a + a < a + b; \qquad a + b < b + b$$

$$2a < a + b; \qquad a + b < 2b$$

$$a < \frac{a+b}{2}; \qquad \frac{a+b}{2} < b$$

односно:

$$a < \frac{a+b}{2} < b. \tag{1}$$

Неравенството (1) покажува дека: Бројот $\frac{a+b}{2}$, кој се вика *аритме-*

тичка средина на рационалните броеви a и b, е некој трет рационален број, кој се наоѓа меѓу броевите a и b.

На ист начин може да се докаже дека меѓу броевите a и $\frac{a+b}{2}$, се наоѓа нивната аритметичка средина, итн. Тој процес на вметнување на аритметичките вредности доведува до заклучок дека меѓу броевите a и b лежат бесконечно многу други рационални броеви, што требаше да се докаже.

Тоа значи дека во множеството на рационалните и дробните броеви не постојат сукцесивни броеви.

§ 13. ОПЕРАЦИИ СО РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

При утврдувањето на дефинициите за операциите со рационални броеви се имаат предвид барањата: а) законите на операциите да важат и во проширеното множество и б) правилата за изведување на операциите со рационални броеви да ги содржат и соодветните правила за сметање само со позитивните броеви.

1. СОБИРАЊЕ И ВАДЕЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Дефиниција 1. 1°. *Два рационални броја со исти знаци се собираат, така што се собираат нивните апсолутни вредности а пред добиениот збир се става заедничкиот знак на собирците.*

Примери: $(+8)+(+5)=+13$; $(-6)+(-9)=-15$; $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=-1\frac{1}{4}$.

2°. *Два рационални броја со различни знаци и различни апсолутни вредности се собираат, така што од поголемата апсолутна вредност се вади помалата апсолутна вредност и пред добиената разлика се става знакот на бројот чија апсолутна вредност е поголема.*

Примери: $(-3)+(+7)=+4$; $(+9)+(-3{,}6)=+5{,}4$; $(-5{,}3)+(+2{,}7)=$ $=-2{,}6$.

3°. *Збирот на два спротивни рационални броја еднаков е на нула*, т. е.

$$a+(-a)=0$$

4°. *Ако еден од двата собирока е еднаков на нула, тогаш нивниот збир е еднаков на другиот собирок*, т. е. $a+0=a$.

Ако треба да се соберат три или повеќе рационални броја, тогаш согласно горните правила, ги собираме прво првите два собирока, па кон добиениот збир го додаваме третиот собирок, потоа кон новодобиениот збир го додаваме четвртиот собирок итн.

Од воведената дефиниција следува дека важи следнава:

Теорема 1. *Множеството на рационалните броеви е затворено по однос на операцијата собирање*, т. е.

$$(a\in Q \text{ и } b\in Q)\Rightarrow(a+b)\in Q.$$

Може лесно да се уочи дека горната дефиниција за збир на два рационални броја ја опфаќа и соодветната дефиниција за збир на два природни и дробни броја.

Теорема 2. *За операцијата собирање на рационалните броеви важат законите на*:

1°. *Комутативност*: $a+b=b+a$;

2°. *Асоцијативност*: $(a+b)+c=a+(b+c)$;

3°. *Монотоност*: $a=b \Rightarrow a+r=b+r$;

$a>b \Rightarrow a+r>b+r$;

$a<b \Rightarrow a+r<b+r$.

Доказот на оваа теорема се заснива на утврдената дефиниција за збир на рационални броеви. Предлагаме тоа да го сторите сами.

Вадењето на рационалните броеви го дефинираме како обратна операција на собирањето.

Дефиниција 2: *Разликата на рационалните броеви a и b е таков трет рационален број x, кој собран со бројот b го дава бројот a*, т. е.

$$a-b=x, \text{ така што } b+x=a.$$

Ќе докажеме дека вадењето на рационалните броеви секогаш може да се замени со собирање согласно теоремата (правилото):

Теорема 3. *За да извадиме од еден рационален број друг таков, доволно е кон намаленикот да го додадеме спротивниот број на намалителот*, т. е.

$$a-b=a+(-b).$$

Доказ: Доволно е да докажеме дека збирот од намалителот b и разликата $a+(-b)$ е еднаков на намаленикот a:

$$b+[a+(-b)]=[b+(-b)]+a=0+a=a.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Врз основа на горната теорема можеме да напишеме:

$$a-(-b)=a+(+b)=a+b; \quad a-(+b)=a+(-b)=a-b$$

На основа теорема 3 разликата на два рационални броја секогаш може да се замени со збир, а имајќи ја предвид теорема 1, јасно е дека ќе важи и следнава теорема:

Теорема 4. *Множеството на рационалните броеви е затворено по однос на операцијата вадење*, т. е.

$$(a \in Q \text{ и } b \in Q) \Rightarrow (a-b) \in Q.$$

Значи, во множеството на рационалните броеви операцијата вадење е секогаш можна.

Примери:

$$(+5)-(+7)=(+5)+(-7)=-2;$$

$$(-4)-(+9)=(-4)+(-9)=-13;$$

$$\left(-2\frac{3}{4}\right)-\left(-3\frac{1}{2}\right)=\left(-2\frac{3}{4}\right)+\left(+3\frac{1}{2}\right)=+\frac{3}{4}.$$

2. АЛГЕБАРСКИ ЗБИР НА РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Да го разгледаме изразот

$$(+4)+(-7)-(+5)-(-3)+(-2). \tag{1}$$

Во него се означени неколку последователни собирања и вадења. Бидејќи секое вадење на рационални броеви може да се замени со собирање, затоа горниот израз може да се запише и во форма само на збир од броеви со исти апсолутни вредности, а имено:

$$(+4)+(-7)+(-5)+(+3)+(-2). \tag{2}$$

Дефиниција 3. *Израз во кој се означени неколку последователни собирања и вадења на рационални броеви, се вика алгебарски збир.*

На пример, горните два израза се алгебарски збирови.

Заради попросто запишување на изразот (2), знаците за собирање и заградите можат да се испуштат, но притоа треба да се знае дека секој знак ($+$ или $-$) му припаѓа на бројот што следува по него, како и тоа дека сите тие рационални броеви треба да се соберат. Така, изразот (2) можеме кратко да го запишеме вака:

$$4-7-5+3-2$$

Ова означува дека треба да се соберат броевите $+4$, -7, -5, $+3$ и -2.

Комутативниот и асоцијативниот закон за собирање важат и за алгебарски збир. При нивната примена треба да внимаваме собироците да ги разместуваме заедно со знаците што им припаѓаат.

Примери: $5-8=-8+5$, или $a-b=-b+a$.

Бидејќи секој алгебарски збир, по неговото пресметување, може да се изрази со еден рационален број, тој може да се додава или вади од некој даден рационален број. Тоа го вршиме согласно правилата:

Правило 1. *Алгебарски збир се додава кон некој број, кога кон тој број последователно се додаде секој член (собирок) од алгебарскиот збир,* т. е.

$$a+(-b+c-d)=a-b+c-d.$$

Пример: $-2+(-5+7-3)=-2-5+7-3.$

Правило 2. *Алгебарски збир се вади од даден број, кога кон тој број последователно се додаде секој член од алгебарскиот збир со спротивен знак,* т.е.

$$a-(-b+c-d)=a+b-c+d.$$

Пример: $5-(-6+4-7)=5+6-4+7.$

Врз основа на правилата за додавање и вадење на алгебарски збир лесно доаѓаме до следново практично правило за ослободување од заградите.

Правило 3. *Ако пред заградата стои знакот „+", тој знак и заградата можат да се изостават, а членовите во заградата ги оставаме непроменети.*

Ако, пак, пред заградата стои знакот „—", тој знак и заградата можат да се изостават, но тогаш сите членови во заградата ги земаме со спротивни знаци.

Примери: $-9+(-2+5-7)=-9-2+5-7=-13$

$5-(-3+8-4)=5+3-8+4=4;\quad -6-(+2-7+4)=-6-2+7-4=-5$

Забелешка: Ако во изразот, освен мали загради, се среќаваат и средни загради „[]" и големи загради „{}", тогаш ослободувањето од нив го вршиме постепено, применувајќи го при секое ослободување горното правило.

Пример: $a-\{m-[-b+n-(c-d)]\}=a-\{m-[-b+n-c+d]\}=$
$=a-\{m+b-n+c-d\}=a-m-b+n-c+d.$

3. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Кога имаме предвид дека секој рационален број е еднозначно определен со неговата апсолутна вредност и неговиот знак, производот на два рационални броја го дефинираме на следниов начин:

Дефиниција 4. *Производ на два рационални броја a и b е рационален број, кој има апсолутна вредност еднаква на производот од апсолутните вредности на a и b со знак плус $(+)$, ако a и b имаат исти знаци, или со знак минус $(-)$, ако a и b имаат различни знаци. Производот е еднаков на нула, ако барем еден од множителите е нула.*

Примери: $\left(+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)=+\frac{3}{8}$; $(-4)\cdot(-7)=+28$; $(-5)\cdot\left(+\frac{1}{7}\right)=$
$=-\frac{5}{7}$; $(+8)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$; $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot 0=0$; $0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=0.$

Од горната дефиниција следуваат теоремите:

Теорема 5. *Апсолутната вредност на производот на два рационални броја еднаква е на производот од апсолутните вредности на множителите*, т.е.

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$$

Теорема 6. *Множеството на рационалните броеви е затворено по однос на операцијата множење*, т. е.

$$(a\in Q \text{ и } b\in Q)\Rightarrow(ab)\in Q.$$

Теорема 7. *За операцијата множење на рационалните броеви, важат законите на*:

1°. *Комутативност*: $ab=ba$;

2°. *Асоцијативност*: $(ab)c=a(bc)$;

3°. *Дистрибутивност на множењето во однос на собирањето*:

$$(a+b)c=ac+bc;$$

4°. *Монотоност*: $a=b\Rightarrow ar=br$;
$(a>b \text{ и } r>0)\Rightarrow ar>br$;
$(a>b \text{ и } r<0)\Rightarrow ar<br$.

Доказ: За илустрација ќе го докажеме само комутативниот закон. Другите закони докажете ги сами!

а) Ако е $a>0$ и $b>0$, равенството (1) важи врз основа на комутативниот закон за множење на позитивни броеви;

б) ако е $a<0$ и $b<0$, тогаш броевите $a\cdot b$ и $b\cdot a$ се позитивни, па според тоа $a\cdot b=b\cdot a$;

в) ако е $a>0$, $b<0$ или $a<0$, $b>0$, тогаш производите се негативни броеви со еднакви апсолутни вредности, па според тоа: $ab=ba$;

г) ако е $a=0$ или $b=0$; или пак $a=b=0$, тогаш $ab=ba=0$.

Делењето го дефинираме како обратна операција на множењето.

Дефиниција 5. *Количник на рационалниҭе броеви a и $b \neq 0$ е рационален број x, кој ӣомножен со b го дава бројоҭ a,* т. е.

$$a : b = x \ (b \neq 0), \text{ така што } b \cdot x = a.$$

Бидејќи е $|b| \cdot |x| = |a|$, тоа имаме $|x| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Од дадените дефиниции за производ и количник следуваат теоремите:

Теорема 8. *Количник на рационалниҭе броеви a и $b \neq 0$ еднаков е на рационален број кој има айсолуҭна вредносҭ еднаква на количникоҭ од $|a|$ и $|b|$ и знак $+$, ако a и b се со исҭи знаци; или знак $-$, ако a и b се со различни знаци.*

Примери: $(-15) : (-3) = +5$; $\left(-\dfrac{3}{4}\right) : (+5) = -\dfrac{3}{20}$.

Теорема 9. *Множесҭвоҭо на рационалниҭе броеви е заҭворено ӣо однос на ойерацијаҭа делење (со исклучок на делење со нула),* т. е.

$$(a \in Q, \quad b \in Q \quad \text{и} \quad b \neq 0) \Rightarrow \frac{a}{b} \in Q.$$

Може да се докаже дека својствата што важат за делењето на природните и дробните броеви важат и за делењето на рационални броеви.

Предлагаме да го докажете тоа сами!

ЗАДАЧИ

1. Напиши ги броевите што се спротивни на секој од следниве броеви:

$$-8; \ +4; \ 1; \ -3{,}2; \ -0{,}5; \ 0; \ -1\frac{4}{5}; \ -c; \ a; \ (a-c)!$$

2. Напиши неколку рационални броеви кои ќе се наоѓаат помеѓу следниве два рационални броја: а) 2 и 3, б) -6 и -7, в) 0 и -1!

3. Спореди ги броевите и запиши го тоа со помош на неравенство:
а) $+4$ и -5; б) -7 и 0; в) $-8{,}2$ и $0{,}82$; г) 3 и -5;
д) -9 и -1; ѓ) $-3{,}5$ и -4; е) 0 и $0{,}25$; ж) $+6$ и -9!

4. Дали бројот $-a$ секогаш означува негативен број?

5. Кој од броевите е поголем: а) a или $-a$; б) c или $2c$; в) c или $\dfrac{1}{c}$?

6. Ако е $|a| = |b|$, дали секогаш е и $a = b$?

7. Може ли разликата $a - b$ да биде поголема од збирот $a + b$!

8. Може ли даден рационален број да биде:
а) поголем од; б) еднаков на; в) помал од својата апсолутна вредност?

9. Кој знак на неравенство треба да се постави меѓу броевите a и $|a|$.

10. Изврши ги означените операции:

а) $(+4) + \left(-1\dfrac{3}{5}\right) + (-10)$; б) $(-4{,}5) - \left(+1\dfrac{3}{4}\right)$;

в) $8-7\frac{1}{2}-5+6\frac{2}{5}-0{,}6-3+2{,}5-4$; г) $(-15)\cdot\left(+\frac{2}{7}\right)$;

д) $\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot(-4{,}8)$; ѓ) $(-35):(-7)$; е) $\left(-1\frac{1}{4}\right):\left(-0{,}2\right)$; ж) $0:\left(-3\frac{5}{7}\right)$

11. Пресметај:

а) $|a|+|b|-|c|$, ако е $a=-5$; $b=7$ и $c=-1\frac{1}{2}$; б) $|a-b|+c$, ако е $a=-8$, $b=-2$, $c=4$; в) $|a-c|-|b+c|$, ако е $a=3$, $b=-6$, $c=-2$

12. Какви знаци имаат броевите a и b, ако е:

а) $a\cdot b>0$, а $a+b<0$; б) $a\cdot b>0$, а $a+b>0$;

в) $a\cdot b<0$; г) $\frac{a}{b}>0$; д) $\frac{a}{b}<0$!

13. За кои вредности на x, изразите: $x-3$; $\frac{2}{x-5}$; $\frac{x-5}{4}$ се: а) позитивни, б) негативни, в) немаат смисла?

14. Ако е $\frac{-5}{a-b}>0$; кој број е поголем: a или b?

15. Провери ја точноста на правилото: $(abc)\cdot m=(a\cdot m)\,bc=a\,(b\cdot m)\,c$ ако е:

а) $a=-2$, $b=3$, $c=-5$ и $m=-8$; б) $a=4$, $b=-1$, $c=0$ и $m=-5$

§ 14. СТЕПЕНУВАЊЕ. ОПЕРАЦИИ СО СТЕПЕНИ

Разгледувањето на збирот од еднакви собироци доведе до операцијата множење. Слично на тоа, разгледувањето на производот од еднакви множители доведува до нова операција - *степенување*.

Дефиниција: *Производот на n еднакви множители, од кои секој е еднаков на некој рационален број a, се вика n—ти степен на бројот a и кусо се бележи со a^n*, т. е.

$$a^n \stackrel{Df}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot a\ \ldots\ a}_{n\ \text{множители}}$$

Симболот a^n се вика *степен*, бројот a—*основа на степенот*, а бројот n—*показател* (*експонент*) на степенот.

Бидејќи производот треба да има барем два множитела, тоа според горната дефиниција степеновиот показател n треба да не е помал од 2. Но, по договор се зема дека е $a^1=a$.

Степенот на кој и да било рационален број се пресметува така што тој прво се запишува во вид на производ, а потоа се врши множењето.

Примери: $\left(+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$; $(+5)^3=(+5)\cdot(+5)\cdot(+5)=+125$;

$(-2)^2=(-2)\cdot(-2)=+4$; $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$

Од дефиницијата за производ на рационални броеви следува:

1°. *Степенот на кој и да било позитивен број секогаш е позитивен број* т. е.

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0$$

2°. *Степенот на негативен број со парен показател е позитивен број; а со непарен показател е негативен број*, т. е.

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2k} > 0 \\ a^{2k+1} < 0; \end{cases} k \in N.$$

3. *Степенот на кој и да било рационален број е пак рационален број*, т. е.

$$(a \in Q \text{ и } n \in N) \Rightarrow a^n \in Q.$$

Операциите со степени ги вршиме согласно теоремите (правилата):

Теорема 1. *Степени со еднакви основи се множат кога заедничката основа се степенува со збирот од показателите на дадените степени*, т. е.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \tag{1}$$

Д о к а з: Врз основа на дефиницијата за степен, имаме:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots .}_{m \text{ множители}} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots . a}_{n \text{ множители}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots . a}_{m+n \text{ множители}} = a^{m+n}$$

Примери: $a^3 a^2 = a^5$; $c^n c^3 = c^{n+3}$

Равенството (1) може да се прошири и за произволен број множители:

$$a^m \cdot a^n \cdot \ldots . \cdot a^t = a^{m+n+ \ldots . +t}. \tag{1'}$$

Теорема 2. *Степени со еднакви основи се делат кога заедничката основа се степенува со разликата од показателите на деленикот и делителот*, т. е.

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad a \neq 0 \text{ и } m > n. \tag{2}$$

Д о к а з: Производот од делителот и количникот:

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^{n+m-n} = a^m$$

еднаков е на деленикот. Значи, равенството (2) е точно.

Пример: $a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$, бидејќи е $a^3 \cdot a^2 = a^5$.

Според дадената дефиниција степенот a^{m-n} е определен, само ако показателот $m-n$ е природен број, т. е. ако е $m > n$.

Теорема 3. *Производ се степенува кога секој негов множител се степенува со истиот показател, па добиените степени се помножат*, т. е.

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n \tag{3}$$

Д о к а з: Врз основа на дефиницијата за степен и комутативниот и асоцијативниот закон на множењето, добиваме:

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\,(ab) \ldots . (ab)}_{n \text{ пати}} = \underbrace{(aaa \ldots a)}_{n \text{ пати}} \underbrace{(bbb \ldots b)}_{n \text{ пати}} = a^n b^n.$$

Пример: $(-2a)^4 = (-2)^4 \cdot a^4 = 16a^4$.

Правилото (3) може да се прошири и за случај кога производот има повеќе од два множитела:

$$(abc \ldots \ldots v)^n = a^n b^n c^n \ldots \ldots v^n. \tag{3'}$$

Равенството (3) понекогаш корисно е да се чита и применува и оддесно налево, т. е.

$$a^n b^n = (ab)^n. \tag{3''}$$

Тогаш го читаме: *степени со еднакви показатели се множат кога производот од нивните основи се степенува со нивниот заеднички показател.*

Пример: $24^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \left(24 \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = 4^3 = 64.$

Теорема 4. *Количник (или дропка) се степенува кога одделно деленикот и делителот се степенуваат со истиот показател, а потоа првиот степен се подели со вториот,* т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad b \neq 0. \tag{4}$$

Доказ: Врз основа дефиницијата за степен и правилото за множење на дропки, имаме:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ пати}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots . a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots . b}_{n \text{ пати}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Пример: $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}.$

Ако ги промениме страните на равенството (4), тоа го добива видот:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n; \quad b \neq 0. \tag{4'}$$

Тогаш тоа го искажува правилото:

Степени со еднакви показатели се делат кога количникот од нивните основи се степенува со нивниот заеднички показател.

Пример: $\frac{18^5}{9^5} = \left(\frac{18}{9}\right)^5 = 2^5 = 32.$

Теорема 5. *Степен се степенува кога основата на степенот се степенува со производот на двата показатела,* т. е.

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{5}$$

Доказ: Ако во равенството (1') ставиме: $m = n = \ldots = t$, ќе добиеме:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots . a^m}_{n \text{ множители}} = a^{\overbrace{m+m+m+ \ldots . +m}^{n \text{ собироци}}} = a^{mn}.$$

Пример: $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}.$

Формулата (5) понекогаш корисно е да се чита и оддесно налево, т. е.

$$a^{mn} = (a^m)^n.$$

ЗАДАЧИ

1. Пресметај:

а) $(-5)^2 + (-2)^3$; б) $3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1)^3$; в) $-(-1)^2 + 1$

2. Изврши ги означените операции:

а) $(-2)\cdot(-3)^2+(-5)^2-(-14)^3:7$; б) $[-4{,}5+(0{,}8-2{,}18)\cdot 3-0{,}66:(-3)]:\frac{4}{5}$.

в) $-(-4)^2\cdot(-0{,}3)^3+8\cdot(-3)$; г) $(-81):[-5-(6-10):2]-3{,}5\cdot(-8)$;

д) $(-6)^2-(-2)^4+(-3)^3-5^2$

3. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $(-1{,}5)^2\cdot(3^2-5^2)-8\cdot 2^2:(-6{,}4)\cdot(-5)$; б) $\dfrac{-1{,}75:(-0{,}35)+8{,}8:(-0{,}11)}{(-2{,}45+3{,}2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}$;

в) $\left(25\frac{23}{84}-24\frac{49}{60}\right)\cdot\left\{\left[4-3\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right]:\frac{4}{25}\right\}$;

г) $\dfrac{1}{2}+2:\dfrac{1}{9}-\dfrac{4}{5}:\dfrac{1{,}5}{1\frac{1}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1\frac{1}{2}}}+\dfrac{1+0{,}5\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{4+1{,}8\cdot 10}}$; д) $\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1{,}5}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}-\dfrac{3}{4}$

4. За кои вредности на a е точно равенството:

а) $-a^2=(-a)^2$; б) $-a^3=(-a)^3$; в) $a^2+a^3=0$; г) $a^2=a^3$.

5. Провери ја точноста на равенствата:

а) $10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$; б) $3^3+4^3+5^3=6^3$.

6. Може ли изразот $\dfrac{5}{5+a^2}$ да има поголема вредност од 1? Зошто?

7. Изврши ги означените операции со степените:

а) $a^2\cdot a^3\cdot a^5$; б) $(a^n\cdot a^2$; в) $x^{n-1}\cdot x$; г) $a^7:a^4$; д) $b^{n+2}:b^3$;

ѓ) $a^8:(a^2\cdot a^5)$; е) $x\cdot x^5:x^2$; ж) $(a\cdot b)^4\cdot a^3$ з) $\left(\dfrac{a}{2c}\right)^3$.

8. Пресметај:

а) $(a^2)^3$; б) $(a^n)^2$; в) $(2ab^2)^3$; г) $(-3a^2b^2c^3)^2$; д) $(25^3\cdot 4^3)$;

ѓ) $-(-a^3)^2$; е) $(a^{2n})^3:(a^3)^{2n}$; ж) $\left(-\dfrac{5x^2}{b}\right)^3$; з) $\left(\dfrac{a^3b}{2c^3}\right)^4$

9. Пресметај ја вредноста на изразите:

а) $a\cdot(2a-b^2)^3$ за $a=-3\frac{1}{2}$; $b=5$; б) $a^2-5(a-b)^2$ за $a=6$; $b=\frac{3}{5}$;

в) $\dfrac{x^3+x^2-x+1}{x(x+1)}$ за $x=-4$; г) $\dfrac{3-|x|+|x+3|}{|x-2|\cdot|x|}$ за $x=-5$.

10. Докажи дека апсолутната вредност на даден степен е еднаква на степенот на апсолутната вредност на основата, т. е. дека $|a^n|=|a|^n$.

Глава III

ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

§ 15. РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Дефиниција: *Рационален алгебарски израз е множество од конечно многу посебни и општи броеви сврзани со знаците на операциите собирање, вадење, множење, делење и степенување со показател цел број.*

На пример: $a+b$; $2a^2b$; $\frac{m^2+5}{m-n}$; $\frac{1}{p+3}$; $\frac{(ax-b)^2+y^2}{2a(x^2+y^2)}$.

Примено е алгебарскиот израз да може да се состои и само од посебни броеви, дури и само од еден посебен или општ број. На пример, броевите: 7,2; 1; a; x се сметаат, исто така, алгебарски изрази.

Алгебарските изрази што содржат само посебни броеви, се викаат *нумерички* или *бројни изрази*.

Бројот што се добива откога во алгебарскиот израз се внесат (заменат) соодветните вредности на општите броеви и се извршат означените операции во него се вика *нумеричка* или *бројна вредност* на тој израз.

Бидејќи соодветните вредности на општите броеви и сите посебни броеви што влегуваат во рационалниот алгебарски израз се рационални броеви, тоа и бројната вредност на тој израз ќе биде пак некој рационален број. (Зошто?). Општите броеви, што можат да земаат вредности од некое множество на броеви, се викаат аргументи на рационалниот израз.

Јасно е дека бројната вредност на рационалниот израз ќе зависи од тоа какви вредности добиваат аргументите.

Пример: Бројната вредност на рационалниот израз $3x-5$ за $x=1$ е $3\cdot1-5=-2$; за $x=2$ е $3\cdot2-5=1$ за $x=9$ е $3\cdot9-5=22$ итн. Затоа велиме:

Рационалниот израз е определена функција (рационална функција) на аргументите што влегуваат во него.

Нужно е да напоменеме дека аргументите во некои рационални изрази можат да ги добиваат кои и да било вредности, додека кај други можат да добиваат само некои вредности, а не и кои да било.

Вредностите што можат да ги добиваат аргументите во даден рационален израз се викаат допуштени вредности за тие аргументи.

Во врска со тоа кои се допуштени вредности на аргументите во даден рационален израз, треба да се има предвид следново:

1°. Ако рационалниот израз е добиен како резултат од решението на некоја задача, тогаш множеството на допуштените вредности на општите броеви во него се одредува по смислата на таа задача. Така на пример:

Ако изразот $10x + y$ е добиен од решението на една ваква задача: „Да се напише израз кој ќе претставува двоцифрен број, во кој цифрата на десетките е означена со x, а цифрата на единиците со y", тогаш во тој израз допуштени вредности за бројот x се само целите броеви од 1 до 9 заклучно, а за бројот y само целите броеви од 0 до 9 заклучно.

2°. Ако рационалниот израз не е сврзан со решението на некоја задача, тогаш допуштени вредности на аргументите во него се сите рационални броеви со исклучок само на оние вредности за кои означените операции во изразот немаат смисла. На пример:

Во изразот $\frac{3n}{a-5}$ допуштени вредности за бројот n се сите природни броеви, а за бројот a сите рационални броеви, со исклучок на бројот $a=5$, за кој делителот $a-5$ е еднаков на нула; а делењето со нула нема смисла.

§ 16. ВИДОВИ РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

1. ЦЕЛИ И ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Дефиниција 1. *Рационални изрази во кои не се среќава операцијата делење со општ број или делење со израз што содржи некој општ број се цели рационални алгебарски изрази.*

На пример: $2a^2b-1$; $5x^2-3xy+4y$; $\frac{4x}{5}$; $\frac{a^2-2b}{4}$.

Целиот рационален израз може да содржи делење со посебен број, бидејќи делењето може да се смета и како множење со неговата реципрочна вредност. На пример третиот и четвртиот израз можат да се запишат и вака:

$$\frac{1}{5}\cdot 4x \text{ или } \frac{4}{5}x \text{ и } \frac{1}{4}(a^2-2b).$$

Дефиниција 2. *Рационални изрази кои содржат делење со општ број или делење со израз што содржи општ број се дробни рационални изрази.*

Такви се изразите: $\frac{2a-1}{b}$; $\frac{x}{y-2}$; $\frac{m-1}{m+1}$; $5a+\frac{2}{b}$ итн.

2. МОНОМ. КОЕФИЦИЕНТ И ГЛАВНА ВРЕДНОСТ

Од целите рационални изрази најпрости се тие кои ги содржат само операциите множење и степенување со показател природен број.

На пример: $5x$; $-2a^2b$ $\frac{3}{4}ab^2$; x^2y^2; $-0{,}4\ m$.

Дефиниција 3. *Цел рационален израз кој ги содржи само операциите множење и степенување со показател природен број, се вика моном.*

Бидејќи операцијата степенување е специјален случај на операцијата множење ($a^2 = aa$), тоа може да се каже дека: Моном е цел рационален израз кој ја содржи само операцијата множење.

Примено е да се смета моном и секој израз што се состои само од еден општ или посебен број. На пример и: a; $-x$; 3; $-5{,}2$ се мономи.

Изразот $\frac{4ab^2}{5}$ е исто така моном, покрај тоа што содржи делење со посебниот број 5 Тој израз може да се запише и вака:

$$\frac{4ab^2}{5} = \frac{4}{5} \cdot ab^2 = 0{,}8\, ab^2.$$

Ако мономот содржи неколку посебни множители, со примена на комутативниот и асоцијативниот закон на множењето, нивниот производ може да се стави пред производот на аргументите.

Пример: Мономот $\frac{-2\,ab^2 \cdot 3\,x^2y}{5}$ го запишуваме: $-2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} ab^2x^2y = -\frac{6}{5} ab^2x^2y$.

Множителот — посебен број, што стои пред множителите — општи броеви, се вика *коефициент на мономот;* а производот на општите броеви се вика *главна вредност на мономот*,

Пример: Во мономите: $2a^2b$; $-3x$; $\frac{4}{5} ab^2c$; $-0{,}4m^2$ коефициенти се 2; -3; $\frac{4}{5}$; и $-0{,}4$; а главни вредности; a^2b; x; ab^2c и m^2.

Ако во мономот сите множители се само општи броеви, тогаш коефициентот е еднаков на 1 или — 1, само што тој не се пишува.

На пример: $ac = 1 \cdot ac$; или $-ac = -1 \cdot ac$.

Мономи кои имаат еднакви главни вредности, а се разликуваат само по своите коефициенти се викаат *слични мономи.*

Такви се мономите: $-2a^2b$; $5a^2b$; $\frac{3}{4}a^2b$; $-a^2b$ итн.

Два слични монома чии коефициенти се спротивни броеви се викаат уште и *сиротивни мономи.* На пример: $7ab^2$; и $-7ab^2$; $0{,}4x$ и $-0{,}4x$.

Забелешки 1°. Допуштени вредности на аргументите во мономот се сите рационални броеви. (Зошто?).

2°. Бидејќи бројната вредност на кој и да било моном е секогаш рационален број, тоа на секој моном можеме да гледаме како на рационален број.

3°. Понатаму поимот коефициент се уопштува. Дури и некои општи множители можат да се разгледуваат како кефициенти. На пример: Во мономот $3ax$ коефициент пред аргументот x е $3a$.

4°. Под *сшейен* на еден моном се подразбира збирот од показателите на аргументите што влегуваат во неговата главна вредност. На пример: мономот $-2axy^2$ е од четврти ($1+1+2=4$) степен по однос на аргументите a, x и y; а од трет степен по однос само на аргументите x и y. Мономот $2mc^2$ е од трет степен ($1+2=3$), по однос на аргументите m и c.

3. ПОЛИНОМ. ПОДРЕДЕНИ ПОЛИНОМИ

Дефиниција 4. *Полином е алгебарски збир од конечен број мономи.*

На пример полиноми се: $3a-2ax+a^2b^2-bx$; $4ax-3by+x^2y^3$

Мономите од кои е составен еден полином се викаат *членови на полиномот.*

Полином што содржи два члена се вика уште и *бином*; а полином што содржи три члена се вика *трином* итн.

Пример: $a+2b$; a^2+3; $4a^2b-5c$, се биноми, а

$3a^2+2a-1$; $x^2-2xy+3y$; $a+b-c$ се триноми.

Забелешки: 1°. Мономот може да се смета и како полином само со еден член.

2°. Бидејќи на секој моном може да се гледа како на рационален број, а полиномот е алгебарски збир од мономи, тоа на секој полином може да се гледа како на алгебарски збир од рационални броеви. Но, бидејќи алгебарскиот збир од рационални броеви е пак рационален број, тоа на полиномот може да се гледа и како на рационален број.

Полиномот може да содржи еден или неколку општи броеви (аргументи). Нека е даден полином што содржи само еден аргумент во различни степени, на пример:

$$5a^2-2a^3+3a^4-a+4. \qquad (1)$$

Со примена на комутативниот закон, неговите членови можат да се разместат и подредат: според намалувачките степени на аргументот a:

$$3a^4-2a^3+5a^2-a+4 \qquad (2)$$

или според растечките степени на аргументот a:

$$4-a+5a^2-2a^3+3a^4. \qquad (3)$$

За полиномите (2) и (3) велиме дека се *подредени по степените* на аргументот a, и тоа полиномот (2) е подреден по намалувачките степени, а полиномот (3) — по растечките степени на аргументот a.

Посебните броеви што фигурираат во полиномот се викаат *коефициенти на полиномот.* Но коефициенти на полиномот можат да бидат и општи броеви. На пример во полиномот ax^3+bx^2+cx+d, кој е подреден по намалувачките степени на аргументот x, броевите a, b, c и d се негови коефициенти.

Степенот на членот што е со највисок степен се вика *степен* и на самиот полином. Ако сите членови имаат ист степен полиномот е *хомоген.*

Пример: Полиномот $3x^3-2xy^2+x^2y$ по однос на аргументот x е од трет степен, по однос на аргументот y е од втор степен, а по однос на x и y тој е хомоген од трет степен.

ЗАДАЧИ

1. Напиши број кој:

а) за 2 единици е поголем од бројот a; б) за 5 единици е помал од бројот b!

2. Запиши:

а) колку дециметри има во a m;

б) колку литри има во c hl;

в) колку секунди има во x минути y секунди?

3. Напиши троцифрен број кој има a стотки b десетки c единици!

4. Запиши го со помош на букви правилото за: а) множење, б) делење на обичните дропки!

5. Кои вредности на аргументите во следниве изрази се допуштени, а кои не:

а) $\frac{a+5}{a-3}$; б) $\frac{x^2+2x-1}{x+2}$; в) $\frac{2ab}{a-b}$.

6. Кои од следниве рационални изрази се цели, а кои дробни:

а) $3a^2x-5a$; б) $(x+y):(x-y)$; в) $\frac{5x}{x+1}+3x^2$; г) $\frac{x+2}{5}-\frac{x}{2}$; д) $\frac{x}{y}$.

7. Покажи ги коефициентите на мономите:

а) $-4a^2b$; б) $2{,}5a$; в) $-c^2x$; г) $-\frac{x}{3}$; д) $\frac{2xy^2}{5}$.

8. Кои од следниве мономи се слични:

$-3ab$; $\frac{1}{2}a^2x$; ab; $-a^2x$; $6a^2x$; $-7ax^2$; $+ax^2$.

9. Напиши ги спротивните на следниве мономи:

$-6ab$; a^2b; $-2ax$; $\frac{x}{3}$; $-x^3y$; $0{,}5a$.

10. Напиши полином од следниве пет мономи: $3a^2$; $-5a^2$; $2a$; a^4; -1.

11. Подреди го полиномот $ab^2c-3a^3b+4+2a^2c^3+5b^3c^3$ според намалувачките степени на: а) аргументот a, б) аргументот b, в) аргументот c!

12. Одреди го степенот на полиномот $x^3y-x^2y^2+2xy-3xy^2$ по однос на: а) аргументот x; б) аргументот y; в) аргументите x и y!

13. Одреди ја бројната вредност на изразите:

а) a^2+a-1 за $a=-2$; $a=0$; $a=3$;

б) $3ab^2-2b$ за $a=1$ и $b=-2$; $a=\frac{2}{3}$ и $b=-\frac{1}{2}$:

в) $\frac{x^2+1}{x-1}$ за $x=1{,}5$; $x=0$; $x=2$.

§ 17. ИДЕНТИЧНИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИДЕНТИЧНИ ТРАНСФОРМАЦИИ

Дефиниција 1. *Рационални изрази шшо имааш еднакви бројни вредносши за сиише дойушшени вредносши на аргуменшише се викааш иденшични рационални изрази.*

На пример: Изразите $3(a-4)+7$ и $3a-5$ имаат еднакви бројни вредности за кои и да било вредности на a.

Тоа го наслутуваме и од таблицата:

a	-11	-8	-5	-1	0	2	2,5	4	7	15	40
$3(a-4)+7$	-36	-29	-20	-6	-5	1	2,5	7	16	40	115
$3a-5$	-36	-29	-20	-6	-5	1	2,5	7	16	40	115

Ако првиот израз го упростиме, применувајќи го прво дистрибутивниот закон на множењето, а потоа и асоцијативниот закон на собирањето:

$$3(a-4)+7=3a-12+7=3a-5,$$

добиваме израз наполно еднаков на вториот израз. Значи:

Изразите $3(a-4)+7$ и $3a-5$ се идентични.

Изразите $\frac{a^2-4}{a+2}$ и $a-2$, се исто така идентични, бидејќи имаат еднакви бројни вредности за сите вредности на аргументот a, освен за $a=-2$. Бројот -2 не е допуштена вредност на општиот број a, бидејќи за неа првиот израз нема смисла. Затоа вредноста $a=-2$ мораме да ја исклучиме. Но, бидејќи за сите други вредности на a овие два израза имаат еднакви бројни вредности, тоа, согласно горната дефиниција, тие изрази се идентични.

Дефиниција 2. *Два идентични израза сврзани со знакот еднакво „=", образуваат равенство, кое се вика идентитет.*

Според тоа: *Идентитет е равенство кое важи за сите допуштени вредности на аргументите што влегуваат во него.*

Најпрости идентитети се и сите равенства, со кои ги изразуваме основните закони на собирањето и множењето:

$$a+b=b+a; \quad (a+b)+c=a+(b+c);$$

$$ab=ba; \quad (ab)c=a(bc); \quad (a+b)c=ab+bc.$$

Тие важат за кои и да било рационални броеви a, b и c.

Дефиниција 3. *Заменувањето на еден рационален израз (цел или дробен) со друг идентичен на него израз се вика идентична трансформација.*

На пример: Подредувањето на полиномот според степените на еден од аргументите всушност претставува идентична трансформација на тој полином.

Овде да спомнеме дека бројната вредност на секој рационален израз за сите допуштени вредности на аргументите секогаш претставува рационален број. Според тоа, на рационалните изрази можат да се применуваат сите закони и својства на основните операции што се применуваа и на рационалните броеви. А со примената на тие закони и својства ќе ги вршиме во иднина идентичните трансформации на рационалните изрази.

§ 18. СВЕДУВАЊЕ НА СЛИЧНИТЕ ЧЛЕНОВИ НА ПОЛИНОМОТ

Нека е даден полиномот $5a^2-2a+4a^3+a-3a^2-4a+9$. Тој има седум члена, но меѓу нив има и слични.

Со примена на комутативниот и асоцијативниот закон на собирањето, прво ќе ги разместиме и групираме сличните членови (мономи):

$$4a^3+(5a^2-3a^2)+(-2a+a-4a)+9.$$

Групираните изрази во заградите можат да се упростат со примена на дистрибутивниот закон: $4a^3+(5-3)a^2+(-2+1-4)a+9$, така што конечно го добиваме: полиномот: $4a^3+2a^2-5a+9$, идентичен на дадениот.

Дефиниција. *Заменувањето на алгебарскиот збир од неколку слични членови во даден полином со еден идентичен на нив член се вика сведување на сличните членови на полиномот.*

Како што гледаме, сведувањето на сличните членови претставува идентична трансформација. Тоа се врши според правилото:

Правило: *Сличните членови во полиномот се сведуваат кога прво се соберат нивните коефициенти, па кон добиениот збир се допише (како множител) нивната главна вредност.*

Пример: $3a^2-2ab-b^2-5a^2+4b=(3a^2-5a^2)-2ab+(-b^2+4b^2)=$
$=(3-5)\,a^2-2ab+(-1+4)\,b^2=-2a^2-2ab+3b^2.$

§ 19. СОБИРАЊЕ НА ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. СОБИРАЊЕ НА МОНОМИ

Задача: Да се соберат мономите $7a^2$; $-5a$; $-3ab$; $2a$ и $-ab$.

Бидејќи на секој моном може да се гледа како на рационален број, тоа собирањето на мономи се сведува на собирање рационални броеви.

Бараниот збир на дадените мономи е алгебарскиот збир:

$$7a^2+(-5a)+(-3ab)+(+2a)+(-ab),$$

во кој, ако ги испуштиме знаците за собирање и заградите, ќе добиеме:

$$7a^2-5a-3ab+2a-ab.$$

Како што гледаме, добиениот израз е полином чии членови се дадените мономи запишани еден по друг по истиот ред како што се и дадени.

Добиениот полином има слични членови. По нивното сведување; добиваме:

$$7a^2-5a-3ab+2a-ab=7a^2-3a-4ab.$$

Правило 1. *За да се соберат неколку мономи, доволно е тие да се запишат (во вид на алгебарски збир) еден по друг со истите знаци што ги имаат Потоа, ако во добиениот полином има слични членови, се врши сведување*

Забелешка: Збирот на два спротивни монома идентично е еднаков на нула

Пример:
$$(+4ab)+(-4ab)=4ab-4ab=(4-4)\,ab=0\cdot ab=0.$$

2. СОБИРАЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Задача: Да се соберат полиномите $5a^2b-3a+2b$ и $2a-3a^2b+$ $+4ab-7$!

Бараниот збир го запишуваме: $(5a^2b-3a+2b)+(2a-3a^2b+4ab-7)$.

На полиномите можеме да гледаме како на алгебарски збирови од рационални броеви, затоа при нивното собирање може да се примени правилото за додавање на алгебарски збир.

Според тоа правило, кон првиот полином последователно го додаваме секој член од вториот полином:

$$(5a^2b-3a+2b)+(2a-3a^2b+4ab-7)=5a^2b-3a+2b+2a-3a^2b+4ab-7.$$

Забележуваме дека бараниот збир е пак полином, во кој се вклучени сите членови на дадените полиноми со своите знаци.

Добиениот полином има слични членови. По нивното сведување, добиваме:

$$5a^2b-3a+2b+2a-3a^2b+4ab-7=2a^2b-a+2b+4ab-7.$$

Правило 2. *Два полинома се собираат така што кон првиот полином последователно се допишуваат сите членови од вториот полином со истите знаци што ги имаат. Потоа, ако во добиениот нов полином има слични членови, потребно е да се изврши сведување.*

§ 20. ВАДЕЊЕ НА ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. ВАДЕЊЕ НА МОНОМИ

Задача: Да се извади мономот $4a^2$ од мономот $5ab$!

Бараната разлика ја запишуваме: $5ab-(+4a^2)$.

На мономите гледаме како на рационални броеви и затоа вадењето на мономи ќе го вршиме исто како и вадењето на рационални броеви, т.е. кон намаленикот ќе го додадеме спротивниот моном на намалителот:

$$5ab-(+4a^2)=5ab+(-4a^2).$$

Потоа, согласно правилото за собирање, добиваме:

$$5ab+(-4a^2)=5ab-4a^2$$

Произлегува дека бараната разлика ќе биде: $5ab-(+4a^2)=5ab-4a^2$; таа е правилно одредена, бидејќи збирот од неа и намалителот е еднаков на намаленикот:

$$5ab-4a^2+(+4a^2)=5ab.$$

Правило 1. *За да извадиме еден моном од друг, доволно е кон намаленикот да го допишеме спротивниот моном на намалителот.*

Пример: $3ax-(-2by)=3ax+2by$.

2. ВАДЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Задача: Да се одреди разликата:

$$(6ax-5a+2x)-(3x^2-4ax+2a-7).$$

Вадењето на полином од полином го вршиме исто како и вадењето алгебарски збир од рационален број, т. е. кога кон намаленикот го допишуваме секој член од полиномот-намалител со спротивен знак. Значи:

$$(6ax-5a+2x)-(+3x^2-4ax+2a-7)=6ax-5a+2x-3x^2+$$
$$+4ax-2a+7=10ax-7a-3x^2+2x+7.$$

Правило 2. *Полиноми се вадат така што кон полиномот-намаленик се допишуваат последователно сите членови на полиномот намалител со спротивни знаци. Потоа, ако во така добиениот нов полином има слични членови, потребно е да се изврши нивно сведување.*

3. ОСЛОБОДУВАЊЕ ОД ЗАГРАДИ

При собирањето и вадењето на мономи и полиноми прво ги ставаме нив во загради, а потоа се ослободуваме од заградите. Врз основа на правилата за собирање и вадење на полиноми, можат да се извлечат следниве правила за ослободување од загради.

Правило 3. *Ако пред заградата стои знакот* (+), *знакот и заградата можат да се испуштат, а членовите во заградата се оставаат непроменети.*

Ако, пак, пред заградата стои знакот минус (—), знакот и заградата можат да се испуштат, но сите членови во неа треба да се препишат со спротивни знаци.

Пример: $3a-(2b-5c)+(-5a+4b-c)-(-7a+b-8)=$
$=3a-2b+5c-5a+4b-c+7a-b+8=5a+b+4c+8.$

4. ЗАТВОРАЊЕ ВО ЗАГРАДИ

Понекогаш станува потребно даден полином или дел од него да се затвори во заграда, а пред неа да стои знакот (+) или минус (—). Тоа го вршиме согласно:

Правило 4. *Ако пред заградата во која го затвораме полиномот го ставиме знакот плус (+), тогаш сите членови на затворениот полином ги задржуваат своите знаци.*

Пример: $-2a+3b-c=+(-2a+3b-c).$

Правило 5. *Ако пред заградата во која затвораме даден полином го ставиме знакот минус (—), тогаш сите членови на затворениот полином ги менуваат своите знаци во спротивни.*

Пример: $3a-b+5c=-(-3a+b-5c)$

ЗАДАЧИ

1. Сведи ги сличните членови во полиномот:

а) $3ab-4a^2b^2-7ab^2+2ab^2-ab+4a^2b^2$; б) $1{,}5a-2b+0{,}5b-0{,}3a+4-ab$;
в) $4a^2-7xy+8ax+6xy-15ax+3ax$.

2. Собери ги мономите:

а) $7x^4$; $-5x^2$; $-4x^3$; $6x^2$ и $12x^4$; б) $-2xy$; $7xy$; $5xy$; и $-3xy$;
в) $3a^2b$; $-ab^2$; $-2a^2b$; $4ab^2$ и $-3a^2b$.

3. Една кола првиот ден изминала a km, вториот ден изминала 2 пати повеќе, а третиот ден 3 пати повеќе одошто првиот ден. Колку километри пат изминала колата за трите дена?

4. Изврши го собирањето на полиномите:

а) $(5x^2-ax+a^2)+(3x^2+2ax-a^2)+(4ax-3x^2+8)$;
б) $(2a^4+3a^3b-2a^2b^2-ab^3)+(a^4-a^3b+3a^2b^2+4ab^3-b^4)$;
в) $(3x^2-x+1)+(2x^2+5x-3)+(4x-5)$.

5. Изврши го означеното вадење на мономите;

а) $-5a-(+3a)$; б) $3x-(-2x)$; в) $2ab-(+2ab)$;
г) $3ax-(-ax^2)$; д) $4xy-(+3x)$; ѓ) $2{,}5x-(-0{,}5x)$!

6. Изврши го вадењето на полиномите:

а) $(6a^2x-2ax^2+5)-(4a^2x+ax^2-3)$;
б) $(x^3y-2xy^2+3xy-2)-(-4x^3y+xy-3xy^2+5x^2y+1)$.

7. Дадени се полиномите: $A=x^2-2xy+2y-5$; $B=-3x^2+xy+4x+1$ и $C=2x^2+3xy-y^2$. Пресметај ги изразите:

а) $A+B-C$; б) $A-B+C$; в) $A-(B+C)$; г) $C-(A-B)$!

8. Докажи дека: а) Ако кон збирот на два броја a и b ја додадеме нивната разлика, ќе се добие удвоен поголемиот број! б) Ако од збирот на два броја се извади нивната разлика, ќе се добие удвоен помалиот број!

9. Ослободи се од заградите и упрости го изразот:

а) $(2x^2+3y^2)-\{(x^2-2xy-y^2)+[3x^2+2xy-(-5xy+2y^2)]\}$;
б) $3x^2y-\{xyz-(3xyz-x^2z)+[2x^2y-(5x^2y-4xyz-x^2z)]\}$.

10. Полиномот $3x^2-5xy-2y^2+y$ претстави го во вид на:

а) збир од два собирока, од кои едниот да е $3x^2-5xy$;
б) разлика од два израза со намаленик $3x^2-5xy$!

§ 21. МНОЖЕЊЕ НА ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. МНОЖЕЊЕ НА МОНОМИ

Задача: Да се пресмета производот на мономите $-5ab^2c \cdot 3a^3bx$!

Бидејќи и самите мономи претставуваат производи, тоа со примена на комутативниот и асоцијативниот закон на множењето горниот производ може да се запише и вака:

$$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = (-5 \cdot 3) \cdot (a \cdot a^3) \cdot (b^2 \cdot b) \cdot c \cdot x.$$

Откако ќе извршиме множење во секоја заграда, добиваме:

$$-5ab^2c \cdot 3a^3bx = -15a^4b^3cx.$$

Слично постапуваме и кога треба да се помножат повеќе од два монома.

Пример:

$$4a^2b \cdot 0{,}5ac^3 \cdot (-3b^3c^2) = [4 \cdot 0{,}5 \cdot (-3)] \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (bb^3) \cdot (c^3c^2) = -6a^3b^4c^5.$$

Правило 1. *Мономи се множат така што прво се помножат нивните кофициенти а потоа и сите степени од нивните главни вредности што имаат исти основи. Степените што се среќаваат само во еден моном се пренесуваат во производот со истите показатели.*

2. СТЕПЕНУВАЊЕ НА МОНОМИ

Задача: Да се степенува на трети степен мономот $-5ab^2c^3$!

Бидејќи секој моном претставува производ, тоа степенувањето на мономите се врши според правилото за степенување на производ, т.е.

$$(-5ab^2c^3)^3 = (-5)^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 \cdot (c^3)^3 = -125a^3b^6c^9.$$

Правило 2. *Моном се степенува, кога секој негов множител се степенува со истиот степенов показател, па потоа добиените степени се помножат.*

Пример: $(3a^2xy^3)^4 = 81a^8x^4y^{12}.$

3. МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО МОНОМ

Задача: Да се помножи полиномот $2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2$ со мономот $4a^2b$!

Бараниот производ го означуваме $(2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2) \cdot 4a^2b$.

Полиномот претставува алгебарски збир, а мономот рационален број. Според дистрибутивниот закон на множењето, производот може да се запише:

$$(2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2) \cdot 4a^2b = 2a^3 \cdot 4a^2b - 3ab^2 \cdot 4a^2b + 5bc^2 \cdot 4a^2b.$$

Откако ќе се изврши означеното множење на мономите, се добива:

$$(2a^3 - 3ab^2 + 5bc^2) \cdot 4a^2b = 8a^5b - 12a^3b^3 + 20a^2b^2c^2.$$

Правило 3. *Полином се множи со моном така што секој член од полиномот се помножи со мономот, а добиените производи се соберат.*

Пример:

$$(-5ax^2 + 4xy^3 - 2y + 1) \cdot (-3a^2xy) = 15a^3x^3y - 12a^2x^2y^4 + 6a^2xy^2 - 3a^2xy.$$

4. МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

Задача: Да се помножат полиномите $(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)$!

На секој полином можеме да гледаме и како на рационален број. Ако вредноста на првиот полином ја означиме со M, т. е. ако ставиме $2x^2-5xy+y^2=M$, тогаш горниот производ ќе го добие видот:

$$M\cdot(4x+3y).$$

Според правилото за множење на моном со полином, односно полином со моном, овој производ може да се замени со

$$M\cdot(4x+3y)=M\cdot 4x+M\cdot 3y.$$

Ако сега M повторно го замениме со дадениот полином, ќе добиеме:

$$(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)=(2x^2-5xy+y^2)\cdot 4x+(2x^2-5xy+y^2)\cdot 3y.$$

Гледаме дека првиот полином треба да се помножи поодделно со секој член од вториот полином. Откако тоа го извршиме добиваме:

$$(2x^2-5xy+y^2)\cdot(4x+3y)=8x^3-20x^2y+4xy^2+6x^2y-15xy^2+3y^3=$$
$$=8x^3-14x^2y-11xy^2+3y^3.$$

Правило 4. *Два полинома се множат така што секој член од едниот полином се множи со секој член од другиот полином, па потоа добиените производи се собираат. Ако во добиениот израз има слични членови, потребно е да се изврши сведување.*

Пример: $(2a^3-a^2b+3ab^2-5b^3)\cdot(a^2-3ab+2b^2)=2a^5-a^4b+$
$+3a^3b^2-5a^2b^3-6a^4b+3a^3b^2-9a^2b^3+15ab^4+4a^3b^2-2a^2b^3+6ab^4-$
$-10b^5=2a^5-7a^4b+10a^3b^2-16a^2b^3+21ab^4-10b^5.$

§ 22. ФОРМУЛИ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

Ќе се задржиме на некои специјални случаи што се среќаваат при множењето на полиноми, а кои често ги ползуваме при идентичните трансформации на рационалните изрази.

Равенствата, односно идентитетите, што ги изразуваат тие специјални случаи на множењето се викаат *формули за скратено множење.* Тоа се:

1. КВАДРАТ НА ЗБИР ОД ДВА БРОЈА

Квадратот на збир од два броја еднаков е на квадратот на првиот број плус удвоениот производ на првиот и вториот број и плус квадратот на вториот број, т. е.

$$\boxed{(A+B)^2=A^2+2AB+B^2} \qquad (1)$$

Доказ: $(A+B)^2=(A+B)\cdot(A+B)=A^2+AB+AB+B^2=$
$=A^2+2AB+B^2.$

Во формулата (1) A и B се кои и да било броеви, а во специјални случаи тие можат да бидат и мономи или полиноми.

Пример: $(3x+5y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2=9x^2+30xy+25y^2.$

Формулата (1) може да се применува и за квадратирање на посебните броеви.

Примери:

$$76^2=(70+6)^2=70^2+2\cdot 70\cdot 6+6^2=4900+840+36=5776.$$
$$43^2=(40+3)^2=40^2+2\cdot 40\cdot 3+3^2=1600+240+9=1849.$$

Особено лесно се квадратираат посебните броеви што завршуваат на цифрата 5. Бројот што има a десетки и 5 единици може да се запише вака: $10a+5$. Квадратот на тој број ќе биде:

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100a(a+1)+25.$$

Примери: $35^2=100\cdot 3\cdot 4+25=1200+25=1225;$

$$4{,}5^2=\left(\frac{45}{10}\right)^2=\frac{45^2}{100}=\frac{10\cdot 4\cdot 5+25}{100}=4\cdot 5+0{,}25=20+0{,}25=20{,}25.$$

2. КВАДРАТ НА РАЗЛИКА ОД ДВА БРОЈА

Квадратот на разлика од два броја еднаков е на квадратот на првиот број, минус удвоениот производ на првиот и вториот број и плус квадратот на вториот број, т. е.

$$\boxed{(A-B)^2=A^2-2AB+B^2} \qquad (2)$$

Доказ: $(A-B)^2=(A-B)\cdot(A-B)=A^2-AB-AB+B^2=$
$=A^2-2AB+B^2.$

Пример: $(3a^2b-2b)^2=(3a^2b)^2-2\cdot 3a^2b\cdot 2b+(2b)^2=9a^4b^2-12a^2b^2+4b^2.$

Забелешки: 1°. Формулата (2) се применува и за квадратирање на посебните броеви што се блиски но помали од целите десетки, стотки и илјади,

Примери: $69^2=(70-1)^2=70^2-2\cdot 70\cdot 1+1^2=4900-140+1=4761;$

$$38^2=(40-2)^2=40^2-2\cdot 40\cdot 2+2^2=1600-160+4=1444;$$
$$797^2=(800-3)^2=800^2-2\cdot 800\cdot 3+3^2=640000-4800+9=635209.$$

2°. Бидејќи разликата на два броја може секогаш да се сфати и како алгебарски збир, тоа формулата (2) може да се запише и да се применува уште и вака:

$$(A-B)^2=[A+(-B)]^2=A^2+2\cdot A\cdot(-B)+(-B)^2.$$

Примери: $(5a-3b)^2=(5a)^2+2\cdot 5a\cdot(-3b)+(-3b)^2=25a^2-30ab+9b^2,$

$$(-x-4a)^2=(-x)^2+2\cdot(-x)\cdot(-4a)+(-4a)^2=x^2+8ax+16a^2.$$

3. КВАДРАТ НА ЗБИР ОД ТРИ ИЛИ ПОВЕЌЕ БРОЕВИ

Квадратот на збир од неколку броеви еднаков е на збирот од квадратите на секој од нив, плус збирот од семожните удвоени производи на тие броеви, земани по два, т. е.

$$\boxed{(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC} \qquad (3)$$

Доказ: $(A+B+C)^2=(A+B+C)\cdot(A+B+C)=A^2+AB+AC+$
$+AB+B^2+BC+AC+BC+C^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC.$

Пример: $(x^2-3x+5)^2=(x^2)^2+(-3x)^2+5^2+2\cdot x^2\cdot(-3x)+$
$+2\cdot x^2\cdot 5+2\cdot(-3x)\cdot 5=x^4+9x^2+25-6x^3+10x^2-30x.$

4. ПРОИЗВОД ОД ЗБИР И РАЗЛИКА НА ДВА БРОЈА

Производот од збир и разлика на два броја еднаков е на разликата од квадратите на првиот и вториот број, т. е.

$$\boxed{(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2} \qquad (4)$$

Доказ: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2+AB-AB-B^2=A^2-B^2$

Примери: $(4x+3y)\cdot(4x-3y)=(4x)^2-(3y)^2=16x^2-9y^2$;

$$\left(\frac{x}{3}+b\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-b\right)=\frac{x^2}{9}-b^2.$$

Ако формулата (4) ја напишеме во обратен ред, т. е. ако десната страна ја земеме за лева, а левата за десна, ќе добиеме:

$$A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B). \qquad (4')$$

Таа се вика формула за разлика на квадрати и покажува дека:

Разликата на квадратите на два броја еднаква е на производот од збирот и разликата на тие броеви.

Забелешки: 1°. Формулата (4) се применува во некои случаи и за брзо наоѓање на производот на два посебни броја.

Примери: $58\cdot62=(60-2)\cdot(60+2)=60^2-2^2=3596$;
$74\cdot86=(80-6)\cdot(80+6)=80^2-6^2=6364$.

2°. Формулата (4′) може да се ползува и при пресметувањето на разликата на квадратите на два посебни броја.

Примери: $237^2-236^2=(237+236)\cdot(237-236)=473\cdot1=473$;
$76^2-24^2=(76+24)\cdot(76-24)=100\cdot52=5200$;
$4,3^2-2,3^2=(4,3+2,3)\cdot(4,3-2,3)=6,6\cdot2=13,2$.

5. КУБ НА ЗБИР ОД ДВА БРОЈА

$$\boxed{(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3} \qquad (5)$$

Доказ: $(A+B)^3=(A+B)^2\cdot(A+B)=(A^2+2AB+B^2)\cdot(A+B)=$
$=A^3+2A^2B+AB^2+A^2B+2AB^2+B^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$.

Искажи ја горната формула со зборови!

Примери: $(5+2x)^3=125+3\cdot25\cdot2x+3\cdot5\cdot4x^2+8x^3=125+150x+60x^2+8x^3$
$41^3=(40+1)^3=40^3+3\cdot40^2\cdot1+3\cdot40\cdot1^2+1^3=$
$=64000+4800+120+1=68921$.

6. КУБ НА РАЗЛИКА ОД ДВА БРОЈА

$$\boxed{(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3} \qquad (6)$$

Доказ: $(A-B)^3=(A-B)^2\cdot(A-B)=(A^2-2AB+B^2)\cdot(A-B)=$
$=A^3-2A^2B+AB^2-A^2B+2AB^2-B^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$.

Искажи ја со зборови формулата (6)!

Примери: $(x-2y)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$;
$39^3=(40-1)^3=64000-3\cdot1600\cdot1+3\cdot40\cdot1-1=59319$.

7. ПРОИЗВОД ОД ЗБИРОТ НА ДВА БРОЈА И НЕПОЛНИОТ КВАДРАТ НА РАЗЛИКАТА НА ТИЕ БРОЕВИ

Неполн квадрат на разликата на броевите A и B се вика триномот A^2-AB+B^2, за разлика од триномот $A^2-2AB+B^2$, кој претставува (полн) квадрат на разликата $A-B$.

Да го пресметаме производот $(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$!

$$(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)=A^3+A^2B-A^2B-AB^2+AB^2+B^3=A^3+B^3$$

или

$$\boxed{(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3.} \qquad (7)$$

Пример: $(3+x)\cdot(9-3x+x^2)=27+x^3$.

Формулата (7) може да се напише и вака:

$$A^3+B^3=(A+B)\,(A^2-AB+B^2). \qquad (7')$$

Тоа е формулата за збир на кубови која се чита:

Збирот од кубовите на два броја еднаков е на производот од збирот и неполниот квадрат на разликата на тие броеви.

Пример: $8x^3+27=(2x)^3+3^3=(2x+3)\cdot(4x^2-6x+9)$.

8. ПРОИЗВОД ОД РАЗЛИКАТА НА ДВА БРОЈА И НЕПОЛНИОТ КВАДРАТ НА ЗБИРОТ НА ТИЕ БРОЕВИ

Неполн квадрат на збирот на броевите A и B се вика триномот A^2+AB+B^2.

Ако го пресметаме производот $(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)$, ќе најдеме:

$$\boxed{(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3.} \qquad (8)$$

Пример:

$$(m-2)\cdot(m^2+2m+4)=m^3-8.$$

Формулата (8) може да се напише и во обратен ред, т. е.

$$A^3-B^3=(A-B)\,(A^2+AB+B^2). \qquad (8')$$

Тоа е формулата за разлика на кубови, која покажува дека:

Разликата од кубовите на два броја еднаква е на производот од разликата и неполниот квадрат на збирот на тие броеви.

Пример: $8-x^3=2^3-x^3=(2-x)\cdot(4+2x+x^2)$.

ЗАДАЧИ

1. Помножи ги мономите:

а) $-5a^2b^n\cdot(-2a^3b)$; б) $xy^3\cdot(-3a^2x^3y^2)$;
в) $0{,}4a^{n-1}b^2\cdot 5a^2b$; г) $3a^{2m}b^{n+1}\cdot(-0{,}8a^{m+1}b^n)$

2. Изврши го множењето:

а) $(8x^3-4x^2y^2-5xy^3+3y^3)\cdot(-2x^2y)$; б) $(4ab^2c-7a^2bc^2-a^2bc)\cdot(-3abc)$

3. Помножи ги полиномите:

а) $(x^2-xy+2y+3x)\cdot(x-4y+5)$;

б) $(3a^4-6a^3b+5a^2b^2-7ab^3-9b^4)\cdot(a^2-3ab+b^2)$;

в) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{6}\right)$

4. Најди ги следниве квадрати и кубови:

а) $(x-5)^2$ б) $(3c+2)^2$; в) $(1-3x)^2$; г) $(3x-y+5)^2$; д) $(x+y-z)^2$;
ѓ) $(-8y^2-7z)^2$; е) $(2a+b)^3$; ж) $(x-3y)^3$; з) $(2-0{,}5c)^3$.

5. Пресметај на најбрз начин:

а) 42^2; б) 29^2; в) 75^2; г) $9{,}5^2$; д) 198^2; ѓ) 401^2; е) 703^2; ж) 1002^2.

6. Изврши го множењето на најбрз начин:

а) $(5x+3y)\cdot(5x-3y)$; б) $(1-a)\cdot(1+a)$; в) $\left(2c-\frac{1}{2}\right)\left(2c+\frac{1}{2}\right)$.
г) $62\cdot58$; д) $7{,}01\cdot6{,}99$; ѓ) 87^2-13^2!

7. Докажи ги следниве идентитети:

а) $(a-b)^2=(b-a)^2$; б) $(-a-b)^2=(a+b)^2$;
в) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)=x^4-1$; г) $x^3+3xy(x+y)+y^3=(x+y)^3$.

8. Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите:

а) $x(x+2)\cdot(x-2)-(x-3)\cdot(x^2+3x+9)$; б) $(a+b+c)(a+b-c)-(a+b)^2$;
в) $2(a-1)^2-(a+5)\cdot(a^2-5a+25)+(a+1)^3$;
г) $(x+y)^2-(x-y)^2+(x+y)\cdot(x-y)$;
д) $(c+1)^2+3(c-1)^2-5(c+1)\cdot(c-1)$.

§ 23. ДЕЛЕЊЕ НА ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

1. ДЕЛЕЊЕ НА МОНОМИ

Задача: Да се изврши делењето: $12a^3b^2c:(-3ab^2)$; $a\neq0$, $b\neq0$!

Бидејќи делителот $(-3ab^2)$ е производ, според правилото за делење со производ, горното делење се извршува, кога прво деленикот се подели со првиот множител (-3), потоа добиениот резултат се подели со вториот множител a, и на крајот добиениот резултат се дели и со третиот множител b.

Меѓутоа и деленикот е производ. Затоа, согласно правилото за делење на производ со рационален број, за да се подели деленикот $12a^3b^2c$ со бројот -3, доволно е само еден негов множител, на пример коефициентот 12, да се подели со -3. На истиот начин, за да се подели добиениот резултат со бројот a, доволно е само множителот a^3 да се подели со a итн.

Тоа покусо го означуваме и извршуваме вака:

$$12a^3b^2c:(-3ab^2)=\frac{12}{-3}\cdot\frac{a^3}{a}\cdot\frac{b^2}{b^2}\cdot c=-4\cdot a^2\cdot1\cdot c=-4a^2c.$$

Значи: $12a^3b^2c:(-3ab^2)=-4a^2c$.

Проверка: $-4a^2c\cdot(-3ab^2)=12a^3b^2c$.

Пример: $-2x^5y^4z:5x^3y=\frac{-2}{5}\cdot\frac{x^5}{x^3}\cdot\frac{4}{y}\cdot z=-\frac{2}{5}x^2y^3z$.

Правило 1. *Моном се дели со моном така што коефициентот на деленикот се дели со коефициентот на делителот, а одделните степени од главната вредност на деленикот се делат со соодветните степени што имаат исти основи од делителот, па потоа добиените количници се помножат.*

Ако некој степен се содржи само во деленикот, тој се пренесува во количникот со истиот показател; а ако показателите на некој степен во деленикот и делителот се еднакви, степенот не се зема во количникот.

Пример:

$$7a^4b^2c^3 : (-2a^2b^2) = -3,5a^2c^3.$$

При делењето на мономите, количникот не секогаш ќе претставува пак моном (цел рационален израз).

Пример: Да се подели мономот $6a^5$ со $5a^2b$!

Знаеме дека кој и да било моном помножен со мономот $5a^2b$ мора да го содржи бројот b, а, како што гледаме, во нашиот деленик овој број воопшто не се среќава. Затоа во ваков случај бараниот количник само го означуваме во вид на дропка $\frac{6a^5}{5a^2b}$, така што ќе претставува дробен рационален израз.

Друг пример: Да се подели мономот $4a^2b$ со $7a^3$!

И овде делењето целосно е неможно, бидејќи кој и да било моном помножен со $7a^3$ не може да даде цел рационален израз во кој степенот со основа a да има помал показател од 3, а во деленикот тој степен е со показател 2.

Бараниот количник само го означуваме во вид на дропка $\frac{4a^2b}{7a^3}$, така што ќе претставува дробен рационален израз. Оттука заклучокот:

Ако во мономот — делител има некој општ број или степен што не се содржи во деленикот, или и ако се содржи во деленикот, но показателот му е поголем од соодветниот показател во деленикот, тогаш количникот е дробен рационален израз.

Забелешка: При секое делење на мономи ќе претпоставуваме дека делителот не е еднаков на нула. Затоа допуштени вредности на секој аргумент што се содржи во мономот — делител ќе бидат сите вредности, освен бројот нула.

2. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО МОНОМ

Задача: Да се подели полиномот $6a^5b^3 - 5a^4b + 7,6a^3b^2c^2$ со $2a^3b$!

Со примена на правилото за делење на алгебарски збир со рационален број, добиваме: $(6a^5b^3 - 5a^4b + 7,6a^3b^2c^2) : 2a^3b = 6a^5b^3 : 2a^3b - 5a^4b : 2a^3b +$

$$+ 7,6a^3b^2c^2 : 2a^3b = 3a^2b^2 - 2,5a + 3,8bc^2.$$

Проверка: $(3a^2b^2 - 2,5a + 3,8bc^2) \cdot 2a^3b = 6a^5b^3 - 5a^4b + 7,6a^3b^2c^2$.

Значи: делењето е правилно извршено.

Правило 2. *Полином се дели со моном така што секој член од полиномот се дели со дадениот моном, а добиените количници се собераат.*

Пример: $(-12x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2) : (-3x^2) = 4x^2 - 3xy + 2y^2$.

Од правилото произлегува дека даден полином е делив со даден моном само во тој случај ако секој член на полиномот е делив со дадениот моном. Според тоа:

Полиномот не е делив со даден моном ако делителот содржи некој општ број или степен што не се содржи барем во еден од членовите на полиномот, или ако показателот на кој и да било степен во делителот е поголем од показателот на соодветниот степен со иста основа барем во еден од членовите на полиномот.

Во таков случај делењето само го означуваме, т.е. количникот е дробен рационален израз.

Пример: $(3a^2 + b) : 2a = \frac{3a^2+b}{2a} = \frac{3a^2}{2a} + \frac{b}{2a} = 1,5a + \frac{b}{2a}$.

Забелешка: Делењето на моном со полином може само да се означи, а количникот секогаш е дробен рационален израз.

Пример: $4a : (a+b) = \frac{4a}{a+b}$.

3. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО ПОЛИНОМ

Да се подели еден полином со друг, значи да се најде таков трет полином кој помножен со вториот да го даде првиот.

Количникот при делењето на полином со полином само во ретки случаи може да се изрази во вид на полином или моном.

Примери: $(a^2-4):(a+2)=a-2$, бидејќи, $(a-2)\cdot(a+2)=a^2-4$;

$(x^2-xy):(x-y)=x$, бидејќи $x\cdot(x-y)=x^2-xy$.

Во општ случај количникот на два полинома може само да се означи, т. е. да се напише во вид на дробен рационален израз.

Пример: $(a^2+b^2):(a+b)=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$,

бидејќи не постои полином кој помножен со $a+b$ да даде a^2+b^2.

За да покажеме како се дели полином со полином, најнапред ќе помножиме два подредени полинома, па потоа делејќи го добиениот производ со еден од множителите, ќе покажеме како го наоѓаме количникот.

Пример:

$$\begin{array}{rl}
\underline{(3x^2+4x-2)\cdot(2x^2-3x+5)=} & \\
6x^4+8x^3-4x^2 \qquad\qquad & (\alpha) \\
-9x^3-12x^2+6x \qquad & (\beta) \\
15x^2+20x-10 & (\gamma) \\
\hline
6x^4-x^3-x^2+26x-10 &
\end{array}$$

Да разгледаме како, откога ќе се подели производот $6x^4-x^3-x^2+26x-10$ со едниот множител $3x^2+4x-2$, ќе се добие другиот множител $2x^2-3x+5$.

Бидејќи првиот член ($6x^4$) на деленикот е добиен како производ од првиот член ($3x^2$) на делителот и првиот член ($2x^2$) на количникот, тоа за да го најдеме првиот член на количникот, треба првиот член на деленикот да се подели со првиот член на делителот.

Така го наоѓаме $6x^4:3x^2=2x^2$ — првиот член на количникот. Ако делителот го помножиме со најдениот прв член ($2x^2$) на количникот, ќе го добиеме првиот делумен производ α, т. е.

$$\alpha=(3x^2+4x-2)\cdot 2x^2=6x^4+8x^3-4x^2.$$

Ако потоа производот α го извадиме од деленикот, добиениот остаток R_1 ќе биде еднаков на $\beta+\gamma$. Значи, првиот остаток R_1, ќе биде:

$$\begin{array}{rl}
6x^4-x^3-x^2+26x-10 & \\
-\ \ 6x^4+8x^3-4x^2 \qquad\qquad & (\alpha) \\
-\quad - \quad + \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
-9x^3+3x^2+26x-10 & (R_1)
\end{array}$$

Забележуваме дека првиот член ($-9x^3$) на остатокот R_1 претставува производ од првиот член ($3x^2$) на делителот и вториот член ($-3x$) на количникот. Според тоа, за да го најдеме вториот член на количникот, треба првиот член на остатокот R_1 да се подели со првиот член на делителот. Значи, вториот член на количникот е $-9x^3:3x=-3x$.

Потоа, ако делителот го помножиме со најдениот втор член ($-3x$) на количникот, ќе го добиеме вториот делумен производ β. Тој производ го вадиме од остатокот R_1, па го добиваме вториот остаток R_2:

$$
\begin{array}{rrrrl}
-9x^3 & +\;3x^2 & +\;26x & -\;10 & (R_1) \\
-9x^3 & -\;12x^2 & +\;6x & & (\beta) \\
+ & + & - & & \\
\hline
 & 15x^2 & +\;20x & -\;10 & (R_2)
\end{array}
$$

Откако ќе го поделиме првиот член ($15x^2$) на остатокот R_2 со првиот член ($3x^2$) на делителот, го добиваме и третиот член на количникот; $15x^2 : 3x^2 = 5$. Ако производот од делителот и третиот член на количникот го извадиме од остатокот R_2, добиваме остаток нула, што значи дека делењето е завршено.

Целата постапка на делењето ја запишуваме вака:

$$
\begin{array}{l}
(6x^4 - x^3 - x^2 + 26x - 10) : (3x^2 + 4x - 2) = 2x^2 - 3x + 5 \\
\;\;6x^4 + 8x^3 - 4x^2 \\
\;\;-\quad -\quad + \\
\hline
\qquad -9x^3 + 3x^2 + 26x - 10 \\
\qquad -9x^3 - 12x^2 + 6x \\
\qquad +\quad +\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\quad 15x^2 + 20x - 10 \\
\qquad\qquad\quad 15x^2 + 20x - 10 \\
\qquad\qquad\quad -\quad -\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Ако последниот остаток не е нула, постапката се продолжува се додека не се добие остаток нула, или остаток чиј степен е понизок од степенот на делителот.

Во првиот случај делењето завршува без остаток и добиениот количник е полином, а во вториот случај велиме дека делењето е со остаток.

Пример: $(5x^3 - 6x^2 + 10x + 7) : (x^2 - 2x + 3) = 5x + 4$

$$
\begin{array}{l}
5x^3 - 10x^2 + 15x \\
-\quad +\quad - \\
\hline
\qquad 4x^2 - 5x + 7 \\
\qquad 4x^2 - 8x + 12 \\
\qquad -\quad +\quad - \\
\hline
\qquad\qquad 3x - 5
\end{array}
$$

Кога делењето е со остаток, количникот не може да се изрази во форма на полином, туку само во вид на дробен рационален израз вака:

$$(5x^3 - 6x^2 + 10x + 7) : (x^2 - 2x + 3) = 5x + 4 + \frac{3x - 5}{x^2 - 2x + 3}.$$

Во погоре разгледаните два примера деленикот и делителот содржеа само по еден општ број (аргумент) и беа подредени според намалувачките степени на тој број. Ако полиномите содржат неколку аргументи, тогаш пред да се почне со делењето, полиномите се подредуваат според намалувачките или растечките степени на еден од аргументите.

Пример: $(3a^4 - 8a^3b + 6a^2b^2 - ab^3) : (3a^2 - 5ab + b^2) = a^2 - ab$

$$
\begin{array}{l}
3a^4 - 5a^3b + a^2b^2 \\
-\quad +\quad - \\
\hline
\qquad -3a^3b + 5a^2b^2 - ab^3 \\
\qquad -3a^3b + 5a^2b^2 - ab^3 \\
\qquad +\quad -\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Забелешки: 1°. Формулите за скратено множење можат да бидат применувани и при делењето на полиномите. На пример:

Од формулата $(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2$ следува дека:

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y \quad \text{или} \quad \frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y$$

Од формулата $(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$ следува:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2 \quad \text{и} \quad \frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}=x+y \text{ итн.}$$

2°. Постапката на делењето на полином со полином е аналогна на делењето на повеќецифрен број со повеќецифрен.

Пример: Да се подели бројот 6496 со бројот 203!

Бидејќи секој повеќецифрен број може да се напише во вид на полином подреден по степените на бројот 10, горното делење може да се изврши вака:

$$6496:203=(6\cdot10^3+4\cdot10^2+9\cdot10+6):(2\cdot10^2+3)=3\cdot10+2=32$$

$$\begin{array}{lll}
6\cdot10^3+ & & 9\cdot10 \\
- & & - \\
\hline
 & 4\cdot10^2+ & +6 \\
 & 4\cdot10^2 & +6 \\
 & - & - \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
\quad \text{или покусо:} \quad
\begin{array}{r}
6496:203=32 \\
609 \\
\hline
406 \\
406 \\
\hline
0
\end{array}$$

ЗАДАЧИ

1. Подели ги мономите:

   а) $12x:(-3)$; б) $(-6a^3b^2c):(-2a^2bc)$; в) $3x^2y^2z:(-5x^2yz)$;
   г) $-9ab^2:3ab$; д) $15x^ny^m:(3x^3y^2)$; ѓ) $4a^{n+3}b^{n-2}:(-5a^nb^{n-3})$.

2. Изврши го делењето:

   а) $(12a-15b):3$; б) $(4x^2y-12x^4y^3):(-4x^2y)$;
   в) $(6a^2x^4-9a^3x^5+15a^4x^3):\frac{3}{2}ax^3$;
   г) $(-15a^3x^5+10a^4x^4-25a^5x^3+5a^4x^4):(-5a^3x^3)$.

3. Изврши ги означените операции во изразите:

   а) $(a^2-2ab)\cdot3a+(6ab^3-12a^4b^2):3ab$;
   б) $(15a^2x^3-6a^3x^2):(-3a^2x^2)-2x^2(3+4a^2x)$;
   в) $\left[(x+3y)(x-3y)-\frac{1}{4}(2x+y)(2x-y)\right]:\frac{y}{2}$.

4. Изврши го делењето на полиномите:

   а) $(x^4+x^2+1):(x^2+x+1)$; б) $(6a^3b-11a^2b^2-b^4):(3a-b)$.
   в) $(3x^5-8x^4+8x^3-5x^2+3x-1):(x^2-2x+1)$;

5. Провери дали полиномот $x^5+2x^4-3x^3+x^2+2x-3$ е делив со биномот:

   а) $x-2$; б) $x-1$; в) $x+2$; г) $x+3$.

6. Изврши го делењето, ползувајќи се со формулите за скратено множење:

   а) $(x^2+2x+1):(x+1)$; б) $(x^3-y^3):(x^2+xy+y^2)$; в) $(c^3+8):(c+2)$;
   г) $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3):(x+y)$; д) $(9-12x+4x^2):(3-2x)$;
   ѓ) $(1-9x^2):(1+3x)$; е) $(c^3+3c^2x+3cx^2+x^3):(c^2+2cx+x^2)$.

§ 24. ПОИМ ЗА РАЗЛОЖУВАЊЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Дефиниција: *Да се разложи еден цел рационален израз на множители, значи тој идентички да се трансформира во вид на производ од два или неколку други цели рационални изрази.*

Нека е даден полиномот $ax+bx-cx$.

Врз основа на дистрибутивниот закон тој може да се преобрази во производ вака: $ax+bx-cx=x(a+b-c)$

Разложувањето на целите рационални изрази на множители е многу слично на разложувањето на природните броеви на прости множители.

Познато ни е дека не секој природен број може да се разложи на множители. Исто така и не секој цел рационален израз може да се разложи на множители. На пример, изразот $x+y$ не може да се разложи на множители во множеството на целите рационални изрази.

Секој цел рационален израз кој не може да се разложи на множители се вика *прост*; во спротивен случај изразот се вика *сложен*.

Велиме разложувањето на даден израз на множители е извршено до крај, ако секој од добиените множители е прост цел рационален израз.

Нужно е да спомeнеме дека разложувањето на множители има смисла само за полиномите. За мономите задачата е решена, бидејќи секој моном претставува производ и всушност тој е разложен на множители. Кај мономите може да стане потребно да се разложат на множители само коефициентите.

Пример: $144a^2b^3=2^4\cdot3^2a^2b^3$.

§ 25. НАЧИНИ НА РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА ПРОСТИ МНОЖИТЕЛИ

1. РАЗЛОЖУВАЊЕ СО ИЗВЛЕКУВАЊЕ НА ЗАЕДНИЧКИТЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕД ЗАГРАДА

Разложувањето на полиномите на множители со извлекување на заедничките множители пред заграда се заснова врз дистрибутивниот закон на множењето. Така од идентитетот $(a+b-c)m=am+bm-cm$, со промена на неговите страни, добиваме:

$$am+bm-cm=m(a+b-c).$$

Правило 1. *Ако сите членови на даден полином имаат еден и ист заеднички множител, овој може да се извлече пред заграда, а во заградата се става полиномот што се добива, кога дадениот полином се подели со извлечениот заеднички множител пред заградата.*

Задача: Да се разложи на множители полиномот:

$$10a^3bx^2-5a^3b^2x-15a^2b^3.$$

Забележуваме дека бројот 5 е заеднички делител на коефициентите на сите членови. Освен бројот 5, сите членови на дадениот полином имаат уште и заеднички множители a и b во различни степени. Тие можат да се извлечат пред заграда во најниските степенови показатели и тоа a во втор и b во прв степен. Општиот број x не е заеднички множител, бидејќи во третиот член не се содржи. Според тоа, заеднички множител на сите членови на дадениот полином ќе биде мономот $5a^2b$. Потоа така најдениот моном го извлекуваме пред заграда, а во заградата, го запишуваме количникот од делењето на дадениот полином и заедничкиот множител $5a^2b$, т. е.

$$10a^3bx^2 - 5a^3b^2x - 15a^2b^3 = 5a^2b\,(2ax^2 - abx - 3b^2).$$

Пред заграда може да се извлече и само множителот -1, на пример:

$$b-a = -(-b+a) = -(a-b); \qquad 1-x = -(x-1).$$

Заедничкиот множител што се извлекува пред заграда може да биде не само моном, туку и полином.

Пример: $2a(x-3)+b\,(x-3)-5c\,(x-3) = (x-3)\,(2a+b-5c)$.

2. РАЗЛОЖУВАЊЕ СО ГРУПИРАЊЕ НА ЧЛЕНОВИТЕ

Разложувањето на полиномите на множители со групирање на членовите се заснова врз правилото за множење на полином со полином.

Така, познато е дека:

$$(a-b)\,(c+d) = (a-b)\,c + (a-b)\,d = ac - bc + ad - bd.$$

Ако потоа полиномот $ac - bc + ad - bd$ треба да се разложи на множители, тогаш трансформацијата ќе ја извршиме во обратен ред.

$$ac - bc + ad - bd = c\,(a-b) + d\,(a-b) = (a-b)\,(c+d).$$

Тука ги групираме првиот со вториот член и од нив го извлекуваме c пред заграда, потоа ги групираме третиот со четвртиот член и од нив го извлекуваме d пред заграда. Така го добиваме изразот $c\,(a-b)+d\,(a-b)$, во кој јасно се гледа заедничкиот множител $a-b$. Со извлекување на тој множител повторно пред заграда го добиваме крајниот резултат.

Ваквиот начин на разложување на полиномите на множители се вика *начин на групирање*.

Задача: Да се разложи на множители полиномот $3ax + 2b - bx - 6a$!

Да ги групираме првиот со третиот и вториот со четвртиот член:

$$3ax + 2b - bx - 6a = (3ax - bx) + (2b - 6a).$$

Откога ќе ги извлечеме заедничките множители од двете групи пред загради, ќе добиеме:

$$x(3a-b) + 2\,(b-3a).$$

Во производите $x\,(3a-b)$ и $2\,(b-3a)$ множителите — биноми $3a-b$ и $b-3a$ се разликуваат само по знаците. За да станат тие еднакви, доволно е од едниот бином, на пример од вториот бином, да извлечеме -1 пред заграда. Така добиваме:

$$x\,(3a-b) + 2\,[-(-b+3a)] = x\,(3a-b) - 2\,(3a-b).$$

Треба да привикнуваме ваквите трансформации да ги вршиме наеднаш, извлекувајќи го заедничкиот множител од втората група со предзнак „—“.

$$3ax+2b-bx-6a = (3ax-bx)+(2b-6a) = x\,(3a-b)-2\,(3a-b) =$$
$$= (3a-b)\,(x-2).$$

Дадениот полином може да се разложи на множители и кога се групираат првиот со четвртиот и вториот со третиот член:

$$3ax+2b-bx-6a=(3ax-6a)+(2b-bx)=3a(x-2)-b(x-2)=$$
$$=(x-2)\cdot(3a-b).$$

Правило 2. *Членовите на полиномот се групираат така што секоја група да има заеднички множител. По извлекувањето на заедничкиот множител со соодветниот знак од секоја група пред заграда, во заградите треба да се добие еден ист полином. Тој полином потоа се извлекува пред заграда како нов заеднички множител.*

Пример: $2xy-2y-x+1=2y(x-1)-(x-1)=(x-1)\cdot(2y-1).$

3. РАЗЛОЖУВАЊЕ СО ПРИМЕНА НА ФОРМУЛИТЕ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

Некои полиноми можат да се разложат на множители и со примена на некоја од формулите за скратено множење.

1. Знаеме дека: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

Ако овие равенства ги напишеме во обратен ред, ќе добиеме:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \quad \text{и} \quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Правило 3. *Ако даден трином претставува збир од квадратите на два броја (или изрази), плус или минус нивниот удвоен производ, тогаш тој може да се претстави како квадрат од збирот или разликата на тие броеви (или изрази)*

Примери: $9x^2+24x+16=(3x)^2+2\cdot3x\cdot4+4^2=(3x+4)^2;$

$$25a^4-20a^2c+4c^2=(5a^2)^2-2\cdot5a^2\cdot2c+(2c)^2=(5a^2-2c)^2;$$

$$-y^2+2y-1=-(y^2-2\cdot y\cdot1+1^2)=-(y-1)^2.$$

2. Равенствата $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ и

$$(a-b)^3=a^2-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

напишани во обратен ред, ни даваат:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \quad \text{и} \quad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.$$

Овие две равенства ги ползуваме за разложување на некои полиноми од четири члена на множители.

Примери: $x^3+6x^2+12x+8=x^3+3\cdot x^2\cdot2+3\cdot x\cdot2^2+2^3=(x+2)^3$

$$8m^3-12m^2+6m-1=(2m)^3-3\cdot(2m)^2\cdot1+3\cdot2m\cdot1^2-1^3=(2m-1)^3$$

3. Равенството $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ напишано во обратен ред, гласи:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Правило 4. *Разликата од квадратите на два броја (или изрази) еднаква е на производот од збирот и разликата на тие броеви (или изрази).*

Примери: $4x^2y^2-9=(2xy)^2-3^2=(2xy+3)(2xy-3)$;

$(a-2)^2-1=(a-2+1)(a-2-1)=(a-1)(a-3)$;

$9a^2-(2a+3b)^2=[3a+(2a+3b)][3a-(2a+3b)]=(3a+2a+3b)(3a-$

$-2a-3b)=(5a+3b)(a-3b)$;

$4(x-y)^2-(x+y)^2=[2(x-y)+(x+y)][2(x-y)-(x+y)]=$

$=(2x-2y+x+y)(2x-2y-x-y)=(3x-y)(x-3y)$.

Оваа формула ја применуваме и за разложување на сите биноми кои претставуваат разлика на степени со еднакви (или различни) парни показатели.

Пример: $x^6-25y^4=(x^3)^2-(5y^2)^2=(x^3-5y^2)(x^3+5y^2)$.

Нужно е да споменеме дека збирот на квадратите a^2+b^2, како и збирот на кои и да било степени со парни показатели, не може да се разложи на множители во множеството на целите рационални изрази.

4. Ако даден бином претставува збир или разлика од кубовите на два броја (или израза), тој се разложува на множители согласно формулите:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{ и } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Пример: $125-27a^6b^3=5^3-(3a^2b)^3=(5-3a^2b)(25+15a^2b+9a^4b^2)$;

$8y^3+1=(2y)^3+1^3=(2y+1)(4y^2-2y+1)$.

5. Ако даден бином претставува збир или разлика на два степена со исти непарни показатели, биномот го разложуваме според формулите:

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4);$$

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4);$$

$$a^7-b^7=(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6);$$

$$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6) \text{ итн.}$$

Пример: $x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$.

4. РАЗЛОЖУВАЊЕ СО ПОСЛЕДОВАТЕЛНА ПРИМЕНА НА НЕКОЛКУ НАЧИНИ

Во некои случаи за да се изврши до крај разложувањето на полиномот, нужно е да се применат последователно некои од горниве три начина. Тоа обично се изведува, така што:

Прво гледаме дали сите негови членови имаат некој заеднички множител. Извлекувањето на заедничките множители (ако има такви) е прв од начините што треба да се примени.

Потоа треба да се разгледа полиномот што се добива во заградата. Може да се случи тој да се разложува или со групирање или со примена на некоја од формулите за скратено множење.

Примери: а) $3x^2y^2-15x^2y+3x^3y-15x^3=3x^2(y^2-5y+xy-5x)=$

$=3x^2[y(y-5)+x(y-5)]=3x^2[(y-5)(y+x)]=3x^2(x+y)(y-5)$;

б) $3ab^2+6ab+3a=3a(b^2+2b+1)=3a(b+1)^2$;

в) $ax-ay-x^2+2xy-y^2=a(x-y)-(x^2-2xy+y^2)=$

$=a(x-y)-(x-y)^2=(x-y)[a-(x-y)]=(x-y)(a-x+y)$;

г) $a^4+a^3+a+1=a^3(a+1)+(a+1)=(a+1)(a^3+1)=$

$=(a+1)\cdot(a+1)\cdot(a^2-a+1)=(a+1)^2\cdot(a^2-a+1)$;

д) $x^2-y^2-x+y=(x^2-y^2)-(x-y)=(x-y)\cdot(x+y)-(x-y)=$

$=(x-y)(x+y-1)$.

ЗАДАЧИ

Разложи ги полиномите на прости множители:

1. а) $3x+6y$; б) $2ab-2ac$; в) $7x^5+21x^3$.

2. а) $27ab^3-9b^4$; б) a^2y-ay^3; в) x^n+x^{n+1}.

3. а) $9ax-6ay+12az$; б) $10x^4b^3+15a^3b^2-40a^5b^4$.

4. а) $2a(b-3)+5c(b-3)$; б) $a(x+1)-b(x+1)$.

5. а) $a(x^2+1)-b(x^2+1)-c(x^2+1)$; б) $5(x+y)-2(x+y)^2$.

6. а) $2x(x+y-z)-3y(x+y-z)$; б) $3(x-y)^2-(x+y)(x-y)$.

7. а) a^2b^2-4; б) $100x^2-1$; в) $\frac{1}{9}a^2-c^2$.

8. а) $9x^2+6x+1$; б) x^2-4x+4; в) $-25a^4+20a^2x^2-4x^4$.

9. а) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$; б) $125-75n+15n^2-n^3$.

10. а) a^3-8; б) $27x^3+1$; в) $8m^3-n^3$.

11. а) a^5+1; б) x^5y^5-1; в) x^7-y^7.

12. а) $16-a^4$; б) $9x^2-(y^2+z^2)^2$; в) $9(a-b)^2-4(a+b)^2$.

13. а) a^3+3a^2+3a+9; б) $12ax-6bx+2ay-by$.

14. а) $x^5-x^3-x^2+1$; б) $x^3+y^3+(x+y)^2+x^2-y^2$.

15. а) $a^2-2ab+b^2-c^2$; б) $x^3-3x^2+x+ax^2-3ax+a$.

16. Пресметај ја вредноста на изразот на побрз начин:

а) $3ab-2a$, ако е: $a=25$ и $b=3{,}5$;

б) $4x^2y-20xy^2$, ако е: $x=2{,}4$ и $y=0{,}5$;

в) $327\cdot35+73\cdot35$; г) 285^2-215^2; д) 475^2-25^2.

§ 26. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ НА ЦЕЛИТЕ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Дефиниција 1. *Заеднички делител на два или повеќе цели рационални израза е таков цел рационален израз со кој сите дадени изрази се деливи без остаток.*

Пример: За мономите $12a^3x^2$ и $18a^2x^4y^2$ заеднички делители ќе бидат: $2a$, $6x^2$ $3a^2x$, $6a^2x^2$ и др.

Дефиниција 2. *Заедничкиот делител на неколку цели рационални изрази, којшто содржи најмногу заеднички множители (и со можно највисоки показатели) се вика најголем заеднички делител на тие изрази,* и се означува

$$D(12a^3x^2 \text{ и } 18a^2x^4y^2)=6a^2x^2.$$

Најголемиот заеднички делител на неколку монома (со цели коефициенти) го наоѓаме така што прво треба да се најде НЗД за сите коефициенти, а потоа се допишува последователно секој заеднички општ множител со најнизок показател.

Пример: $D(14a^2b^2x,\ 35ab^3x^2$ и $42a^2b^3xy^2)=7ab^2x$.

За да се одреди најголемиот заеднички делител за неколку полинома (со цели коефициенти), потребно е прво тие да се разложат на прости множители, а потоа да се образува производ од сите заеднички прости множители што имаат најнизок показател. На пример:

Задача: Да се најде НЗД за $3x^2+6x+3$; $9x^2-9$ и $6x+6$

Бидејќи е: $3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=\underline{3(x+1)^2}$;

$$9x^2-9=9(x^2-1)=\underline{9(x+1)(x-1)} \text{ и } 6x+6=\underline{6(x+1)}, \text{ тоа:}$$

$$D(3x^2+6x+3;\ 9x^2-9 \text{ и } 6x+6)=3(x+1),$$

Може да се случи дадените изрази да немаат ниту еден заеднички делител (множител). Тогаш нивниот најголем заеднички делител е 1. Таквите изрази се викаат *заемно прости изрази*.

§ 27. НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ НА ЦЕЛИТЕ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Дефиниција 1. *Заеднички содржател на неколку цели рационални изрази е таков цел рационален израз којшто се дели без остаток со секој од дадените изрази.*

Пример: За мономите $4a^3b$ и $6a^2x^4$ заеднички содржател ќе биде кој и да било еден од изразите:

$$12a^3bx^4;\ 24a^5b^3x^6;\ 60a^3bx^5(a-b) \text{ итн.}$$

Според тоа, неколку цели рационални израза можат да имаат бесконечно многу заеднички содржатели.

Дефиниција 2. *Заедничкиот содржател на неколку цели рационални израза, којшто содржи најмалку множители (и со можно најниски показатели), се вика најмал заеднички содржател на тие изрази,* и се означува:

$$s(4a^3b,\ 6a^2x^4)=12a^3bx^4.$$

Најмалиот заеднички содржател на неколку монома (со цели коефициенти) го наоѓаме, така што прво го наоѓаме НЗС за сите коефициенти, а потоа кон него последователно ги допишуваме сите заеднички и незаеднички општи множители. При тоа секој општ множител се зема со највисокиот показател со кој се среќава во дадените мономи. На пример:

$$s(4ab^3,\ 6a^2x,\ 9a^3bx^2)=36a^3b^3x^2.$$

За да се одреди најмалиот заеднички содржател на неколку дадени полиноми (со цели коефициенти), потребно е прво полиномите да се разложат на прости множители, а потоа да се образува производ од сите различни прости множители, што се содржат во дадените полиноми. При тоа секој множител се зема со највисокиот показател со кој се наоѓа во нив.

Задача: Да се одреди најмалиот заеднички содржател на полиномите:

$$4x^3-4x^2y;\quad 15x^3y^2-15xy^4 \quad \text{и} \quad 6x^2y+12xy^2+6y^3.$$

Полиномите ги разложуваме на прости множители:

$$4x^3-4x^2y=\underline{4x^2(x-y)}$$

$$15x^3y^2-15xy^4=15xy^2(x^2-y^2)=\underline{15xy^2(x+y)(x-y)}$$

$$6x^2y+12xy^2+6y^3=6y(x^2+2xy+y^2)=\underline{6y(x+y)^2}.$$

Бараниот најмал заеднички содржател ќе биде:

$$s(4x^3-4x^2y;\quad 15x^3y^2-15xy^4;\quad 6x^2y+12xy^2+6y^3)=60x^2y^2(x-y)(x+y)^2$$

Забелешки: 1°. Ако кој и да било од дадените полиноми не се разложува на множители, тогаш тој се затвора во заграда и се зема целиот како еден множител.

Пример: Најмалиот заеднички содржател на изразите:

$$5a^2c=\underline{5a^2c};\quad 2c-6=\underline{2(c-3)};$$

$$c^3-27=\underline{(c-3)(c^2+3c+9)};\quad c^2+3c+9=\underline{(c^2+3c+9)}$$

ќе биде:

$$s(5a^2c,\ 2c-6,\ c^3-27,\ c^2+3c+9)=10a^2c(c-3)(c^2+3c+9).$$

2°. Најмалиот заеднички содржател на неколку прости или заемно прости цели рационални изрази еднаков е на нивниот производ.

Пример: $s(2a,\ a+1)=2a(a+1)$

ЗАДАЧИ

1. Најди го НЗД за броевите:
   а) 42; 18 и 24; б) 105 и 45; в) 30 и 75; г) 12, 32, 40 и 56.
2. Одреди го најголемиот заеднички делител на изразите:
   а) $3ab$ и $12a^2b$; б) $15x^3y^2$ и $24x^2y^3$; в) $5a(a+b)^2$ и $8a^2b(a+b)^3$;
   г) x^2-y^2 и x^3+y^3; д) $x^2y^2-y^4$; $x^4-x^2y^2$ и x^3y-xy^3.
3. Одреди го НЗС за броевите:
   а) 12, 50, 45 и 18; б) 84, 56 и 21; в) 125, 100 и 450; г) 96, 64 и 180.
4. Одреди го најмалиот заеднички содржател на изразите:
   а) $6a^2b^3$, $15ab^2$ и $24a^3bc^2$; б) $a(x+2)$ и $b(x+2)$; в) x и x^2+xy;
   г) a^2-9b^2 и a^3+3a^2b; д) x^2-x, $1-x^2$, $1+x^3$ и x^2+x+1;
   ѓ) x^2-4y^2, $3x^2-12xy+12y^2$ и $5y(x-2y)^3$.

Глава IV

ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

§ 28. ДРОБЕН РАЦИОНАЛЕН ИЗРАЗ. АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

Дробниот рационален израз содржи делење со општ број или делење со израз што содржи некој општ број. На пример:

$$\frac{3}{a-2};\quad \frac{a^2+1}{3ac^2};\quad 2ax-\frac{a}{x};\quad \frac{x+\frac{2}{x}}{3x^2-5};\quad \frac{2a^2-3ab+c}{ab-4c}\ \text{итн.}$$

Дефиниција: *Дробен рационален израз кој претставува дропка чиј броител и именител се цели рационални изрази се вика алгебарска дропка.*

Алгебарските дропки, исто како и обичните, имаат смисла само кога именителот не им е еднаков на нула. Затоа:

Допуштени вредности на аргументите во една алгебарска дропка се само оние вредности за кои именителот на таа дропка е различен од нула.

Пример: Дропката $\frac{a+3}{a-2}$, за $a=2$ нема смисла, а за сите други вредности на a таа има смисла. Според тоа, допуштени вредности на аргументот a се сите вредности кога е $a \neq 2$. За $a=-3$ броителот на дропката е еднаков на нула, а именителот е различен од нула. Според тоа за $a=-3$ бројната вредност на дадената дропка е еднаква на 0.

Друг пример: Дропката $\frac{x^2+1}{x-y}$ има смисла за сите нееднакви вредности на x и y, т. е. за $x \neq y$. Бидејќи броителот на дропката x^2+1 не може да стане еднаков на нула ни за една вредност на x, тоа велиме дека таа дропка не може да има бројна вредност еднаква на нула.

§ 29. ОСНОВНО СВОЈСТВО НА АЛГЕБАРСКИТЕ ДРОПКИ

На секоја алгебарска дропка можеме да гледаме и како на количник од два цели рационални израза. Но, бидејќи на секој рационален израз можеме да гледаме како на рационален број, тоа на алгебарската дропка можеме да гледаме и како на количник од два рационални броја. Веќе видовме дека количникот од два рационални броја не се менува ако и деленикот и делителот ги помножиме (или поделиме) со еден ист број (кој не е нула), т. е.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{am}{bm} \quad \text{и} \quad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}, \text{ при } b\neq 0 \text{ и } m\neq 0.} \qquad (1)$$

За алгебарските дропки ова својство го дефинираме вака:

Својство: *Ако броителот и именителот на алгебарската дропка се помножат (или поделат) со еден ист број или со еден ист цел рационален израз различен од нула, ќе се добие нова дропка, идентички еднаква на дадената.*

Нека е дадена алгебарската дропка $\frac{A}{B}$ $(B\neq 0)$, каде што A и B претставуваат цели рационални изрази. Ако со M го означиме кој и да било број или цел рационален израз, а при претпоставка да е $M\neq 0$, тогаш врз основа горното ооновно својство ќе важат идентитетите:

$$\boxed{\frac{A}{B}=\frac{AM}{BM} \quad \text{и} \quad \frac{A}{B}=\frac{A:M}{B:M}, \quad \text{при} \quad B\neq 0 \quad \text{и} \quad M\neq 0.} \qquad (2)$$

Во нивната точност се уверуваме ако со a, b и m ги означиме рационалните броеви кои соодветствуваат на бројните вредности на изразите A, B и M, за произволни но определени вредности на општите броеви, што влегуваат во нив; тогаш равенствата 2) ќе преминат во бројните равенства (1), а нивната точност ја покажавме порано.

Забелешка: Од ова својство на дропките следуваат и следниве две правила:

1°. *Вредноста на дропката не се менува, ако броителот и именителот се помножат со —1.*

Пример: $\frac{-5}{-8}=\frac{(-5)\cdot(-1)}{(-8)\cdot(-1)}=\frac{5}{8}$; $\frac{-2a}{b-a}=\frac{2a}{-(b-a)}=\frac{2a}{-b+a}=\frac{2a}{a-b}$.

Ова правило може да се примени и при собирањето на дропките:

$$\frac{7}{9}+\frac{2}{-9}=\frac{7}{9}+\frac{-2}{9}=\frac{7+(-2)}{9}=\frac{5}{9}.$$

2°. *Вредноста на дропката не се менува, ако само броителот или именителот се помножат со — 1, а знакот пред дробната црта се промени во обратен.*

Примери: $\frac{3}{4}=-\frac{-3}{4}=-\frac{3}{-4}$; $\frac{2}{-5}=-\frac{-2}{-5}=-\frac{2}{5}$;

$$\frac{3x}{2-a}=-\frac{3x}{-(2-a)}=-\frac{3x}{-2+a}=-\frac{3x}{a-2};$$

$$-\frac{x-1}{3-x}=\frac{x-1}{-(3-x)}=\frac{x-1}{x-3} \quad \text{или} \quad -\frac{x-1}{3-x}=\frac{-(x-1)}{3-x}=\frac{1-x}{3-x}.$$

§ 30. СКРАТУВАЊЕ НА АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

Дефиниција: *Да се скрати алгебарска дропка, значи броителот и именителот на дропката да се поделат со производот на нивните заеднички множители.*

Нека е дадена алгебарската дропка $\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}$, чии броител и именител се мономи. Забележуваме дека тие имаат заеднички множители (делители): 6, a^2 и b^2. Дропката може да се упрости, ако броителот и именителот се поделат последователно со тие множители или со нивниот производ $6a^2b^2$—најголем заеднички делител. Така добиваме:

$$\frac{12a^2b^3c}{18a^4b^2}=\frac{12a^2b^3c:6a^2b^2}{18a^4b^2:6a^2b^2}=\frac{2bc}{3a^2},$$

при што претпоставуваме дека е $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

Ако броителот и именителот на дропката се полиноми, тогаш нив прво ги разложуваме на прости множители, а потоа кратиме, ако во броителот и именителот се појават заеднички множители.

Примери: 1) $\frac{6a^2b}{3a^2-3ab}=\frac{6a^2b}{3a(a-b)}=\frac{2ab}{a-b}$, при $a\neq 0$ и $a\neq b$;

2) $\frac{x^2-6x+9}{2x^2-6x}=\frac{(x-3)^2}{2x(x-3)}=\frac{x-3}{2x}$ при $x\neq 3$ и $x\neq 0$;

3) $\frac{n^2+n}{(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}=\frac{n}{n+1}$; при $n\neq -1$

Забелешка: При скратувањето на алгебарските дропки често се прават грешки кога се скратуваат собироците на полиномите во броителот и именителот.

На пример: $\frac{ax^2+b}{x^2}=a+b$!!

Ако ја извршиме обратната трансформација, т. е. ако го помножиме броителот и именителот на добиениот израз со скратениот множител, нема да ја добиеме дадената дропка: $a+b=\frac{(a+b)x^2}{1\cdot x^2}=\frac{ax^2+bx^2}{x^2}$.

Значи, скратувањето не е извршено правилно. Затоа треба секогаш да знаеме дека се скратуваат само еднакви множители, а не собироци.

ЗАДАЧИ

1. Запиши ги во вид на дропки следниве количници:

а) $x:5$; б) $3:x$; в) $(a+b):(a-b)$; г) $2x:(x-3)$; д) $x:(x+y)$; ѓ) $(3x-2y):xy$

2. За кои вредности на x, дропките: а) $\frac{x+2}{x}$; б) $\frac{x-3}{x-1}$; в) $\frac{1}{(x-2)(x-5)}$ немаат смисла, а за кои тие стануваат еднакви на нула?

3. За кои вредности на a следниве дропки: а) $\frac{1}{2+a^2}$; б) $\frac{3}{5+(a-1)^2}$ добиваат најголема вредност?

4. Во дропките: а) $-\frac{2}{x-1}$, б) $-\frac{a}{3-a}$, в) $-\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ промени го знакот пред дробната црта, но без да се промени нејзината вредност!

5. Скрати ги дропките:

а) $\frac{15a^3c}{12a^2b}$; б) $\frac{6ax}{8a^2}$; в) $\frac{3x^{n+2}}{x^n \cdot y}$; г) $\frac{x^2-y^2}{ax+ay}$; д) $\frac{3a+1}{9a^2-1}$;

ѓ) $\frac{3a+6}{a^3+8}$; е) $\frac{xy-x^2}{xy^2-x^2y}$; ж) $\frac{x^2-1}{1-2x+x^2}$; с) $\frac{2a(x-3y)}{6a^2(3y-x)}$.

6. Скрати ги дропките и пресметај ја нивната вредност:

а) $\frac{a-1}{2a-2a^2}$ за $a=-3$; б) $\frac{x^2-4}{x+2}$ за $x=3{,}5$; в) $\frac{x-1}{1-x}$ за $x=a$;

§ 31. ДОВЕДУВАЊЕ НА АЛГЕБАРСКИТЕ ДРОПКИ НА ЕДНАКОВ ИМЕНИТЕЛ

Според основното својство, алгебарската дропка може и да се проширува, т. е. нејзиниот броител и именител да се помножат со ист број или израз, различен од нула.

Со проширување две или неколку алгебарски дропки со различни именители можат да се трансформираат во дропки со еднакви именители. Таа трансформација се вика *доведување на еднаков именител.*

За заеднички именител на неколку алгебарски дропки обично се зема рационален израз, кој ги содржи сите именители на дадените дропки без остаток. Јасно е дека тој израз ќе биде најмалиот заеднички содржател за именителите на дадените дропки.

Доведувањето на еднаков именител се врши на следниов начин:

1°. го наоѓаме најмалиот заеднички содржател на именителите на дадените алгебарски дропки;

2°. ги наоѓаме соодветните *проширувачи* на именителите на секоја дропка. Тоа се изрази што се добиваат кога најдениот најмал заеднички содржател се подели со соодветниот именител на дадените дропки;

3°. потоа ги множиме броителот и именителот на секоја дропка со соодветниот проширувач.

Задача 1. Да се доведат на најмал заеднички именител дропките:

$$\frac{a}{2x^2y},\quad \frac{b}{3y},\quad \frac{c}{4xy}.$$

Најмалиот заеднички именител е; $s(2x^2y,\ 3y,\ 4xy)=12x^2y$. Според тоа:

$$\frac{a}{2x^2y}=\frac{a\cdot 6}{2x^2y\cdot 6}=\frac{6a}{12x^2y};\quad \frac{b}{3y}=\frac{b\cdot 4x^2}{3y\cdot 4x^2}=\frac{4bx^2}{12x^2y};\quad \frac{c}{4xy}=\frac{c\cdot 3x}{4xy\cdot 3x}=\frac{3cx}{12x^2y}.$$

Задача 2. Да се доведат на еднаков именител дропките:

$$\frac{5}{2x-1}; \quad \frac{x}{4x^2-2x}; \quad \frac{1}{3-6x}.$$

Ги разложуваме именителите на дропките на множители:

$2x-1=\underline{(2x-1)}$

$4x^2-2x=\underline{2x(2x-1)}$

$3-6x=3(1-2x)=-\underline{3(2x-1)}$

$s(2x-1,\ 4x^2-2x,\ 3-6x)=6x(2x-1)$. Според тоа:

$$\frac{5}{2x-1}=\frac{30x}{6x(2x-1)}; \quad \frac{x}{4x^2-2x}=\frac{3x}{6x(2x-1)}; \quad \frac{1}{3-6x}=\frac{-2x}{6x(2x-1}.$$

При доведувањето на алгебарските дропки на еднаков именител полезно е тие претходно да се скратат, ако тоа е можно. На пример:

Задача 3. Да се доведат на еднаков именител дропките:

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} \quad и \quad \frac{6x^2y}{3x^2y+6xy}.$$

Дропките прво ги скратуваме:

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)^2}=\frac{x+3}{x-3}; \quad \frac{6x^2y}{3x^2y+6xy}=\frac{6x^2y}{3xy(x+2)}=\frac{2x}{x+2}.$$

Бидејќи е $s(x-3,\ x+2)=(x-3)(x+2)$, дропките ќе го добијат видот:

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}=\frac{x+3}{x-3}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)}; \quad \frac{6x^2y}{3x^2y+6xy}=\frac{2x}{x+2}=\frac{2x(x-3)}{(x+2)(x-3)}$$

при претпоставка да е $x\neq 3$, $x\neq -2$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

§ 32. СОБИРАЊЕ И ВАДЕЊЕ НА АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

Правилата за собирање и вадење на алгебарски допки се исти како и тие за обичните дропки.

Правило 1. *Алгебарски дропки со еднакви именители се собираат така што се собираат нивните броители, па добиениот збир се подели со нивниот заеднички именител,* т. е. $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$; $C\neq 0$

Примери: а) $\frac{3a}{2a^2x}+\frac{5ab}{2a^2x}+\frac{a-2b}{2a^2x}=\frac{3a+5ab+a-2b}{2a^2x}=\frac{4a+5ab-2b}{2a^2x}$, $ax\neq 0$

б) $\frac{2a}{x-1}+\frac{3a-1}{x-1}+\frac{2-ab}{x-1}=\frac{2a+3a-1+2-ab}{x-1}=\frac{5a-ab+1}{x-1}$; $x\neq 1$.

Правило 2. *Алгебарски дропки со еднакви именители се вадат така што од броителот на намаленикот се вади броителот на намалителот, па добиената разлика се дели со нивниот заеднички именител,* т. е.

$$\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}; \quad C\neq 0.$$

Примери:

а) $\frac{a}{c}-\frac{a+3}{c}=\frac{a-(a+3)}{c}=\frac{a-a-3}{c}=\frac{-3}{c}=-\frac{3}{c}; \quad c\neq 0.$

б) $\frac{6a-1}{a+1}-\frac{2a-b}{a+1}=\frac{6a-1-(2a-b)}{a+1}=\frac{6a-1-2a+b}{a+1}=\frac{4a+b-1}{a+1}; \quad a\neq -1.$

Ако алгебарските дропки имаат различни именители, тогаш тие претходно треба да се доведат на еднаков именител, а потоа се собираат или вадат како дропки со еднакви именители, т. е.

$$\frac{a}{m}\pm\frac{b}{n}=\frac{an}{mn}\pm\frac{bm}{mn}=\frac{an\pm bm}{mn}; \quad mn\neq 0$$

Примери:

а) $\frac{5b}{2a^2}+\frac{3}{4ab}+\frac{2b}{a}=\frac{5b\cdot 2b+3\cdot a+2b\cdot 4ab}{4a^2b}=\frac{10b^2+3a+8ab^2}{4a^2b}.$

б) $\frac{2}{c-x}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=\frac{-2}{x-c}+\frac{3}{x-c}-\frac{1}{x}=\frac{-2x+3x-(x-c)}{x(x-c)}=\frac{c}{x(x-c)}.$

Како што гледаме, при собирањето и вадењето на алгебарските дропки се добива пак алгебарска дропка. Во крајниот резултат, ако е можно, вршиме скратување на добиената дропка.

Забелешка: Ако треба да се собере цел рационален израз и алгебарска дропка, тогаш целиот рационален израз го запишуваме во форма на дропка со именител 1.

Примери:

а) $a+\frac{ax}{a-x}=\frac{a}{1}+\frac{ax}{a-x}=\frac{a(a-x)+ax}{a-x}=\frac{a^2}{a-x};$

б) $\frac{b^2}{2a+b}+2a-b=\frac{b^2}{2a+b}+\frac{2a-b}{1}=\frac{b^2+(2a-b)(2a+b)}{2a+b}=\frac{4a^2}{2a+b}.$

ЗАДАЧИ

Доведи ги дропките на еднаков именител:

1. а) $\frac{a}{2bc}$; $\frac{b}{c^2}$; б) ; $\frac{a}{x}$; $\frac{b}{y}$; $\frac{c}{z}$;

2. а) $\frac{a^2}{2b^2}$; $\frac{2bc}{a^2}$; $\frac{ab}{4c^2}$; б) $\frac{2}{3a^2b^3}$; $\frac{5a}{6b^3c^2}$; $\frac{1}{5abc}$;

3. а) $\frac{1}{a}$; $\frac{2}{a+1}$; б) $\frac{x}{x+y}$; $\frac{y}{x-y}$;

4. а) $\frac{a}{x+y}$; $\frac{b}{(x+y)^2}$; б) $\frac{2x}{x+y}$; $\frac{2y}{x-y}$; $\frac{xy}{x^2-y^2}$;

5. а) $\frac{2a}{a^3-ax^2}$; $\frac{3x}{x+a}$; $\frac{5a}{x^2+2ax+a^2}$; б) $\frac{5}{2x-1}$; $\frac{x}{4x^2-2x}$;

Изврши ги означените операции со дропките:

6. а) $\frac{a+2}{b}+\frac{2a-5}{b}$; б) $\frac{2a+1}{a}+\frac{3x-1}{a}-\frac{x-2}{a}$.

7. а) $\frac{3}{x+1}-\frac{5}{2x+1}$; б) $\frac{1}{x^2-4x-4}+\frac{5}{x^2-4}$.

8. а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{a}{2x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{6z}$.

9. а) $\frac{2}{x^4-1}+\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{x+1}$; б) $\frac{5}{2a+4}-\frac{4}{a^2-4}+\frac{1}{a-2}$.

10. а) $\frac{3}{x-c}+\frac{2}{c-x}-\frac{1}{x}$; б) $\frac{xy-1}{xy+1}-\frac{xy+1}{1-xy}+\frac{4}{1-x^2y^2}$.

11. а) $\frac{3a+1}{2a+6}-\frac{a-1}{a+3}$; б) $\frac{1}{x-3}-\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{2}{x^2+6x+9}$.

12. Докажи ги идентитетите:

а) $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}=\frac{(x+y+z)^2}{xyz}$; б) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$.

§ 33. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

За множење и делење на алгебарските дропки важат истите правила како и за обичните дропки. Да се увериме во тоа.

Нека се дадени алгебарските дропки $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ $(B \neq 0,\ D \neq 0)$, каде што A, B, C и D се цели рационални изрази.

Ако со a, b, c и d ги означиме рационалните броеви кои соодветствуваат на бројните вредности на изразите A, B, C и D за произволни, но одредени вредности на аргументите што влегуваат во нив, тогаш јасно е дека дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ ќе претставуваат бројни вредности на алгебарските дропки $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$.

Познато ни е дека обичните дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се множат и делат според правилата:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \text{ и } \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Ако во горните равенства наместо броевите a, b, c и d ги замениме соодветните цели алгебарски изрази A, B, C и D, чии бројни вредности се тие броеви, ќе ги добиеме следниве равенства:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}\ (B\neq 0,\ D\neq 0) \text{ и } \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\ (B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0).$$

со кои се запишани правилата за множење и делење на алгебарските дропки.

Правило 1. *Алгебарски дропки се множат така што одделно се множат нивните броители и именители, па првиот производ се зема за броител, а вториот за именител на производот.*

Примери: а) $\frac{5a^2x}{3by^3}\cdot\left(-\frac{9b^2y^2}{10ax^2}\right)=-\frac{5a^2x\cdot 9b^2y^2}{3by^3\cdot 10ax^2}=-\frac{3ab}{2xy}$, $abxy\neq 0$;

б) $\frac{x-1}{2y}\cdot\frac{4y^2}{(1-x)^2}=\frac{4y^2(x-1)}{2y(x-1)^2}=\frac{2y}{x-1}$; $\quad y\neq 0,\ x\neq 1.$

При множењето на алгебарските дропки треба да се види дали може да се изврши скратување. За таа цел броителите и именителите, (ако се полиноми) ги разложуваме на множители, а скратувањето го вршиме пред множењето на броителите и именителите, како што е тоа покажано погоре.

Правило 2. *Алгебарски дропки се делат, така што дропката—деленик се множи со реципрочната вредност на дропката—делител.*

Примери: а) $-\frac{28a}{5b^2}:\frac{14a^2}{15b^4}=-\frac{28a}{5b^2}\cdot\frac{15b^4}{14a^2}=-\frac{28a\cdot 15b^4}{5b^2\cdot 14a^2}=-\frac{6b^2}{a}$, $\quad a\neq 0,\ b\neq 0$;

б) $\frac{x}{x^2-16}:\frac{x^3+4x^2}{x-4}=\frac{x}{x^2-16}\cdot\frac{x-4}{x^3+4x^2}=\frac{x}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{x-4}{x^2(x+4)}=$

$=\frac{x(x-4)}{x^2(x-4)(x+4)^2}=\frac{1}{x(x+4)^2}$; $\quad x\neq\pm 4,\ x\neq 0.$

Забелешки: 1°. Правилата за множење и делење на алгебарските дропки ги опфаќаат и случаите кога еден од множителите — или деленикот или делителот — е цел рационален израз, бидејќи секој цел израз може да се разгледува и како дропка со именител 1

Примери: а) $(a^2-ab)\cdot\frac{ab}{ab-b^2}=\frac{a(a-b)}{1}\cdot\frac{ab}{b(a-b)}=\frac{a^2b(a-b)}{b(a-b)}=a^2$ $\quad b\neq 0,\ a\neq b$;

б) $\frac{a^2-b^2+2a+1}{3x^2}:(a-b+1)=\frac{(a+1)^2-b^2}{3x^2}:\frac{a-b+1}{1}=$

$=\frac{(a+1-b)(a+1+b)}{3x^2}\cdot\frac{1}{a-b+1}=\frac{a+b+1}{3x^2}$, $\quad a-b+1\neq 0,\quad x\neq 0$

2°. Множењето на повеќе алгебарски дропки се врши или постепено, т.е. производот на првите две дропки се множи со третата итн. или директно — производот на нивните броители се подели со производот на именителите.

Пример: $\frac{a^2x^2}{y^2}\cdot\frac{xy}{a(x+y)}\cdot\frac{x^2-y^2}{axy}=\frac{a^2x^2\cdot xy\cdot(x-y)(x+y)}{y^2\cdot a(x+y)\cdot axy}=\frac{x^2(x-y)}{y^2}$,

при услов $axy\neq 0$ и $x+y\neq 0$.

2°. Покажи дека при множењето на алгебарските дропки важат комутативниот, асоцијативниот и дистрибутивниот закон.

§ 34. СТЕПЕНУВАЊЕ НА АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

Правилото за степенување на алгебарските дропки е исто како и правилото за степенување на обичните дропки.

Правило: *Алгебарска дропка се степенува така што нејзиниот броител и именител одделно се степенуваат со истиот степенов показател, па потоа првиот степен се подели со вториот,* т. е.

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\quad B\neq 0,\ n\in N.$$

Пример: $\left(\frac{2a^2x}{3b}\right)^3=\frac{(2a^2x)^3}{(3b)^3}=\frac{8a^6x^3}{27b^3}.$

§ 35. ДВОЈНИ АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ. УПРОСТУВАЊЕ НА НЕКОИ ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Дефиниција: *Дропка, чиј броител или именител или и броителот и именителот, се алгебарски дропки, се вика двојна алгебарска дропка.* На пример:

$$\frac{\frac{2a}{a+1}}{x-5};\quad \frac{x+1}{\frac{a+1}{x-1}};\quad \frac{\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\frac{a^2-4}{x^2+x}};\quad \frac{\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}}.$$

Броителот и именителот на двојната алгебарска дропка можат да претставуваат и алгебарски збирови од дропки или кој и да било дробен рационален израз.

Секоја двојна алгебарска дропка може наједноставно идентички да се трансформира во обична алгебарска дропка, кога нејзиниот броител се подели со именителот. На пример:

а) $\frac{\frac{2a}{a+1}}{x-5}=\frac{2a}{a+1}:(x-5)=\frac{2a}{a+1}\cdot\frac{1}{x-5}=\frac{2a}{(a+1)\ (x-5)};\quad a\neq -1,\ \ y\neq 5;$

б) $\frac{\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}}{\frac{a^2-4}{x^2+x}}=\frac{a^2-4a+4}{x^2-1}:\frac{a^2-4}{x^2+x}=\frac{(a-2)^2}{(x-1)\ (x+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{(a-2)\ (a+2)}=$

$=\frac{x(a-2)}{(x-1)\ (a+2)},$ при $x\neq\pm 1;$ $a\neq\pm 2$ и $x\neq 0.$

Видовме дека збирот, разликата, производот и количникот на две алгебарски дропки е пак алгебарска дропка или цел рационален израз. Оттука следува дека секој дробен алгебарски израз може да се трансформира во алгебарска дропка или во цел рационален израз. За да се изврши таа трансформација на даден посложен дробен рационален израз, потребно е да се извршат последователно сите означени операции со попростите цели и дробни изрази, што влегуваат во него.

Пример: Да се упрости изразот: $\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x}{x^4-1}\right)\cdot\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)$.

Прво ги извршуваме операциите во заградите, а потоа добиените изрази ги множиме:

$$\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x}{x^4-1}\right)\cdot\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)=\frac{x^2+1-2x}{(x^2-1)\,(x^2+1)}\cdot\frac{(x+1)\,(x-1)+2}{x-1}=$$

$$=\frac{(x-1)^2}{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)}\cdot\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{1}{x+1}\ \text{при}\ x\neq\pm1.$$

Друг пример:

$$\frac{\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}}=\left(\frac{a^2}{b^3}+\frac{1}{a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{a}{b^2}\right)=\frac{a^3+b^3}{ab^3}:\frac{b^2-ab+a^2}{ab^2}=$$

$$=\frac{(a+b)\,(a^2-ab+b^2)}{ab^3}\cdot\frac{ab^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{a+b}{a},\quad \text{при}\quad ab\neq 0.$$

Забелешка: Ако во броителот и именителот на двојната алгебарска дропка се наоѓа само по една дропка, тогаш врз основа на тоа што е

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{C\cdot B}$$

обично се служиме со правилото:

Правило: *Двојната алгебарска дропка се претвара во обична, така што производот на надворешните членови се зема за броител, а производот на внатрешните членови за именител на обичната алгебарска дропка.*

Пример: $$\frac{\frac{x}{x^2-9}}{\frac{x^3+3x^2}{x-3}}=\frac{x(x-3)}{(x^3+3x^2)\,(x^2-9)}=\frac{x\,(x-3)}{x^2(x+3)\,(x-3)\,(x+3)}=\frac{1}{x\,(x+3)^2}.$$

ЗАДАЧИ

Помножи ги дропките:

1. а) $\frac{3xy}{4ab}\cdot\frac{10a^2y}{9x^2y}$; б) $\frac{x^5}{y^2}\cdot\frac{y}{x^3}$; в) $\frac{3}{a^2x}\cdot\frac{5}{6ax^3}$.

2. а) $\frac{a}{x+y}\cdot\frac{b}{x-y}$; б) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{2a}{a-b}$; в) $\frac{x+1}{y}\cdot\frac{4y^2}{x^2-1}$.

3. а) $\frac{x-2}{6x+2y-2z}\cdot\frac{3x+y-z}{2x-x^2}$; б) $\frac{1+4x+4x^2}{2a^2+8}\cdot\frac{4a+a^3}{4x^2-1}$.

Подели ги дропките:

4. а) $\frac{3a^2c}{xy}:\frac{4a^3c^2}{x^3y^2}$; б) $\frac{5a^3}{8b^3c}:\frac{15b^2}{4ac^2}$; в) $\frac{x-1}{2y}:\frac{(1-x)^2}{4y^2}$.

5. а) $\frac{x^3}{(a-2)^3}:\frac{x^2}{(2-a)^2}$; б) $\frac{x^2-xy}{a^2+a}:\frac{2x-2y}{3a+3}$.

6. Изврши го степенувањето на дропките:

а) $\left(\frac{x}{x-y}\right)^2$; б) $\left(\frac{3a}{2b^3c^2}\right)^3$; в) $\left[\frac{x-1}{2x(x+1)}\right]^2$.

Изврши ги означените операции и упрости ги изразите:

7. а) $\frac{2a}{2x-y}\cdot\left(\frac{x+y}{3}-\frac{y}{2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{1+x}-\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{1-x}\right):\frac{x}{x+1}$;

8. а) $\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}\right)\cdot(x^2-9)$; б) $\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right):\left(1+\frac{x+1}{x-1}\right)$;

9. а) $\frac{1+\frac{x}{1-a}}{1-\frac{x}{1+x}}$; б) $\frac{\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}}$; в) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}$;

10. а) $\left(\frac{a^2}{2x^2}-4+\frac{6x^2}{a^2}\right):\left(\frac{a}{2x}-\frac{3x}{a}\right)$; б) $\left(\frac{2b}{a-b}+\frac{a-b}{b}\right)\cdot\left(1-\frac{b-1}{a}-\frac{b}{a^2}\right)$.

Глава V

РЕАЛНИ БРОЕВИ

§ 36. ПОИМ ЗА ИРАЦИОНАЛЕН БРОЈ

1. КВАДРАТЕН КОРЕН ОД РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Од основното училиште познат ни е поимот квадратен корен од позитивен рационален број a. Тој поим го дефинираме вака:

Дефиниција 1. *Квадратен корен од позитивен рационален број a, симболички $\sqrt{a}$, е таков број x, чијшто квадрат е еднаков на бројот a,* т. е.

$$\sqrt{a}=x \overset{Df}{\Leftrightarrow} x^2=a.$$

Примери: $\sqrt{49}=7$, бидејќи $7^2=49$,

$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$, бидејќи $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$;

$\sqrt{0{,}25}=0{,}5$, бидејќи $0{,}5^2=0{,}25$.

Дефиниција 2. *Операцијата со чија помош го одредуваме квадратниот корен $(\sqrt{a})$, се вика коренување.*

Како што се гледа, операцијата коренување е обратна операција на степенувањето.

Знаеме дека: квадратот на кој да било рационален број е пак рационален број, т. е.

$$a\in Q \Rightarrow a^2\in Q.$$

Се поставува обратното прашање: дали и секој позитивен рационален број претставува квадрат на некој рационален број? Истото прашање, само во друга форма, може да се формулира и вака:

Дадена е равенката $x^2=a$, каде што a е некој позитивен рационален број, а x — променлива величина. Дали таа равенка секогаш има решенија во множеството на рационалните броеви? Ќе покажеме дека одговорот на тие прашања е негативен. Во тоа нè уверува и следнава:

Теорема 1. *Не постои рационален број чиј квадрат е еднаков на 2.*

Доказ: Ќе се послужиме со методот од спротивното. Да претпоставиме дека постои рационален број $x=\frac{p}{q}$ $(p \in Z,\ q \in N)$, така што $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$. При тоа секогаш можеме да сметаме дека p и q се заемно прости броеви, односно дека дропката $\frac{p}{q}$ не се скратува. Во спротивен случај, дропката $\frac{p}{q}$ секогаш може претходно да се скрати и да се добие пак нескратлива дропка.

Од условот $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ следува дека

$$p^2=2q^2 \tag{1}$$

Оттука гледаме дека p^2 е парен број. Бидејќи квадратот на непарен број $2n+1$ е пак непарен број: $(2n+1)^2=2(2n^2+2n)+1$, тоа од заклучокот дека p^2 е парен број, следува дека и p е парен број. Тоа ни дава за право во равенството (1) наместо p да ставиме $p=2k$, каде што $k \in Z$. Тогаш ќе добиеме:

$$(2k)^2=2q^2 \quad \text{или} \quad 2k^2=q^2$$

Значи, q^2 е парен број. следствено и q е парен број.

Така доаѓаме до заклучок: дека броевите p и q се парни броеви, што противречи на претпоставката дека p и q се заемно прости броеви (односно дека дропката $\frac{p}{q}$ е нескратлива). Тоа покажува оти претпоставката дека постои рационален број $\frac{p}{q}$, таков што $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$, води до контрадикција. Таа контрадикција покажува дека не е точна претпоставката, а е точно тврдењето во теоремата.

Значи, равенката $x^2=2$ во множеството на рационалните броеви нема решение. Аналогно може да се заклучи и за многу други равенки од видот $x^2=a$.

Со горната теорема докажавме дека: Квадратот на ниеден рационален број не е еднаков на 2. Меѓутоа, ова не значи дека не постои токму никаков број, кој не мора да е рационален, но чиј квадрат е еднаков на 2. Таков број постои, со него во основното училиште вршевме пресметувања, му дадовме специјално име „квадратен корен од бројот 2", а симболички го означуваме $\sqrt{2}$.

Горната теорема, со други зборови кажано, тврди само дека $\sqrt{2}$ не е рационален број, т. е. дека тој не може да се изрази како количник $\frac{p}{q}$ на два цели броја p и q.

Познато е и како се одредува приближната вредност на $\sqrt{2}$ со помош на правилото за пресметување (извлекување) на квадратен корен од рационални броеви:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{2}=1{,}41421\ldots \\
\underline{1} \\
\ \ 100:24\cdot 4 \\
\ \ \ \underline{96} \\
\ \ \ \ \ 400:281\cdot 1 \\
\ \ \ \ \ \underline{281} \\
\ \ \ \ \ 11900:2824\cdot 4 \\
\ \ \ \ \ \underline{11296} \\
\ \ \ \ \ \ \ 60400:28282\cdot 2 \\
\ \ \ \ \ \ \ \underline{56564} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 383600:282841\cdot 1 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{282841} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 100759
\end{array}$$

Тој процес на добивање на сè нови остатоци, а со тоа и сè нови и нови децимали, нема да прекине, бидејќи доколку би прекинал, ќе се добие дека $\sqrt{2}$ е еднаков на некој децимален број со конечен број децимали, т. е. дека е еднаков на некој рационален број, бидејќи секој децимален број со конечен број децимали може да се изрази и како количник на два цели броја. Тоа не е можно бидејќи противречи на докажаната теорема 1.

Тоа покажува дека за $\sqrt{2}$ ќе добиеме некој децимален број со бесконечен број децимали или, пократко, бесконечен децимален број. Тој бесконечен децимален број не може да биде периодичен, бидејќи секој бесконечен периодичен децимален број, исто така, може да се изрази и како количник на два цели броја, т. е. тој е рационален број.

Останува уште само можноста дека $\sqrt{2}$ е бесконечен непериодичен децимален број. Значи, операцијата коренување често доведува до бесконечни непериодични децимални броеви, кои не се рационални.

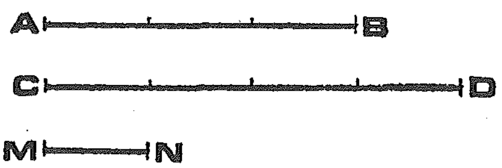
2. СОМЕРЛИВИ И НЕСОМЕРЛИВИ ОТСЕЧКИ

Друг важен проблем кој доведува до појавата на бесконечни непериодични децимални броеви е мерењето на отсечки. Во врска со тоа ги воведуваме следниве дефиниции:

Дефиниција 3. *Да се измери една отсечка со друга (единична) отсечка, значи да се одреди број кој покажува колку пати втората отсечка, или некој одреден дел од неа, се содржи во првата (мерена) отсечка.*

Така добиениот број се вика *мерен број* на мерената отсечка во однос на втората отсечка.

Дефиниција 4. *Отсечката s се вика заедничка мерка на отсечките a и b, ако таа се содржи цел број пати во секоја од нив.*



Сл. 21

Пример: Отсечката MN (сл. 21) е заедничка мерка за отсечките AB и CD, бидејќи MN во AB се содржи 3 пати, а во CD се содржи 4 пати. Заедничка мерка за отсечките AB и MN (сл. 21) е отсечката MN (Зошто?)

Дефиниција 5. *Две отсечки велиме да се сомерливи, ако тие имаат заедничка мерка; а ако немаат заедничка мерка, тогаш велиме да се несомерливи.*

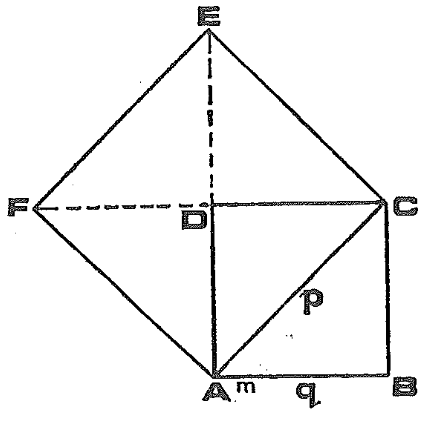
Голема е заслугата на старите Грци што први имаат утврдено дека постојат и несомерливи отсечки. Тоа го имаат утврдено со докажувањето на следнава теорема:

Теорема 2. *Дијагоналата на кој и да било квадрат е несомерлива со неговата страна.*

Доказ: Нека е даден квадратот $ABCD$ (сл. 22). Над дијагоналата AC да конструираме друг квадрат $ACEF$. Неговата плоштина е 2 пати поголема од плоштината на дадениот квадрат, т. е.

$$P_{ACEF} = 2P_{ABCD} \qquad (1)$$

Тоа е затоа бидејќи квадратот $ABCD$ е составен од два, а квадратот $ACEF$ од четири складни рамнокраки правоаголни триаголници. Теоремата ќе ја докажеме по методот од спротивното, имено ќе претпоставиме дека дијагоналата AC и страната AB на квадратот $ABCD$ се сомерливи. Тоа значи дека постои некоја отсечка m која во дијагоналата AC се содржи p пати, а во страната AB се содржи q пати. Ако отсечката m ја земеме за единица мерка, тогаш должината на дијагоналата AC ќе се изрази со бројот p, а должината на страната AB ќе се изрази со бројот q. Според тоа плоштините на квадратите $ACEF$ и $ABCD$ ќе бидат изразени со броевите:



Сл. 22

$$P_{ACEF}=p^2; \; P_{ABCD}=q^2.$$

а кои заменети во равенството (1), ќе добиеме:

$$p^2=2q^2, \text{ односно } \left(\frac{p}{q}\right)^2=2$$

Но тоа не е можно, бидејќи противречи на претходно докажаната теорема. Како што гледаме, претпоставката дека дијагоналата и страната на ист квадрат се сомерливи доведува до контрадикција. А тоа значи дека нашата претпоставка не е точна, а е точно тврдењето во теоремата.

Нека се дадени две произволни отсечки AB и CD. Ќе докажеме дека важат следниве теореми:

Теорема 3. *Отсечките AB и CD се сомерливи тогаш и само тогаш, ако мерниот број на отсечката AB во однос на отсечката CD е рационален број.*

Доказ: Нека мерниот број на отсечката AB во однос на отсечката CD е некој рационален број $\frac{p}{q}$, т. е. нека $AB=\frac{p}{q}\cdot CD$. Тогаш q-тиот дел од отсечката $CD\left(\frac{CD}{q}\right)$ ќе претставува заедничка мерка за AB и CD, бидејќи во CD ќе се содржи q пати, а во AB — p пати. Значи, отсечките AB и CD се сомерливи. Обратно: ако отсечките AB и CD се сомерливи, тогаш согласно дефиницијата 5, постои некоја трета отсечка MN — нивна заедничка мерка, која во AB ќе се содржи, на пример, p пати а во отсечката CD — q пати, па ќе имаме: $AB=p\cdot MN$ и $CD=q\cdot MN$. Во тој случај следува дека $\frac{AB}{CD}=\frac{p}{q}$, односно $AB=\frac{p}{q}\cdot CD$.

Значи, мерниот број на отсечката AB во однос на CD ќе биде рационалниот број $\frac{p}{q}$, што требаше да се докаже.

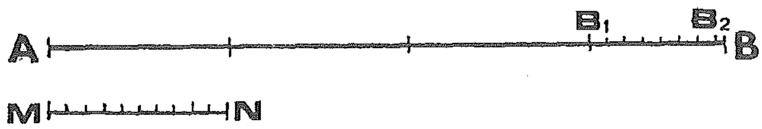
Теорема 4. *Ако отсечките AB и CD се несомерливи, тогаш мерниот број на отсечката AB во однос на отсечката CD не може да се изрази со никој рационален број.*

Доказ: Нека отсечките AB и CD се несомерливи. Да претпоставиме дека мерниот број на AB во однос на CD е некој рационален број $\frac{p}{q}$. Тогаш q-тиот дел од CD ќе се содржи во CD q пати, а во AB — p пати. Но во тој случај q-тиот дел од CD ќе претставува заедничка мерка на отсечките AB и CD, а тоа е во контрадикција со условот AB и CD да се несомерливи отсечки.

Погоре разгледаните теореми недвосмислено не упатуваат на следниов заклучок: за мерењето на отсечките (а сличен е проблемот и за мерењето на плоштините, волуменот и др.) рационалните броеви не се доволни. Затоа, ако сакаме должината на секоја отсечка да може секогаш да се изрази со некој број, потребно е множеството на рационалните броеви да го прошириме со нови броеви.

Да видиме како можеме да си ги претставиме тие нови броеви.

Пример: Нека се дадени две несомерливи отсечки AB и MN, од кои отсечката MN да ја земеме за единица мерка (сл. 23).



Сл. 23

Со пренесување на единицата мерка MN врз мерената отсечка AB нека најдеме да е $AB=3MN+B_1B$, при што добиваме некој остаток B_1B кој е помал од отсечката MN. Тогаш можеме да кажеме дека должината на отсечката AB може приближно да се изрази со бројот 3, т. е. $AB \approx 3\ MN$. Но приближната вредност на должината на отсечката AB може да се изрази и со поголема точност. Ако единицата мерка MN ја разделиме на 10 еднакви делови и еден таков дел го пренесуваме врз остатокот B_1B, нека најдеме да е $B_1B=7\cdot\frac{MN}{10}+B_2B$, при што пак добиваме некој нов остаток B_2B, кој е помал од 10-тиот дел на MN. Тогаш ќе биде:

$$B_1B = \frac{7}{10}MN+B_2B, \text{ односно } AB=3MN+\frac{7}{10}MN+B_2B=3{,}7\,MN+B_2B.$$

Притоа велиме дека должината на отсечката AB приближно ја изразуваме со бројот 3,7, т. е. $AB\approx 3{,}7\ MN$.

Ако потоа 10-тиот дел од MN го разделиме уште не 10 еднакви делови, тогаш секој така добиен нов дел ќе претставува всушност 100-ти дел од MN. Со пренесување на тој нов дел врз остатокот B_2B нека најдеме да е $B_2B=5\cdot\frac{MN}{100}+B_3B$, односно

$$AB=3{,}75\ MN+B_3B.$$

Притоа ќе добиеме пак некој нов остаток B_3B што е помал од 100-тиот дел од MN, па велиме дека должината на AB приближно ја изразуваме со бројот 3,75. Потоа 100-тиот дел од MN можеме да го разделиме на нови 10 еднакви делови, од кои секој, всушност, ќе претставува 1000-ти дел од MN и тој дел да го пренесуваме врз остатокот B_3B итн. При неограничено продолжување на тој процес ќе добиваме сè поточни и поточни приближни вредности за должината на отсечката AB, на пример:

3; 3,7; 3,75; 3,752; 3,7525; 3,75254; итн.

Тој процес ќе продолжи бесконечно, бидејќи ако би завршил, тогаш должината на отсечката AB ќе биде изразена со точен конечен децимален број, односно со рационален број; а тоа е неможно затоа што отсечката AB и CD се несомерливи.

Според тоа, должината на отсечката AB ќе биде изразена со бесконечна децимална дропка 3,75254 . . . . . , која не е периодична, бидејќи и тогаш би претставувала рационален број; а тоа противречи на теоремата 4.

Од разгледаниот пример заклучуваме дека тие нови нерационални броеви, со кои би се изразувале должините на отсечките што се несомерливи со единицата мерка, ќе имаат форма на бесконечни непериодични децимални дропки.

3. ИРАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Во претходните две точки ја согледавме потребата од проширување на множеството на рационалните броеви со нови броеви. При тоа истакнавме само два едноставни проблема (а постојат и други) за чие разгледување и решавање рационалните броеви се покажаа недоволни.

Кога рационалните броеви децимално ги развиваме, т. е. кога ги претставуваме во вид на децимални броеви (уште еднаш да подвлечеме) — секогаш се добиваат или конечни децимални броеви или бесконечни периодични децимални броеви. Но ако земеме предвид дека и секоја конечна децимална дропка може да биде претставена во вид на бесконечна периодична децимална дропка на два различни начини: со период 0 или со период 9, на пример:

$$0{,}527 = 0{,}5270000\ldots\ldots = 0{,}5269999\ldots,$$

тогаш можеме кратко да кажеме дека рационалните броеви — тоа се броеви кои можат да се претстават во вид на бесконечни периодични дропки.

Разгледаните два проблема: пресметувањето (извлекувањето) квадратен корен од некои рационални броеви како и мерењето на должините на некои отсечки, како што видовме, доведуваат често и до броеви кои се претставуваат во вид на позитивни бесконечни непериодични децимални дропки, всушност до броеви кои не се рационални.

Заради потребите на алгебрата, односно заради воопштување и неограничено изведување на операцијата вадење, напоредно со разгледувањето на позитивните бесконечни непериодични дедимални дропки, ќе ги разгледуваме и негативните бесконечни непериодични децимални дропки. Од тие причини под називот бесконечни непериодични децимални дропки ќе ги подразбираме не само позитивните туку и негативните такви дропки.

Новите броеви од овој вид ги викаме *ирационални броеви* (т. е. нерационални броеви) и ги дефинираме вака:

Дефиниција 6. *Ирационален број се вика секој број кој може да се претстави во вид на бесконечна непериодична децимална дропка.*

Ирационални броеви се, на пример, броевите $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ итн. За бројот $\sqrt{2}$ докажавме дека е ирационален. Слично се докажува дека и броевите $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ се ирационални.

Горните ирационални броеви се добиваат како резултат на коренувањето на некои рационални броеви. Погрешно би било ако се свати дека ирационалните броеви се добиваат само при коренувањето. Источници на ирационални броеви можат да бидат и многу други проблеми. На пример, мерењето на непрекинатите величини (отсечките, плоштините, волуменот, температурата) и др.

Еден од најчесто применуваните ирационални броеви, кој не е настанат преку коренување, е и бројот $\pi = 3{,}14159\ldots$ (однос од должината на кружната линија и нејзиниот дијаметар).

Ирационалните броеви ги делиме на *алгебарски* и *трансцедентни.* Секој ирационален број, кој може да биде решение (корен) на некоја алгебарска равенка, се вика *алгебарски ирационален број.* Таков е, на пример, ирационалниот број $\sqrt{2}$, бидејќи тој е корен на равенката $x^2 = 2$. Секој ирационален број, кој не е алгебарски, се вика *трансцедентен ирационален број.* Таков е, на пример, бројот π, кој не е корен ни на една алгебарска равенка.

Сите ирационални броеви го образуваат *множеството на ирационалните броеви,* кое го означуваме со J.

Сите рационални и ирационални броеви заедно се викаат *реални броеви,* а нивното множество — *множество на реални броеви,* кое го означуваме со R. Според тоа ќе важи дефиницијата:

Дефиниција 7. *Множеството на реалните броеви претставува унија од множеството на рационалните броеви и множеството на ирационалните броеви,* т. е.

$$R = Q \cup J, \text{ а при што } Q \cap J = \varnothing.$$

Тоа значи: секој рационален број е и реален, а исто и секој ирационален број е и реален; но обратното не е: секој реален број не е и рационален.

За својствата на множеството на реалните броеви и операции со реални броеви ќе говориме подоцна.

ЗАДАЧИ

1. Докажи дека: а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$ не е рационален број!

2. Точно ли е тврдењето: квадратниот корен од кој да било природен број не е рационален број.

3. Зошто бесконечната периодична децимална дропка е рационален број?

4. Докажи дека кубот ни на еден рационален број не е еднаков на 5,

5. Што е тоа заедничка мерка на две дадени отсечки и дали таа секогаш постои?

6. Можат ли две дадени отсечки да имаат единствена заедничка мерка?

7. Сомерливи ли се две отсечки, ако при мерењето на едната со помош на другата се добива: а) природен број, б) конечна децимална дропка, в) бесконечна периодична децимална дропка, г) бесконечна непериодична децимална дропка.

8. Дадени се отсечките a и c. Познато е дека четвртинката од отсечката a се содржи точно 7 пати во отсечката c.

а) Сомерливи или несомерливи се отсечките a и c во однос една на друга?
б) Определи го мерниот број на отсечката c, ако за единица мерка е земена отсечката a?

9. Може ли дадена отсечка со една единица должина да е сомерлива, а со друга единица должина да е несомерлива?

10. Нека отсечките AB и CD се сомерливи, при што $AB > CD$. Докажи дека и отсечките $AB+CD$ и $AB-CD$ се исто сомерливи!

11. Какви се отсечките AB и CD, ако $\frac{AB}{CD}=\alpha$ каде што:

а) α е рационален број; б) α е ирационален број?

12. Може ли должината на секоја отсечка при една иста единица должина да се изрази со: а) рационален број, б) ирационален број, в) реален број?

13. Кои од броевите: а) $\sqrt{4}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{12}$; $\sqrt{2{,}25}$; $\sqrt{0{,}9}$: б) 2,5434343...; 5,2222...; 5,2121121112111112..... се рационални, а кои ирационални.

14. Нека $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. За кои вредности на $c \in M$ изразот $\sqrt{c}-1$ претставува: а) рационален број, б) ирационален број?

15. Одреди кој од следниве искази е вистинит, а кој невистинит:

а) Секој природен број е рационален, б) Секој рационален број е и природен, в) Нулата е природен број, г) Нулата е рационален број, д) Секој рационален број е и реален, ѓ) Секој реален број е и ирационален, е) Нулата е реален број.

§ 37. БРОЈНА ОСКА. ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ НА БРОЈНА ОСКА

Од геометријата познато ни е дека правата, како и секоја геометриска фигура, претставува множество точки.

Нека е дадена произволна права p и на неа да означиме една која да било точка со M (сл. 24). Точката M може да се движи по правата p во две насоки, како што е покажано на сл. 24. Една од тие две насоки, на пример одлево надесно, ја избираме за *позитивна*, а другата за *негативна насока* на правата p.

Сл. 24

Дефиниција 1. *Правата p, на којашто една од двете насоки е избрана за позитивна, се вика насочена (ориентирана) права или оска.*

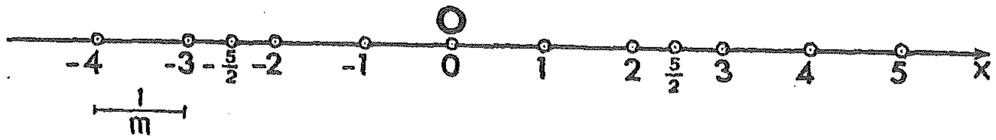
Позитивната насока на оската ја означуваме со стрелка.

Ако на оската избереме една произволна фиксна точка O за *почеток* и една произволна отсечка m за *единица должина* (сл. 25), тогаш таа станува *бројна оска.*

Дефиниција 2. *Бројна оска е ориентирана права на која е утврдена една постојана точка (почеток) и избрана една отсечка за единица должина.*

Бројната оска ја означуваме со x и ја викаме x-оска или Ox оска.

Пренесувајќи ја едно по друго единицата должина (отсечката m) по x-оската, почнувајќи од точката O налево и надесно еден, два, три, ... n пати, на неа ќе добиеме низа од точки, за кои велиме дека им соодветствуваат на целите броеви ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ... $\pm n$, ... (сл. 25). А на почетокот O нека му соодветствува бројот нула.



Сл. 25

На таков начин: На секој цел број може да се придружи по една точно определена точка од бројната оска, за која пак велиме дека му соодветствува на тој број.

Ако потоа избраната отсечка m за единица должина ја поделиме на q еднакви делови (q— некој природен број поголем од 1) и еден таков $\left(\frac{1}{q}\right)$ дел го нанесеме p пати ($p \in N$) од двете страни на почетокот O, ќе добиеме точки кои соодветствуваат на рационалните броеви $\pm \frac{p}{q}$.

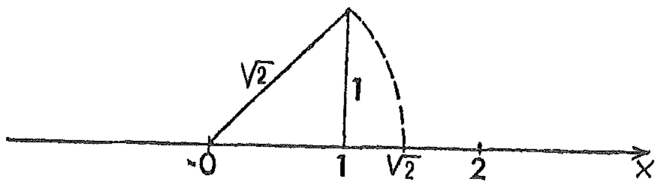
Значи, на секој позитивен рационален број $\frac{p}{q}$ му придружуваме точка од бројната оска, што лежи на десно од почетокот O на растојание $\frac{p}{q}$ единици должини, а на секој негативен рационален број $-\frac{p}{q}$ ($p \in N$ и $q \in N$) му придружуваме исто по една точка од бројната оска, но што лежи налево од почетокот O на растојание $\left|-\frac{p}{q}\right|$ единици должини. На сл. 25 означени се само две така добиени точки што соодветствуваат на рационалните броеви $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$.

Очигледно е дека според погоре утврдениот начин на придружување секогаш на два еднакви рационални броја $\left(\text{на пример } \frac{5}{2} \text{ и } \frac{10}{4}\right)$ ќе им соодветствува една иста точка; а на два различни рационални броја ќе им соодветствуваат две различни точки од бројната оска.

Нека, на пример, на бројот $\frac{p}{q}$ му соодветствува точка M, а на рационалниот број $\frac{k}{l}$ —точка N. Притоа ако $\frac{p}{q} < \frac{k}{l}$, тогаш точката M ќе лежи налево од точката N; а ако $\frac{p}{q} > \frac{k}{l}$, тогаш точката M ќе лежи надесно од точката N.

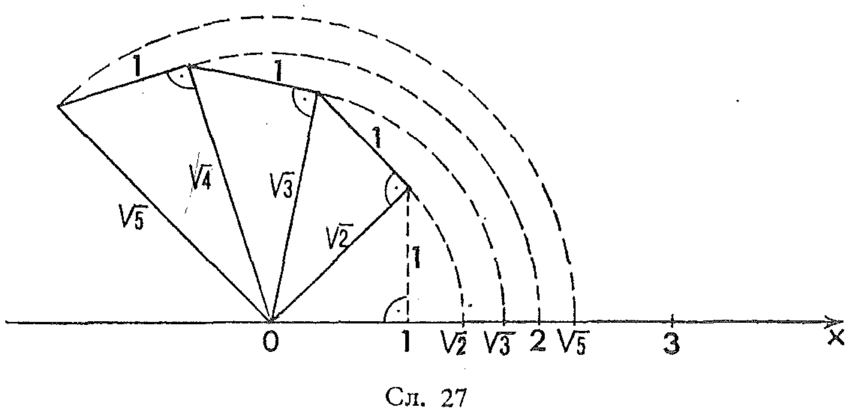
На таков начин: на секој рационален број му соодветствува една и само една точка од бројната оска. Сите тие точки се викаат *рационални точки*. Бидејќи множеството рационални броеви е насекаде густо, тоа и множеството рационални точки на бројната оска е насекаде густо, т. е. меѓу кои да било две рационални точки на бројната оска постојат безконечно многу рационални точки.

Но, покрај тоа погрешно би било да се мисли дека сите точки на бројната оска се и рационални, односно дека на секоја точка соодветствува некој рационален број. Лесно може да се покаже дека множеството рационални точки не ја исполнува целата бројна оска. А тоа значи дека постојат и нерационални точки, на кои не можат да се придружуваат рационални броеви, туку само ирационални броеви. На пример, на ирационалниот број $\sqrt{2}$ му соодветствува точката S (сл. 26). Оваа точка не е рационална, бидејќи $\sqrt{2}$ не е рационален број. Таа точка, како и сите точки од бројната оска кои не се рационални се викаат *ирационални точки*.



Сл. 26

Некои ирационални точки (но не секоја) можат и конструктивно да се одредат на бројната оска. На сл. 27 покажано е како конструктивно се определуваат точките, што одговараат на ирационалните броеви $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, итн.



Сл. 27

Меѓутоа, докажано е дека некои ирационални точки (на пример точката што соодветствува на бројот $\pi = 3{,}14\ldots$) не можат конструктивно да се определат. Но и покрај тоа, тие точки постојат на бројната оска. Како постапуваме во тој случај?

Знаеме дека бројот $\pi = 3,14159\ldots$ претставува бесконечен непериодичен децимален број. За него важат неравенствата:

$$3 < \pi < 4$$
$$3,1 < \pi < 3,2$$
$$3,14 < \pi < 3,15$$
$$3,141 < \pi < 3,142 \quad \text{итн.}$$

Јасно е дека точката M, што соодветствува на бројот π, на бројната оска ќе лежи надесно од точките што одговараат на рационалните броеви 3; 3,1; 3,14; 3,141, ... ; а налево од точките што одговараат на рационалните броеви 4; 3,2; 3,15; 3,142 . . .

Може да се покаже дека на тој начин, со неограничено приближување преку горните низи, од рационални точки се доаѓа до единствената точка што соодветствува на бројот $\pi = 3,14159\ldots$.

Слично и на секој негативен ирационален број β му придружуваме по една точка N, но што лежи налево од почетокот O а на растојание еднакво на $|\beta|$ единици должини.

Множеството ирационални точки, како и множеството рационални точки, е насекаде густо, т. е. меѓу кои да било две ирационални точки лежат бесконечно многу други ирационални точки.

Може да се докаже дека: унијата од множеството на сите рационални точки и множеството на сите ирационални точки ги исцрпува сите точки од бројната оска, т. е. не постои точка на бројната оска на која да не соодветствува некој реален (рационален или ирационален) број. Така доаѓаме до следниов важен заклучок:

Множеството на сите реални броеви и множеството на сите точки од бројната оска се наоѓаат во обратно еднозначно соодветство, т. е. на секој реален број му соодветствува една и само една точка од бројната оска, и обратно: на секоја точка од бројната оска ѝ соодветствува еден и само еден реален број. Притоа, ако x и y, се два различни реални броеви такви што $x < y$, тогаш точката што соодветствува на бројот x лежи налево од точката што соодветствува на бројот y,

Тоа нешто ни дава за право, при разгледувањето на разни прашања сврзани со множеството на реалните броеви, зборот „реален број" да го заменуваме со зборот „точка".

§ 38. ИНТЕРВАЛ. ОКОЛИНА НА ТОЧКА

При разгледувањето на разни прашања сврзани со реалните броеви, често ќе ги користиме поимите *интервал* и *околина на точка*. Нив ги дефинираме: нека a и b се два реални броја, при што $a < b$.

Дефиниција 1. *Интервал е множество на сите реални броеви x, кои задоволуваат едно од следниве двојни неравенства:*

$$a \leqslant x \leqslant b; \quad a < x < b; \quad a \leqslant x < b; \quad a < x \leqslant b.$$

Реалните броеви a и b се викаат *краеви* на интервалот.

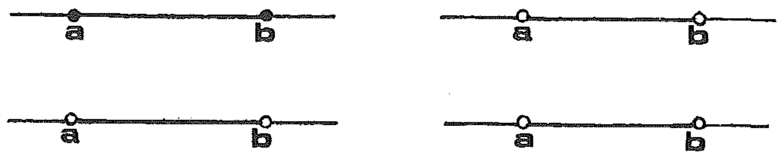
Интервалот определен со неравенството $a \leqslant x \leqslant b$ ги содржи и краевите a и b. Тој се вика *затворен интервал* или *сегмент* и се означува симболички со $[a, b]$.

Интервалот определен со неравенството $a < x < b$ не ги содржи краевите a и b. Тој се вика *отворен интервал* и се означува со (a, b).

Ако интервалот содржи само еден од краевите, тој се вика *полуотворен интервал* и се означува со $[a, b)$, односно со $(a, b]$, а е определен со неравенството $a \leqslant x < b$, односно $a < x \leqslant b$.

Разликата $b-a$ се вика *должина* на интервалот.

Геометриски, интервалот претставува множество точки на дел од бројната оска, кои лежат помеѓу точките a и b. На сл. 28 полните (односно празните) точки покажуваат дека краевите a и b припаѓаат (односно не припаѓаат) на интервалот (a, b).



Сл. 28

Покрај горните интервали, разликуваме уште и „*бесконечни*" интервали. Нив ги дефинираме вака:

Дефиниција 2. *Множеството на сите реални броеви велиме образува интервал од* $-\infty$ (*минус бесконечност*) *до* $+\infty$ (*плус бесконечност*) *и се означува со симболот* $(-\infty, +\infty)$.

Дефиниција 3. *Множеството на сите реални броеви* x, *кои се поголеми (односно помали) од некој број* a, *се вика интервал од* a *до* $+\infty$ (*односно од* $-\infty$ *до* a) *и се означува со* $(a, +\infty)$, односно со $(-\infty, a)$.

Тие се карактеризираат со неравенствата: $x > a$, односно $x < a$.

Забелешка: Знаците $-\infty$, $+\infty$ не ги сметаме за броеви. Со нив не е дефинирана ни една од операциите. Усвоено е само меѓу нив и реалните броеви да се воведуваат релациите на нееднаквост, а имено, за секој реален број a се смета да е помал од $+\infty$, а поголем од $-\infty$. Според тоа, интервалите $(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$ и $(-\infty, a)$ можат да се изразат со неравенствата:

$$-\infty < x < +\infty; \quad a < x < +\infty; \quad -\infty < x < a.$$

Дефиниција 4. *Околина на реалниот број* a (*точката* a) *се вика секој интервал* $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ *каде што* ε *е кој да било мал позитивен број.*

Според тоа, околина (или ε—околина) на бројот (точката) a се вика множеството на сите реални броеви x кои го задоволуваат неравенството

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

Сл. 29

Точката a се вика *центар* на околината, а бројот ε—нејзин радиус. Како што гледаме точката a се наоѓа во средината на интервалот $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ (сл. 29).

Понекогаш под околина на точката a го подразбираме секој интервал (a_1, a_2) кој ја содржи точката a, но не задолжително да е во средината.

§ 39. ПРИБЛИЖУВАЊЕ КОН РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ СО СТЕГАЊЕ НА ИНТЕРВАЛИ*

Видовме дека секој реален број (рационален или ирационален) може да биде зададен во вид на бесконечна децимална дропка. Кај рационалните броеви, кога се зададени во вид на бесконечна периодична децимална дропка, згодно е тоа што тие секогаш можат да се изразат и запишат и како однос на два цели броја, додека кај ирационалните броеви тоа не е можно.

Во практиката реалните броеви многу често ги заменуваме со рационални броеви (конечни децимални дропки), кои од нив се или помали или поголеми. За тие рационални броеви велиме да се *приближни рационални вредности* на реалните броеви.

Да го земеме, на пример, ирационалниот број $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$

Рационалните броеви: 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142, итн. велиме да се приближни вредности *со недостиг*, а рационалните броеви: 2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; итн. — приближни вредности со *вишок* на бројот $\sqrt{2}$. Притоа важат неравенствата:

$$
\begin{array}{rcl}
1 < \sqrt{2} < 2 & & 1^2 < 2 < 2^2 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 & & 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 & \text{бидејќи} & 1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 & & 1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2 \\
1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 & & 1{,}4142^2 < 2 < 1{,}4143^2.
\end{array}
$$

Неравенството $1 < \sqrt{2} < 2$ покажува дека бројот $\sqrt{2}$ се наоѓа меѓу рационалните броеви 1 и 2, или дека $\sqrt{2} \in (1, 2)$, т.е бројот $\sqrt{2}$ е еден од бесконечно многуте броеви што лежат во интервалот (1; 2) но не е ниту 1 ниту 2.

Со наредното неравенство $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ се одредува нов „потесен интервал", (1,4; 1,5), таков што $\sqrt{2} \in (1{,}4;\ 1{,}5)$, но којшто е вклучен во интервалот (1; 2), т.е. $(1{,}4;\ 1{,}5) \subset (1;\ 2)$.

Со наредните неравенства можат да се образуваат се „потесни и потесни интервали", од кои секој нареден интервал е вклучен во претходниот. На пример, интервалот (1,414; 1,415) е вклучен во интервалот (1,41; 1,42) а тој пак е вклучен во интервалот (1,4; 1, 5) итн.

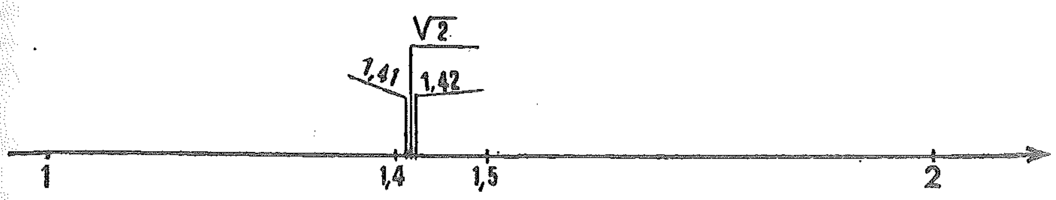
Бројот $\sqrt{2}$ се содржи во секој од тие интервали (сл. 30), но не е еднаков на ниту еден од рационалните броеви 1; 1,4; 1,41; 1,414,...

На таков начин со постепено стегање на интервалите: (1; 2), (1,4; 1,5), (1,41; 1,42), (1,414; 1,415) итн. секогаш сме во можност ирационалниот број $\sqrt{2}$ да го одредиме со каква што сакаме точност, односно истиот да го замениме со која и да било негова приближна вредност со некој недостиг или вишок.

---

*) Параграфите, што се означени со ѕвездичка и тоа § 39, § 40 и § 41 не се предвидени со наставната програма. Истите се поместени во учебникот бидејќи чинат нераздвојна целина со реалните броеви, а можат да служат за работа во математичките групи на учениците.

На сличен начин, заради практични потреби (при сметањето), често и рационалните броеви ги заменуваме со нивните приближни вредности со каква што сакаме точност. На пример, рационалниот број $\frac{1}{3}$ често го заменуваме со неговите приближни вредности: 0,3; 0,33; 0,333; 0,3333 итн. со недостиг, или со 0,4; 0,34; 0,334; 0,3334 итн. со вишок.



Сл. 30

Како што гледаме оваа постапка доведува до две низи од рационални броеви: $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots\ldots x'_n, \ldots$ и $x''_1, x''_2, x''_3, \ldots x''_n, \ldots$ од кои втората низа е добиена, кога на секој број од првата низа последната цифра — децимала се зголеми за 1.

Тие две низи од рационални броеви формираат и трета низа, таканаречена *низа на стегачки интервали*, која во општ случај ја дефинираме вака:

Дефиниција 1. *Низите рационални броеви* $x'_1, x'_2, x'_3, \ldots x'_n, \ldots$ и x''_1, x''_2 $x''_3, \ldots x''_n, \ldots$ *велиме образуваат низа стегачки интервали* (x'_1, x''_1), (x'_2, x''_2), $(x'_3$ $x''_3), \ldots (x'_n, x''_n), \ldots$ *ако се исполнети следниве услови:*

1°. *Низата x'_n е растечка, а низата x''_n е намалувачка,* т. е.

$$x'_n < x'_{n+1} \quad \text{и} \quad x''_n > x''_{n+1} \quad \text{за секое} \quad n \in N.$$

2°. *Секој член на првата низа е помал од кој и да било член* на втората низа, т. е.

$$x'_n < x''_n \quad \text{за секое} \quad n \in N.$$

3°. *Разликата $x''_n - x'_n$ за доволно големо n може да стане помала од кој и да било однапред даден произволно мал позитивен број* ε.

Низата стегачки интервали симболички ја означуваме $(x'_n | x''_n)$.

Јасно е дека: секој реален број (рационален или ирационален), односно секоја точка од бројната оска (рационална или ирационална) може да се прикаже барем со една (а може и со бесконечно многу различни) низа на стегачки интервали. Интуитивно јасно е дека важи и обратното, имено:

Секоја низа на стегачки интервали $(x'_n | x''_n)$, односно секој пар низи x'_n и x''_n во множеството на рационалните броеви, кои ги исполнуваат условите 1°, 2° и 3°, дефинира еден и само еден реален број x, односно една и само една точка на бројната оска.

Ова тврдење не може да се докаже, затоа го земаме како аксиома, така наречена *Кантор-Дедекиндова аксиома.*

Ако реалниот број x е зададен со низата стегачки интервали $(x'_n | x''_n)$, тоа симболички го запишуваме: $x = (x'_n | x''_n)$. На пример:

$$\sqrt{2} = (1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414; \ldots \ |\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415; \ldots) \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{3} = (0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333; \ldots\ |\ 0{,}4;\ 0{,}34;\ 0{,}334; \ldots)$$

Според тоа, реалните броеви можеме да ги дефинираме и вака:

Дефиниција 2. *Низите на стегачки интервали во множеството на рационалните броеви се викаат реални броеви.*

Како што ќе видиме вака дефинираните реални броеви, како низи на стегачки интервали, можат да се споредуваат и со нив да се изведуваат сите операции.

§ 40. МНОЖЕСТВО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ*

Проширувајќи го множеството на рационалните броеви во множество на реални броеви природно е да се постави барањето сите својства на рационалните броеви да бидат сочувани и во множеството на реалните броеви, бидејќи сега тие се третираат и како реални броеви. Потоа се поставува и барањето да се воведат такви дефиниции за релациите и операциите во множеството на реалните броеви со кои да бидат опфатени и соодветните дефиниции што важат во множеството на рационалните броеви.

Релациите за еднаквост и нееднаквост во множеството на реалните броеви ги дефинираме вака:

Нека $x = (x'_n | x''_n)$ и $y = (y'_n | y''_n)$ се два реални броја зададени со низите стегачки интервали $(x'_n | x''_n)$ и $(y'_n | y''_n)$.

Дефиниција 1. *Реалните броеви* x *и* y *велиме да се еднакви и пишуваме* $x = y$, *тогаш и само тогаш, ако должините на интервалите* $x''_n - x'_n$ *и* $y''_n - y'_n$, *кога* n *неограничено расте се стегаат на иста точка на бројната оска.*

Јасно е дека ваквата дефиниција во целост ја опфаќа и старата дефиниција за еднаквост на два рационални броја, а исто важи и за еднаквост на два ирационални броја. Од самата дефиниција следува дека релацијата еднаквост меѓу еден рационален и еден ирационален број не може да постои, бидејќи ним им соодветствуваат секогаш различни точки на бројната оска.

Очигледно е дека релацијата на еднаквост во множеството на реалните броеви ќе ги има својствата на рефлексивност, симетричност и транзитивност, т. е.

1°. $x = x$ за секој реален број x,

2°. $x = y \Rightarrow y = x$

3°. $(x = y$ и $y = z) \Rightarrow x = z$

Дефиниција 2. *Реалниот број* $x = (x'_n \mid x''_n)$ *велиме да е помал (односно поголем) од реалниот број* $y = y'_n | y''_n)$ *и пишуваме* $x < y$ *(односно* $x > y$*), ако и само ако должината на интервалот* $x''_n - x'_n$ *кога* n *неограничено расте се стега на точка која е налево (односно надесно) од точката на стегањето на должината на интервалот* $y''_n - y'_n$ *кога* n *неограничено расте*

Лесно се уверуваме дека горната дефиниција ја опфаќа и соодветната дефиниција за релациите $<$ и $>$ во множеството на рационалните броеви.

Слично како за рационалните броеви, по аналогија ја усвојуваме и следнава:

Дефиниција 3. *Реалниот број* x *се вика позитивен, ако тој е поголем од нулата, а се вика негативен, ако тој е помал од нулата.*

Во множеството на реалните броеви ги воведуваме и поимите: *спротивни реални броеви* и *апсолутна вредност на реален број*. Нив ги дефинираме на сличен начин како и соодветните поими кај рационалните броеви:

Дефиниција 4: *За два реални броја* x *и* y *велиме да се спротивни еден на друг, ако должините на нивните интервали* $x''_n - x'_n$ *и* $y''_n - y'_n$, *кога* n *неограничено расте, се стегаат во две точки на бројната оска, што се симетрично расположени спрема почетокот* **0.**

Затоа спротивните реални броеви се викаат уште и *симетрични реални броеви*. На пример: на реалниот број x спротивен му е бројот $-x$ и обратно.

Дефиниција 5. *Апсолутна вредност (или модул) на позитивен реален број* x, *симболички* $|x|$ *и нулата се вика самиот тој број, а апсолутна вредност на негативен реален број се вика неговиот спротивен реален број*, т. е.

$$|x| \overset{Df}{=} \begin{cases} x, & \text{ако } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ако } x < 0 \end{cases}$$

Еве и неколку поважни својства на множеството на реалните броеви:

Теорема 1. *Множеството на реалните броеви е подредено множество*, т. е.

1°. *За кои и да било два реални броја x и y постои една и само една од следниве три релации*: $x = y$, или $x < y$, или $x > y$

2°. *Ако е $x < y$ и $y < z$, тогаш е $x < z$*
(односно ако е $x > y$ и $y > z$, тогаш е $x > z$).

Доказ: Нека $x = (x'_n \mid x''_n)$ и $y = (y'_n \mid y''_n)$ се два реални броја, чии должини на интервалите, кога n неограничено расте, се стегаат соодветно во точките A и B на бројната оска.

За точките A и B на бројната оска, како што знаеме постојат следниве три заемни положби, кои меѓусебно се исклучуваат:

а) Точките A и B се совпаѓаат. Тогаш според дефиниција 1 реалните броеви x и y се еднакви, т. е. $x = y$.

б) Точката A лежи налево од точката B. Тогаш согласно дефиницијата 2 имаме $x < y$.

в) Точката A лежи надесно од точката B. Тогаш согласно дефиницијата 2 имаме $x > y$.

Сл. 31

Со тоа го докажавме тврдењето 1° од теоремата 1.

Нека $x = (x'_n \mid x''_n)$, $y = (y'_n \mid y''_n)$ и $z = (z'_n \mid z''_n)$ се три реални броеви, чии должини на интервалите кога n неограничено расте се стегаат соодветно во точките A, B и C на бројната оска.

На основа дефиницијата 2 од $x < y$ и $y < z$ следува дека: точката A лежи налево од точката B, а точката B пак лежи налево од точката C. Од тука следува дека точката A мора да лежи налево и од точката C (види сл. 31). Следователно ќе биде $x < z$ штд.

Аналогно се докажува и $(x > y$ и $y > z) \Rightarrow x > z$.

Со тоа теоремата 1 е целосно докажана.

Ако за три реални броја x, y и z важат релациите $x < y$ и $y < z$, често пишуваме $x < y < z$, и велиме дека бројот y *се наоѓа помеѓу* броевите x и z.

Да забележеме дека од теорема 1 следува и следнава:

Последица: *секој позитивен реален број поголем е од кој и да било негативен реален број.*

Доказ: Нека x е позитивен, а y негативен реален број. На основа дефиниција 3 имаме да е $x > 0$ и $0 > y$, а оттука на основа теоремата 1 следува дека $x > y$ штд.

Теорема 2. *Множеството на реалните броеви е насекаде густо, т. е. меѓу кои и да било два различни реални броја x и y, секогаш постои трет реален број с кој се наоѓа меѓу нив.*

Доказот на оваа теорема сличен е на доказот на соодветната теорема во множеството на рационалните броеви.

Од теоремата 2 следува дека и меѓу x и c постои некој друг реален број, а помеѓу x и тој број постои некој трет број итн. Според тоа, меѓу кои и да било два реални броја x и y постојат (заклучени се) бесконечно многу други реални броеви.

Како што видовме порано и множеството на рационалните броеви е насекаде густо, но покрај тоа, иако малу чудно, се покажа дека во него има големи „празнини". Со воведувањето на новите ирационални броеви тие „празнини" во множеството на рационалните броеви ги пополнивме и така дојдовме до множеството на реалните броеви.

Се појавува прашањето: дали и во множеството на реалните броеви нема некои нови „празнини" за чие пополнување ќе треба да воведуваме некои нови броеви, што не се реални, т. е. не се ниту рационални ниту ирационални? Може да се докаже дека одговорот на тоа прашање е негативен, т. е. во множеството на реалните броеви нема веќе никакви „празнини". Тоа својство го викаме *непрекинатост* (*потполност* или *комплетност*) на множеството на реалните броеви.

Тоа може да се покаже преку воведувањето на низи стегачки интервали во множеството на реалните броеви, чии краеви можат да бидат произволни реални броеви. Сите такви низи на стегачки интервали, како што може да се покаже, секогаш стегаат на еден и само еден определен реален број. Според тоа ќе важи следнава:

Теорема 3. *Множеството на реалните броеви е непрекинато (потполно или комплетно), т. е. секоја низа на стегачки интервали во множеството на реалните броеви дефинира еден и само еден реален број.*

ЗАДАЧИ

1. По што се разликува бројната оска од секоја друга права?

2. Дали на секоја точка од бројната оска може да се придружи: а) цел број, б) рационален број, в) ирационален број, г) реален број?

3. Кои точки од бројната оска соодветствуваат на: а) позитивните рационални броеви, б) негативните ирационални броеви, в) негативните реални броеви.

4. Конструирајте ги на бројната оска точките: $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$, $3\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$.

5. Покажи која од точките на бројната оска, што соодветствуваат на броевите: а) $2{,}03003\ldots$ и $2{,}03004\ldots$; б) $-0{,}12021\ldots$ и $-0{,}120021\ldots$; в) 0 и $-\pi$; г) $1{,}1425\ldots$ и $-1{,}1422\ldots$ лежи налево, а која надесно!

6. Може ли интервалот да се состои само од: а) цели броеви, б) рационални броеви, в) ирационални броеви?

7. Покажи дека $(x, y) \subset [x, y]$. Одреди ја унијата, пресекот и диференцијата на тие два интервала.

8. Дадени се интервалите: $(1; 5)$ и $(3; 7)$. Одреди ги интервалите:
а) $(1; 5) \cap (3; 7)$; б) $(1; 5) \cup (3; 7)$; в) $(1; 5) \setminus (3; 7)$.

9. Изрази ги броевите $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$ преку нивните приближни вредности со недостиг и вишок, а со точност до 1; $0{,}1$; $0{,}01$.

10. Меѓу дадените броеви стави еден од знаците: $<$; $=$; $>$. а) $3{,}24518\ldots$ и $3{,}24581\ldots$; б) $\frac{5}{6}$ и $0{,}8333\ldots$; в) $-1{,}01001\ldots$ и $-0{,}101001\ldots$; г) 0 и -2; д) $-\pi$ и $-\sqrt{10}$.

§ 41. ОПЕРАЦИИ СО РЕАЛНИ БРОЕВИ*

Пред да ги дефинираме операциите со реални броеви ќе ја докажеме следнава теорема:

Теорема 1: *Ако се* $(x'_n | x''_n)$ и $(y'_n | y''_n)$ *две низи стегачки интервали, тогаш низи на стегачки интервали ќе бидат и:*

$$(x'_n + y'_n | x''_n + y''_n); \quad (x'_n - y''_n | x''_n - y'_n); \quad (x'_n y'_n | x''_n y''_n); \quad \left(\frac{x'_n}{y''_n} \middle| \frac{x''_n}{y'_n}\right).$$

Доказ: Нека се $(x'_n | x''_n)$ и $(y'_n | y''_n)$ две низи стегачки интервали, тогаш согласно дефиницијата 1 (§ 39) рационалните низи (броеви) x'_n, x''_n, y'_n, y''_n ќе ги задоволуваат следниве услови:

1°. $x'_n < x'_{n+1}$, $x''_n > x''_{n+1}$ и $y'_n < y'_{n+1}$; $y''_n > y''_{n+1}$ за секое $n \in N$

2°. $x'_n < x''_n$ и $y'_n < y''_n$ за секое $n \in N$

3°. Разликите $x''_n - x'_n$ и $y''_n - y'_n$ за доволно големо n секоја од нив може да стане помала од кој и да било даден произволно мал позитивен број ε.

Од првото и третото неравенство од 1°, а исто и од второто и четвртото неравенство од 1° со собирање на соодветните им леви и десни страни, добиваме:

$$x'_n + y'_n < x'_{n+1} + y'_{n+1} \quad \text{и} \quad x''_n + y''_n > x''_{n+1} + y''_{n+1} \tag{1}$$

Тоа значи дека низата $x'_n + y'_n$ е растечка, а низата $x''_n + y''_n$ е намалувачка.

Од неравенствата од 2° на сличен начин добиваме:

$$x'_n + y'_n < x''_n + y''_n \quad \text{за секое} \quad n \in N \tag{2}$$

Тоа значи пак дека секој член на низата $x'_n + y'_n$ е помал од кој и да било член на низата $x''_n + y''_n$

Ако ја формираме разликата $(x''_n + y''_n) - (x'_n + y'_n)$ и ја трансформираме, ќе добиеме:

$$(x''_n + y''_n) - (x'_n + y'_n) = (x''_n - x'_n) + (y''_n - y'_n)$$

Бидејќи секоја од разликите $(x''_n - x'_n)$ и $(y''_n - y'_n)$ согласно условот 3 за доволно големо n може да стане помала од кој да било произволно мал позитивен број, на пример $\frac{\varepsilon}{2}$, тоа и нивниот збир за доволно големо n може да стане помал од избраниот произволно мал позитивен број ε.

Следователно: разликата од низите $x'_n + y'_n$ и $x''_n + y''_n$, т. е.

$$(x''_n + y''_n) - (x'_n + y'_n) \tag{3}$$

за доволно големо n може да стане помала од кој да било даден произволно мал позитивен број ε,

Штом се исполнети условите (1), (2) и (3), тоа значи дека низите $x'_n + y'_n$ и $x''_n + y''_n$ образуваат и една низа на стегачки интервали $(x'_n + y'_n | x''_n + y''_n)$, која дефинира некој точно одреден реален број, што требаше да докажеме.

На сличен начин може да се докаже: ако се $(x'_n | x''_n)$ и $(y'_n | y''_n)$ две низи на стегачки интервали, тогаш и

$$(x'_n - y''_n | x''_n - y'_n); \quad (x'_n y'_n | x''_n y''_n); \quad \left(\frac{x'_n}{y''_n} \,\middle|\, \frac{x''_n}{y'_n} \right)$$

се исто низи на стегачки интервали, од кои секоја дефинира по еден и само еден реален број.

Да преминеме сега на операциите со реални броеви. За нив треба да воведеме такви дефиниции кои нема да противречат на дефинициите на соодветните операции само со рационални броеви, како и тоа со нив да бидат сочувани познатите закони на операциите.

1. СОБИРАЊЕ НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Дефиниција 1. *Збир на два реални броја* $x = (x'_n | x''_n)$ и $y = (y'_n | y''_n)$ *се вика реалниот број* $s = x + y = (x'_n + y'_n | x''_n + y''_n)$.

Пример: Нека се $\frac{1}{3} = (0;\ 0{,}3;\ 0{,}33;\ 0{,}333, \ldots \ | 1;\ 0{,}34;\ 0{,}34;\ 0{,}334)$ и $\sqrt{2} = (1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414, \ldots \ |\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415, \ldots .)$, т. е.

$$0 < \frac{1}{3} < 1 \qquad\qquad 1 < \sqrt{2} < 2$$

$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4 \qquad\qquad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34 \qquad \text{и} \qquad 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$

$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334 \qquad\qquad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$

$$0{,}3333 < \frac{1}{3} < 0{,}3334 \qquad\qquad 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143 \quad \text{итн.}$$

Согласно дефиницијата, збирот $s = \frac{1}{3} + \sqrt{2}$, ќе биде:

$$0+1<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1+2 \qquad\qquad 1<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<3$$

$$0{,}3+1{,}4<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}4+1{,}5 \qquad\qquad 1{,}7<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}9$$

$$0{,}33+1{,}41<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}34+1{,}42 \qquad \text{односно} \qquad 1{,}74<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}76$$

$$0{,}333+1{,}414<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}334+1{,}415 \qquad\qquad 1{,}747<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}749$$

$$0{,}3333+1{,}4142<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<0{,}3334+1{,}4143 \qquad\qquad 1{,}7475<\frac{1}{3}+\sqrt{2}<1{,}7477$$

Очигледно дека: $s = \frac{1}{3}+\sqrt{2} = 1{,}747\ldots.$

Збирот на два реални броја го определуваме на ист начин и во случаите кога еден или двата собироци се негативни, а во согласност со правилото за собирање на рационални броеви.

Од горната дефиниција следува дека: збирот на два реални броја x и y е таков трет еднозначно определен реален број s, кој е поголем од секој збир на соодветните приближни вредности со недостиг на тие броеви, а е помал од секој збир на соодветните приближни вредности со вишок на тие броеви.

Според тоа ќе важи теоремата:

Теорема 2. *Множеството на реалните броеви е затворено по однос на операцијата собирање*, т. е.

$$(x \in R \quad \text{и} \quad y \in R) \Rightarrow (x+y) \in R$$

Лесно може да се провери дека горната дефиниција за збир на два реални броја не противречи на порано утврдената дефиниција за збир на два рационални броја.

Теорема 3. *За операцијата собирање на реални броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон на собирањето.*

Доказ: На основа комутативниот закон на збирот на рационални броеви, и дефиницијата 1 за збир на реални броеви, имаме:

$$x + y = (x'_n \mid x''_n) + (y'_n \mid y''_n) = (x'_n + y'_n \mid x''_n + y''_n) =$$

$$= (y'_n + x'_n \mid y''_n + x''_n) = (y'_n \mid y''_n) + (x'_n \mid x''_n) = y + x, \text{ т. е.}$$

$$x + y = y + x, \text{ штд.}$$

Аналогно се докажува дека важи и асоцијативниот закон:

$$(x+y) + z = [(x'_n + y'_n) + z'_n \mid (x''_n + y''_n) + z''_n] =$$

$$= [x'_n + (y'_n + z'_n) \mid x''_n + (y''_n + z''_n)] = x + (y + z), \text{ т. е.}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z), \text{ штд.}$$

Докажете дека за собирањето на реални броеви важи и законот за монотоност, т.е.

$$x = y \Rightarrow x + c = y + c$$
$$x < y \Rightarrow x + c < y + c$$
$$x > y \Rightarrow x + c > y + c$$

2. ВАДЕЊЕ НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Дефиниција 2. *Разлика на два реални броја* $x = (x'_n \mid x''_n)$ и $y = (y'_n \mid y''_n)$ *се вика реалниот број* d *таков што* $y + d = x$, т. е.

$$x - y = d, \text{ ако е } y + d = x$$

Ќе докажеме дека важи следнава теорема:

Теорема 4. *Разликата* $x - y$ *на реалните броеви* x *и* y *секогаш постои и е еднозначно определена со низата стегачки интервали*

$$d = (x'_n - y''_n \mid x''_n - y'_n) \tag{1}$$

Доказ: Ако е $x - y = d$, тогаш треба да е $y + d = x$.

Навистина: $y + d = (y'_n \mid y''_n) + (x'_n - y''_n \mid x''_n - y'_n) = [y'_n + (x'_n - y''_n) \mid y''_n +$

$$+ (x''_n - y'_n)] = [x'_n - (y''_n - y'_n) \mid x''_n + (y''_n - y'_n)] \tag{2}$$

Бидејќи разликата $y''_n - y'_n$ за доволно големо n може да се направи толку мала, така што низата стегачки интервали (2) и $(x'_n \mid x''_n)$ всушност се стегаат на еден ист реален број x.

Според тоа ќе биде $y + d = x$, штд.

За да докажеме дека разликата d(1) е и единствена, треба да покажеме дека не постои друг реален број различен од d, кој би го задоволувал условот $y + d = x$. Да претпоставиме дека покрај бројот d постои уште еден реален број p, таков што $y + p = x$ и $p < d$. Тогаш мора да биде: $y + d = y + p$, а на основа дефиницијата за збир, ќе имаме: $y'_n + d'_n < y''_n + p''_n$, односно $d'_n - p''_n < y''_n - y'_n$.

Бидејќи е $p < d$, односно $d > p$, тоа за доволно големо n разликата $d'_n - p''_n$ може да се направи поголема од некој број K; но во тој случај, кога е $K < y''_n - y'_n$, разликата $y''_n - y'_n$ не може да се направи помала од K, што противречи на условот 3° од дефиницијата 1 (§ 39). Значи претпоставката дека разликата d не е единствена доведува до контрадикција.

Според тоа, точно е тврдењето во теоремата.

Од теоремата 4 непосредно следува и:

Теорема 5. *Множеството на реалните броеви е затворено по однос на операцијата вадење,* т. е.

$$(x \in R \text{ и } y \in R) \Rightarrow (x - y) \in R$$

Пример: Да се одреди разликата $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$. Знаеме дека:

$1 < \sqrt{2} < 2$		$0 < \frac{1}{3} < 1$
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$		$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4$
$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$	и	$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34$
$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$		$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334$
$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$		$0{,}3333 < \frac{1}{3} < 0{,}3334.$

Согласно правилото (теоремата 4), добиваме:

$$1-1<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<2-0 \qquad\qquad 0<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<2$$

$$1{,}4-0{,}4<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}5-0{,}3 \qquad\qquad 1{,}0<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}2$$

$$1{,}41-0{,}34<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}42-0{,}33 \qquad \text{или} \qquad 1{,}07<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}09$$

$$1{,}414-0{,}334<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}415-0{,}333 \qquad\qquad 1{,}080<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}082$$

$$1{,}4142-0{,}3334<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}4143-0{,}3333 \qquad\qquad 1{,}0808<\sqrt{2}-\frac{1}{3}<1{,}0810.$$

Според тоа: $\sqrt{2}-\frac{1}{3}=1{,}080\ldots$

3. МНОЖЕЊЕ НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Дефиниција 3. *Производ на два позитивни реални броја* $x=(x'_n|x''_n)$ и $y=(y'_n|y''_n)$ *се вика реалниот број*

$$p=xy=(x'_n y'_n \mid x''_n y''_n) \tag{3}$$

Согласно теорема 1 производот p на реалните броеви x и y секогаш постои и е еднозначно определен со низата стегачки интервали (3).

Пример: Да се одреди производот $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}$.

$$\text{Од}\quad 0<\frac{1}{3}<1 \qquad\qquad 1<\sqrt{2}<2$$

$$0{,}3<\frac{1}{3}<0{,}4 \qquad\qquad 1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$

$$0{,}33<\frac{1}{3}<0{,}34 \qquad \text{и} \qquad 1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$

$$0{,}333<\frac{1}{3}<0{,}334 \qquad\qquad 1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$$

$$0{,}3333<\frac{1}{3}<0{,}3334 \qquad\qquad 1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143.$$

Согласно дефиницијата 3, добиваме:

$$0\cdot 1<\frac{1}{3}\sqrt{2}<1\cdot 2 \qquad\qquad 0<\frac{1}{3}\sqrt{2}<2$$

$$0{,}3\cdot 1{,}4<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}4\cdot 1{,}5 \qquad\qquad 0{,}42<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}60$$

$$0{,}33\cdot 1{,}41<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}34\cdot 1{,}42 \qquad \text{или} \qquad 0{,}4653<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}4828$$

$$0{,}333\cdot 1{,}414<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}334\cdot 1{,}415 \qquad\qquad 0{,}470862<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}47261$$

$$0{,}3333\cdot 1{,}4142<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}3334\cdot 1{,}4143 \qquad\qquad 0{,}47135286<\frac{1}{3}\sqrt{2}<0{,}47152762.$$

Според тоа: $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = 0{,}471 \ldots .$

Од дефиницијата 3 следува дека: производот на два позитивни реални броја x и y е таков трет еднозначно определен реален број p, кој е поголем од секој производ на соодветните приближни вредности со недостиг на тие броеви, а е помал од секој производ на соодветните приближни вредности со вишок на тие броеви.

Ако x и y се произволни реални броеви различни од нула ($x \neq 0$, $y \neq 0$) тогаш ги множиме нивните апсолутни вредности, согласно дефиницијата 3, и производот го земаме со знак плус, ако двата множитела имаат исти знак; и со знак минус, ако двата множитела имаат различни знаци. На пример:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} = 0{,}471 \ldots ; \quad \frac{1}{3} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) = -\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\right) = -0{,}471 \ldots$$

Ако барем еден од множителите е еднаков на нула, тогаш и производот е нула. На пример: $x \cdot 0 = 0$; $0 \cdot x = 0$; $0 \cdot 0 = 0$.
Според тоа ќе важи теоремата:

Теорема 6. *Множеството на реални броеви е затворено по однос на операцијата множење*, т. е.

$$(x \in R \quad \text{и} \quad y \in R) \Rightarrow xy \in R$$

Теорема 7. *За операцијата множење на реални броеви важат законите на множење.*

1°. *Комутативен закон*: $xy = yx$

2°. *Асоцијативен закон*: $(xy)z = x(yz)$

3°. *Дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето*:

$$(x + y)z = xz + yz$$

4°. *Закон за монотоност*: $x = y \Rightarrow xc = yc$

$$(x < y \ \text{и} \ c > 0) \Rightarrow xc < yc$$

$$(x < y \ \text{и} \ c < 0) \Rightarrow xc > yc$$

Доказ: За илустрација ќе го докажеме само комутативнист закон. На основа дефиницијата 3 за производ на два позитивни реални броја и комутативниот закон на производот на рационални броеви, имаме:

$$xy = (x'_n y'_n \mid x''_n y''_n) = (y'_n x'_n \mid y''_n x''_n) = yx, \text{ т. е. } xy = yx.$$

Ако еден или и двата реални броја се негативни, тогаш:

$x \cdot y = -(\,|x| \cdot |y|\,) = -(\,|y| \cdot |x|) = y \cdot x$, при $x > 0$; $y < 0$ или $x < 0$; $y > 0$.

$x \cdot y = |x| \cdot |y| = |y| \cdot |x| = y \cdot x$, при $x < 0$, $y < 0$.

Ако еден од двата броја е нула, тогаш: $x \cdot 0 - 0 \cdot x = 0$.
Следователно, за произволни реални броеви ќе важи: $xy = yx$.

4. ДЕЛЕЊЕ НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Дефиниција 4. *Количник на два позитивни реални броја x и y се вика реалниот број q, таков што $y \cdot q = x$*, т. е.

$$x : y = q, \text{ ако } y \cdot q = x.$$

Теорема 8. *Количникот $x : y$ на позитивните реални броеви x и y секогаш постои и е еднозначно определен со низата стегачки интервали*:

$$q = x : y = \left(\frac{x'_n}{y''_n} \,\middle|\, \frac{x''_n}{y'_n}\right)$$

Доказ: Треба да докажеме дека е исполнет условот $y \cdot q = x$.

Навистина: $$y \cdot q = \left(y'_n \mid y''_n\right) \left(\frac{x'_n}{y''_n} \,\middle|\, \frac{x''_n}{y'_n}\right) = \left(y'_n \cdot \frac{x'_n}{y''_n} \,\middle|\, y''_n \cdot \frac{x''_n}{y'_n}\right) =$$

$$= \left(x'_n \cdot \frac{1}{\frac{y''_n}{y'_n}} \,\middle|\, x''_n \cdot \frac{y''_n}{y'_n} \right). \qquad (4)$$

Бидејќи разликата $y''_n - y'_n$ за доволно големо n може да се направи произволно мала; тоа количникот $\frac{y''_n}{y'_n}$, кога n неограничено расте, ќе се стреми кон бројот 1. Во таков случај јасно е дека низата стегачки интервали (4) и $(x'_n \mid x''_n)$, всушност, ќе се стегаат на еден исти реален број x.

Според тоа ќе имаме $y \cdot q = x$, штд.

Да претпоставиме дека покрај бројот q постои и друг реален број s таков што $y \cdot s = x$.

Во таков случај мора да важи равенството $y \cdot s = y \cdot q$, а на основа законот за монотоност на множењето следува дека $s = q$.

Тоа значи дека количникот $x : y$ на позитивните реални броеви x и y е единствен.

Пример: Да се одреди количникот $\pi : \sqrt{2}$. Знаеме дека:

$3 < \pi < 4$		$1 < \sqrt{2} < 2$
$3{,}1 < \pi < 3{,}2$		$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
$3{,}14 < \pi < 3{,}15$	и	$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
$3{,}141 < \pi < 3{,}142$		$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$
$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$		$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143.$

Согласно правилото (теорема 8), имаме:

$3 : 2 < \pi : \sqrt{2} < 4 : 1$		$1{,}5 < \pi : \sqrt{2} < 4$
$3{,}1 : 1{,}5 < \pi : \sqrt{2} < 3{,}2 : 1{,}4$		$2{,}1 < \pi : \sqrt{2} < 2{,}3$
$3{,}14 : 1{,}42 < \pi : \sqrt{2} < 3{,}15 : 1{,}41$	или	$2{,}21 < \pi : \sqrt{2} < 2{,}23$
$3{,}141 : 1{,}415 < \pi : \sqrt{2} < 3{,}142 : 1{,}414$		$2{,}220 < \pi : \sqrt{2} < 2{,}222$
$3{,}1415 : 1{,}4143 < \pi : \sqrt{2} < 3{,}1416 : 1{,}4142$		$2{,}2212 < \pi : \sqrt{2} < 2{,}2215.$

Очигледно дека: $\pi : \sqrt{2} = 2{,}221 \ldots$

Ако x и y се произволни реални броеви различни од нула ($x \neq 0$, $y \neq 0$), тогаш за да го одредиме нивниот количник q, треба да ги поделиме нивните апсолутни вредности и количникот да го земеме со знак плус, ако x и y имаат еднакви знаци; и со знак минус ако тие имаат различни знаци. На пример:

$$(-\pi) : (-\sqrt{2}) = \pi : \sqrt{2} = 2{,}221 \ldots\ ; \quad \pi : (-\sqrt{2}) = -(\pi : \sqrt{2}) = -2{,}221 \ldots$$

Ако деленикот е еднаков на нула, а делителот различен од нула, тогаш количникот е еднаков на нула, т. е. $0 : y = 0$, при $y \neq 0$.

Ако пак делителот е нула, тогаш количникот е неопределен. Велиме делењето со нула во математиката е недефинирано.

Од теорема 8 и изложеното дотука следува:

Теорема 9. *Множеството на реалните броеви е затворено во однос на операцијата делење (со исклучок на делење со нула),* т. е.

$$(x \in R,\ y \in R \quad \text{и} \quad y \neq 0) \Rightarrow \frac{x}{y} \in R$$

ЗАДАЧИ

1. Определи го збирот на реалните броеви со точност од 0,001:

$$3+\sqrt{2};\quad \frac{2}{3}+\sqrt{3};\quad \sqrt{2}+\sqrt{3};\quad \pi+\sqrt{5};$$

2. Определи ја разликата на реалните броеви со точност до 0,001:

$$\sqrt{5}-1;\quad \sqrt{5}-\sqrt{2};\quad 3-\sqrt{3};\quad \sqrt{2}-\sqrt{7};\quad \pi-\sqrt{5};$$

3. Определи го производот со точност до 0,001:

$$2\sqrt{3};\quad \frac{1}{3}\cdot\sqrt{5};\quad 5\sqrt{2};\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{7};\quad \frac{3}{7}\cdot\pi;$$

4. Пресметај ја должината на дијагоналата на квадрат со страна:

а) $a = 3$ см, б) $\sqrt{5}$ см;

5. Покажи дека важат равенствата:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6};\quad 2\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8};\quad \sqrt{15}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5};$$

6. Пресметај го количникот на реалните броеви со точност 0,01:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}};\quad \frac{1}{\sqrt{2}};\quad \frac{3}{\sqrt{3}};\quad \frac{1}{\sqrt{5}};$$

7. Покажи дека важат равенствата:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2};\quad \frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5};\quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2};\quad \frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

8. Покажи дека изразот е рационален број:

а) $\sqrt{90+\sqrt{90+\sqrt{90+\sqrt{90+\sqrt{100}}}}}$;

б) $\sqrt{20+\sqrt{18+\sqrt{40+\sqrt{80+\sqrt{1}}}}}$;

9. Дадени се броевите: $\frac{5}{6}=0{,}8333\ldots$; $\pi=3{,}14159\ldots$ и $e=2{,}71828\ldots$. Определи ги со точност 0,001 следниве броеви:

$$\pi+e;\quad \frac{5}{6}\pi;\quad \pi+\frac{5}{6}e;\quad e\pi;\quad \frac{\pi}{e};$$

10. Секогаш ли: а) збирот, б) разликата, в) производот, г) количникот на два ирационални броја е пак ирационален број? Одговорот објасни го со примери!

11. Секогаш ли: збирот, разликата, производот, количникот на еден рационален и еден ирационален број е ирационален број? Одговорот објасни го со примери!

12. Докажи дека за секој реален број x, различен од нула, постои единствен реален број $\frac{1}{x}$ кој се вика реципрочна вредност на бројот x.

13. Докажи дека за секој реален број x, различен од нула важат равенствата:

$$\frac{x}{x} = 1; \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

14. Покажи дека за секој реален број x, важат равенствата:

$$x + 0 = x; \quad x + (-x) = 0; \quad x \cdot 1 = x.$$

§ 42. НЕРАВЕНСТВА

1. ПОИМ ЗА НЕРАВЕНСТВО

Познато ни е дека за кои и да било два реални броја a и b постои една и само една од следниве три релации: или a е помал од b, или a е еднаков на b, или a е поголем од b.

За тие релации ги усвојуваме следниве дефиниции:

Дефиниција 1. *За бројот a велиме да е еднаков на бројот b, тогаш и само тогаш, ако разликата $a-b$ е еднаква на нула*, т. е.

$$a = b \overset{Df}{\Leftrightarrow} a - b = 0.$$

Дефиниција 2. *За бројот a велиме да е помал од бројот b (симболички $a < b$) тогаш и само тогаш, ако разликата $a-b$ е негативна*, т. е.

$$a < b \overset{Df}{\Leftrightarrow} a - b < 0.$$

Дефиниција 3. *За бројот a велиме да е поголем од бројот b (симболички $a > b$) тогаш и само тогаш, ако разликата $a-b$ е позитивна*, т. е.

$$a > b \overset{Df}{\Leftrightarrow} a - b > 0.$$

Дефиниција 4. *Два броја (или израза) сврзани со знаците на релациите „$<$“ (помало од) или „$>$“ (поголемо од) велиме образуваат неравенство.*

На пример, неравенства се:

$$4 < 7; \quad \pi > 5; \quad 3 - 9 < 1; \quad a^2 + b^2 > ab; \quad a + 1 > a, \text{ итн.}$$

Неравенствата се, всушност, искази запишани со математички симболи, па според тоа тие можат да бидат или *вистинити* или *невистинити*. Така во наведените примери првото неравенство е вистинито (точно), а второто е невистинито (неточно).

Знаците на релациите „$<$“ (помало од) и „$>$“ (поголемо од) се викаат *знаци на неравенството*, а броевите (односно изразите), што стојат лево и десно од нив — *страни на неравенството*.

Неравенства, чии страни се броеви или бројни изрази се викаат *бројни* или *нумерички неравенства*.

За две или неколку неравенства на кои левите и десните страни им се сврзани со еден ист знак (или само со „$<$“, или само со„$>$“) велиме дека тие имаат *еднаква насока*. А за две неравенства, на кои левите и десните страни им се сврзани со различни знаци, велиме дека тие имаат *различна насока*.

Пример: Неравенствата $a > b$ и $a+1 > 0$ и $m > n$ имаат еднаква насока, а неравенствата $b < c$ и $k > l$ — различна насока.

Во неравенствата често се ползуваат и знаците на релациите, што допуштаат и еднаквост: „$\leqslant$“ — *непоголемо* (*помало или еднакво*) и „$\geqslant$“— *непомало* (*поголемо или еднакво*).

Неравенствата со знаците $<$ и $>$ се викаат *строги*, а со знаците $\leqslant$ и $\geqslant$ — *нестроги* или *алтернативи*, бидејќи опфаќаат два можни (вистинити) случаја, т. е. за нив ќе важи:

$$a \leqslant b \Rightarrow (a < b \text{ или } a = b); \quad a \geqslant b \Rightarrow (a > b \text{ или } a = b).$$

Неравенства имаме и кога два броја (или изрази) се сврзани со знакот „$\neq$“ — *нееднакво* (или *различно*).

На пример: $7 \neq 5$; $a+1 \neq a$; $a \neq b$.

Овие неравенства опфаќаат исто два можни (вистинити) случаја, т. е. за нив ќе важи: $a \neq b \Rightarrow (a < b$ или $a > b)$.

Бројните неравенства можат да бидат и геометриски интерпретирани. На пример, нека на бројот a му соодветствува точка A, а на бројот b— точка B на бројната оска. Тогаш геометриската смисла на неравенството $a < b$ е во тоа што точката A на бројната оска лежи налево од точката B; а ако е $a > b$, тогаш точката A лежи надесно од точката B.

Според дефиницијата 4 страните на неравенството можат да бидат и изрази кои содржат општи броеви, што добиваат различни бројни вредности.

Допуштени вредности на општите броеви, што се содржат во неравенството, се викаат сите оние вредности од даденото множество на броеви, за кои двете страни на неравенството имаат смисла.

Во неравенството $\frac{1}{a-5} + \frac{1}{a} > \frac{2}{a+3} + 1$ допуштени вредности на бројот a се сите реални вредности, што ги исполнуваат условите:

$$a - 5 \neq 0, \quad a \neq 0, \quad \text{и} \quad a + 3 \neq 0.$$

Дефиниција 5. *Неравенство, кое е вистинито за сите допуштени вредности на општите броеви, што влегуваат во него, се вика идентично неравенство.*

На пример, такви се неравенствата:

$$a + 1 > a; \quad a^2 + 5 > 0; \quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab$$

Идентичните неравенства се докажуваат.

2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА НЕРАВЕНСТВАТА

Бројните неравенства ги имаат следниве својства:

Теорема 1. $a < b \Rightarrow b > a$ и $b > a \Rightarrow a < b$.

Доказ: Од $a < b$ следува дека разликата $a - b$ е негативна. Но штом разликата $a - b$ е негативна, тогаш $b - a$ ќе биде позитивна, па ќе добиеме: $b > a$.

Ова својство ни покажува дека:

Ако ги размениме местата на левата и десната страна на неравенството, треба да се промени и насоката на неравенството.

Горното тврдење геометриски е очигледно: Ако точката A на бројната оска лежи налево од точката B, тогаш точката B лежи надесно од од точката A и обратно (сл. 32)

Обратното тврдење докажете го сами!

Теорема 2. $(a < b$ и $b < c) \Rightarrow a < c$ (*Својство на транзитивност*).

Сл. 32

Доказ: Од $a < b$ и $b < c$ следува дека е $a - b < 0$ и $b - c < 0$. Бидејќи збирот на два негативни броја е исто негативен број, тоа ќе биде:

$$(a - b) + (b - c) < 0.$$

Оттука добиваме:

$$a - c < 0, \text{ т. е. } a < c.$$

Ова својство важи и за обратната насока, т. е. $(a > b$ и $b > c) \Rightarrow a > c$

Горното тврдење геометриски исто е очигледно: Ако точката A на бројната оска лежи налево од точката B, а точката B лежи пак налево од точката C; тогаш точката A ќе лежи уште поналево од точката C (сл. 32).

Неравенствата $a < b$ и $b < c$ можат да се обединат во едно неравенство: $a < b < c$, кое се вика *двојно неравенство*.

Теорема 3. *Ако кон двете страни на едно неравенство додадеме еден ист број, неравенството не ја менува својата насока,* т. е.

$$(a > b;\ \ m \in R) \Rightarrow a + m > b + m.$$

Доказ: Од $a > b$, следува дека е $a - b > 0$.

За да докажеме дека $a + m > b + m$, треба да докажеме дека изразот $(a + m) - (b + m)$ е позитивен.

Бидејќи е $(a + m) - (b + m) = a - b$, а $a - b > 0$, тогаш и $(a + m) - (b + m) > 0$, односно $a + m > b + m$.

Аналогно се докажува дека: $(a < b;\ m \in R \Rightarrow (a + m < b + m)$.

Пример: Ако кон двете страни на неравенството $-2 < 5$ го додадеме бројот (-6) ќе добиеме: $-2 - 6 < 5 - 6$, односно $-8 < -1$.

Од ова својство произлегуваат следниве две последици:

Последица 1. *Ако во двете страни на неравенството има еднакви членови (броеви) тие можат да се испуштат,* т. е.

$$(a + m > b + m) \Rightarrow a > b, \text{ односно } (a + m < b + m) \Rightarrow a < b.$$

Последица 2. *Секој член на неравенството може да се пренесе од една страна на друга. Притоа неговиот знак станува спротивен,* т. е.

$$(a+b>c)\Rightarrow(a>c-b; \text{ или } b>c-a; \text{ или } a+b-c>0).$$

Теорема 4. *Ако обете страни на едно неравенство ги помножиме со еден ист позитивен број, неравенството не ја менува својата насока,* т. е.

$$(a>b \text{ и } k>0)\Rightarrow ak>bk.$$

Доказ: Бидејќи е $a>b$, тоа е и $a-b>0$. Штом броевите $(a-b)$ и k се позитивни, тогаш и нивниот производ ќе биде позитивен, т. е.

$(a-b)\cdot k>0$ или $ak-bk>0$, односно $ak>bk$.

Аналогно се докажува дека: $(a<b$ и $k>0)\Rightarrow ak<bk$.

Пример: Ако двете страни на неравенството $-6<15$ ги помножиме со бројот 3, ќе добиеме: $-6\cdot3<15\cdot3$, односно $-18<45$.

Теорема 5. *Ако двете страни на неравенството ги помножиме со еден и ист негативен број, неравенството ќе ја промени својата насока во спротивна,* т. е.

$$(a>b \text{ и } k<0)\Rightarrow ak<bk, \text{ односно } (a<b \text{ и } k<0)\Rightarrow ak>bk.$$

Доказ: Ако е $a>b$, тогаш е и $a-b>0$. Но бидејќи е $k<0$, тоа ќе биде $(a-b)\cdot k<0$ (производот на два броја со различни знаци е негативен број) или $ak-bk<0$, односно $ak<bk$.

Пример: Ако двете страни на неравенството $-3<5$ ги помножиме со бројот -2 ќе добиеме: $(-3)\cdot(-2)>5\cdot(-2)$, односно $6>-10$.

Забелешки: 1°. Претходните две својства се прошируваат и на делење на двете страни на неравенството со позитивен или негативен број, бидејќи делењето со број различен од нула може да се замени со множење со неговата реципрочна вредност, т.е.

а) $(a>b \text{ и } k>0)\Rightarrow\left(a\cdot\frac{1}{k}>b\cdot\frac{1}{k}, \text{ односно } \frac{a}{k}>\frac{b}{k}\right)$

б) $(a>b \text{ и } k<0)\Rightarrow\left(a\cdot\frac{1}{k}<b\cdot\frac{1}{k}, \text{ односно } \frac{a}{k}<\frac{b}{k}\right)$.

Пример: Ако двете страни на неравенството $-6<8$ ги поделиме со бројот -2, добиваме:

$$-6:(-2)>8:(-2), \text{ односно } 3>-4.$$

2°. Ако двете страни на неравенството ги помножиме со нула, неравенството преминува во равенството $0=0$, т. е. $(a>b$ и $k=0)\Rightarrow ak=bk$.

Пример: $8>5$; $8\cdot0=5\cdot0$, т. е. $0=0$.

Теорема 6. $(a>b \text{ и } ab>0)\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Доказ: Ако двете страни на неравенството $a>b$ ги поделиме со позитивниот број $ab>0$, добиваме: $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$ односно $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$ а оттука на основа теорема 1, имаме: $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$, штд.

3. ОПЕРАЦИИ НАД НЕРАВЕНСТВАТА

Теорема 7. *Соодветните страни на две неравенства со еднакви насоки можат да се соберат*, т. е.

$$(a<b \ \text{ и } \ c<d) \Rightarrow a+c<b+d,$$

односно

$$(a>b \ \text{ и } \ c>d) \Rightarrow a+c>b+d.$$

Доказ: Од $a<b$ и $c<d$ следува дека разликите $a-b$ и $c-d$ се негативни. Знаеме дека збирот на два негативни броја е пак негативен. Според тоа:

$$(a-b)+(c-d)<0.$$

Меѓутоа: $$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d).$$

Значи, и разликата $(a+c)-(b+d)$ е негативна, т. е. ќе важи и неравенството

$$a+c<b+d, \text{ штд.}$$

Слично се докажува и тврдењето: $(a>b$ и $c>d) \Rightarrow a+c>b+d$.

Примери:

$$+\begin{cases} 7<10 \\ -2<\ 5 \end{cases} \quad\quad +\begin{cases} 0>-1 \\ 3>\ \ 1 \end{cases}$$
$$\overline{\ \ 5<15\ \ } \quad\quad\quad \overline{\ \ 3>\ \ 0\ \ }$$

Забелешка: Неравенства со различни насоки не се собираат.

Теорема 8. *Соодветните страни на две неравенства со различни насоки можат да се извадат, при што го земаме знакот на неравенството — намаленик*, т. е.

$$(a<b \ \text{ и } \ c>d) \Rightarrow a-c<b-d,$$

односно

$$(a>b \ \text{ и } \ c<d) \Rightarrow a-c>b-d.$$

Доказ: Ако неравенството $c>d$ го помножиме со -1, добиваме $-c<-d$. Потоа неравенствата $a<b$ и $-c<-d$ кои имаат еднакви насоки, ако ги собереме соодветните им страни, добиваме:

$$a-c<b-d, \text{ штд.}$$

Аналогно се докажува и тврдењето: $(a>b$ и $c<d) \Rightarrow a-c>b-d$.

Примери:

$$-\begin{cases} -3<\ \ 1 \\ \ \ 2>-5 \end{cases} \quad\quad -\begin{cases} \ \ 0>-7 \\ -4<\ \ 6 \end{cases}$$
$$\overline{\ \ -5<\ \ 6\ \ } \quad\quad\quad \overline{\ \ 4>-13\ \ }$$

Забелешка: Неравенства со еднакви насоки во општ случај не се вадат.

Теорема 9. *На две неравенства со еднакви насоки и позитивни страни соодветните страни можат да им се помножат*, т. е.

$$(0<a<b \ \text{ и } \ 0<c<d) \Rightarrow ac<bd,$$

односно

$$(a>b>0 \ \text{ и } \ c>d>0) \Rightarrow ac>bd.$$

Доказ: Нека a, b, c и d се позитивни броеви и нека $a<b$; $c<d$, тогаш согласно теорема 4 имаме:

$$(a<b \ \text{ и } \ c>0) \Rightarrow ac<bc \quad \text{и} \quad (c<d \ \text{ и } \ b>0) \Rightarrow bc<bd.$$

А од неравенствата $ac < bc$ и $bc < bd$ на основа својството на транзитивност следува неравенството $ac < bd$, штд.

Слично се докажува и второто тврдење.

Примери:

$$\cdot\begin{cases} 8 < 10 \\ 1 < \ 5 \end{cases} \qquad \cdot\begin{cases} 7 > 2 \\ 3 > 1 \end{cases}$$

$$\overline{\ 8 < 50\ } \qquad \overline{\ 21 > 2\ }$$

Теорема 10. *На две неравенства со спротивни насоки и со позитивни страни, соодветните страни можат да им се поделат, при што го земаме знакот на неравенството—деленик,* т. е.

$$(0 < a < b \quad \text{и} \quad c > d > 0) \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d},$$

односно $$(a > b > 0 \quad \text{и} \quad 0 < c < d) \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$$

Доказ: Нека a, b, c и d се позитивни броеви и нека $a < b$; $c > d$. Ако првото неравенство го поделиме со $c > 0$, а второто — со $b > 0$, добиваме:

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ и } \frac{c}{b} > \frac{d}{b}.$$

На основа теорема 6 од $\frac{c}{b} > \frac{d}{b}$ следува $\frac{b}{c} < \frac{b}{d}$, а на основа транзитивноста од $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ и $\frac{b}{c} < \frac{b}{d}$ следува $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, штд.

На сличен начин се докажува и второто тврдење.

Примери:

$$:\begin{cases} 12 > 8 \\ \ \ 3 < 4 \end{cases} \qquad :\begin{cases} 6 < 20 \\ 6 > \ \ 5 \end{cases}$$

$$\overline{\ 4 > 2\ } \qquad \overline{\ 1 < \ 4\ }$$

Теорема 11. *Ако е $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$) и n — природен број, тогаш важи неравенството* $a^n > b^n$, т. е.

$$(a > b > 0 \quad \text{и} \quad n \in N) \Rightarrow a^n > b^n.$$

Доказ: Нека a и b се позитивни броеви, а n — природен број. Ако е $a > b$, тогаш на основа теорема 9 множејќи го тоа неравенство само со себе, добиваме $a^2 > b^2$. Потоа, ако добиеното неравенство го помножиме со даденото $a > b$, добиваме $a^3 > b^3$.

Ако таа постапка ја продолжиме $n - 1$ пати, ќе го добиеме неравенството $a^n > b^n$, штд.

Ќе докажеме дека важи и обратната теорема на теорема 11, имено:

Теорема 12. $(a^n > b^n,\ a > 0,\ b > 0 \text{ и } n \in N) \Rightarrow a > b$

Доказ: Нека е $a^n > b^n$, каде што a и b се позитивни реални броеви, а n природен број.

За броевите a и b постои една и само една од следните три можности: $a > b$, $a = b$, $a < b$. Ако допуштиме да е $a = b$, тогаш очевидно е дека ќе биде $a^n = b^n$. Тоа е во контрадикција со претпоставката $a^n > b^n$. Ако пак допуштиме да е $a < b$, тогаш на основа теорема 11 треба да е $a^n < b^n$, кое противречи исто така со претпоставката $a^n > b^n$.

Според тоа останува да е $a > b$, штд.

Теоремите 11 и 12 заедно можат да се запишат и вака:

$$a^n > b^n \Leftrightarrow a > b, \text{ при } a > 0,\ b > 0 \text{ и } n \in N.$$

§ 43. АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Според дефиницијата 5 (§ 40) имавме дека: *апсолутна вредност на реалниот број* x *се вика самиот број* x, *ако* $x \geqslant 0$, *или бројот* $-x$, *ако* $x<0$.

Апсолутната вредност на бројот x симболички ја означуваме $|x|$.

Геометриски, апсолутната вредност на реален број x претставува растојанието од почетокот O на бројната оска до точката, што му соодветствува на тој број.

Апсолутните вредности на реалните броеви ги имаат следниве основни својства:

Теорема 1. *Апсолутната вредност на секој реален број е ненегативен број*, т. е.

$$|x| \geqslant 0 \text{ за секој реален број } x \tag{1}$$

Ова својство непосредно следува од самата дефиниција за апсолутна вредност.

Теорема 2. *Спротивните реални броеви имаат еднакви апсолутни вредности*, т. е.

$$|x| = |-x|. \tag{2}$$

Доказ: Ако е $x=0$, равенството (2) е очевидно. Ако е $x>0$, тогаш $|x|=x$; $|-x| = -(-x) = x$. Според тоа, равенството (2) важи. Ако пак $x<0$, тогаш $|x|=-x$, а исто и $|-x|=-x$. Значи, равенството (2) и во овој случај важи.

Со тоа теоремата е докажана.

Теорема 3. *За секој реален број* x *важи неравенството*:

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \tag{3}$$

Доказ: Ако е $x \geqslant 0$, тогаш е $|x|=x$, односно $-|x|=-x<x$, т. е. $-|x| \leqslant x$. Значи, x се совпаѓа со $|x|$, па според тоа x не е помал од $-|x|$. Ако е $x<0$, тогаш е $|x|=-x>x$, односно $x=-|x|$ или $x \leqslant |x|$. Во тој случај x се совпаѓа со $-|x|$, па според тоа x не е поголем од $|x|$.

Од неравенствата $-|x| \leqslant x$ и $x \leqslant |x|$ следува двојно неравенство (3), штд.

Теорема 4. *Ако е* $|x| \leqslant a$, *каде што* $a>0$,* *тогаш важи неравенството*:

$$-a \leqslant x \leqslant a$$

Доказ: Нека е $|x| \leqslant a$ $(a>0)$, тогаш важи и $-|x| \geqslant -a$. А на основа теорема 3 имаме да е $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$, тогаш добиваме:

$$-a \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant |x| \leqslant a.$$

Според тоа важи и неравенството $-a \leqslant x \leqslant a$, штд.

Како што гледаме неравенството $|x| \leqslant a$ го дефинира интервалот $[-a;\ a]$.

Согласно горната теорема имаме: ако е $|x-c| \leqslant a$, тогаш важи неравенството:

$$-a \leqslant x-c \leqslant a, \text{ односно } c-a \leqslant x \leqslant c+a.$$

Според тоа, со неравенството $|x-c| \leqslant a$ е зададен (дефиниран) интервалот $[c-a;\ c+a]$ со должина $2a$ и центар во точката C.

Лесно се уверуваме дека важи и обратната теорема на теорема 4, имено:

Ако е $-a \leqslant x \leqslant a$ $(a>0)$, тогаш $|x| \leqslant a$.

*) Ако е $a<0$ согласно теоремата 1 неравенството $|x| \leqslant a$ нема смисла.

Доказ: Нека е $-a \leqslant x \leqslant a$, каде што $a > 0$.

Ако е $x \geqslant 0$, тогаш $|x| = x$. Но според условот имаме да е $x \leqslant a$, тоа значи дека ќе важи неравенството $|x| \leqslant a$. Ако пак е $x < 0$, тогаш $|x| = -x$. Но бидејќи според условот имаме да е $x \geqslant -a$, односно $-x \leqslant a$, затоа ќе важи пак неравенството $|x| \leqslant a$ штд.

По таков начин докажуваме дека важи поопштото тврдење:

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a, \text{ при } a > 0. \tag{4}$$

Теорема 5. *Ако е $|x| > a$, каде што $a > 0$, тогаш важат неравенствата:*

$$x < -a \text{ и } x > a. \tag{5}$$

Доказ: Нека е $|x| > a$ $(a > 0)$. Да претпоставиме дека тврдењето во теоремата не е точно, а е точно спротивното, имено дека важи $-a \leqslant x \leqslant a$. Но во тој случај согласно теорема 4 имаме да е $|x| \leqslant a$, што е во противречност со условот да е $|x| > a$.

Со тоа теоремата е докажана. Покажи дека важи и обратната теорема на теорема 5.

Теорема 6. *Апсолутната вредност на збир од два реални броја не е поголема од збирот на апсолутните вредности на тие броеви*, т. е.

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \tag{6}$$

Доказ: Ако е $x + y \geqslant 0$, тогаш е $|x+y| = x+y$. Но согласно теорема 3. имаме: $x \leqslant |x|$ и $y \leqslant |y|$. Тогаш ќе биде $x + y \leqslant |x| + |y|$, па според тоа ќе важи и $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Ако пак е $x + y < 0$, тогаш $|x+y| = -(x+y) = -x-y$. Но според теорема 3 имаме: $-x \leqslant |-x|$ и $-y \leqslant |-y|$, а согласно теорема 2: $|-x| = |x|$ и $|-y| = |y|$, тоа ќе биде $-x \leqslant |x|$ и $-y \leqslant |y|$, односно $-x-y \leqslant |x| + |y|$.

Според тоа, и во случај да е $x + y < 0$ ќе важи неравенството: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
Со тоа теоремата 6 е целосно докажана.

Знакот на равенство има место кога собирците x и y имаат исти знаци.

Равенството (6) лесно може да се прошири и за повеќе од два (но конечен број) собироци, т. е.

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n|.$$

Теорема 7. *Апсолутната вродност на разлика од два броја не е помала од разликата на нивните апсолутни вредности*, т. е.

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|. \tag{7}$$

Доказ: Бидејќи е $|x| = |(x-y) + y|$, тоа согласно теорема 6 имаме:

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| \text{ односно } |x-y| \geqslant |x| - |y| \text{ штд.}$$

Ќе докажеме дека важи и неравенството:

$$|x-y| \geqslant |y| - |x|. \tag{7'}$$

Навистина, согласно неравенството (7) имаме:

$$|y-x| \geqslant |y| - |x|, \text{ но бидејќи е } |y-x| = |x-y|,$$

тоа последното неравенство x може да се запише и вака:

$$|x-y| \geqslant |y| - |x|, \text{ а тоа е неравенството (7').}$$

Неравенствата (7) и (7′) согласно обратната теорема на теорема 4 заедно можат да се запишат вака:

$$|x-y| \geqslant ||x| - |y||. \tag{8}$$

Ако во неравенството (8) наместо y ставиме $-y$, ќе добиеме:

$$|x+y| \geqslant ||x|-|y||. \tag{9}$$

Неравенствата (6) и (9) можат да се запишат и во вид на двојно неравенство: $||x|-|y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$: (10)

Теорема 8. *Апсолутната вредност на производ од два реални броја еднаква е на производот од нивните апсолутни вредности,* т. е.

$$|x\cdot y| = |x|\cdot|y| \tag{11}$$

Доказ: Согласно правилото за производ на два реални броја, имаме: ако x и y имаат исти знаци, или еднiот од нив е еднаков на нула, тогаш $xy = |x|\cdot|y|$. Ако x и y имаат различни знаци, тогаш $xy = -|x|\cdot|y|$. Оттука следува дека:

$|xy| = ||x|\cdot|y|| = |-|x|\cdot|y|| = |x|\cdot|y|$, т. е. важи равенството (11).

Равенството (11) лесно може да се прошири и за произволен конечен број множители, т. е.:

$$|x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot \ldots\ldots x_n| = |x_1|\cdot|x_2|\cdot|\cdot|x_3|\ldots\ldots\cdot|x_n| \tag{12}$$

Теорема 9. *Апсолутната вредност на количник од два броја еднаква на количникот од апсолутните вредности на деленикот и делителот,* т. е.

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ при } y \neq 0. \tag{13}$$

Доказ: Ако ставиме: $\frac{x}{y} = z$, тогаш $x = y\cdot z$, па на основа равенството (11), имаме: $|x| = |y|\cdot|z|$, односно $|z| = \frac{|x|}{|y|}$ или $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, штд.

Теорема 10. *Апсолутната вредност на степен со показател природен број, еднаква е на степенот на апсолутната вредност од тој број со истиот степенов показател,* т. е.

$$|x^n| = |x|^n. \tag{14}$$

Доказ: На основа равенството (12) имаме:

$$|x^n| = |\underbrace{x\cdot x\cdot x \ldots\ldots x}_{n \text{ множители}}| = \underbrace{|x|\cdot|x|\cdot|x| \ldots\ldots |x|}_{n \text{ множители}} = |x|^n.$$

ЗАДАЧИ

1. Вистинити ли се неравенствата: а) $5 \geqslant 5$, б) $2 \leqslant 2$, в) $a - b^2 > a$, г) $a^2 + c^2 > a^2$, д) $a + c^2 > a$?
2. За секоја вредност на x дали се вистинити неравенствата: а) $2x < 3x$, б) $-x < x$, в) $x^2 > x$, г) $x < x + 1$, д) $x > x - 2$?
3. За кои вредности на x е вистинито неравенството $-x < 3$?
4. Може ли двете страни на неравенството $2 < 5$ да се помножат со: а) $a^2 + 3$, б) $|a|$, в) $a - 4$?
5. Од неравенството $a^n < b^n$ дали секогаш следува неравенството $a < b$? Објасни го одговорот со примери!
6. Докажи дека полупериметарот на триаголник е поголем од која и да било негова страна!

7. Собери ги соодветните страни на неравенствата:

а) $3 < 7$, $a + 1 < b - 3$; $c - a < 1 - b$; б) $a + c > -c + b$ и $a - c > c + b$.

8. Извади ги соодветните страни на неравенствата:

а) $a + 1 > c$; $7 - a < -3c$; б) $x + 1 > 5$; $x - 2 < 8$.

9. Помножи ги соодветните страни на неравенствата:

$a^2 + 4 > 7c$ и $2 > \frac{1}{c}$, при $c > 0$.

10. Подели ги соодветните страни на неравенствата;

$3a^2 < 14$ и $a^2 > 7$.

11. Определи ја бројната вредност на изразот $\left|\frac{x-1}{5-x^2}\right|$ за $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 2{,}5$; $x = -3$!

12. Следниве неравенства запиши ги без знакот на апсолутна вредност:

а) $|x| < 2$; б) $|x - 3| \leqslant 5$; в) $|x| > 1$.

13. Какво геометриско значење имаат неравенствата:

а) $|x| > a \; (a > 0)$; б) $|x| \geqslant a \; (a > 0)$; в) $|x| < \varepsilon \; (\varepsilon > 0)$; г) $|x| \leqslant \varepsilon \; (\varepsilon > o)$.

14. Ако е $a \leqslant x \leqslant c$, докажи дека важи неравенството $|x| \leqslant |a| + |c|$.

15. Докажи ги неравенствата: а) $|x+y| \geqslant |x - c| - |y + c|$;

б) $|x-y| \leqslant |x-c| + |y - c|$; в) $(|a| - |c|)^2 \leqslant |a^2 - c^2|$;

г) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$; д) $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 > x$, при $x > 1$.

Глава VI

ПРОШИРУВАЊЕ ПОИМОТ ЗА СТЕПЕН. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

§ 44. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ЦЕЛ БРОЈ

1. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ПРИРОДЕН БРОЈ

Во § 14 го дефиниравме поимот за степен на рационален број a како производ на еднакви множители и тоа сите еднакви на бројот a, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множители}}$$

Ваквата дефиниција на степенот a^n има смисла само ако n е природен број непомал од 2, т. е. кога во производот има барем два множитела. Меѓутоа, со дополнителен договор (дефиниција) воведовме да е $a^1 = a$. Со тоа го извршивме и првото проширување на поимот за степен за случај кога е $n = 1$, а со цел степенот a^n да е дефиниран за секое $n \in N$.

Поаѓајќи од така проширената дефиниција за степенот a^n со показател природен број, докажавме дека степените ги имаат следниве основни својства (правила за операции со степени):

1°. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

2°. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, при $n > m$ и $a \neq 0$; 4°. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$; (I)

3°. $(a \cdot b)^n = a^n b^n$; 5°. $(a^n)^m = a^{nm}$;

Притоа претпоставуваме: основата на степенот да е кој и да било рационален број.

Природно, се поставува прашањето: може ли основата на степенот да е реален број? Одговорот на тоа прашање е потврден. Степенот со основа реален број, во согласност со дефиницијата за производ на реални броеви, го дефинираме вака:

Дефиниција 1. *Нека е x позитивен реален број зададен со низата стегачки интервали $(x'_n \mid x''_n)$. Степенот x^m $(m \in N)$ се вика реалниот број што е определен со следнава низа стегачки интервали*:

$$x^m = (x'^m_n \mid x''^m_n), \quad m \in N.$$

Пример: Да се одреди степенот π^3. Знаеме дека:

$$\begin{array}{rcl} 3 < \pi < 4 & & 3^3 < \pi^3 < 4^3 \\ 3{,}1 < \pi < 3{,}2 & & 3{,}1^3 < \pi^3 < 3{,}2^3 \\ 3{,}14 < \pi < 3{,}15 & & 3{,}14^3 < \pi^3 < 3{,}15^3 \\ 3{,}141 < \pi < 3{,}142 & & 3{,}142^3 < \pi^3 < 3{,}142^3 \\ 3{,}1415 < \pi < 3{,}1416 & \text{тогаш:} & 3{,}1415^3 < \pi^3 < 3{,}1416^3 \end{array}$$

или:

$$\begin{array}{c} 27 < \pi^3 < 64 \\ 29{,}791 < \pi^3 < 32{,}768 \\ 30{,}959144 < \pi^3 < 31{,}255875 \\ 30{,}988732221 < \pi^3 < 31{,}018339288 \\ 31{,}003534398375 < \pi^3 < 31{,}006494199296 \end{array}$$

Така добиваме да е $\pi^3 = 31{,}00\ldots$

Според утврдената дефиниција на степен со показател природен број изразите од видот a^0 и a^{-5} немаат никаква смисла, бидејќи бесмислено е бројот a да се множи сам со себе 0 или -5 пати.

Ако сакаме и тие изрази да добијат некоја одредена смисла, а во математиката такви барања често се поставуваат, треба преку дополнителни дефиниции да се утврди тоа. Притоа велиме дека вршиме ново проширување на поимот степен за случаите кога степеновиот показател е нула или цел негативен број.

Точно какви нови дефиниции ќе воведиме (овие или оние) ќе зависи од тоа кои услови ќе треба истите да ги исполнуваат.

При секое ново проширување на поимот за степен ќе се раководиме од следново барање (принцип): *Да се утврдат такви дефиниции за степен со кој и да било показател, при што и за тие степени да важат основните својства (правила за изведување на операциите) на степените со показател природен број.*

2. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ НУЛА

Согласно погоре истакнатиот принцип (барање) и за степенот со показател нула треба да важат основните својства (I) што ги имаат степените со показател природен број.

Едно од тие својства е и равенството: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ако во него ставиме да е $m = 0$, тоа ќе го добие видот

$$a^n \cdot a^0 = a^n$$

Оттука станува јасно дека при $a \neq 0$ треба да усвоеме да е $a^0 = 1$. Затоа целисходно е да ја усвоеме следнава:

Дефиниција 2. *Нултиот степен на секој реален број, различен од нула еднаков е на единица,* т. е.

$$a^0 \overset{Df}{=} 1 \text{ при } a \neq 0$$

Изразот 0^0 е недефиниран, т. е. нема смисла.

Пример: $5^0 = 1$; $\left(-\frac{3}{8}\right)^0 = 1$; $\pi^0 = 1$

Лесно може да се покаже дека со вака утврдената дефиниција за степенот a^0 при $a \neq 0$ важат и останатите основни својства.

Ќе докажеме дека важи равенството $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ при $b \neq 0$.

Ако е $n=0$ тоа го добива видот $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0}$.

Очевидно е дека при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ тоа е исполнето, бидејќи $1 = \frac{1}{1}$.

Слично се докажува дека важат и равенствата: $(a \cdot b)^n = a^n b^n$ и $(a^n)^m = a^{nm}$. Ако е $n=0$, тие го добиваат следниот вид:

$$(a \cdot b)^0 = a^0 b^0 \quad \text{и} \quad (a^0)^m = a^{0 \cdot m}.$$

Навистина, тие важат, бидејќи е $1 = 1 \cdot 1$ и $1^m = 1$.

3. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ЦЕЛ НЕГАТИВЕН БРОЈ

Да појдеме пак од равенството $a^n a^m = a^{n+m}$.

Ако сакаме тоа да важи, не само кога n и m се природни броеви, туку кога тие се и цели негативни броеви и ако ставиме да е $m = -n$ (каде што $n \in N$), тогаш ќе мора да важи и равенството

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

Оттука гледаме дека при $a \neq 0$ треба да ставиме да е $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Затоа целисходно е да ја усвоиме следнава:

Дефиниција 3. *Степенот на секој реален број различен од нула со показател цел негативен број еднаков е на дропка со броител единица и именител — степенот на истиот број, но со показател спротивен на показателот на дадениот степен,* т. е.

$$a^{-n} \overset{Df}{=} \frac{1}{a^n} \quad \text{при } a \neq 0$$

Изразот a^{-n} при $a=0$ останува неопределен.

Примери: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$; $\quad 0{,}01^{-2} = \frac{1}{0{,}01^2} = \frac{1}{0{,}0001} = 10000$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8; \qquad \pi^{-3} = \frac{1}{\pi^3}.$$

Во специјален случај степенот на дропка со показател цел негативен број ќе биде: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Значи, ќе важи правилото:

Правило: *За да се степенува дропка со показател цел негативен број, потребно е реципрочната вредност на таа дропка да се степенува со показател што е спротивен на дадениот.*

Степените наоѓаат најразновидна примена во науката и техниката. На пример:

Со помош на степените со основа 10 и показател цел позитивен или негативен број често ги запишуваме пократко и прегледно големите и мали броеви. Така, на пример:

а) Земјата има маса еднаква на

$m = 5\,980\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг. Тој број со помош на степен го запишуваме кратко вака: $m = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг.

б) Во 22,4 литри кислород при нормални услови има

$602\,400\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ молекули (Лош Мидов број). Тој број пократко го запишуваме: $6{,}024 \cdot 10^{23}$.

г) Масата на еден електрон (во мирување) изнесува:

$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,9107$ г. Тој резултат со помош на степен пократко го запишуваме: $m = 9{,}107 \cdot 10^{-28}$ г.

§ 45. СВОЈСТВА НА СТЕПЕНИТЕ СО ПОКАЗАТЕЛ ЦЕЛ БРОЈ

Ќе докажеме дека за степените со показател цел негативен број или нула остануваат да важат основните својства (I), т. е. правилата за операциите на степени со показател цел број се исти како и за степените со показател природен број.

Теорема 1. *Равенствата (правилата)*:

1°. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

2°. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;

3°. $(a \cdot b)^n = a^n b^n$;

4°. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;

5°. $(a^n)^m = a^{nm}$;

при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ важат за кои и да било цели броеви m и n.

Доказ: Кога m и n се природни (цели позитивни) броеви или нула, равенствата 1° — 5° важат. Тоа го докажавме порано. Останува да докажеме дека тие остануваат во важност и во случаите кога показателите n и m (двата или еден од нив) се негативни цели броеви.

Нека n и m се цели позитивни броеви, тогаш $-n$ и $-m$ се нивните спротивни (цели негативни) броеви. Во тој случај, а при претпоставка да е $a \neq 0$ и $b \neq 0$, ќе имаме:

$$1°.\quad a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{(-n)+(-m)}$$

$$a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{n+(-m)}$$

$$2°.\quad \frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{\dfrac{1}{a^n}}{\dfrac{1}{a^m}} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-n-(-m)}$$

$$\frac{a^n}{a^{-m}} = \frac{a^n}{\frac{1}{a^m}} = a^n a^m = a^{n+m} = a^{n-(-m)}$$

$$\frac{a^{-n}}{a^m} = \frac{\frac{1}{a^n}}{a^m} = \frac{1}{a^n a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n-m}$$

$$3^\circ. \quad (ab)^{-n} = \frac{1}{(ab)^n} = \frac{1}{a^n b^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$$

$$4^\circ. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$$

$$5^\circ. \quad (a^{-n})^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm} = a^{(-n)(-m)}$$

$$(a^n)^{-m} = \frac{1}{(a^n)^m} = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-(nm)} = a^{n \cdot (-m)}; \quad (a^{-n})^m = \left(\frac{1}{a^n}\right)^m = \frac{1}{a^{nm}} = a^{-(nm)} = a^{-nm}$$

Теоремата може да се смета да е докажана откако ќе се докажат дека важат уште и следниве равенства: $a^{-n} \cdot a^o = a^{-n+o}$; $\frac{a^o}{a^{-m}} = a^{o-(-m)}$; $\frac{a^{-n}}{a^o} = a^{-n-o}$; $(a^o)^{-m} = a^{o \cdot (-m)}$; $(a^{-n})^o = a^{-n \cdot o}$.

Предлагаме тие равенства да ги докажете сами.

Ќе докажеме уште дека за степените со показател цел број важи:

Теорема 2. 1°. *Ако a е позитивен реален број, тогаш за секој цел број n степенот a^n е исто позитивен број,* т. е.

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0, \; n \in Z.$$

2°. *Ако a е негативен реален број, тогаш за секој цел број k степенот a^{2k} е позитивен, а степенот a^{2k+1} е негативен број,*

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2k} > 0 \\ a^{2k+1} < 0 \end{cases} ; \; k \in Z.$$

Доказ: 1. Ако е $a > 0$ и $n \in N$, на основа дефиницијата за производ на реални броеви имаме да е $a^n > 0$.

Ако е $a > 0$ и $n = 0$, тогаш имаме $a^o = 1 > 0$.

Ако е $a > 0$ и $n = -p$ (каде што $p \in N$), тогаш добиваме:

$$a^n = a^{-p} = \frac{1}{a^p} > 0, \quad \text{бидејќи е } a^p > 0.$$

2°. Кога е $a < 0$ и $k \in N$, а на основа дефиницијата за производ на реални броеви, следува дека својството 2° е исполнето.

Ако е $k = 0$, тогаш имаме:

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2 \cdot o} = a^\circ = 1 > 0 \\ a^{2 \cdot o + 1} = a^1 = a < 0 \end{cases}$$

Ако е пак k цел негативен број, на пример $k = -p$ (каде што $p \in N$), и тогаш добиваме:

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2\cdot(-p)} = a^{-2p} = \dfrac{1}{a^{2p}} > 0, \text{ бидејќи } a^{2p} > 0 \\ a^{2\cdot(-p)+1} = a^{-2p}\cdot a^{1} = \dfrac{1}{a^{2p}}\cdot a < 0 \end{cases}$$

Со тоа теорема 2 е докажана.

ЗАДАЧИ

1. Пресметај: а) 2^{-5}; -2^{5}; $(-2)^{5}$; б) $-0{,}5^{-2}$; $8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{0}$; $(a-c)^{0}$ при $a \neq c$; г) $(7 - 3\cdot 0{,}125^{0})^{-2}$.

2. Што е поголемо: $\left(-\frac{3}{5}\right)^{0}$ или $\left(1\frac{2}{3}\right)^{0}$?

3. Кој број е поголем: а) 3^{-5} или 3^{-7}; б) 3^{-5} или 4^{-5}; в) 2^{-5} или $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$ или 2^{-7}?

4. Трансформирај ги следниве изрази, така што да не се содржат во нив негативни степенови показатели:

$$\frac{3a^{-2}c^{-3}}{5x^{-1}}; \quad \frac{2^{-2}a^{3}}{3^{-1}x^{3}y^{-4}}; \quad \frac{4a^{-3}c^{2}}{5a^{2}c^{-1}x^{-3}}.$$

5. Запиши ги следниве дропки без именители: $\frac{x}{ay^{2}}$; $\frac{3x}{2y^{-2}}$; $\frac{5ax^{2}}{(a-b)^{-3}}$.

6. Изврши ги означените операции: а) $\frac{4}{5}a^{-2}c^{-3}x\cdot 10a^{-4}c^{3}x^{-3}$; б) $0{,}6a^{-2} : 0{,}02a^{3}b^{-1}$; в) $(x^{-2} + ax - x^{0}) : x^{-2}$; г) $\left(-\frac{1}{2}x^{-1}y^{-3}z^{2}\right)^{-3}$.

7. Претстави го бројот 5 во вид на степен на бројот $\frac{1}{5}$.

8. Претстави го бројот 0,000001 во вид на степен на бројот 10.

9. Упрости ги изразите: а) $2x^{-5} : x^{-8} + 0{,}25^{-1}x^{-3} - x^{8} : x^{5}\cdot x^{0}$; б) $\left[\frac{2}{5}x^{-3}\cdot(y^{2})^{-4}\right]^{-3}$; в) $(x^{-1} - y^{-1})^{-1}$; г) $(x^{-2} + y^{-2})^{-2}$, при $x \neq 0$, $y \neq 0$.

10. Пресметај го производот, односно количникот:
а) $(x^{-2} + x^{-1} + 1)\cdot(x^{-1} - 1)$; б) $(x^{-3}y^{-1})^{-1} : (x^{-2}y^{3})^{-2}$.

§ 46. ПОИМ ЗА КОРЕН

Нам ни е познат поимот за квадратен и кубен корен од рационален број од Основното училиште. Сега тој поим ќе го прошириме и ќе дадеме општ поим за корен од реален број.

Дефиниција 1. *Нека е a произволен реален број и n природен број непомал од 2. n-ти корен од бројот a, кое симболички го запишуваме $\sqrt[n]{a}$, се* *вика секој реален број x, чиј n-ти степен е еднаков на бројот a,* т. е.

$$\sqrt[n]{a} = x, \quad \text{ако е } x^n = a.$$

Примери: $\sqrt[3]{1000} = 10$, бидејќи е $10^3 = 1000$;

$\sqrt[4]{81} = 3$, бидејќи е $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, бидејќи е $(-2)^3 = -8$;

$\sqrt[n]{0} = 0$, бидејќи е $0^n = 0$.

Во изразот $\sqrt[n]{a}$ бројот n се вика *коренов показател,* знакот $\sqrt{\ }$ — *коренов знак,* бројот a — *подкоренов израз* или *радиканд.*

Ако кореновиот показател е еднаков на 2, тој обично не се пишува (а се подразбира), т. е. изразите $\sqrt[2]{a}$ и $\sqrt{a}$ имаат исто значење и се читаат *квадратен корен од бројот а.*

Операцијата со која го одредуваме $\sqrt[n]{a}$, се вика *коренување.*

Според дефиницијата $\sqrt[n]{a}$ е таков реален број, чиј n-ти степен е еднаков на a, Според тоа ќе важи равенството:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a. \tag{1}$$

Меѓутоа, се поставува прашањето: во множеството на реалните броеви дали секогаш постои таков реален број $\sqrt[n]{a}$, за кој важи равенството (1) и ако постои — дали тој е и единствен?

Одговор на тоа прашање ни дава следнава:

Теорема 1. *За секој природен број n и за секој позитивен реален број $a > 0$ постои еден и само еден позитивен реален број $x > 0$, таков што $x^n = a$.*

Доказот на оваа теорема во елементарната математика обично не се дава, па затоа ќе ја користиме без доказ.

Горната теорема претпоставува да е подкореновиот број a позитивен реален број и само во тој случај таа тврди дека во множеството на позитивните реални броеви постои единствен број x, што ја задоволува релацијата $x^n = a$, односно $\sqrt[n]{a} = x$.

Таа ништо не говори: при услов да е $a > 0$, дали во множеството на негативните реални броеви постои и друг реален број што ја задоволува релацијата $x^n = a$. Исто така таа ништо не говори, во случај кога подкореновиот број е некој негативен реален број, дали тогаш постои (или не постои) реален број x таков што $x^n = a$.

Тие случаи на кои теоремата 1 не ни дава одговор ќе ги расветлиме малку подолу, а сега ќе воведеме еден нов поим — поим за *аритметички корен* или *аритметичка вредност на коренот* $\sqrt[n]{a}$.

Дефиниција 2. *Ненегативната вредност на коренот $\sqrt[n]{a}$ при $a \geqslant 0$ се вика аритметичка вредност на коренот или аритметички корен,* т. е.

$$\sqrt[n]{a} = x \text{ е аритметички корен, ако } a \geqslant 0,\ x \geqslant 0 \text{ и } x^n = a.$$

Примери: $\sqrt[4]{81}=3$; $\sqrt[3]{8}=2$; $\sqrt[5]{0}=0$ се аритметички корени, а $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt[4]{16}=-2$ не се аритметички корени.

Од теорема 1 непосредно следува и следнава:

Теорема 2. *Множеството на ненегативните реални броеви е затворено по однос на операцијата коренување, односно пресметување на аритметички корен.*

Да го воведеме и поимот *алгебарски корен* или *алгебарска вредност на коренот*.

Дефиниција 3. *За бројот x велиме да е алгебарски корен или алгебарска вредност на коренот* $\sqrt[n]{a}$, *ако поткореновиот број a е кој и да било реален број и ако е исполнета релацијата* $x^n=a$.

Како што гледаме: кај алгебарскиот корен во споредба со поимот аритметички корен се испуштаат условите (барањата) броевите a и x да се ненегативни. Тоа значи дека поимот алгебарски корен е поширок и го опфаќа во себе и поимот аритметички корен, т. е. секој аритметички корен е и алгебарски, но обратното не мора да е. Во претходниот пример сите наведени корени се и алгебарски.

За алгебарските корени важат следниве теореми:

Теорема 3. *За секој парен природен број* $n=2k$ *и секој позитивен реален број* $a>0$ *постојат два и само два реални броја x и —x, за кои важат релациите* $x^{2k}=a$ *и* $(-x)^{2k}=a$, т. е.

Секој корен со парен коренов показател од позитивен реален број во множеството R има две и само две алгебарски вредности, кои се секогаш два спротивни реални броја.

Доказ: Согласно теорема 1, бидејќи е $2k\in N$ и $a>0$ секогаш постои позитивен реален број x, таков што $x^{2k}=a$.

Позитивниот реален број x е аритметичка вредност, но истовремено и алгебарска вредност на коренот $\sqrt[n]{a}$ за која се говори во теорема 3. Но за секој позитивен реален број x постои и негов спротивен реален број $-x$. Штом важи $x^{2k}=a$, тогаш ќе важи исто и $(-x)^{2k}=a$ (Зошто?). Значи, негативниот реален број $-x$ е втора алгебарска вредност на коренот $\sqrt[n]{a}$.

Да претпоставиме дека постои и некој друг негативен реален број $-y\neq -x$, за кој исто важи релацијата $(-y)^{2k}=a$. Тогаш ќе имаме:

$$(-x)^{2k}=(-y)^{2k}=a,$$

а оттука следува дека:

$$x^{2k}=y^{2k}=a.$$

Тоа значи дека постојат два различни позитивни реални броја x и y, што се аритметички вредности на коренот $\sqrt[n]{a}$, но тоа противречи на теорема 1. Следователно, нашата претпоставка дека постои уште еден негативен реален број различен од $-x$ не е точна. Со тоа теоремата 3 е докажана.

Теорема 4. *За секој непарен природен број* $n=2k+1$ *и секој позитивен реален број* $a>0$ *постои еден и само еден реален број x, таков што* $x^{2k+1}=a$.

Д о к а з: Согласно теорема 1, бидејќи е $(2k+1) \in N$ и $a > 0$, тоа реалниот број x што го исполнува условот $x^{2k+1} = a$ мора да е позитивен. За да ја докажеме теоремата 4 треба да докажеме дека не постои ниту еден негативен реален број, на пример $-y$, таков што $(-y)^{2k+1} = a$. Навистина, таков негативен реален број $-y$ не постои, бидејќи неговиот степен со непарен показател е исто негативен број, т. е. $(-y)^{2k+1} < 0$, па според тоа равенството $(-y)^{2k+1} = a$ е невистинито, бидејќи е $a > 0$

Со тоа теоремата 4 е докажана, која може да се формулира и вака:

Секој корен со непарен коренов показател од позитивен реален број во множеството на негативните реални броеви нема ниту една своја алгебарска вредност.

Теорема 5. *За секој непарен природен број $n = 2k+1$ и секој негативен реален број $a < 0$ постои еден и само еден реален број x, таков што $x^{2k+1} = a$.*

Д о к а з: Во равенството $x^{2k+1} = a$, бидејќи a е негативен број, тоа и степенот x^{2k+1} мора да е негативен број. Очигледно е дека и бројот x е негативен, бидејќи степенот на позитивен број со показател природен број не може да биде негативен број.

Сега треба да покажеме дека навистина постои негативен реален број $x < 0$, таков што $x^{2k+1} = a$.

Ако е $x < 0$ и $a < 0$, тогаш е $-x > 0$ и $-a > 0$. Во тој случај, согласно теорема 4, бидејќи е $n = 2k+1$ и $-a > 0$, тогаш постои единствен позитивен реален број $-x > 0$, таков што $(-x)^{2k+1} = -a$.

Од последново равенство следува и равенството $-x^{2k+1} = -a$, односно $x^{2k+1} = a$, штд.

Останува уште да докажеме дека не постои повеќе од еден негативен број кој да ја задоволува истата релација.

Да претпоставиме дека постојат два негативни броја $x < 0$ и $y < 0$, такви што $x^{2k+1} = a$ и $y^{2k+1} = a$. Од (1) следува дека $-(-x)^{2k+1} = a$ и $-(-y)^{2k+1} = a$, односно $(-x)^{2k+1} = -a$ и $(-y)^{2k+1} = -a$. Како што гледаме, дојдовме во контрадикција со теорема 1, која не допушта коренот $\sqrt[2k+1]{-a}$ да има две различни аритметички вредности $-x > 0$ и $-y > 0$. Тоа покажува дека нашата претпоставка е неточна. Со тоа теорема 5 е докажана, која може да се формулира и вака:

Секој корен со непарен коренов показател од негативен реален број во множеството на реалните броеви има една и само една своја алгебарска вредност и тоа негативна.

Теорема 6. *За никој парен природен број $n = 2k$ и никој негативен реален број $a < 0$ не постои ниту еден реален број x, таков што $x^{2k} = a$.*

Д о к а з: Бидејќи степенот на кој и да било реален број x со показател парен природен број $2k$, не може да биде негативен број, затоа условот $x^{2k} = a$ никогаш не може да биде задоволен, ако a е негативен број.

Со тоа теорема 6 е докажана, која може да се искаже и вака:

Корен со парен коренов показател од негативен реален број во множеството на реалните броеви нема ниту една своја алгебарска вредност, т. е. тој не постои.

Оттука следува и заклучокот:

Множеството на реалните броеви не е затворено по однос на операцијата коренување.

Примери: а) Алгебарски вредности на коренот $\sqrt[4]{16}$ во множеството R се броевите 2 и -2, бидејќи $2^4 = 16$, но и $(-2)^4 = 16$. Меѓутоа, аритметичка вредност на $\sqrt[4]{16}$ е само бројот 2.

б) Алгебарска вредност на коренот $\sqrt[3]{27}=3$ во множеството R е само бројот 3, која во исто време е и негова аритметичка вредност.

в) Алгебарска вредност на коренот $\sqrt[5]{-32}=-2$ во множеството R е само бројот -2, но таа не е и негова аритметичка вредност.

г) Корените $\sqrt[4]{-16}$ и $\sqrt{-25}$ не постојат, т. е. во множеството R тие намаат ниту една алгебарска вредност.

д) Алгебарска вредност на коренот $\sqrt[n]{0}$ во множеството R е само бројот 0, бидејќи $0^n=0$; но бројот 0 е и негова аритметичка вредност.

Во натамошните разгледувања под $\sqrt[n]{a}$ при $a \geqslant 0$ ќе подразбираме само неговата единствена аритметичка вредност, т. е. ќе сметаме дa е $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$.

ЗАДАЧИ

1. При кои услови за коренот $\sqrt[n]{a}$ велиме да е аритметички корен?

2. Определи ги аритметичките вредности на корените: а) $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt[4]{1296}$; $\sqrt[3]{125}$; б) $\sqrt{(x-3)^2}$; $\sqrt{(x^2+1)^2}$; в) $\sqrt[3]{(x^2+1)^3}$; $\sqrt[3]{(x+1)^3}$.

3. Што може да се каже за бројот x, ако е познато дека коренот $\sqrt[2k]{x}$ има: а) две различни реални вредности, б) нема ниту една реална вредност?

4. Што може да се каже за бројот x, ако е познато дека коренот $\sqrt[2k+1]{x}$ нема ниту една: а) позитивна реална вредност, б) негативна реална вредност?

§ 47. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Ќе направиме уште едно проширување на поимот степен, воведувајќи и степен со показател рационален број.

Нека a е позитивен реален број, а r — рационален број. Знаеме дека секој рационален број може да се запише во форма на дропка, т. е. $r=\frac{p}{q}$, каде што p е цел број а q — природен број.

Ќе си поставиме задача да го дефинираме степенот со показател рационален број, така што и за него да важат основните својства (I) на степените со показател природен и цел број.

За да биде исполнето тоа барање, во специјален случај, треба да важи равенството:

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q}, \quad \text{односно} \quad (a^{\frac{p}{q}})^q = a^p. \tag{1}$$

Од равенството (1) следува дека при $a>0$ треба да ставиме да е

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Затоа целисходно е да ја усвоиме следнава дефиниција!

Дефиниција 1. *Нека p и q се природни броеви и нека е a позитивен реален број. Тогаш под изразот $a^{\frac{p}{q}}$ ќе го подразбираме аритметичкиот корен $\sqrt[q]{a^p}$,* т. е.

$$a^{\frac{p}{q}} \overset{Df}{=} \sqrt[q]{a^p}, \text{ при } a > 0. \tag{2}$$

За $p = 1$, имаме $$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}. \tag{3}$$

Примери: $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$; $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{a^5}$.

Во дефиницијата 1 претпоставивме p и q да се природни броеви, т. е. $\frac{p}{q}$ да е позитивен рационален број. Аналогно на степените со показател цел негативен број, степенот со показател негативен рационален број го дефинираме вака:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}; \quad a > 0. \tag{4}$$

Пример: $a^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^3}}$.

Во следниот параграф ќе докажеме дека со вака воведената дефиниција за степен со показател рационален број сочувани се основните својства на степените со показател цел број. За да го докажеме тоа, потребни ќе ни бидат следниве својства:

Нека се a и b позитивни реални броеви, а n — природен број. Тогаш ќе важи:

1°. $a^n = b^n \Leftrightarrow a = b$;

2°, $a^n > b^n \Leftrightarrow a > b$.

Тие две својства ги докажавме порано (§ 42).

Познато ни е дека дропката $\frac{p}{q}$ не ја менува својата вредност, ако и броителот и именителот се помножат со кој и да било природен број k, т. е.

$$\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}$$

Наполно е јасно дека усвоената дефиниција 1 не би била коректна до колку не би важела следната теорема:

Теорема: *Нека е a позитивен реален број, а p, q и k природни броеви. Тогаш ќе важи равенството:*

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pk}{qk}}. \tag{5}$$

Доказ: На основа својството 1⁰ ако важи равенството (5), тогаш ќе важи и

равенството: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qk}=\left(a^{\frac{pk}{qk}}\right)^{qk}$ и обратно (5′)

На основа равенството (1) и правилото за степенување на степен со показател природен број, левата страна на равенството (5′) може да се преобрази, и го добива видот:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qk}=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right]^{k}=(a^{p})^{k}=a^{pk}$$

а исто и десната страна на (5′): $\left(a^{\frac{pk}{qk}}\right)^{qk}=a^{pk}$.

Гледаме равенството (5′) е точно, па според тоа точно е и равенството (5), штд.

Изразот $a^{\frac{p}{q}}$ при $a<0$ и $q\neq 1$ според дефиницијата 1 останува недефиниран. Причината е следна. Ако би сакале и тој израз да го опфатиме со воведената дефиниција 1, тогаш горната теорема не би важела. На пример:

Нека е $(-32)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{-32}=-2$. Но бидејќи е $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$, ќе имаме:

$$(-32)^{\frac{2}{10}}=\sqrt[10]{(-32)^{2}}=\sqrt[10]{32^{2}}=2.$$

Значи, доаѓаме до контрадикција со горната теорема, бидејќи

$$(-32)^{\frac{1}{5}}\neq(-32)^{\frac{2}{10}}.$$

Или во друг случај: $(-16)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{-16}$ доаѓаме до корен кој во множеството на реалните броеви, како што видовме, не постои.

Од тие причини изразот $a^{\frac{p}{q}}$ при $a<0$ и $q\neq 1$ останува недефиниран.

§ 48. СВОЈСТВА НА СТЕПЕНИТЕ СО ПОКАЗАТЕЛ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

Ќе докажеме дека правилата за изведување на операциите со степени со показател рационален број се исти како и тие за степените со показател цел број.

Теорема 1. *Нека се a и b позитивни реални броеви, а p, q, r и s природни броеви. Тогаш:*

1°. $a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$;

2°. $a^{\frac{p}{q}}:a^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$;

3°. $(ab)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{p}{q}}\,b^{\frac{p}{q}}$;

4°. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

5°. $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}=a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$.

Д о к а з: 1°. На основа својството 1° (§ 47), ако ги степенуваме двете страни на равенството 1° со природен показател qs и ги примениме правилата за степенување на производ и степен со показател природен број, ќе добиеме:

$$\left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}\right)^{qs}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qs} \cdot \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{ps+qr}{qs}}\right)^{qs}$$

$$a^{ps} \cdot a^{rq} = a^{ps+qr}.$$

Гледаме последното равенство е точно, па според тоа точно е појдовното равенство 1°, што требаше да се докаже.

Сосема на ист начин се докажува и равенството 2°.

Да го докажеме равенството 3°. Ако ги степенуваме неговите две страни со показател природен број q и применувајќи ги соодветните правила на степените со показател природен број, добиваме:

$$\left[(ab)^{\frac{p}{q}}\right]^q = \left(a^{\frac{p}{q}} b^{\frac{p}{q}}\right)^q; \quad (ab)^{\frac{p}{q}\cdot q} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \cdot \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q; \quad (ab)^p = a^p b^p.$$

Дојдовме до точно равенство, а на основа својството 1° (§ 47), точно е и појдовното равенство 3°, што требаше да се докаже.

На ист начин се докажува и равенството 4.

Да го докажеме уште и равенството 5°. Со слична постапка, добиваме:

$$\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}}\right]^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}\right)^{qs}; \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}\cdot qs} = a^{\frac{pr}{qs}\cdot qs}; \quad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{rq} = a^{pr}; \quad a^{\frac{p}{q}\cdot rq} = a^{pr}; \quad a^{pr} = a^{pr}.$$

Последното равенство е точно, па според тоа точно е и равенството 5°, штд.

Примери: а) $a^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{4+5}{10}} = a^{\frac{9}{10}}$; $a > 0$;

б) $x^{\frac{2}{3}} : x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4+3}{6}} = x^{\frac{7}{6}}$; $x > 0$;

в) $\left(y^{\frac{5}{8}}\right)^{\frac{4}{5}} = y^{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}} = y^{\frac{1}{2}}$; $y > 0$.

Степените со показател рационален број ги имаат уште и следниве поважни својства:

Теорема 2. *Степенот на позитивен реален број со показател кој и да било рационален број r секогаш е позитивен број*, т. е.

$$(a > 0 \text{ и } r \in Q) \Rightarrow a^r > 0$$

Д о к а з: Случајот кога r е цел број теоремата важи. Тоа го докажавме порано.

Ако е $r = \frac{p}{q} > 0$; каде што p и q се природни броеви, тогаш $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$, бидејќи $a^p > 0$, а коренот е аритметички.

Ако е $r = -s < 0$, каде што s е позитивен рационален број, тогаш

$$a^r = a^{-s} = \frac{1}{a^s} > 0, \quad \text{бидејќи } a^s > 0.$$

Теорема 3. *Степенот на бројот 1 со показател кој и да било рационален број секогаш е еднаков на 1*, т. е.

$$1^r = 1 \text{ за секој } r \in Q$$

Доказ: Ако е r природен број, јасно е дека $1^r = 1$. Ако е $r=0$, тогаш $1^0=1$. Ако r е цел негативен број, на пример $r = -k$ $(k \in N)$, тогаш $1^r = 1^{-k} = \frac{1}{1^k} = \frac{1}{1} = 1$.

Ако $r = \frac{p}{q} > 0$, каде што $p \in N$, $q \in N$ тогаш $1^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{1^p} = \sqrt[q]{1} = 1$, бидејќи $1^q = 1$.

Ако $r = -s < 0$, каде што s е позитивен рационален број, тогаш $1^r = 1^{-s} = \frac{1}{1^s} = \frac{1}{1} = 1$.

Со тоа теоремата 3 е докажана.

Теорема 4. *Степенот на позитивен реален број поголем од единица* $(a > 1)$ *со позитивен рационален показател е поголем од единица, а со негативен рационален показател тој е помал од единица*, т. е.

$$(a > 1 \text{ и } r > 0) \Rightarrow a^r > 1$$
$$(a > 1 \text{ и } r < 0) \Rightarrow a^r < 1$$

Доказ: Ќе го разгледаме прво случајот кога $a > 1$ и $r > 0$.

а) Ако r е природен број, тогаш $a^r = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ множители}} > 1$, бидејќи производот на броеви поголеми од 1 и тој е поголем од 1.

б Ако $r = \frac{p}{q} > 0$, каде што p и q се природни броеви, тогаш

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Треба да докажеме дека $\sqrt[q]{a^p} > 1$, односно $a^{\frac{p}{q}} > 1$.

Да допуштиме дека $a^{\frac{p}{q}} \leqslant 1$. Со степенување на двете страни со показател q, добиваме: $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \leqslant 1$, односно $a^p \leqslant 1$.

Но бидејќи е $a > 1$, тоа и $a^p > 1$. Дојдовме до контрадикција, значи претпоставката да е $a^{\frac{p}{q}} \leqslant 1$ не е точна. Со тоа првиот дел од теоремата е докажан.

Нека сега е $r = -s$, каде што s е позитивен рационален број. Тогаш $a^r = a^{-s} = \frac{1}{a^s}$.

Но ние веќе докажавме дека ако $a > 1$ и $s > 0$, тогаш $a^s > 1$. Според тоа $a^r = \frac{1}{a^s} < 1$.

Теорема 5. *Степенот на позитивен реален број помал од единица* $(0 < a < 1)$ *со позитивен рационален показател е помал од единица, а со негативен рационален показател е поголем од единица*, т. е.

$$(0 < a < 1 \text{ и } r > 0) \Rightarrow a^r < 1$$
$$(0 < a < 1 \text{ и } r < 0) \Rightarrow a^r > 1.$$

Оваа теорема се докажува аналогно како и претходната. Предлагаме да ја докажете сами.

Теорема 6. *Ако* $a > 1$ *(a — позитивен реален број поголем од 1), тогаш од два степена* a^r *и* a^s *поголем е тој што има поголем рационален показател. Ако пак* $0 < a < 1$, *тогаш од два степена* a^r *и* a^s *поголем е тој што има помал рационален показател*, т. е.

$$(a > 1 \text{ и } r > s) \Rightarrow a^r > a^s$$
$$(0 < a < 1 \text{ и } r > s) \Rightarrow a^r < a^s.$$

Доказ: Нека $a > 1$ и $r > s$. Од $r > s$ следува $r - s > 0$. Според теорема 4 имаме $a^{r-s} > 1$, т. е. $\frac{a^r}{a^s} > 1$. Бидејќи според теорема 2 $a^s > 0$, тогаш од $\frac{a^r}{a^s} > 1$ добиваме: $a^r > a^s$ штд.

Ако пак $0 < a < 1$ и $r > s$, тогаш според теорема 5 ќе биде:

$$a^{r-s} < 1, \text{ т. е. } \frac{a^r}{a^s} < 1.$$

Бидејќи $a^s > 0$, тогаш конечно добиваме: $a^r < a^s$, штд.

Примери: $\pi^{0,2} < \pi^{\frac{1}{2}}$, бидејќи $\pi > 1$ и $\frac{1}{2} > 0{,}2$;

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 > \left(\frac{\pi}{4}\right)^5, \text{ бидејќи } \frac{\pi}{4} < 1 \text{ и } 5 > 3.$$

Теорема 7. *Ако a е позитивен реален број различен од единица ($a > 0$, $a \neq 1$), тогаш два степена на бројот a се еднакви ако и само ако и нивните степенови показатели се еднакви рационални броеви*, т. е.

$$a^r = a^s \Leftrightarrow r = s \quad \text{при} \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Доказ: Ако е $r = s$, тогаш очигледно е дека ќе важи и равенството $a^r = a^s$.

Да претпоставиме сега да е $a^r = a^s$. За рационалните броеви r и s, знаеме постои една и само една од следниве три можности: $r > s$, $r < s$, $r = s$. Ако претпоставиме да е $r > s$, тогаш според теорема 6, а во зависност од тоа дали е $a > 1$ или $0 < a < 1$, ќе добиеме $a^r > a^s$ или $a^r < a^s$ што противречи на претпоставката $a^r = a^s$. Слично ако допуштеме да е $r < s$ пак според теорема 6 ќе добиеме, или $a^r > a^s$ или $a^r < a^s$. Значи пак доаѓаме до контрадикција со претпоставката $a^r = a^s$.

Според тоа останува да е $r = s$, штд.

На основа теорема 6 и 7 по методот од спротивното лесно може да се докаже дека важи и обратната теорема на теорема 6, која гласи:

Теорема 8. $(a > 1 \text{ и } a^r > a^s) \Rightarrow r > s$

$(0 < a < 1 \text{ и } a^r > a^s) \Rightarrow r < s.$

Предлагаме оваа теорема да ја докажете сами.

Теоремите 6 и 8 заедно можат се запишат и вака:

При $a > 1$, $a^r > a^s \Leftrightarrow r > s$

При $0 < a < 1$, $a^r > a^s \Leftrightarrow r < s$.

Да го докажеме уште следново тврдење.

Теорема 9. *Нека се a и b позитивни реални броеви, а r кој и да било рационален број. Тогаш важи:*

1°. При $r > 0$; $a > b \Leftrightarrow a^r > b^r$

2°. При $r < 0$; $a > b \Leftrightarrow a^r < b^r$

2°. За секое $r \in Q$; $a = b \Leftrightarrow a^r = b^r$

Доказ: Ќе го докажеме само тврдењето 1°. Другите две тврдења се докажуваат аналогно.

Нека е $r > 0$. Да претпоставиме да е $a > b > 0$, тогаш ќе имаме $\frac{a}{b} > 1$, а на основа теорема 4 ќе важи $\left(\frac{a}{b}\right)^r > 1$, односно $\frac{a^r}{b^r} > 1$.

Бидејќи е $b^r > 0$, тоа од $\frac{a^r}{b^r} > 1$ следува дека $a^r > b^r$. По таков начин докажавме дека $a > b > 0 \Rightarrow a^r > b^r$, при $r > 0$.

Останува да докажеме дека важи и обратното, имено

$$a^r > b^r \Rightarrow a > b > 0 \quad \text{при} \quad r > 0.$$

Нека е $a^r > b^r$, каде што a и b се позитивни реални броеви, а r — позитивен рационален број. За реалните позитивни броеви a и b постои само една од следниве три можности $a > b$, $a < b$, $a = b$. Ако претпоставиме да е $a < b$, тогаш имаме да е $b > a$, а според претходното докажано тврдење, ќе добиеме дека: $b^r > a^r$, односно $a^r < b^r$, што противречи на претпоставката $a^r > b^r$.

Ако пак допуштеме да е $a = b$, тогаш очевидно е дека ќе биде $a^r = b^r$. Значи, пак доаѓаме до контрадикција со претпоставката $a^r > b^r$.

Според тоа останува да е $a > b$, штд.

Со тоа го докажавме и тврдењето: $a^r > b^r \Rightarrow a > b$ при $a, b, r > 0$.

По таков начин тврдењето 1° е целосно докажано.

Примери: $3^{-5} > 5^{-5}$; $8^{\frac{2}{3}} > 3^{\frac{2}{3}}$; $7^{-\frac{1}{2}} > 9^{-\frac{1}{2}}$; $0{,}75^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

ЗАДАЧИ

1. Замени ги следниве степени со соодветните им корени:

$x^{\frac{3}{4}}$; $x^{-\frac{1}{3}}$; $y^{-0,5}$; $a^{0,25}$; $(x+y)^{\frac{2}{3}}$.

2. Запиши ги следниве корени во форма на степени со показател рационален број:

$\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[n-1]{a^2}$; $\sqrt{\frac{1}{a^3}}$; $\sqrt[m]{x^{-2}}$; $\sqrt[4]{(a-b)^{-n}}$.

3. Изврши ги означените операции со степените:

а) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{3}{4}} : x^{-0,25}$; б) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)$; в) $9^{-\frac{1}{2}} + 0{,}25^{-\frac{3}{2}}$.

4. Важи ли равенството: $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$?

5. Што е поголемо: а) $5^{\frac{3}{4}}$ или $5^{-\frac{3}{4}}$; б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1}$; в) $2^{\frac{3}{2}}$ или $2^{1,5}$; $3^{\frac{1}{2}}$ или $9^{\frac{1}{4}}$; г) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{\pi}{5}\right)^2$ или $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{3}{5}}$?

6. Изврши ги операциите:

а) $\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)$; б) $\left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{2}{3}}\right) : x^{\frac{1}{2}}$; при $x > 0$.

в) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2$; г) $\left(a^{\frac{2}{3}} + 1\right)^3$.

7. Упрости ги изразите:

а) $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}$; б) $\left(\frac{9x^2y^{\frac{3}{4}}}{0{,}16\,x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{2x^{-\frac{5}{8}}}{x^{1,25}y^{-\frac{2}{3}}}:\frac{y^{-\frac{5}{9}}}{3\,x^{-0,75}}\right)^{-\frac{1}{4}}$.

§ 49. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА КОРЕНИТЕ

Бидејќи секој степен со рационален показател може да се запише и во форма на корен $\left(a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\right)$, тоа и од секое својство на степените со рационален показател следува по едно својство на корените. Сите својства на степените со рационален показател ние нема да ги преведуваме на јазикот на корените, туку тоа ќе го сториме само на некои поважни својства.

Равенството (5) во § 47 $a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{pk}{qk}}$ при $a>0$, може да се запише и вака:

$$\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[qk]{a^{pk}} \text{ при } a>0, \qquad (1)$$

односно вака:

$$\sqrt[qk]{a^{pk}}=\sqrt[q]{a^p}, \text{ при } a>0. \qquad (2)$$

Равенството (1) го искажува таканареченото својство: *проширување на корените*, кое гласи:

Вредноста на коренот од позитивен реален број не се менува, ако показателите на коренот и на поткореновиот израз се помножат со еден ист природен број k.

Примери: $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3\cdot5]{x^{2\cdot5}}=\sqrt[15]{x^{10}}$; $\sqrt[4]{x^3y}=\sqrt[4\cdot2]{(x^3y)^2}=\sqrt[8]{x^6y^2}$, при $x>0$; $y>0$.

На основа својството проширување на корените јасно е дека: *кои и да било два (а може и повеќе) корена, чии коренови показатели се природни броеви; секогаш можат да се доведат на заеднички коренов показател.* На пример: нека се дадени корените $\sqrt[n]{x}$ и $\sqrt[m]{y}$.

Согласно равенството (1) имаме:

$$\sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m} \quad \text{и} \quad \sqrt[m]{y}=\sqrt[mn]{y^n}.$$

Пример: Корените $\sqrt[6]{xy^2}$ и $\sqrt[4]{x^3y}$ можат да се доведат на најмал заеднички коренов показател 12:

$$\sqrt[6]{xy^2}=\sqrt[6\cdot2]{(xy^2)^2}=\sqrt[12]{x^2y^4}; \qquad \sqrt[4]{x^3y}=\sqrt[4\cdot3]{(x^3y)^3}=\sqrt[12]{x^9y^3}.$$

Равенството (2) го искажува својството *скратување на корените*, кое гласи:

Ако поткореновиот израз е степен на позитивен број, при што степеновиот показател и корeновиот показател имаат некој заеднички делител, тогаш тие показатели можат да се скратат (поделат) со нивниот заеднички делител.

Примери: $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6:2]{a^{4:2}} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3}$; $\sqrt[12]{a^8b^4} = \sqrt[12]{(a^2b)^4} =$
$= \sqrt[3]{a^2b}$, при $b>0$.

Не треба да испуштиме од вид дека формулите (1) и (2) се точни само при услов $a > 0$. Ако е $a < 0$, тие формули во општ случај се неточни. Ќе го покажеме тоа на коренот $\sqrt{a^2}$.

Ако е $a > 0$, според формулата (2) добиваме: $\sqrt{a^2} = a$.

Ако е $a = 0$, тогаш $\sqrt{a^2} = \sqrt{0} = 0$.

Ако пак е $a < 0$, тогаш е $-a > 0$ и $a^2 = (-a)^2$, па добиваме: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$.

Значи:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{ако } a > 0; \\ 0, & \text{ако } a = 0; \\ -a, & \text{ако } a < 0; \end{cases}$$

или

$$\sqrt{a^2} = |a|. \tag{3}$$

Примери: а) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{ако } x \geqslant 3 \\ -(x-3), & \text{ако } x < 3. \end{cases}$

б) $\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2 + 1$, бидејќи за секое x $x^2 + 1 > 0$.

Според тоа, формулата (2), ако заедничкиот делител k на корeновиот показател и показателот на поткореновиот израз е парен број и истата сакаме да важи за секое a, тогаш треба да гласи вака:

$$\sqrt[qk]{a^{pk}} = \sqrt[q]{|a^p|}. \tag{4}$$

§ 50. ОПЕРАЦИИ СО КОРЕНИ

1. КОРЕНУВАЊЕ НА ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

На основа докажаните равенства 3° и 4° (§ 48), ако рационалниот показател е $r = \frac{1}{n}$ истите можат да се запишат во следнава форма:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \text{при } a \geqslant 0 \text{ и } b \geqslant 0; \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad \text{при } a \geqslant 0 \text{ и } b > 0. \tag{2}$$

Овие две равенства ни ги даваат правилата за коренување на производ и количник, кои со зборови можат да се искажат вака:

Правило 1. *Производ (од два или повеќе позитивни множители) се коренува, кога одделно се коренуваат неговите множители и добиените корени се помножат.*

Примери: $\sqrt{9\cdot 25}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{25}=3\cdot 5=15.$

$\sqrt[12]{a^4b^3}=\sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{b^3}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{b},$ при $a>0$ и $b>0.$

Правило 2. *Количник на два позитивни броја се коренува, кога одделно се коренуваат деленикот и делителот и потоа првиот корен се подели со вториот.*

Примери: $\sqrt{\dfrac{9}{25}}=\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\dfrac{3}{5};\quad \sqrt[15]{\dfrac{a^3}{b^5}}=\dfrac{\sqrt[15]{a^3}}{\sqrt[15]{b^5}}=\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{b}},$ при $a\geqslant 0,\ b>0.$

Условите $a\geqslant 0$, $b>0$ во формулите (1) и (2) имаат суштинско значење само кога кореновиот показател n е парен број, бидејќи тогаш за негативни вредности на a и b корените $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ немаат смисла.

Пример: $\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{36}=6$, а ако се примени правилото 1, добиваме: $\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$, а $\sqrt{-4}$ и $\sqrt{-9}$, не се дефинирани.

Затоа, формулите (1) и (2), ако сакаме да ги ползуваме при $n=2k$, а без условите $a>0$ и $b>0$, треба да гласат:

$$\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|} \tag{1'}$$

$$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}},\quad \text{при } b\neq 0. \tag{2'}$$

Ако равенствата (1) и (2) ги прочитаме оддесно налево, тие го добиваат видот:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},\quad \text{при}\quad a\geqslant 0,\ \ b\geqslant 0 \tag{3}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\quad \text{при}\quad a\geqslant 0,\ \ b>0 \tag{4}$$

и ни ги даваат правилата за множење и делење на корени со еднакви коренови показатели. Тие правила искажани со зборови гласат:

Правило 3. *Корени со еднакви коренови показатели се множат кога се помножат поткореновите им изрази, а кореновиот показател се остави непроменет.*

Примери: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6;$

$\sqrt[5]{8\cdot a^3b^2}\ \sqrt[5]{2ab}=\sqrt[5]{8a^3b^2\cdot 2ab}=\sqrt[5]{16a^4b^3}.$

Правило 4. *Корени со еднакви коренови показатели се делат, кога се поделат поткореновите им изрази, а кореновиот показател се остави непроменет.*

Пример: $\sqrt[4]{18a^3}:\sqrt[4]{6a^2}=\sqrt[4]{(18a^3):(6a^2)}=\sqrt[4]{3a}$, при $a>0$.

Ако корените што ги множиме, односно делиме, имаат различни коренови показатели, претходно ги доведуваме на заеднички коренов показател, па потоа ги множиме, односно делиме, согласно правилата 3 и 4.

Примери: а) $\sqrt[3]{2x^2}\cdot\sqrt[5]{3x^3y}=\sqrt[15]{32x^{10}}\cdot\sqrt[15]{27x^9y^3}=\sqrt[15]{864x^{19}y^3}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{4x^2}{y}}:\sqrt[6]{\frac{2x^3}{y^2}}=\sqrt[6]{\frac{16x^4}{y^2}}:\sqrt[6]{\frac{2x^3}{y^2}}=\sqrt[6]{\frac{16x^4}{y^2}:\frac{2x^3}{y^2}}=\sqrt[6]{8x}$.

2. КОРЕНУВАЊЕ НА СТЕПЕН

Нека a е произволен позитивен реален број, а m и n нека се природни броеви, при што m да е делив со n.

На основа дефиницијата на степен со показател рационален број $\frac{m}{n}$ при $a>0$ имаме: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Ако тоа равенство го прочитаме оддесно налево, добиваме:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},\quad \text{при } a>0. \tag{5}$$

Равенството (5) покрај тоа што ни кажува како секој корен може да се запише уште и во вид на степен со рационален показател, тоа во специјален случај кога m е деливо со n ни го дава и правилото за коренување на степен. Тоа со зборови го искажуваме:

Правило 5. *Степен, на кој степеновиот показател е делив со кореновиот показател, се коренува, кога степеновиот показател го поделиме со кореновиот показател, а основата на степенот ја оставиме непроменета.*

Примери: $\sqrt[4]{7^{12}}=7^{\frac{12}{4}}=7^3$; $\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5$; $\sqrt[4]{x^{12}}=x^{\frac{12}{4}}=x^3$, при $x>0$.

3. ИЗВЛЕКУВАЊЕ МНОЖИТЕЛИ ПРЕД ЗНАКОТ НА КОРЕН и ВНЕСУВАЊЕ МНОЖИТЕЛИ ПОД ЗНАКОТ НА КОРЕН

Нека е даден коренот $\sqrt[n]{a^nb}$ при $a>0$ и $b>0$. На основа формулата (1), добиваме: $\sqrt[n]{a^nb}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$, т. е.

$$\sqrt[n]{a^nb}=a\cdot\sqrt[n]{b}\quad \text{при } a>0 \text{ и } b>0. \tag{6}$$

По таков начин велиме дека извршивме одредена *трансформација* на дадениот корен.

Трансформацијата на корен, при која од множители, што се под знакот на коренот, се добиваат други множители согласно формулата (6), што ги пишуваме пред знакот на коренот, се вика *извлекување множители пред знакот на коренот*. Оваа трансформација може да се изврши само кај корен, кај кого показателите на некои множители во поткореновиот израз (радикандот) се поголеми од корeновиот показател. Се извршува на тој начин што секој од тие множители го разложуваме на производ од два степена, од кои едниот да е со степенов показател делив со корeновиот показател, а другиот да е со степенов показател помал од корeновиот показател. Потоа ги применуваме правилата за коренување на производ и степен.

Примери: а) $\sqrt{x^7} = \sqrt{x^6 \cdot x} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{x} = x^3 \cdot \sqrt{x}$, при $x > 0$;

б) $\sqrt[3]{16a^4b^3c^2} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2 \cdot a^3ab^3c^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{2ac^2} = 2ab\sqrt[3]{2ac^2}$;

в) $\sqrt[5]{243x^{13}y^4} = \sqrt[5]{3^5x^{10}x^3y^4} = \sqrt[5]{3^5}\ \sqrt[5]{x^{10}} \cdot \sqrt[5]{x^3y^4} = 3x^2\sqrt[5]{x^3y^4}$.

Нужно е да забележиме дека формулата (6) е точна само ако се исполнети условите $a > 0$ и $b > 0$. Ако тие услови не се исполнети, а корeновиот показател е парен број ($n = 2k$), тогаш наместо формулата (6) ја користиме формулата:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}b} = |a|\sqrt[2k]{b} \tag{6'}$$

Трансформацијата извлекување множители пред знакот на корен овозможува корените да ги доведеме во попрост вид. Таа овозможува и една друга трансформација на корените, наречена *ослободување на поткореновиот израз од именител*, ако тој има таков.

Трансформацијата ослободување на поткореновиот израз од именител ја извршуваме, кога броителот и именителот на поткореновиот израз ги помножиме со така избрани множители, при што именителот да постане степен со показател еднаков или делив со корeновиот показател. Потоа ги применуваме соодветните правила за коренување на количник и степен.

Примери: а) $\sqrt{\dfrac{a}{18}} = \sqrt{\dfrac{a}{2 \cdot 3^2}} = \sqrt{\dfrac{2a}{2^2 \cdot 3^2}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{2a}$;

б) $\sqrt[5]{\dfrac{2x^3}{125y^2}} = \sqrt[5]{\dfrac{2x^3 \cdot 5^2y^3}{5^3 \cdot 5^2y^2y^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{50x^3y^3}{5^5y^5}} = \dfrac{1}{5y} \cdot \sqrt[5]{50x^3y^3}$.

И оваа трансформација ја вршиме со цел корените да се доведат во попрост вид.

Меѓутоа, понекогаш корисно е и обратното: множителите пред знакот на коренот да се внесат под знакот на коренот. Таа трансформација се вика *внесување множители под знакот на корен*, а се извршува согласно равенството:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^nb} \quad \text{при} \quad a > 0 \text{ и } b > 0. \tag{7}$$

Равенството (7) е, всушност, равенството (6) прочитано оддесно налево.

Примери: а) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$; б) $3xy^2\sqrt[3]{x^2y}=\sqrt[3]{(3xy^2)^3\cdot x^2y}=\sqrt[3]{27x^5y^7}$;

в) $\frac{1}{x}\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^3\cdot y}=\sqrt[3]{\frac{y}{x^3}}$.

Запомнете: Ако множителот пред знакот на корен е во именител, тој се внесува под знакот на корен пак како именител и обратно.

Внесувањето множители под знакот на корен се користи многу често и при одредувањето на приближната вредност со поголема точност на производот од рационален и ирационален број зададен со корен.

Пример: Да се определи приближната вредност на $7\cdot\sqrt{3}$ со точност од 0,1. Тоа може да се направи на два начина. Прво, да се внесе множителот 7 под знакот на корен, т. е. $7\cdot\sqrt{3}=\sqrt{49\cdot 3}=\sqrt{147}\approx 12{,}1$.

Или да се определи претходно приближната вредност на $\sqrt{3}\approx 1{,}7$ со точност до 0,1, а потоа истата да се помножи со бројот 7. Но во тој случај се добива резултат: $7\cdot 1{,}7\approx 11{,}9$ кој не е со точност до 0,1 туку со точност до 0,7 $(7\cdot 0{,}1)$.

4. СТЕПЕНУВАЊЕ И КОРЕНУВАЊЕ НА КОРЕН

Нека е $a>0$, а m и n природни броеви. Тогаш на основа равенството 5° (теорема 1, § 48) имаме: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}$, кое може да се запише и вака:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\quad \text{при } a>0. \tag{8}$$

Равенството (8) ни го дава правилото за степенување на корен, кое гласи:

Правило 6. *Корен од позитивен поткоренов израз се степенува, кога кореновиот показател остане истиот, а со тој степенов показател се степенува само поткореновиот израз.*

Примери: а) $(\sqrt[4]{3})^2=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[4]{9}$;

б) $(\sqrt[6]{x^3y^4})^5=\sqrt[6]{(x^3y^4)^5}=\sqrt[6]{x^{15}y^{20}}=x^2y^3\sqrt[6]{x^3y^2}$; $x>0$, $y>0$.

Во специјален случај кога $m=n$, равенството (8) гласи:

$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a,\quad \text{при } a>0. \tag{9}$$

Ако n е непарен број, тогаш равенствата (8) и (9) важат и за $a<0$.

Примери: а) $(\sqrt[5]{-2})^3=\sqrt[5]{(-2)^3}=\sqrt[5]{-8}$; б) $(\sqrt[7]{-5})^7=\sqrt[7]{(-5)^7}=-5$

Коренувањето на корен се базира исто на равенството 5° (теорема 1, § 48). При $a>0$ и m и n природни броеви, од него имаме:

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}$, кое може да се запише и вака:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a},\quad \text{при } a>0. \tag{10}$$

Од равенството (10) следува правилото:

Правило 7. *Корен од позитивен поткоренов израз се коренува, кога ги помножиме кореновите показатели, а поткореновиот израз го оставиме непроменет.*

Примери: $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; $\quad \sqrt[4]{\sqrt[5]{a^3b^2}} = \sqrt[20]{a^3b^2}$.

Ако коренот што го коренуваме има и множители пред знакот на корен, тогаш нив претходно ги внесуваме под знакот на коренот, а потоа коренуваме; или коренуваме директно според правилото за коренување на производ, а потоа вршиме множење на добиените корени.

Пример: $\sqrt[3]{3a\sqrt{ab}} = \sqrt[3]{\sqrt{9a^3b}} = \sqrt[6]{9a^3b}$ или

$$\sqrt[3]{3a\sqrt{ab}} = \sqrt[3]{3a} \cdot \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{9a^2} \cdot \sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{9a^3b}.$$

ЗАДАЧИ

1. Доведи ги корените на заеднички коренов показател:

а) $\sqrt[4]{a^3b^2}$; $\sqrt{abx}$; $\sqrt[6]{a^4b^3x^2}$; $\quad$ б) $\sqrt[4]{4a^2b}$; $\sqrt[24]{9a^4b^6}$; $\sqrt[6]{5a^3}$.

2. Упрости ги корените:

а) $\sqrt[6]{a^4b^2}$; $\sqrt[9]{(a+b)^6}$; $\quad$ б) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$; $\sqrt[8]{x^4+2x^2y^2+y^4}$.

3. Намали ги кореновите показатели на корените, ако е можно:

а) $\sqrt[3n]{4^n x^{2n}}$; $\sqrt[12]{125x^6y^9}$; $\quad$ б) $\sqrt[4n]{16x^2y^{2n}z^{2(n+1)}}$; $\sqrt[m^2-n^2]{x^{m+n}}$.

4. Изврши ги означените операции со корените:

а) $\sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$; $\quad$ б) $\sqrt[6]{x^5y^4} : \sqrt[4]{xy^{-1}}$; $\quad$ в) $\sqrt[5]{8} : 2\sqrt[3]{2}$.

5. За кои вредности на x се точни следниве равенства:

а) $\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$; $\quad$ б) $\sqrt[3]{x(x+1)} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1}$; $\quad$ в) $\sqrt[2k]{x^{2k}} = x$;

г) $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$; $\quad$ д) $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$.

6. Извлечи ги сите множители што можат да се извлечат пред знакот на корен:

а) $\sqrt[n]{a^{2n+5}}$; $\sqrt[n+1]{x^{2n^2-2}}$; $\quad$ б) $\sqrt{x^3y+2x^2y^2+xy^3}$; $\sqrt[3]{16(x^2-y^2)^2(x+y)}$;

в) $\sqrt[2n]{x^{2n+1}y^{4(n+1)}}$; $\quad \sqrt[n]{\dfrac{2^{n+1}x^{2n+1}}{y^2z^{n+3}}}$.

7. Да се внесат рационалните множители под знакот на корен:

а) $\frac{2x^2}{3}\sqrt[n]{\frac{27a^2}{4x^3}}$; $\frac{a}{x}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, б) $(a+b)\sqrt[3]{\frac{2a^2}{a^2-b^2}}$; $a^n\sqrt[3]{\frac{x}{a^{2n}}}$

8. Не пресметувајќи ги корените определи кој од следниве броеви е поголем:

а) $2\sqrt{5}$ или $5\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{5}$; или $4\sqrt{3}$; в) $2\sqrt[3]{3}$ или $3\sqrt[3]{2}$; г) $\sqrt{2}+$ $+\sqrt{3}$ или $\sqrt{7}$; д) $\sqrt{10}-3$ или $\sqrt{5}-2$.

9. Упрости ги изразите: а) $\sqrt[5]{\sqrt{5}}$; $\sqrt[m+n]{\sqrt[m-n]{x}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$; $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$;

в) $\sqrt[2m^2]{\sqrt[3n]{a^{m+n}}}$; $\sqrt[m-n]{x^{m^2-2mn+n^2}}$.

10. Изврши ги означените операции и упрости ги изразите:

а) $\sqrt{3x^{-3}y^{-3}}:\sqrt{x^3y^{-5}}$; $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})(y\sqrt{x}+x\sqrt{y})$; $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}:\sqrt{x^2-1}$;

б) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x^2-9}{2}}:\frac{x}{5y}\sqrt{\frac{x-3}{2x+6}}$; $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{x}}}$; $\frac{3}{x-x}\sqrt{\frac{2a}{x-y}}:\sqrt{\frac{18a^3}{(x-y)^3}}$

§ 51. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ И НИВНИ ТРАНСФОРМАЦИИ

1. ИРАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Во целиот тек на школување досега се запознавме со операциите: собирање, вадење, множење, делење, степенување (со показател природен и цел број) и коренување (односно степенување со рационален показател). Првите пет операции се викаат *аритметички* или *рационални операции*, а последната операција — *ирационална операција*.

Сите тие операции (рационални и ирационални) се викаат уште и *алгебарски операции*. Сите пак останати операции (со кои ќе се запознаеме во погорните класови), кои не се алгебарски, се викаат *трансцедентни операции*.

Дефиниција 1. *Множеството од конечно многу посебни и општи броеви, што се сврзани со кои и да било операции, се вика математички (аналитички) израз или кратко само израз.*

Според видот на операциите, што се застапени во изразот, изразите ги делиме на *алгебарски* и *трансцедентни*; а алгебарските изрази пак на *рационални* и *ирационални алгебарски изрази*.

Според тоа ќе ги усвоеме следниве дефиниции:

Дефиниција 2. *Рационален алгебарски израз се вика секој израз во кој се застапени операциите: собирање, вадење, множење, делење и степенување со показател цел посебен број.*

Пример: Рационални алгебарски изрази се:

$$5a^2-2b;\quad 4x+\frac{a+1}{x-2};\quad 3a^4b^{-3}+1;\quad \frac{2-\frac{a}{3}+\frac{x}{5}}{a^2+x^2+1}.$$

Дефиниција 3. *Ирационален алгебарски израз се вика секој израз во кој е застапена, покрај другите алгебарски операции, конечен број пати и операцијата коренување, односно степенување со показател рационален посебен број.*

Пример: Ирационални алгебарски изрази се:

$$1+3\sqrt{2x};\quad 5a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}}x^2;\quad 2x-5+\sqrt[3]{x^2y};\quad \frac{1-\sqrt{x}}{2+\sqrt[3]{x^2y}};\quad \frac{1}{\sqrt[4]{3xy^3}}.$$

Корените, што се содржат во секој ирационален израз, ќе сметаме обично да се аритметички корени. Затоа поткореновите изрази ќе ги разгледуваме само во оние интервали од множеството на реалните броеви во кои тие добиваат ненегативни вредности.

Според тоа, допуштените вредности на аргументите во секој ирационален израз ќе ги одредуваме од условите да се сите поткоренови изрази ненегативни и именителите во изразите да не се анулираат.

Пример: Допуштените вредности на аргументот x во ирационалниот израз $3x+\frac{\sqrt{x-5}}{x-7}$ ќе ги одредиме од условите: $x-5\geqslant 0$; $x-7\neq 0$. Јасно е дека тоа се интервалите: $[5;\ 7)$ и $(7;\ \infty)$.

Забелешки: 1°. Изрази кои содржат аргументи во степеновиот показател, на пример: 2^x, $3^{2-\frac{1}{x}}$; $5^{\sqrt{x}}$, не се алгебарски, т. е. тие не се ниту рационални ниту ирационални. Значи, таквите изрази ќе спаѓаат во трансцедентни изрази.

2° Рационалноста или ирационалноста на даден алгебарски израз често ја разгледуваме и за определен аргумент во него. Велиме дека *алгебарскиот израз е рационален по однос на аргументот x, ако ниту во еден дел од тој израз аргументот x не се содржи во радикандот на некој корен, односно не е степен со показател нецел посебен број.* Ако тој услов не е исполнет, тогаш велиме дека дадениот алгебарски израз е *ирационален по однос на аргументот x.* На пример алгебарскиот израз:

$$x^3\sqrt{2}+x^2\sqrt{y-1}+xy^2\sqrt{y^2-1}-3y$$

е рационален по однос на аргументот x, а ирационален по однос на аргументот y.

2. ТРАНСФОРМАЦИИ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Слично како кај рационалните изрази и со ирационалните изрази можеме да вршиме разни идентични трансформации. На пример: извлекувањето множители пред знакот на корен, внесувањето на множители под знакот на корен, ослободувањето на поткореновиот израз од именител, доведувањето на два и повеќе корени на еднаков коренов показател и др. Се се тоа идентични трансформации што ги вршевме над корените. Понатаму ние ќе се запознаеме и со други трансформации на ирационалните изрази што ќе ги вршиме со однапред поставена цел да ги сведеме во попрост вид или друго.

Сите идентични трансформации со ирационалните изрази ги вршиме на основа својствата и операциите со корени.

Ако трансформацијата на даден ирационален израз ја вршиме со цел истиот да се упрости, тогаш постапуваме како што следува: ако ирационалниот израз е без заг ради, прво ги извршуваме операциите од трет ранг (степенување и коренување), потоа операците од втор ранг (множење и делење) и на крајот операциите од прв ранг (собирање и вадење). За собирање и вадење на корени ќе стане збор подоцна.

Ако во ирационалниот израз се сретнуваат и загради, тогаш прво ги извршуваме операциите во нив, а ослободувањето од заградите се врши исто како и кај рационалните изрази.

Пример: Да се упрости изразот

$$a^2 b^2 \sqrt{\frac{x}{y}}\left(\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{ab}{x}\sqrt{xy}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right), \quad \text{при } x>0;\ y>0.$$

Прво ќе се ослободиме од заградата, извршувајќи го назначеното множење:

$$a^2b^2\sqrt{\frac{x}{y}}\left(\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{ab}{x}\sqrt{xy}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)=a^2b^2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{ab}{x}\sqrt{xy}\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{x}{y}}+$$

$$+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot a^2b^2\sqrt{\frac{x}{y}}=a^2b^2\cdot\frac{y}{x}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2}-\frac{ab}{x}\cdot a^2b^2\sqrt{xy\cdot\frac{x}{y}}+a^2b^2\cdot\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2}=$$

$$=a^2b^2\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}-\frac{a^3b^3}{x}\cdot x+a^4\cdot\frac{x}{y}=a^2b^2-a^3b^3+\frac{a^4x}{y}.$$

3. НОРМАЛЕН ВИД НА КОРЕНИТЕ. СЛИЧНИ КОРЕНИ

Една од почестите трансформации што ги вршиме со корените е *доведување на корените во нормален вид.*

Дефиниција 4. *Даден корен велиме да е во нормален* (*упростен*) *вид, ако неговиот поткоренов израз не содржи именител и множители кои можат да се извлечат пред знакот на корен, како и да е сведен на можно најмал коренов показател.*

Примери: а) Корените: $5\sqrt[3]{x^2}$; $-2a^2b\sqrt[4]{x^3y}$; $\frac{3a}{b^2}\sqrt[5]{2a^2b^3}$ се во нормален вид;

б) Корените $2\sqrt{a^2b^3c}$; $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$; $3a\,x^2\sqrt[6]{a^2x^4}$ не се во нормален вид, бидејќи од првиот корен можат да се извлечат множители пред знакот на корен, во вториот корен поткореновиот израз е дропка, а во третиот корен можат да се скратат показателите.

Како што гледаме, трансформацијата доведување на коренот во нормален вид бара да се извршат следниве три попрости трансформации со коренот:

1. Поткореновиот израз на коренот да се ослободи од именителот (ако тој има таков);

2. Да се извлечат пред знакот на коренот сите множители, што можат да се извлечат;

3. Да се извршат потребните скратувања на показателите на коренот и поткореновиот израз.

Пример: $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}} = a\sqrt[3]{\frac{a^2}{a\cdot a^2}} = \frac{a}{a}\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2}.$

Дефиниција 5. *Два или повеќе корени, кои се во нормален вид и имаат еднакви поткоренови изрази и еднакви коренови показатели, се викаат слични.*

Пример: Корените $3x\sqrt[3]{ax^4} = 3x^2\sqrt[3]{ax}$, $-2x\sqrt[3]{ax}$, $x\sqrt[3]{a^4x} = ax\sqrt[3]{ax}$ се слични бидејќи тие се разликуваат само по рационалните множители пред знакот на корен.

Јасно е дека: за да утврдиме дали два корена се слични или не, потребно е претходно истите да ги доведеме во нормален вид.

Нормалниот вид на корените и поимот слични корени ќе ги ползуваме при трансформациите на изрази кои претставуваат збир или разлика од корени.

4. СОБИРАЊЕ И ВАДЕЊЕ НА КОРЕНИ

Во општ случај збирот на два или неколку корени не секогаш може да се запише (трансформира) со помош само на еден корен. Во специјален случај, ако меѓу собироците има слични корени, тогаш нив ги групираме и го извлекуваме заедничкиот множител пред заграда. Таа трансформација ја викаме *сведување на сличните корени* во збирот.

Пример: Да се упрости изразот: $\sqrt{4x} + x^2\sqrt{\frac{1}{x}} + 5\sqrt{x^3} + a^2\sqrt{\frac{9}{x^3}}.$

Дадениот израз претставува збир од четири корени. Нив прво ги доведуваме во нормален вид, а потоа, ако меѓу нив има слични корени, истите ги сведуваме. Така добиваме:

$$\sqrt{4x} + x^2\sqrt{\frac{1}{x}} + 5\sqrt{x^3} + x^2\sqrt{\frac{9}{x^3}} = 2\sqrt{x} + x^2\sqrt{\frac{x}{x^2}} + 5x\sqrt{x} + x^2\sqrt{\frac{9x}{x^4}} = 2\sqrt{x} +$$

$$+ \frac{x^2}{x}\sqrt{x} + 5x\sqrt{x} + \frac{3x^2}{x^2}\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + 5x\sqrt{x} + 3\sqrt{x} = (2 + x + 5x$$

$$+ 3)\sqrt{x} = (5 + 6x)\sqrt{x}.$$

Собирањето и вадењето на корени го вршиме согласно правилата:

Правило 1. *Два или повеќе корени ги собираме, кога ги напишеме еден по друг со истите знаци што ги имаат, потоа корените ги доведуваме во нормалан вид и, ако меѓу нив има слични членови, вршиме сведување.*

Пример: Да се соберат корените: $5\sqrt{a^3}$; $-a^2\sqrt{\frac{1}{a}}$; $\sqrt{8a}$

Решение: $5\sqrt{a^3} - a^2\sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{8a} = 5a\sqrt{a} - a^2\sqrt{\frac{a}{a^2}} + \sqrt{2^3a} =$

$$= 5a\sqrt{a} - a\sqrt{a} + 2\sqrt{2a} = (5a - a)\sqrt{a} + 2\sqrt{2a} = 4a\sqrt{a} + 2\sqrt{2a}.$$

Правило 2. *Еден корен вадиме од друг, кога кон коренот — намаленик го допишеме спротивниот корен на намалителот.*

Пример: Од $2x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ да се извади коренот $-3\sqrt{xy^2}$.

Решение: $2x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}-(-3\sqrt{xy^2})=2x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}+3y\sqrt{x}=\frac{2x}{x}\sqrt[3]{x^2}+3y\sqrt{x}=$

$=2\sqrt[3]{x^2}+3y\sqrt{x}$.

5. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ИЗРАЗОТ ОД ВИДОТ $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

При трансформацијата на некои ирационални изрази, освен примената на правилата за операции со корени, понекогаш ги ползуваме и некои други формули. Такви се, на пример, формулите:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$
$$\text{при } A>0,\ B>0,\ A^2-B>0 \qquad (1)$$

Во точноста на тие формули лесно се уверуваме, кога двете нивни страни ги степенуваме на квадрат. Но пред да го сториме тоа, треба да покажеме дека двете страни на формулите (1) се позитивни.

Ако ја земеме формулата, во која од двојните знаци го избереме горниот знак плус $(+)$, очигледно е дека нејзините страни се позитивни, бидејќи корените што фигурираат ги разгледуваме како аритметички корени, а на десната страна имаме збир. Ако пак ја земеме формулата, во која од двојните знаци го избереме долниот знак минус $(-)$, тогаш и кај неа двете страни се позитивни, бидејќи при услов да е $A>0$, $B>0$ и $A^2-B>0$, ќе биде и

$$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}>\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

кое произлегува од својството: од два броја поголемиот број има и поголем аритметички корен.

Сега, ако двете страни на формулите (1) ги квадрираме, добиваме:

$$\left(\sqrt{A\pm\sqrt{B}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2$$

$$A\pm\sqrt{B}=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}+\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\pm$$
$$\pm2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\cdot\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$A\pm\sqrt{B}=\frac{2A}{2}\pm\sqrt{A^2-(A^2-B)},\ \text{односно}\ A\pm\sqrt{B}=A\pm\sqrt{B}.$$

Значи, формулите (1) при наведените услови се точни.

Ќе покажеме како со помош на формулите (1) сложениот израз од видот $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ во случај кога $A^2 - B$ е полн квадрат го трансформираме во попрост израз.

Пример 1. Да се упрости изразот $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$.

Множителот 2 прво го внесуваме под знакот на коренот:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}}$$

Гледаме: $A = 7$, $B = 40$, а $A^2 - B = 49 - 40 = 9$ е точен квадрат. Со примена на формулата (1), добиваме:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{49 - 40}}{2}} - \sqrt{\frac{7 - \sqrt{49 - 40}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{7 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{7 - 3}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

Пример 2. Да се упрости изразот $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}}$ при $x \geqslant 1$

Решение: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x + \sqrt{4(x - 1)}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4(x - 1)}}{2}} +$

$$+ \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4(x - 1)}}{2}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x + \sqrt{(x - 2)^2}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{(x - 2)^2}}{2}} = \sqrt{\frac{x + |x - 2|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x - 2|}{2}}.$$

Бидејќи е $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{ако } x \geqslant 2 \\ -(x - 2), & \text{ако } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$

тогаш имаме: а) ако е $x \geqslant 2$, тогаш

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = \ldots = \sqrt{\frac{x + |x - 2|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x - 2|}{2}} = \sqrt{\frac{x + x - 2}{2}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{x - (x - 2)}{2}} = \sqrt{x - 1} + 1;$$

б) ако е $1 \leqslant x < 2$, тогаш:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = \ldots\ldots = \sqrt{\frac{x + |x - 2|}{2}} + \sqrt{\frac{x - |x - 2|}{2}} = \sqrt{\frac{x - (x - 2)}{2}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{x + (x - 2)}{2}} = 1 + \sqrt{x - 1}.$$

Значи: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = 1 + \sqrt{x - 1}$ при $x \geqslant 1$.

6. РАЦИОНАЛИЗИРАЊЕ ИМЕНИТЕЛОТ НА ДРОПКИ

Трансформацијата на дробен израз, кој во именителот содржи барем еден корен, во идентичен на него израз, но кој во именителот нема да содржи ниту еден корен, се вика *рационализирање на именишелош.*

Пред да минеме на разјаснувањето на оваа нова трансформација на ирационалните изрази, ќе воведеме еден нов поим — *конјугирани ирационални изрази.*

Дефиниција 6. *Два ирационални изрази се викаат конјугирани, ако и само ако нивниот производ е некој рационален израз.*

На пример, изразите $\sqrt[5]{a^4x^3}$ и $\sqrt[5]{ax^2}$ се конјугирани, бидејќи

$$\sqrt[5]{a^4x^3}\cdot\sqrt[5]{ax^2}=\sqrt[5]{a^5x^5}=ax.$$

Ќе наведеме само некои попрости случаи на одредување на конјугирани ирационални изрази.

1°. За изразот од видот $\sqrt[n]{a^kb^l\ldots c^m}$, при што сите показатели $k, l, \ldots m$ се помали од n; конјугиран израз ќе биде изразот $\sqrt[n]{a^{n-k}b^{n-l}\ldots c^{n-m}}$, бидејќи при $a>0$, $b>0$, ..., $c>0$ имаме:

$$\sqrt[n]{a^kb^l\ldots c^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-k}b^{n-l}\ldots c^{n-m}}=\sqrt[n]{a^nb^n\ldots c^n}=ab\ldots c.$$

2°. За изразот од видот $\sqrt{A}+\sqrt{B}$, каде што A и B се позитивни рационални изрази, конјугиран израз ќе биде изразот $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ и обратно. На основа идентитетот $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ имаме:

$$(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=(\sqrt{A})^2-(\sqrt{B})^2=A-B.$$

3°. За изразите $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ и $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ нивните конјугирани изрази ги одредуваме на основа идентитетите:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3;\quad (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

Ако ставиме: $a=\sqrt[3]{A}$ и $b=\sqrt[3]{B}$; ќе добиеме:

$$(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=(\sqrt[3]{A})^3+(\sqrt[3]{B})^3 \text{ и}$$

$$(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B})(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2})=(\sqrt[3]{A})^3-(\sqrt[3]{B})^3.$$

Значи, за дадените изрази нивни конјугирани ќе бидат изразите:

$$\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2} \quad\text{и}\quad \sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}.$$

Како што може да се наслути: за даден произволен ирационален израз одредувањето на неговиот конјугиран израз е мошне сложена задача, меѓутоа секогаш разрешлива. Постојат и општи методи за нејзино решавање, но тие се предмет на изучување во вишата алгебра.

Јасно е дека при рационализацијата на именителот на даден дробен ирационален израз доволно е броителот и именителот на тој израз да се помножат со израз, што е конјугиран на именителот на дадениот израз.

Да го покажеме тоа на неколку примери:

Пример 1. Да се рационализира именителот на дропката $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}$.

Ако поткореновиот број 18 го разложиме на множители, наоѓаме $18 = 2 \cdot 3^2$. До полн куб јасно е дека недостига множителот $2^2 \cdot 3$.

Значи, конјугиран израз на $\sqrt[3]{18} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$ е коренот $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}$.

Со множење на броителот и именителот на дадената дропка со $\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}$, добиваме:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{18}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{\sqrt[3]{12}}{6}.$$

Пример 2. Да се упрости изразот $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, при $x > 0$, $y > 0$.

Решение: $$\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} =$$

$$= \frac{x\sqrt{xy} + yx - xy - y\sqrt{xy}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)\sqrt{xy}}{x-y} = \sqrt{xy}.$$

Пример 3. Да се рационализира именителот на дропката $\frac{12}{3 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$.

Именителот на дропката ќе го разгледуваме како разлика $(3 + \sqrt{2}) - \sqrt{5}$. Ако именителот и броителот на дропката ги помножиме со збирот $(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}$, ќе добиеме:

$$\frac{12}{(3 + \sqrt{2}) - \sqrt{5}} = \frac{12[(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}]}{[(3 + \sqrt{2}) - \sqrt{5}] \cdot [(3 + \sqrt{2}) + \sqrt{5}]} = \frac{12(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \frac{12(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{9 + 2 + 6\sqrt{2} - 5} = \frac{12(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{6 + 6\sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{1 + \sqrt{2}}.$$

Потоа броителот и именителот на добиената дропка го множиме со $1 - \sqrt{2}$, па добиваме: $$\frac{2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5})(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{5} - 3\sqrt{2} - 2 - \sqrt{10})}{1 - 2} = \frac{2(1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{10})}{-1} =$$

$$= 2(2\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{10} - 1).$$

Пример 4. Да се рационализира именителот на изразот $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}$.

За изразот $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$ негов конјугиран израз е $(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y^2} + (\sqrt[3]{y^2})^2$.

Ако со него го помножиме броителот и именителот на дадениот израз, добиваме:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}=\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{y^2}+(\sqrt[3]{y^2})^2}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})[(\sqrt[3]{x^2})^2-\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{y^2}+(\sqrt[3]{y^2})^2]}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^4}}{(\sqrt[3]{x^2})^3+(\sqrt[3]{y^2})^3}=\frac{x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}}{x^2+y^2}.$$

Пример 5. Да се рационализира именителот на дропката $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$.

Рационализацијата не може да се изврши само со едно множење.

Прво броителот и именителот ги множиме со $\sqrt{5+\sqrt{2}}$ за да се ослободиме од првиот корен: $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}}{(\sqrt{5+\sqrt{2}})^2}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}}{5+\sqrt{2}}$.

Потоа броителот и именителот на добиената дропка ги множиме со разликата $5-\sqrt{2}$, па добиваме:

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}}{5+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}\cdot(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{2}}\cdot(5-\sqrt{2})}{23}.$$

ЗАДАЧИ

1. Доведи ги корените во нормален вид:

а) $\sqrt[3]{\frac{xy}{x+y}}$; $\sqrt[n]{\frac{a^2b}{x^{n+1}}}$; б) $\sqrt{\frac{x^3}{a^2+b^2}}$; $\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$; в) $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y^3-y^2}{x^2-x^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{a^2+2ab+b^2}}$

2. Да се соберат корените: а) $3\sqrt{2}+5\sqrt{8}-\sqrt{128}+\sqrt{32}$; б) $2\sqrt{3}+5\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\sqrt{243}$; в) $a\sqrt{\frac{1}{a}}+2\sqrt{a}-5\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}+(a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$;

г) $4y\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}-2x\sqrt[5]{\frac{32y^3}{x^4}}+5\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{xy^3}$; д) $3\sqrt{x^2y}+2xy\sqrt{\frac{1}{x}}-3x^2\sqrt{\frac{y}{x^3}}+6\sqrt{xy^2}$.

3. Изврши ги означените операции:

а) $\frac{3}{2y}\sqrt{\frac{2x^3}{y}}:\frac{6}{4x}\sqrt{\frac{2x}{y^4}}$; б) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y}}:\frac{\sqrt[4]{x^3y^2}}{\sqrt[3]{x^2y}}\cdot\sqrt[5]{x^3y}$; в) $\left(\frac{2x^2}{y}\sqrt{\frac{y}{3x}}\right)^3$;

г) $\sqrt[4]{15\sqrt[3]{2x^2}:(3\sqrt[6]{x^2})}$.

4. Упрости ги изразите: а) $a\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}\sqrt{a^{-1}}}}$; б) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}-2\sqrt[3]{a}-$

$-\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^7}}-\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}}$; в) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$; г) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

5. Разложи ги на множители изразите: а) $\sqrt{ax}+\sqrt{ay}$; б) $\sqrt{7}-\sqrt{21}$.

6. Трансформирај ги корените во попрост вид:

а) $\sqrt{11+\sqrt{40}}$; $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{6+\sqrt{11}}$; $\sqrt{17-2\sqrt{30}}$; в) $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$ при $x>1$; г) $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}}+\sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

7. Рационализирај ги именителите на дропките:

а) $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{a^3}{\sqrt[n]{a^{n-2}}}$; $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$;

в) $\dfrac{a}{\sqrt{a-\sqrt{a}}}$; $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\dfrac{10}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}$;

8. Рационализирај ги броителите на дропките:

а) $\dfrac{4+\sqrt{a}}{3}$; $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$; б) $\dfrac{9\sqrt{xy}-5y\sqrt{\frac{x}{y}}+6}{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

9. Упрости ги изразите: а) $\dfrac{1}{2-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{3+\sqrt{a}}$;

б) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$; г) $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$;

д) $(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})$.

10. Одреди ја вредноста на изразот $x+\dfrac{1}{x}$ за $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$.

11. Упрости го изразот: а) $2a+\sqrt{a^2-4a+4}$ за $a<2$;

б) $\sqrt{ax^2+2axy+ay^2}-\sqrt{ax^2-2axz+az^2}+\sqrt{ay^2+2ayz+az^2}$, при $y<x<z$.

12. Изврши ги означените операции и упрости ги изразите:

$(-a-\sqrt{a^2+b^2})(-a+\sqrt{a^2+b^2})$; $\left(\sqrt{x+3\sqrt{y}}-\sqrt{x-3\sqrt{y}}\right)^2$;

13. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{x-y}{xy}}$;

$\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$;

14. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

$a^2b^2\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\left(\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{ab}{x}\sqrt{xy}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$;

15. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}\cdot\left(\frac{\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}}\right)$;

$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

16. $\left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}}+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right)$;

$\left(x\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)\left(x\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{y}{3}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$;

17. $\left(\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\frac{1}{a-b}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\left(5x^{-\frac{3}{3}}\sqrt{y^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{xy^{-\frac{1}{3}}}}\right)^2$;

18. $\left(\frac{1}{1-\sqrt{1-a^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-a^2}}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\frac{a^3}{2(2\sqrt{1-a^{2-1}})}$; $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}+y}$;

$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}+$
$+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$.

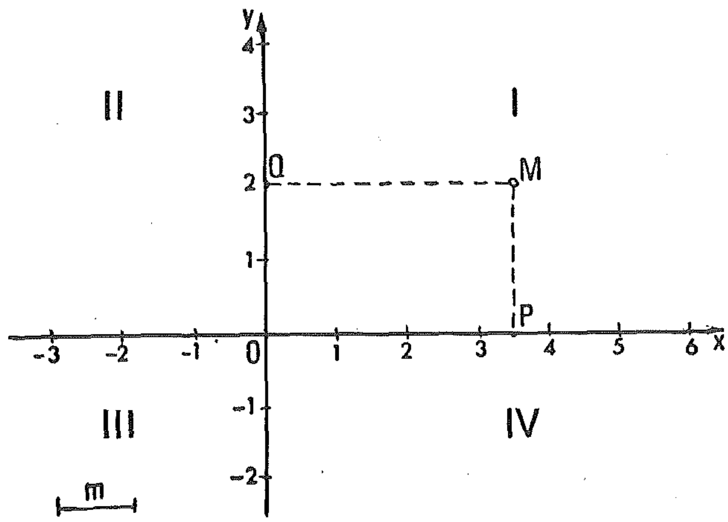
Глава VII

ФУНКЦИИ И ГРАФИЦИ

§ 52. ПРАВОАГОЛЕН ДЕКАРТОВ КООРДИНАТЕН СИСТЕМ

1. Во § 37 покажавме дека положбата на секоја точка на бројната оска е еднозначно определена со еден и само еден реален број x. Сега ќе покажеме како се определува положбата на точките во рамнината.

Во рамнината на тетратката цртаме две заемно нормални прави Ox и Oy, кои потоа ги ориентираме а нивната заедничка точка O ја земаме како почеток на обете ориентирани прави. Потоа избираме и една произволна отсечка m за единица мерка, со која ќе ги мериме сите отсечки на обете прави (сл. 33).



Сл. 33

Правите Ox и Oy се викаат *координатни оски*, а нивниот пресек O — *координатен почеток*. Правата Ox, која обично се зема во хоризонтална положба се вика *апсцисна оска* или *x-оска*, а правата Oy, што е нормална на неа, се вика *ординатна оска* или *y-оска*. Како позитивна насока на апсцисната оска се зема насоката надесно од координатниот почеток, а на ординатната оска — насоката нагоре од координатниот почеток.

Вака определени апсцисната и ординатната оска заедно определуваат еден *координатен систем* во рамнината. Бидејќи обете оски се сечат под прав агол, системот се вика уште и *правоаголен декартов координатен систем*, а се обележува со XOY. Рамнината во која е определен некој координатен систем се вика *координатна рамнина*.

Координатните оски ја разделуваат рамнината на четири делови — полиња наречени *квадранти*. Како I квадрант се зема горното десно поле, како II квадрант — горното лево поле, III квадрант — долното лево поле и за IV квадрант се зема долното десно поле (сл. 33).

2. Земаме во координатната рамнина една произволна точка M и ортогонално ја проектираме на оските Ox и Oy, т. е. ги спуштаме нормалите MP и MQ на тие оски (сл. 33). Така на координатните оски ги добиваме точките P и Q, ортогонални проекции на точката M на оските Ox и Oy. На тој начин, како што гледаме, на секоја точка од рамнината соодветствуваат по две точно определени точки на координатните оски, и обратно: на секои две точки од координатните оски соодветствува една и само една точка во рамнината — пресечната точка на нормалите издигнати во дадените две точки кон оските.

На точката P на оската Ox одговара точно определен реален број x, а исто и на точката Q на оската Oy одговара некој точно определен реален број y.

Според тоа: *положбата на точката M во рамнината потполно и еднозначно е определена со реалните броеви x и y, кои се викаат координати на точката M. Првата координата x се вика апсциса на точката M, а втората координата y се вика ордината на точката M.*

Усвоено е координатите на точките да се пишуваат во заграда по буквата што ја означува соодветната точка; и тоа прво се пишува апсцисата, а потоа ординатата, на пример $M(x, y)$.

Значи, записот $A(-3;\ 5)$ ќе означува дека точката A има апсциса $x=-3$ и ордината $y=5$.

На сл. 34 обележените точки имаат координати: $A(-3;\ 5)$, $B(2{,}5;\ -4)$, $C(5;\ 2)$, $D(-6;\ -1)$, $E(-4{,}5;\ 0)$, $F(4;\ 0)$, $G(0;\ 3)$ и $H(0;\ -2{,}5)$. Според тоа, точките што лежат на апсцисната оска имаат ордината еднаква на нула; а точките што лежат на ординатната оска имаат апсциса еднаква на нула. Координатниот почеток, бидејќи лежи и на ординатната и на апсцисната оска, има и апсциса и ордината еднакви на нула т.е $O(0;\ 0)$.

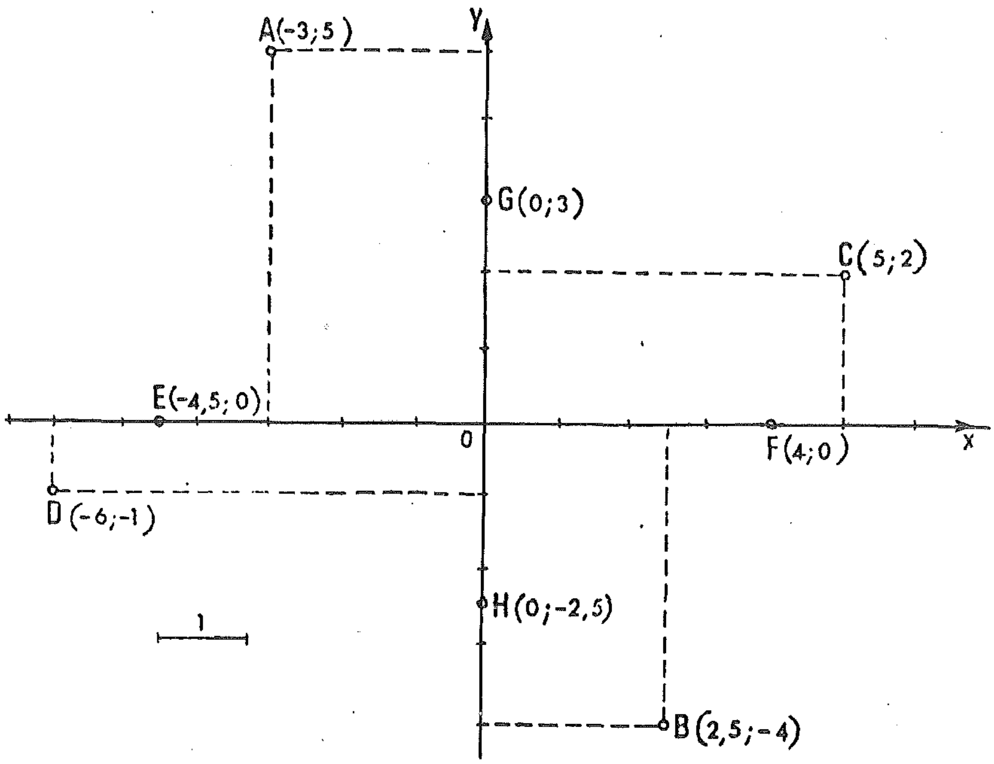
Следнава таблица покажува какви знаци имаат кординатите на точките што лежат во различните квадранти:

Квадранти / Координати	I	II	III	IV
Апсциса	+	—	—	+
Ордината	+	+	—	—

3. Досега разгледувавме како се определуваат координатите на дадена точка од рамнината, меѓутоа, можно е и обратното, т. е. да се конструира точката M, кога се дадени нејзините координати (x, y).

Координатите x и y претставуваат една двојка реални броеви дадени во определен ред, т. е. кажано е кој од нив е прв (апсциса), а кој е втор (ордината). Велиме тие образуваат *подредена двојка реални броеви.*

Нека е дадена една подредена двојка реални броеви (x, y).



Сл. 34

На првиот број му соодветствува на оската Ox една точно определена точка P, а на вториот број y му соодветствува на оската Oy некоја друга точно определена точка Q. По одредувањето на точките P и Q издигаме од нив нормали кон оските Ox и Oy. Пресекот на нормалите ќе ја даде бараната точка M (сл. 33).

Конструирајте ги во рамнината точките: $A(3; -2)$, $B(-4; 1{,}5)$, $C(-2; 2)$.

Од изложеното дотука следува заклучокот:

На секоја точка од координатната рамнина ѝ соодветствува (може да ѝ се придружи) една и само една подредена двојка реални броеви (x, y), кои се викаат нејзини координати. Првиот број се вика апсциса, а вториот — ордината на точката; и обратно: на секоја подредена двојка реални броеви (x, y) ѝ соодветствува (може да ѝ се придружи) една и само една точка од координатната рамнина, која може да се конструира кога првиот број x се земе за апсциса, а вториот број y — за ордината на таа точка.

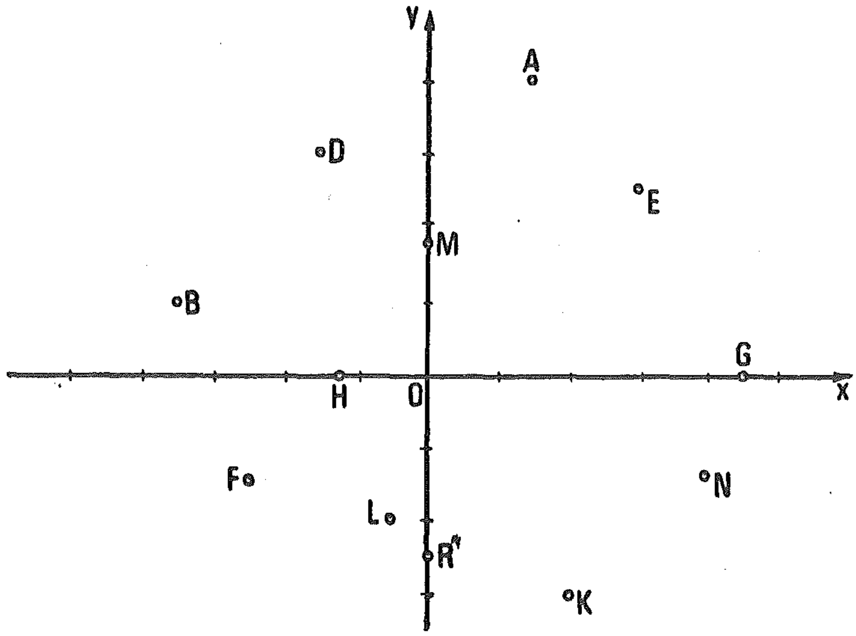
Според тоа: *множеството на сите точки од координатната рамнина XOY и множеството на сите подредени двојки реални броеви (x, y) се наоѓаат во обратно еднозначно соодветство.*

ЗАДАЧИ.

1. Определи ги и запиши ги координатите на секоја точка обележена на сл. 35.

2. Определи во кој квадрант лежи секоја од точките:
$A(3{,}2;\ -4)$, $B(-0{,}2;\ 2{,}5)$, $C(-5;\ -0{,}8)$, $D(2{,}25;\ 6)$, $E(-4;\ 3{,}6)$.

3. Каде лежат точките: $A(-2{,}5;\ 0)$, $B(0;\ -3)$, $C(0;\ 0)$, $D(3{,}2;\ 0)$?



Сл. 35

4. Каде лежи точката S, чија апсциса x е: а) позитивна, б) негативна, в) нула?

5. Каде лежи точката K, чија ордината y е: а) позитивна, б) негативна, в) нула?

6. Конструирај ги во рамнината XOY точките чии координати се:
$A(-2;\ 4)$, $B(-3{,}5;\ 0{,}5)$, $C(1;\ -5)$, $D(-3;\ -2{,}5)$, $E(0,\ -4{,}2)$,
$F(5;\ -0{,}8)$, $G(-3;\ 0)$, $H(1{,}25;\ 7)$, $K(-0{,}5;\ -3)$, $L(5;\ 0)$!

7. Конструирај ја отсечката AB, кога се познати координатите на нејзините крајни точки: $A(1;\ 4)$, $B(5;\ 2)$. Потоа одреди ги должините на нејзините проекции на координатните оски!

8. Конструирај го триаголникот ABC, кога се познати координатите на неговите темиња: $A(-1;\ -3)$, $B(5;\ 2)$ и $C(0;\ -4{,}5)$!

§ 53. ПРИМЕНА НА МЕТОДОТ НА КООРДИНАТИ

Со помош на методот на координати и примена на знаењата од алгебрата можат да се решат многу проблеми од геометријата.

Еве неколку такви проблеми:

На оската Ox нека се дадени две точки A_1 и A_2, на кои соодветно им одговараат реалните броеви x_1 и x_2. Се поставува прашањето како ќе се одреди растојанието d меѓу дадените точки A_1 и A_2, т. е. должината на отсечката $A_1 A_2$, која во геометријата секогаш ја земаме за позитивна величина.

Од начинот на придружувањето на секоја точка од бројната оска по еден точно одреден реален број, имаме да е:

Растојанието на која и да било точка од почетокот на бројната оска еднакво е на апсолутната вредност на реалниот број, што ѝ соодветствува на таа точка, т. е.

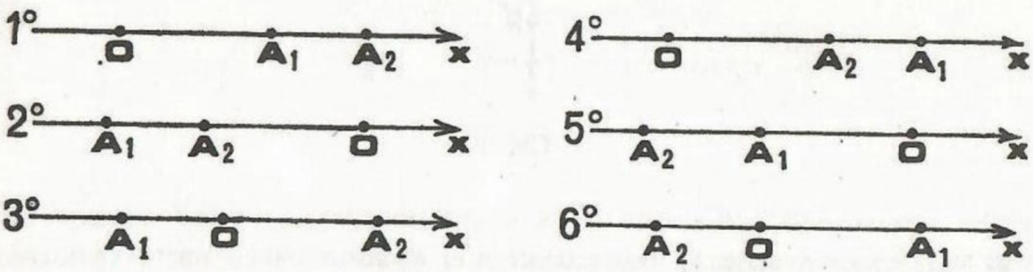
$$OA_1 = |x_1| \quad \text{и} \quad OA_2 = |x_2|. \tag{1}$$

Ќе докажеме дека важи следнава теорема:

Теорема 1. *Растојанието меѓу кои и да било две точки на бројната оска еднакво е на апсолутната вредност од разликата на реалните броеви што им соодветствуваат на тие точки,* т. е.

$$d = A_1A_2 = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|. \tag{2}$$

Доказ: Точките A_1 и A_2 во однос на почетокот O на бројната оска можат да ги имаат следниве шест различни положби покажани на сл. 36. Значи, треба да покажеме дека горното тврдење важи во секој од тие случаи.



Сл. 36

1°. Нека е $0 < x_1 < x_2$, т. е. $|x_1| = x_1$; $|x_2| = x_2$ и $x_2 - x_1 > 0$.

Тогаш имаме: $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = |x_2| - |x_1| = x_2 - x_1$, но бидејќи е $x_2 - x_1 > 0$ тоа ќе важи $d = A_1A_2 = |x_2 - x_1|$.

2°. Нека е $x_1 < x_2 < 0$, т. е. $|x_1| = -x_1$, $|x_2| = -x_2$ и $x_2 - x_1 > 0$.

Тогаш ќе биде: $A_1A_2 = OA_1 - OA_2 = |x_1| - |x_2| = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1$. Но бидејќи е $x_2 - x_1 > 0$, тогаш може да се запише:

$$d = A_1A_2 = |x_2 - x_1|.$$

3°. Нека сега е $x_1 < 0 < x_2$, тогаш имаме $|x_1| = -x_1$, $|x_2| = x_2$ и $x_2 - x_1 > 0$. Според тоа, бараното растојание ќе биде:

$$A_1 A_2 = OA_2 + OA_1 = |x_2| + |x_1| = x_2 - x_1,$$

но бидејќи е $x_2 - x_1 > 0$, тоа следува дека $d = A_1A_2 = |x_2 - x_1|$.

4°. Нека е $0 < x_2 < x_1$, т. е. $|x_1| = x_1$, $|x_2| = x_2$ и $x_2 - x_1 < 0$.

Во тој случај имаме: $A_1A_2 = OA_1 - OA_2 = |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2$; но бидејќи е $x_2 - x_1 < 0$, тоа $x_1 - x_2 > 0$, па затоа ќе важи:

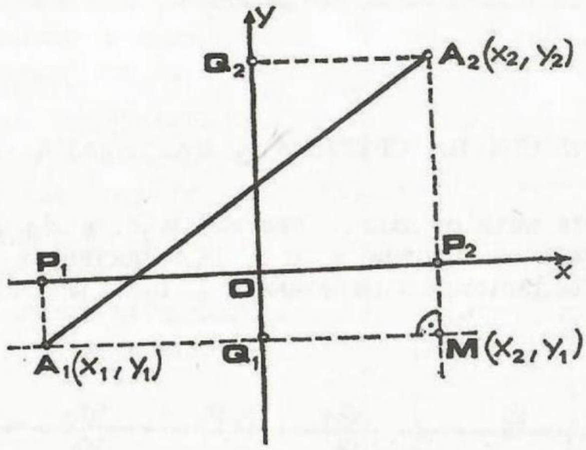
$$d = A_1A_2 = |x_1 - x_2| = |-(x_2 - x_1)| = |x_2 - x_1|.$$

Слично се докажува дека равенството (2) ќе важи и во преостанатите два случаја.

2. РАСТОЈАНИЕ МЕЃУ ДВЕ ТОЧКИ ВО КООРДИНАТНАТА РАМНИНА

Да се определи растојанието меѓу кои и да било две точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ во координатната рамнина XOY, ако се познати нивните координати.

Точката A_1 нека лежи во III квадрант, а точката A_2 во I квадрант (сл. 37), но можно е тие да имаат и некоја друга положба во рамнината XOY. Нивните проекции на координатните оски нека се: на x-оската точките P_1 и P_2, а на y-оската точките Q_1 и Q_2.



Сл. 37

Ако низ точките Q_1 и P_2 повлечеме две прави паралелни со координатните оски и нивната пресечна точка ја означиме со M, ќе го добиеме правоаголниот триаголник A_1MA_2.

Јасно е дека точката M ќе има координати $(x_2; y_1)$. Должината на хипотенузата на тој триаголник еднаква е на бараното растојание меѓу дадените точки A_1 и A_2, а должините на катетите еднакви се: хоризонталната катета A_1M — на растојанието меѓу проекциите P_1 и P_2, а вертикалната катета A_1M — на растојанието меѓу проекциите Q_1 и Q_2 на y-оската (сл. 37).

Од правоаголниот триаголник A_1MA_2, имаме:

$$A_1A_2 = \sqrt{(A_1M)^2 + (A_2M)^2}$$

Ако земеме предвид дека: $A_1M = P_1P_2 = |x_2 - x_1|$;

$A_2M = Q_2Q_1 = |y_2 - y_1|$ и $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$; $|y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$,

тогаш бараното растојание d меѓу точките A_1 и A_2, ќе биде:

$$d = A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

Пример: Да се определи растојанието меѓу точките $(A(-2; -7)$ и $B(6; -1)$

Која точка ќе ја земеме за прва, а која за втора, сè едно е (Зошто?). Согласно равенството (3) имаме:

$$d = AB = \sqrt{[6-(-2)]^2 + [-1-(-7)]^2} = \sqrt{(6+2)^2 + (-1+7)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

Ако една од точките се совпаѓа со координатниот почеток $O\,(0;\,0)$, тогаш формулата (3) го добива следниот вид:

$$d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}. \tag{4}$$

Забелешка: Ако и двете точки лежат на апсцисната, односно на ординатната оска, тие ќе имаат координати $A_1(x_1;\,0)$; $A_2(x_2;\,0)$; односно $A_1(0;\,y_1)$, $A_2(0;\,y_2)$, па формулата (3) ќе премине во:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

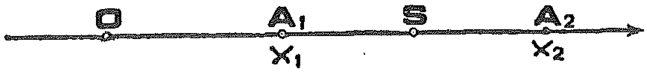
односно во:

$$d=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|.$$

Тие се само специјален случај за растојание меѓу две точки на координатните оски.

3. КООРДИНАТИ НА СРЕДИНАТА НА ДАДЕНА ОТСЕЧКА

1. На x-оската нека се дадени две точки A_1 и A_2, на кои соодветно им одговараат реалните броеви x_1 и x_2. Се поставува прашањето: кој реален број x ѝ соодветствува на точката S, што ја располовува отсечката A_1A_2 (сл. 38)?



Сл. 38

Бидејќи точката S се наоѓа во средината на отсечката A_1A_2, секогаш ќе биде: $P_1S=SP_2$ или $\dfrac{P_1S}{SP_2}=1$

односно $$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=1.$$

Според тоа бараниот број x треба да го задоволува условот

$$\left|\frac{x-x_1}{x_2-x}\right|=1.$$

Точките A_1 и A_2 како и да се расположени спрема почетокот O, разликите $x-x_1$ и x_2-x ќе бидат истовремено или двете позитивни или двете негативни, а нивниот количник е секогаш позитивен број. Затоа горниот услов може да се запише и без знакот за апсолутна вредност, т.е.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=1.$$

Оттука следува дека бараниот реален број x, ќе биде:

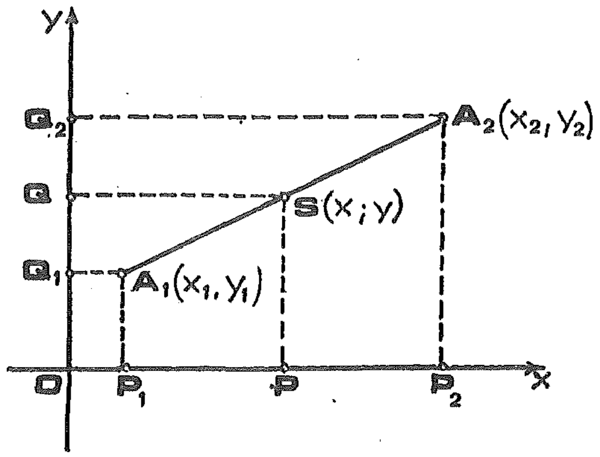
$$x=\frac{x_1+x_2}{2}. \tag{5}$$

2. Да видиме сега што бидува, кога дадената отсечка не лежи ни на една од координатните оски.

На координатната рамнина нека се дадени две кои и да било точки $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ со кои е определена отсечката A_1A_2, а се бараат координатите $(x; y)$ на нејзината средина S (сл. 39).

Да ги проектираме точките A_1, A_2 и S ортогонално на Ox и Oy оска. Така на оската Ox ги добиваме точките P_1, P_2 и P, а на оската Oy—точките Q_1, Q_2 и Q. Бидејќи точката S е средина на отсечката A_1A_2, затоа и точката P ќе биде средина на отсечката P_1P_2, а точката Q—средина на отсечката Q_1Q_2 (сл. 39). Но апсцисите на точките A_1, A_2 и S претставуваат во исто време и апсциси на нивните проекции P_1, P_2 и P на оската Ox, а ординатите на точките A_1, A_2 и S може да се разгледуваат и како ординати на нивните проекции Q_1, Q_2 и Q на оската Oy. Според тоа, може да се примени претходната формула (5), при што се добива:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \quad (6)$$



Сл. 39

Значи: *Айсцисаѿа (ординаѿаѿа) на срединаѿа дадена оѿсечка еднаква е на арийметичкаѿа средина на айсцисиѿе (ординаѿиѿе) на нивниѿе крајни ѿочки.*

Пример: Да се одредат координатите на средината S на отсечката AB, ако е $A(-3; 1)$ и $B(5; -2)$.

Точката S ќе има координати: $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$,

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1+(-2)}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}, \text{ т. е. } S\left(1; -\frac{1}{2}\right).$$

4. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Ако темињата на триаголникот се дадени со своите координати во координатната рамнина, тогаш јасно е дека со тоа формата и големината на триаголникот е потполно определена.

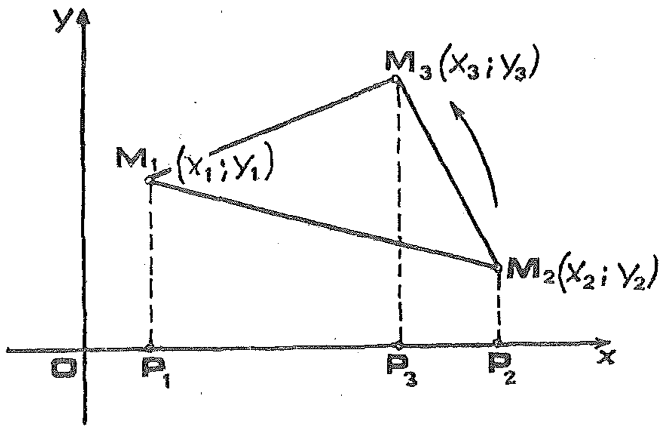
Да ја определиме плоштината на триаголникот $M_1M_2M_3$, кога се дадени координатите на неговите темиња $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ и $M_3(x_3; y_3)$.

При изведувањето на формулата за плоштина на триаголник, ќе претпоставиме дека сите негови темиња се наоѓаат во I квадрант, а со тоа сите нивни координати ќе бидат позитивни (сл. 40).

Ако со P_1, P_2 и P_3 ги означиме ортогоналните проекции на темињата M_1, M_2 и M_3 на триаголникот на оската Ox, тогаш од сликата 40 може да се забележи дека бараната плоштина на триаголникот $M_1M_2M_3$ може да се добие кога од збирот на плоштините на трапезите $M_1P_1P_3M_3$ и $M_3P_3P_2M_2$ се извади плоштината на трапезот $M_1P_1P_2M_2$, т. е.

$$P_{M_1M_2M_3} = P_{M_1P_1P_3M_3} + P_{M_3P_3P_2M_2} - P_{M_1P_1P_2M_2}.$$

Плоштината на секој трапез, како што ни е познато, еднаква е на производот од полузбирот на основите (паралелните страни) и висината на трапезот.



Сл. 40

Должините на основите на трапезите во овој случај ќе бидат соодветните ординати на темињата на триаголникот, а должините на висините на трапезите ќе бидат разликите на нивните апсциси.

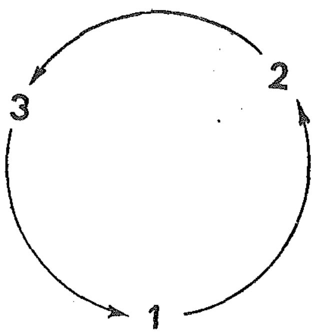
Според тоа, бараната плоштина на триаголникот $M_1M_2M_3$, ќе биде

$$P = \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_3) - \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$$

или $\quad 2P = (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1).$

Кога десната страна се среди и упрости, конечно добиваме:

$$P = \frac{1}{2}\,[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]. \tag{7}$$



Сл. 41

Добиената формула лесно се запомнува, кога се уочи дека во секој член од видот $x_*(y_* - y_*)$ индексите (броевите 1, 2, 3) следуваат еден по друг во кружен (цикличен) ред, како што е тоа шематски покажано на сл. 41.

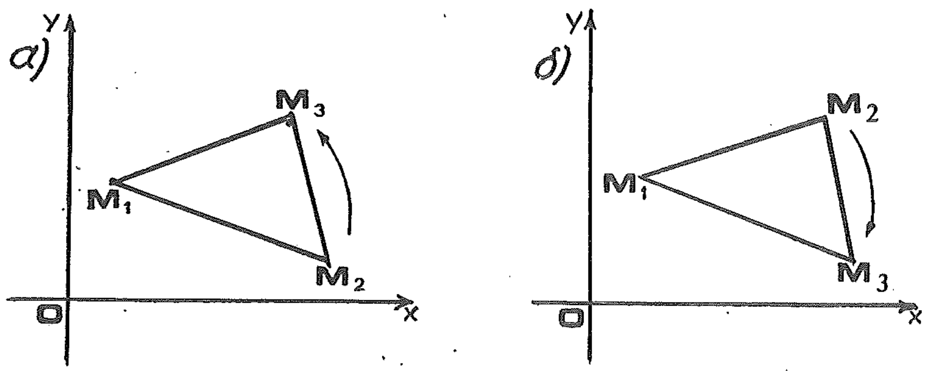
Иако формулата (7) е изведена при претпоставка дека сите темиња на триаголникот лежат во I квадрант, може да се покаже дека таа ќе важи и при која и да било положба на триаголникот во однос на избраниот координатен систем.

Во специјален случај, ако едно од темињата, на пример темето M_3, се совпаѓа со координатниот почеток, тогаш формулата (7) за плоштина на триаголникот ќе го добие следниот вид.

$$P=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1). \tag{8}$$

Нужно е да забележиме дека во зависност од начинот на нумерацијата на темињата на триаголникот, формулата (7) може да даде за плоштината на триаголникот или позитивна или негативна вредност, но чија што апсолутна вредност за исти триаголник секогаш е еднаква.

Ако нумерацијата на темињата на триаголникот е извршена така што, кога се движиме по контурата на триаголникот по маршрута $M_1 \to M_2 \to \to M_3 \to M_1$ за сето време триаголникот да се наоѓа налево од нас, велиме дека нумерацијата е извршена во *позитивна насока* (сл. 42, а) и обратно: ако за сето време триаголникот се наоѓа надесно од нас, велиме дека нумерацијата е извршена во *негативна насока* (сл. 42, б).



Сл. 42 *а*, *б*,

Ако нумерацијата на темињата на триаголникот е извршена во позитивна насока, формулата (7) за плоштина на триаголникот ќе даде позитивна вредност, т. е. $P>0$, и обратно, ако таа е извршена во негативна насока, тогаш е $P<0$. Според тоа, формулата (7), освен што ја дава плоштината на триаголникот, уште и кажува дали нумерацијата на темињата е извршена во позитивна или во негативна насока.

Бидејќи плоштината на триаголникот секогаш се зема за позитивна величина, затоа без оглед како е извршена нумерацијата на темињата, ќе важи следнава формула за пресметување плоштината на триаголникот:

$$P=\frac{1}{2}\cdot|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|. \tag{9}$$

Пример: Да се пресмета плоштината на триаголникот чии темиња се $A(-3;\ 5)$, $B(5;\ -1)$ и $C(-6;\ -4)$.

Ако A го земеме за прво теме, B за второ, а C за трето теме, добиваме:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |-3(-1+4) + 5(-4-5) - 6(5+1)| = \frac{1}{2}|-9-45-36| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |-90| = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45.$$

Ако A го земеме за прво теме, C за второ, а B за трето, тогаш:

$$P = \frac{1}{2}|-3(-4+1) - 6(-1-5) + 5(5+4)| = \frac{1}{2}|+9+36+45| = \frac{1}{2} \cdot |+90| = \frac{1}{2} \cdot 90 = 45.$$

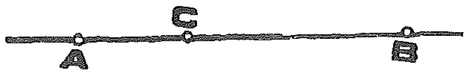
Значи, повторно добиваме $P = 45$.

5. УСЛОВ ТРИ ТОЧКИ ДА ЛЕЖАТ НА ЕДНА ПРАВА

Видовме дека според формулата (7), за плоштина на триаголникот може да се добие или позитивна или негативна вредност. Но, може ли да се случи плоштината на триаголникот да стане еднаква на нула, т. е. може ли за некои вредности на координатите да биде:

$$x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) = 0? \qquad (10)$$

Плоштината на триаголникот, очевидно е дека ќе биде еднаква на нула кога трите негови темиња се најдат на една иста права и тоа само во тој случај (сл. 43).



Сл. 43

Оттука следува заклучокот:

Равенството (10) ќе биде задоволено ако точките $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ *лежат на иста права, и обратно: ако равенството (10) е задоволено, тогаш сигурно е дека точките A, B и C лежат на иста права*. Затоа велиме дека, равенството (10) претставува потребен и доволен услов три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3) да лежат на иста права.

ЗАДАЧИ

1. На точките A и B на бројната оска им одговараат броевите а) 8 и 3, б) —5 и 3, в) —4,2 и —0,8; г) 4 и 7, д) 7 и —1, ѓ) —2 и —8. Да се определи растојанието меѓу точките A и B!

2. На точката A ѝ одговара бројот —7. Кој број ѝ одговара на точката B, ако растојанието $AB = 10$?

3. Определи го растојанието меѓу точките: а) $A(-5; 1)$ и $B(2; -3)$, б) $C(0; -2)$ и $D(-1; -4)$, в) $E\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ и $F\left(-\frac{3}{4}; 5\right)$, г) $M(a, c)$ и $N(c, a)$.

4. Определи го растојанието на секоја од точките од координатниот почеток: $A(-2; 1)$, $B(4; 3)$, $C(0; 7)$, $D(-3; -3)$.

5. Даден е триаголник чии темиња се: $A(3; 6)$, $B(4; -6)$, $C(-5; 2)$. Определи од каков вид е тој триаголник по однос на страните и пресметај го неговиот периметар.

6. Докажи дека триаголникот со темиња $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$ е рамностран!

7. Определи го периметарот на четириаголник чии темиња се: $A(-a; 0)$, $B(0; c)$, $C(a; 0)$, $D(0; -c)$!

8. Покажи дека четириаголникот чии темиња се: $A(-2; 1)$, $B(-2; -7)$, $C(1; -7)$, $D(1; 1)$ е паралелограм!

9. Дадени се три темиња на паралелограмот $ABCD$: $A(-2, -3)$, $B(3; -1)$, $C(5; 4)$. Да се определи четвртото теме D.

10. Дадени се темињата на триаголникот ABC: $A(-4; 0)$. $B(1; -4)$, $C(3; 7)$. Определи ја должината на: а) медијаната повлечена од темето B, б) средната линија на триаголникот што е паралелна со страната AB.

11. Даден е квадрат со страна еднаква на 4 единици должина. Определи ги координатите на темињата на тој квадрат, ако неговите дијагонали лежат на координатните оски.

12. Определи ја плоштината на триаголникот чии темиња се: $A(2; -5)$, $B(7; -1)$, $C(-5; 4)$.

13. Определи ја плоштината на четириаголникот со темиња: $A(2; -5)$, $B(3; -4)$, $C(7; 2)$, $D(3; 3)$.

14. Покажи дека точките $A(-4; 10)$, $B(11; -10)$ и $C(5; -2)$ лежат на иста права.

15. Покажи дека правата што минува низ точките $A(4; -6)$ и $B(-6; 9)$ минува и низ координатниот почеток.

16. Испитај дали точките лежат на иста права: а) $A(0; 4)$, $B(1; 2)$, $C(3; -2)$, б) $A(-2; 1)$, $B(0; 5)$, $C(3; 7)$.

17. Определи ја апсцисата на точката $M(x; -2)$ што лежи на правата која минува низ точките $A(3; 3)$ и $B(-1; 2)$.

§ 54. ПОСТОЈАНИ И ПРОМЕНЛИВИ ВЕЛИЧИНИ

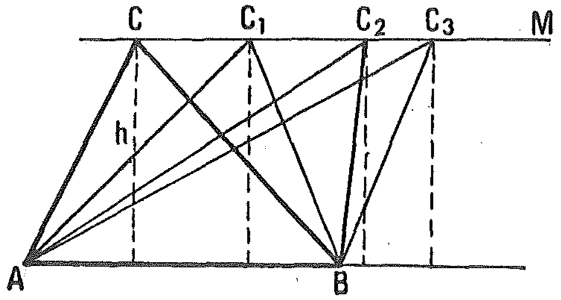
1. Во математиката, физиката и другите науки, како и во секојдневната практика, ние работиме со различни величини. На пример, во геометријата: со должина на отсечка, плоштина, волумен, агол итн.; во физиката: со брзина, температура, топлина, тежина, време, притисок итн.

Во математиката, кога зборуваме за величини, обично се интересираме само за нивната *големина*. Големината на една величина ја одредуваме така што ја измеруваме со друга еднородна величина, земена како единица мерка. Така на пример, должините на отсечките и линиите се мерат со единицата мерка метар, масата на телото — со грам, времето — со секунди итн.

Како резултат на мерењето за големината на секоја величина се добива еден број, кој ни покажува колку пати е поголема или каков дел претставува мерената величина од единицата мерка. Тој број се вика *мерен број* или *бројна вредност* на мерената величина. При разгледувањата што ќе ги правиме понатаму, ќе претпоставуваме дека бројните вредности на величините се реални броеви.

2. Повеќето од величините кои учествуваат при разгледувањето на кој и да било проблем ја менуваат својата големина, т. е. можат да земаат различни бројни вредности. Тоа се *променливи величини*. Но има и такви величини кои при разгледувањето на даден проблем или појава не ја менуваат својата големина т. е. за сето време задржуваат една иста бројна вредност. Тоа се *постојани величини* или *константи*. На пример:

Нека е даден триаголникот ABC. Ако темето C го движиме по правата $CM \| AB$, тој ќе ги заземе положбите: ABC_1, ABC_2, ABC_3 . . . . (сл. 44).



Сл. 44

Забележуваме дека во триаголникот својата големина ја менуваат овие елементи: страните AC, BC, секој од внатрешните агли α, β и γ и периметарот $L = AB + BC + AC$; додека страната AB, висината h, плоштината на триаголникот $P = \frac{AB \cdot h}{2}$ и зборот на внатрешните агли (бидејќи секогаш е $\alpha+\beta+\gamma=180°$) не ја менуваат својата големина. Според тоа, при разгледувањето на овој проблем променливи величини се: елементите AC, BC, α, β, γ и L, а постојани се: AB, h, P и збирот на внатрешните агли $\alpha+\beta+\gamma$.

Нужно е да спомнеме дека една величина во еден проблем може да биде постојана, а во друг — променлива величина. На пример: брзината на движењето на телата кај рамномерното движење е постојана, а кај другите движења е променлива величина.

Постојаните величини ги делиме на *апсолутни константи* и *параметри*.

Апсолутна константа се вика величината која останува постојана при кои и да било услови на разгледуваната задача. На пример, апсолутни константи се: π (односот на периметарот и дијаметарот на кој и да било круг); збирот на внатрешните агли во кој и да било триаголник.

Параметар се вика таква постојана величина која не се менува само при утврдени услови на дадена задача. Но, со промена на условите на задачата, таа добива друга вредност, иако пак некоја точно одредена постојана вредност. На пример: во горниот пример параметри се постојаните величини: страната AB, висината h и плоштината P на триаголникот ABC (сл. 44).

Променливите величини обично ги означуваме со последните букви од латинската азбука: x, y, z, . . . , а постојаните — со првите букви: a, b, c, d, . . . ; но тоа секогаш не е задолжително така.

3. Променливите величини можат да добиваат произволни бројни вредности, но не во сите случаи и кои и да било вредности. Вредностите што може да ги добива (според условите на проблемот) дадена променлива величина, се *допуштени вредности* на таа величина.

На пример: Допуштени вредности на страните AC и BC на триаголникот ABC (сл. 44) се само позитивните броеви, што не се помали од мерниот број на висината h.

Друг пример: Допуштени вредности на секој внатрешен агол на кој и да било триаголник се само позитивните броеви помали од 180° (Зошто)?.

Дефиниција: *Множеството на сите допуштени вредности на една променлива величина се вика област на промената на таа променлива величина.*

Областа на промената на некои променливи величини може да се состои од еден или неколку интервали. На пример, област на промената на еден внатрешен агол во триаголникот е интервал (0°, 180°), т. е. $0° < \alpha < 180°$.

§. 55 ПОИМ ЗА ФУНКЦИОНАЛНА ЗАВИСНОСТ, АРГУМЕНТ И ФУНКЦИЈА

1. Нема појави и процеси кои во природата да се одигруваат наполно изолирано. Секоја појава настанува под дејството на други појави, а и самата раѓа цела низа други појави. Така на пример, кога низ проводникот потече електрична струја, тој се загрева (се зголемува неговата температура), а при одредени услови може да се вжари и да почне да испушта светлина. Под дејството на топлината проводникот се издолжува, се менува неговиот електричен отпор, а околу него се создава електрично поле итн.

Променливите величини што учествуваат во која и да било појава или процес се менуваат во меѓусебна зависност, т. е. промената на една или неколку величини предизвикува одредени промени на други величини.

За науката и изучувањето на појавите во природата од интерес е не само фактот дека постојат променливи величини, туку и откривањето на зависностите што постојат меѓу различните променливи величини, кои учествуваат во настанувањето на дадена природна појава.

Да ги разгледаме следниве примери:

Пример 1. Изминатиот пат S за t секунди при рамномерното движење се одредува според формулата $S = Vt$, каде што со V е означена брзината со која се движи телото.

Ако едно тело се движи рамномерно со брзина $V=4\frac{m}{\text{сек}}$, тогаш изминатиот пат се одредува според формулата $S=4t$. Од неа, при $t=1$ сек, 2 сек, 3 сек, 5 сек, 7,5 сек, 8 сек итн., за изминатиот пат соодветно добиваме: $S=4\,m$, $8\,m$, $12\,m$, $20\,m$, $30\,m$ $32\,m$, итн.

Според тоа, на секоја произволно дадена бројна вредност на едната величина (времето t) и соодветствува по една точно одредена бројна вредност на другата променлива величина (изминатиот пат).

Пример 2. Плоштината P на кругот зависи од неговиот радиус r. Таа зависност е изразена со формулата $P=\pi r^2$ каде што π е позната апсолутна константа.

И тука на секоја произволно дадена вредност на радиусот, секогаш и соодветствува по една точно одредена вредност на плоштината на кругот. Областа на промената и на двете променливи величини (радиусот и плоштината на кругот) се сите позитивни броеви.

Пример 3. Нека е y бројна вредност на рационалниот израз

$$\frac{2x+1}{x-3}, \quad \text{т. е.} \quad y=\frac{2x+1}{x-3}.$$

Допуштени вредности на аргументот x се сите реални броеви $x \neq 3$.

И во овој случај на секоја произволна допуштена вредност на аргументот x, секогаш и одговара по една точно одредена бројна вредност (y) на дадениот рационален израз.

Затоа велиме: бројната вредност на рационалниот израз зависи од аргументот што влегува во него.

Ако две променливи величини се сврзани помеѓу себе така што на секоја произволно дадена допуштена бројна вредност на едната од нив секогаш да ѝ соодветствува по една точно одредена вредност на другата, велиме дека помеѓу тие две променливи величини постои *функционална зависност*. Онаа од двете променливи величини на која ѝ даваме произволни допуштени вредности се вика *независно променлива величина* или *аргумент*, а другата променлива величина, чии вредности зависат од дадените бројни вредности на аргументот, се вика *зависно променлива величина* или *функција*.

Во разгледаните примери: независно променливи величини или аргументи се: времето t, радиусот на кругот r и општиот број x; а зависно променливи величини или функции се: изминатиот пат S, плоштината на кругот P и бројната вредност на рационалниот израз y.

Поимот функција е еден од важните поими во математиката.

Дефиниција 1. *Променливата величина y се вика функција на променливата величина x, ако на секоја произволна допуштена вредност на x, по некој утврден закон (правило) f секогаш ѝ соодветствува по една точно одредена вредност на y.*

Тоа симболички го запишуваме:

$$y=f(x),$$

а го читаме: *y е функција од x.*

Областа на промената на независно променливата величина (аргументот) се вика *дефинициона област* или *област на дефинираност на функцијата*. Велиме: функцијата е *дефинирана* (*определена*) само во областа на промената на аргументот, т. е. во нејзината дефинициона област.

Сите вредности, пак, што ги добива функцијата за семожните вредности на аргументот од неговата област на промена, го образуваат *множеството вредности на функцијата*, кое се вика уште и *област на промената на функцијата.*

Суштината на поимот функција, според горната дефиниција, се состои во постоењето на *еднозначно соодветство* (еднозначна кореспонденција) помеѓу елементите на две основни бројни множества X и $У$ (X — област на промената на едната променлива величина, $У$ — област на промената на другата променлива величина), такви што според некој утврден закон (правило) на секој произволно избран елемент од множеството X секогаш му соодветствува по еден точно одреден елемент од множеството $У$.

2. Горната дефиниција претпоставува тие две множества X и $У$ да се некои бројни множества. Но множествата X и $У$ можат да бидат и две произволни множества составени од кои и да било елементи (броеви, точки, прави, рамнини, агли, лаци итн). Битна карактеристика на поимот функција е постоењето на еднозначно соодветство помеѓу елементите на тие две множества. Така доаѓаме до воопштениот поим за функција, кој може да се дефинира и вака:

Дефиниција 2. *Нека се дадени две множества X и $У$, чии елементи можат да бидат кои да било објекти.*

Ако според некој утврден закон f на секој елемент $x \in X$ секогаш му соодветствува некој точно одреден елемент $y \in У$, тогаш велиме дека во множеството X е зададена (дефинирана) функција $f(x)$, и пишуваме:

$$y=f(x), \quad x \in X.$$

Множеството X се вика *дефинициона област на функцијата*, а множеството $У$ — *област на промената на функцијата* или *множество на вредностите на функцијата.*

Ако множествата X и $У$ се некои бројни множества, тогаш функцијата $y=f(x)$ се вика *бројна функција.*

3. Во записот $y=f(x)$ симболот f, кој се вика *карактеристика* на функцијата, го означува законот (правилото) на соодветството според кој на секоја произволна вредност на аргументот x му се придружува по една соодветна вредност y.

Пример: Нека е дадена функцијата $y = 3x^2 + 5$ во множеството на реалните броеви R.

Ако земеме една произволна вредност $x_0 \in R$, соодветната вредност на функцијата ќе ја одредиме кога: квадратот на бројот x_0 го помножиме со 3 и кон добиениот производ го додадеме бројот 5. Така добиениот број $3x_0^2 + 5$ го означуваме со y_0 и ни ја дава вредноста на функцијата y што соодветствува на произволно избраната вредност на аргументот x_0.

Како што гледаме: одредувањето на бројот $3x_0^2 + 5$ го вршиме кога со секој елемент $x_0 \in R$ последователно ги извршиме операциите: квадрирање, множење и собирање.

Кога со симболот $y = f\,(x)$ ја означиме функцијата $y = 3x^2 + 5$, во овој случај тоа значи дека: со симболот f го заменуваме множеството од симболите: „$3\,.\,.\,.+5$", со кое е утврдено правилото: како на секој елемент $x_0 \in R$ се одредува соодветната вредност y_0 на функцијата; а со симболот $f(x)$ го означуваме изразот „$3x^2 + 5$".

Ако разгледуваме две или неколку функции од x, што се различни помеѓу себе, тогаш освен со симболот $f(x)$ се служиме уште и со симболите:

$$\varphi(x),\ g(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ F(x).$$

Пример: Ако сакаме да го изразиме фактот дека: периметарот L и плоштината P на кругот се функции на неговиот радиус r, пишуваме:

$$L = f\,(r),\quad P = \varphi\,(r),$$

бидејќи периметарот зависи од радиусот поинаку одошто плоштината на кругот.

Ако, пак, два пара различни променливи величини се сврзани со една иста функционална зависност, тогаш за означување на карактеристиката на функцијата употребуваме иста буква.

Пример: Знаеме дека плоштината на кругот ($P = \pi r^2$) зависи од радиусот исто како што зависи и плоштината на топката ($P = \pi d^2$) од нејзиниот дијаметар d. Затоа при симболичкото запишување на тие две функции можеме да употребиме иста буква за означување на карактеристиките на функциите:

$$P_к = f\,(r) \text{ и } P_ш = f\,(d).$$

Значи, за означување на карактеристиката на функцијата можат да се употребуваат кои и да било букви. Во некои случаи за нејзиното означување ја употребуваме и истата буква со која е означена и самата функција. На пример: $y = y(x)$, $P = P(r)$, итн.

Симболот $f(x)$ го употребуваме често и за означување на некои познати дадени функции. На пример: Ако е познато дека $y = 4x^2$, пишуваме $f(x) = 4x^2$, или ако е $y = 2x - 5$, тогаш пишуваме $f(x) = 2x - 5$.

Симболите $f(0)$, $f(1)$, $f(a)$ ги означуваат вредностите на функцијата $f(x)$, што соодветствуваат на дадените нумерички вредности на аргументот, т. е. за $x = 0$, $x = 1$, $x = a$.

Пример: Ако е $f\,(x) = x^2 - 3$, тогаш е $f\,(0) = 0^2 - 3 = -3$, $f\,(1) = 1^2 - 3 = -2$, $f\,(a) = a^2 - 3$

Забелешки: 1°. Во досега разгледаните примери се јавуваа само по две променливи величини: едната—функција, а другата—аргумент. За таквите функции велиме дека зависат само од еден аргумент. Меѓутоа, има случаи кога функцијата зависи од два, три или повеќе аргумента (независно променливи величини).

Примери: а) Плоштината на правоаголникот ($P = ab$) е функција од два аргумента: должината a и ширината b;

б) Волуменот на квадарот ($V = abH$) е функција од три аргумента: должината, ширината и висината;

в) Плоштината на трапезот е функција од три аргумента: должините на двете основи и висината.

Ако се работи за функција од еден аргумент, тогаш обично функцијата ја обележуваме со y, а аргументот со x.

2°. Од две променливи величини помеѓу кои постои функционална зависност во повеќето случаи (но не секогаш) за аргумент може да се земе која и да е од променливите величини. Изборот обично зависи од условот на задачата.

Пример: Периметарот на квадратот е функција на неговата страна, бидејќи на секоја должина на страната соодветствува одредена вредност на периметарот на квадратот. Но точно е и обратното, а имено, дека страната на квадратот е функција на неговиот периметар, бидејќи и за секоја вредност на периметарот соодветствува точно одредена должина на страната.

§ 56. НАЧИН НА ЗАДАВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Основен критериум на функционална зависност помеѓу две променливи величини е постоењето на *соодветство* помеѓу нивните бројни вредности.

Функцијата се смета дека е *зададена* (позната) ако на секоја допуштена вредност на аргументот може да се одреди по некое утврдено правило (закон) соодветната вредност на функцијата. Тоа соодветство помеѓу аргументот и функцијата може да биде зададено на различни начини и тоа: *аналитички, таблички* или *графички.*

1. АНАЛИТИЧКИ НАЧИН НА ЗАДАВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Една функција е зададена (изразена) аналитички кога соодветството помеѓу аргументот и функцијата е изразено со некоја формула, која покажува какви операции треба да се извршат со вредноста на аргументот, за да се одредат соодветните вредности на функцијата.

Примери: а) Со формулата $S=Vt$ го изразивме изминатиот пат S при рамномерното движење како функција на времето t;

б) Со формулата $P=\pi r^2$ ја изразуваме плоштината на кругот како функција на радиусот r;

в) Со формулата $y=\frac{1}{x}$ може да се изрази реципрочната вредност на реалните броеви како функција на тие броеви итн.

2. ТАБЛИЧКИ НАЧИН НА ЗАДАВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

Има функции што не можат да се изразат аналитички. На пример, температурата во текот на еден ден за дадено место е функција на времето, но таа функција не може да се изрази со формула. Во таков случај се прибегнува кон таблички начин на задавање на функционалната зависност помеѓу аргументот и функцијата.

Тоа се прави така што за низа допуштени вредности на аргументот, со мерење или на некој друг начин, се одредуваат соодветните вредности на функцијата, па добиените резултати се подредуваат и внесуваат во една таблица. На пример:

Времето (во часови)	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Температурата (во степени C)	—2	—1	0,5	2	4	5,5	7	8,5	8	7,3	5,2

Во првиот ред на таблицата се внесени вредностите на аргументот — времето, а во вториот ред — соодветните вредности на функцијата — температурата.

Табличкиот начин на задавање на функциите ја има таа предност што од таблицата за одредена вредност на аргументот може веднаш да се прочита соодветната вредност на функцијата. Од тие причини таблички ги изразуваме и некои често употребувани функции, кои инаку можат да бидат изразени и аналитички. Такви се таблиците за реципрочните вредности, квадратите и кубовите на броевите $\left(y = \frac{1}{x},\ y=x^2,\ y=x^3\right)$, таблиците за периметарот и плоштината на кругот ($L=2\pi r$, $P=\pi r^2$) и др.

3. ГРАФИЧКИ НАЧИН НА ЗАДАВАЊЕ НА ФУНКЦИИТЕ

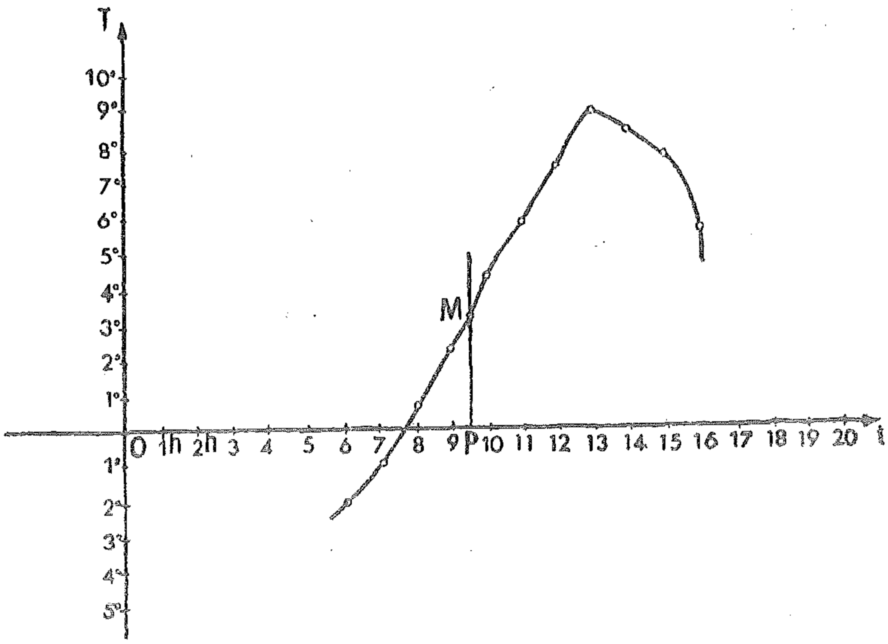
Графичкиот начин на задавање на функционалната зависност помеѓу две променливи величини се заснова врз примената на методот на координати, а се извршува на овој начин: На независно променливата величина (аргументот) ѝ даваме низа произволни допуштени вредности: $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots$, а потоа ги одредуваме соодветните вредности на функцијата: $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$. Ако секоја двојка така добиени соодветни вредности на аргументот и функцијата ги земеме како координати на точка, ќе добиеме една низа од точки: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3) \ldots$ кои лесно ги конструираме во рамнината XOY. На таков начин можеме да конструираме колку што сакаме точки во рамнината.

Дефиниција: *Множеството на сите точки во рамнината на координатниот систем чии апсциси се произволни допуштени вредности на аргументот, а ординати им се соодветните вредности на функцијата се вика график на функцијата.*

На сл. 45 графички е изразена функционалната зависност на температурата T како функција на времето t. Графикот е нацртан врз основа на таблицата на стр. 185.

Со помош на графикот може да се одреди приближната вредност на функцијата и за допуштените вредности на аргументот, што ги нема во таблицата. На пример:

Ако сакаме да најдеме колкава била температурата во 9 часот и 30 минути, тогаш на апсцисната оска Ot прво ја уочуваме точката P, чија апсциса е $P(9{,}5^h)$, а потоа во таа точка издигаме нормала кон апсцисната оска Ot. Ординатата на пресечената точка M на издигнатата нормала со графикот ќе ни ја даде приближната вредност на бараната температура во 9 часот и 30 минути (сл. 45). Од сликата гледаме дека $T \approx 3°C$.



Сл. 45

ЗАДАЧИ

1. За кои вредности на аргументот x се дефинирани следниве функции!

а) $y = \frac{3}{x-2}$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = 4x - 1$?

2. Изрази ги аналитички следниве функционални зависности:

а) Плоштината на квадратот како функција на неговата страна;

б) Периметарот на правилниот шестоаголник како функција на неговата страна;

в) Волуменот на коцката како функција на неговиот раб!

3. Еден цол има 25,4 *mm*. Направи таблица за бројот на милиметрите што одговараат на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 цола!

4. Изрази ја графички зависноста меѓу средната тежина и староста на дете од неговото раѓање до 15-годишна возраст, ползувајќи ја следнава таблица:

Староста во години	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Тежина во kg.	3,5	9	12	12,5	14,5	15,5	17	18,5	20,5	23	25	27	30	34	39	43

Може ли оваа зависност да се изрази аналитички?

5. Дадена е функцијата $f(x) = |x| + x$. Одреди колку е: $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$!

§. 57. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

1. ПОИМ ЗА ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

Да ги разгледаме примерите:

Задача 1. Железна прачка долга 1 *m* загреана е до $t°$C. Да се одреди нејзината должина!

Од физиката знаеме дека металите при загревање се шират. Со опит е установено дека железна прачка долга 1 *m* на 0°C, при загревање за секој 1°C се издолжува 0,0012 *cm*. Според тоа, ако прачката се загрее до $t°$C, нејзината должина l, ќе биде:

$$l = 100 + 0{,}0012\ t\ (cm),$$

т. е. должината l е функција на температурата t.

Задача 2. Едно новородено дете тежи 3 kg. Колку ќе тежи тоа по n денови од раѓањето, ако се знае дека во првите 2 месеци по раѓањето средниот дневен прираст на тежината на детето е 0,05 kg.

За n денови тежината на детето се зголемува за 0,05 n (kg.) Ако тежината на детето во n-тиот ден по неговото раѓање ја обележиме со T, ќе добиеме дека:

$$T = 3 + 0{,}05\ n\ (\mathrm{kg}).$$

Според тоа, тежината на новороденото дете е функција на неговата старост n, каде што $n < 60$ дена.

Во обете разгледани задачи функциите l и T ги изразивме аналитички со биномите $100 + 0{,}0012t$ и $3 + 0{,}05n$, во кои независно променливата е од прв степен.

Општиот вид на биномот (полиномот) од прв степен со една независно променлива (аргумент), гласи:

$$ax + b, \tag{1}$$

каде што a и b се познати реални броеви, а x е променлива (аргумент).

Очевидно е дека со промената на променливата x се менува и вредноста на биномот (1). Притоа за секоја вредност на променливата $x = x_0$ соодветствува една и само една точно определена вредност на биномот $ax_0 + b$. Според тоа, биномот од прв степен (1) е функција на променливата x.

Ако за произволни вредности на променливата x, вредноста на биномот (1) ја означиме со y, ја добиваме функцијата

$$y = ax + b,$$

која се вика *линеарна функција*.

Според тоа, ја усвојуваме следнава дефиниција:

Дефиниција 1. *Функцијата од видот*

$$y = ax + b \quad \text{или} \quad f(x) = ax + b, \tag{2}$$

каде што a и b се кои и да било реални броеви, наречени параметри, а x — променлива (аргумент) се вика линеарна функција.

Параметрите a и b можат да добиваат произволни вредности (вклучувајќи ја и нулата) независно од аргументот x. Параметарот a се вика *коефициент пред независно променливата* x, а b — *слободен член на линеарната функција*.

Линеарната функција е еднозначно определена, ако се познати овие два параметри.

Ако е $b = 0$, линеарната функција го добива специјалниот вид

$$y = ax, \quad a \neq 0.$$

2. ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y = ax$

Да се проучи текот на една функција, значи да се одреди нејзината дефинициона област и да се испита како се менува нејзината вредност кога расте аргументот.

Постојат многу конкретни проблеми и задачи од различните области на науката и практичниот живот, што се сведуваат на функцијата $y = ax$. При проучувањето на функцијата $y = ax$ ние ќе ги апстрахираме конкретните проблеми од кои е добиена таа. Во таков случај:

Функцијата $y = ax$ *е дефинирана за секоја вредност на аргументот* x, бидејќи изразот ax има смисла за кој и да било реален број x. Но дефиниционата област на функцијата $y = ax$ во секоја конкретна задача се одредува не само од формулата што ја изразува зависноса, туку и од условот на задачата.

Во функцијата $y = ax$, параметарот a може да биде позитивен или негативен број или нула. Во зависност од тоа ќе разликуваме три случаи: кога е $a > 0$, кога е $a < 0$ и кога е $a = 0$.

1. $a > 0$. Нека е $a = 2$, т. е. нека е дадена функцијата $y = 2x$.

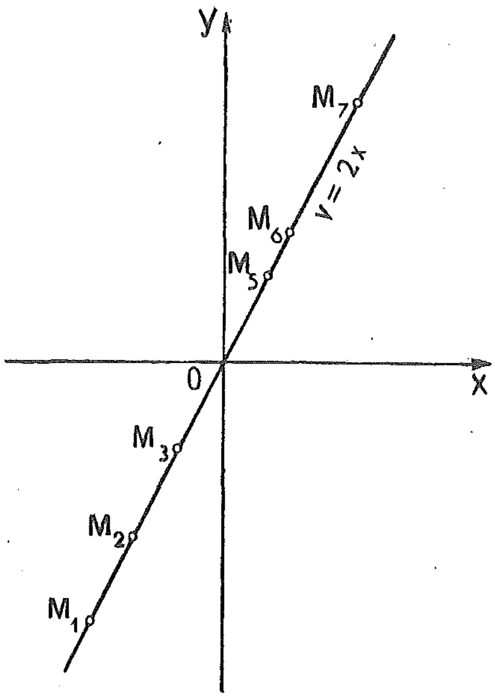
Ако му се даваат произволни вредности на аргументот x, може да се состави следнава таблица:

x	...	-3	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	3	....
y	...	-6	-4	-2	0	2	3	6	....

Ако секоја двојка соодветни вредности на аргументот и функцијата од таблицата ги земаме за координати на точка, ќе ги добиеме точките: $M_1(-3, -6)$, $M_2(-2, -4)$, $M_3(-1, -2)$, $M_4(0;\ 0)$, $M_5(1;\ 2)$, $M_6\left(1\frac{1}{2};\ 3\right)$, $M_7(3;\ 6)$ итн. Ако овие точки ги конструираме во рамнината XOY и ги сврземе, ќе го добиеме графикот на функцијата $y = 2x$ (сл. 46).

Од таблицата и графикот забележуваме: На поголеми вредности на аргументот им соодветствуваат и поголеми вредности на функцијата. Во таков случај велиме дека *функцијата расте.* Потоа забележуваме дека соодветните вредности на аргументот и функцијата, т. е. и двете координати на која и да било точка од графикот имаат исти знаци. Тоа значи дека графикот на функцијата $y = ax$, кога е $a > 0$, е расположен во првиот и третиот квадрант (сл. 46).

До истиот заклучок доаѓаме и кога изразот ax го разгледуваме како производ од два множитела, од кои едниот е постојан, а другиот се менува. Ако постојаниот множител е позитивен ($a > 0$), тогаш со зголемувањето на другиот множител се зголемува и производот. Бидејќи е $a > 0$, производот ax, односно y, ќе има секогаш ист знак како и аргументот x



Сл. 46

2. $a < 0$. Нека е $a = -2$, т. е. $y = -2x$.

За функцијата $y = -2x$ ја составуваме таблицата:

x	...	-3	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	3	....
y	...	6	4	2	0	-2	-3	-6	....

и го цртаме нејзиниот график (сл. 47)

Од таблицата и графикот на $y = -2x$ забележуваме дека на поголеми вредности на аргументот x им соодветствуваат помали вредности на функцијата y. Во таков случај велиме дека *функцијата опаѓа.*

Забележуваме уште и тоа дека соодветните вредности на аргументот и функцијата, т. е. координатите на која и да било точка од графикот (освен точката 0), имаат спротивни знаци. Тоа значи дека графикот на функцијата $y = ax$, кога е $a < 0$, е расположен во вториот и четвртиот квадрант (сл. 47).

До истиот заклучок доаѓаме и преку следново размислување: Ако во производот ax постојаниот множител a е негативен, тогаш со зголемувањето на другиот множител производот се намалува. (Зошто).

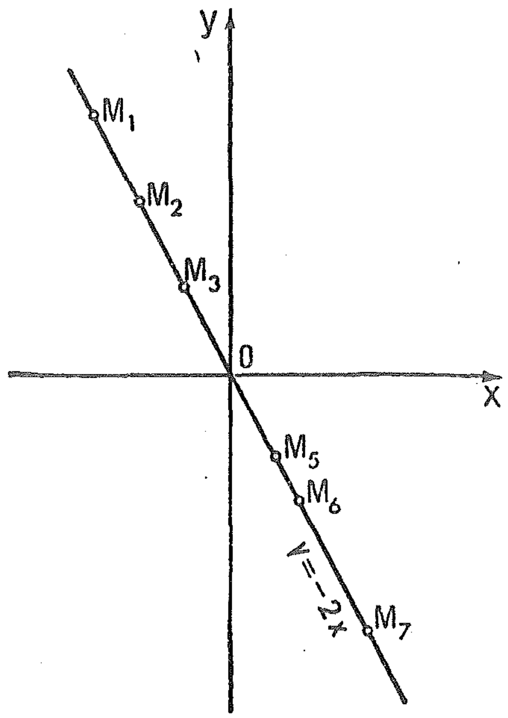
Бидејќи е $a < 0$, производот ax односно y, ќе има секогаш спротивен знак од знакот на аргументот x.

3. $a = 0$. Ако е $a = 0$, тогаш е $y = 0 \cdot x = 0$, т. е. за која и да било вредност на аргументот x функцијата е постојана и еднаква на 0.

Од сл. (46 и 47) наслутуваме дека графиците на функциите $y = 2x$ и $y = -2x$ се прави кои минуваат низ координатниот почеток.

Ќе докажеме дека важи теоремата:

Теорема 1. *Графикот на функцијата $y = ax$ е права, која минува низ координатниот почеток.*



Сл. 47

Доказ: Да земеме три кои и да било точки од графикот на функцијата $y = ax$. Нека се тоа точките $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$. Бидејќи е $y = ax$, затоа ќе биде $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$, $y_3 = ax_3$. Според тоа точките M_1, M_2 и M_3 ќе имаат координати $M_1(x_1, ax_1)$, $M_2(x_2, ax_2)$ и $M_3(x_3, ax_3)$.

За да докажеме дека графикот на функцијата $y = ax$ е права, доволно е да покажеме дека координатите на точките M_1, M_2 и M_3 од графикот на функцијата $y = ax$, го задоволуваат равенството:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0,$$

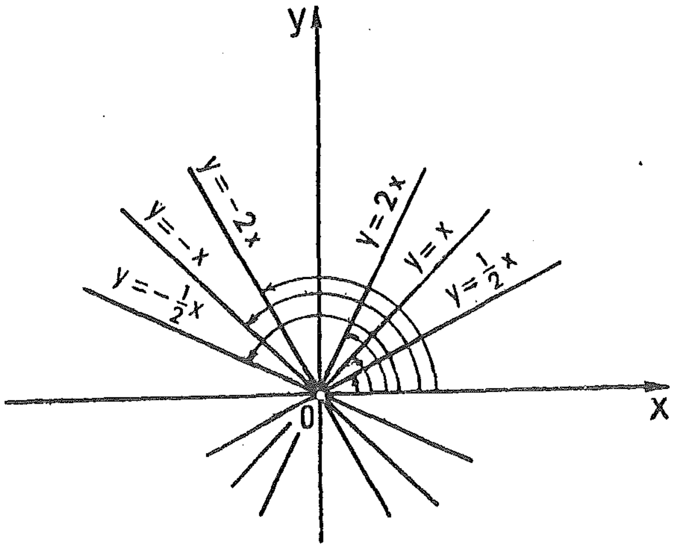
т. е. условот три точки да лежат на една права.

Ако во него ставите да е $y_1 = ax_1$, $y_2 = ax_2$ и $y_3 = ax_3$, уверите се дека тој услов е задоволен.

За $x = 0$, вредноста на функцијата $y = ax$ е $y = a \cdot 0 = 0$.

Според тоа, графикот на функцијата $y = ax$ минува низ координатниот почеток. Со тоа теоремата е целосно докажана.

Заради краткост во искажувањето, наместо „правата која е график на функцијата $y = ax$" често велиме „правата $y = ax$".



Сл. 48

На сл. 48 се нацртани графиците на функциите $y = ax$ кога е $a = \pm\frac{1}{2}$, ± 1, ± 2. Од сликата се гледа дека со промена на параметарот a се менува и наклонетиот агол на правата спрема x — оската и тоа:

Ако е $a > 0$, правата $y = ax$ зафаќа со позитивната насока на x—оската остар агол кој е до толку поголем, до колку апсолутната вредност на a е поголема. Ако е $a < 0$, тогаш правата $y = ax$ зафаќа со пози-

тивната насока на x—оската тај агол, којшто е до толку поголем, до колку айсолутната вредност на параметарот a е помала (сл. 48).

Ако е $a=0$, график на функцијата $y=0\cdot x$ или $y=0$ ќе биде самата x—оска, бидејќи само точките на апсцисната оска имаат ордината нула.

Како што гледаме, правецот на правата $y=ax$ зависи од параметарот a. Затоа параметарот a во функцијата $y=ax$ се вика уште и *аглов коефициент* или *коефициент на правецот* на правата $y=ax$.

3. ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y=ax+b$

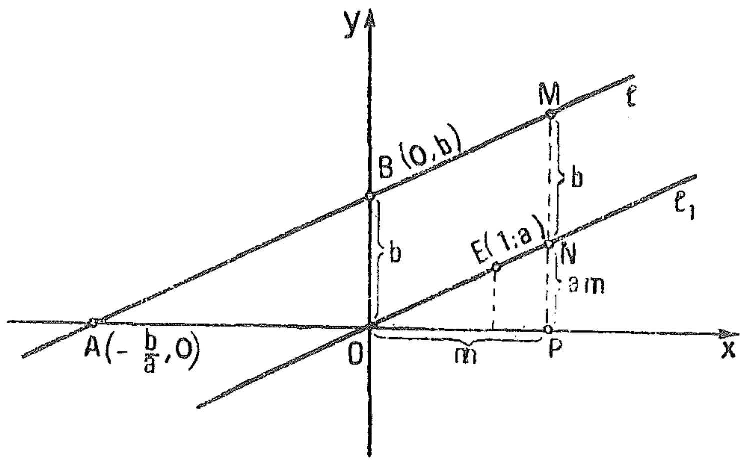
Функцијата $y=ax+b$ е дефинирана за секоја вредност на аргументот x, бидејќи изразот $ax+b$ има смисла за кои и да било реални броеви a, b и x. Ќе покажеме дека важи теоремата:

Теорема 2. *Графикот на функцијата $y=ax+b$ е права, паралелна на правата $y=ax$, а ја сече ординатната оска во точката B* $(0;\ b)$.

Доказ: За $x=0$ функцијата $y=ax+b$ добива вредност $y=b$. Значи, точката $B(0;\ b)$ е една точка од бараниот график на функцијата.

Да ја конструираме прво правата l_1, график на функцијата $y=ax$. Таа минува низ точките $O(0;\ 0)$ и $E(1,\ a)$ (сл. 49). Ако на аргументот x му дадеме некоја произволна вредност $x=OP=m$, функцијата $y=ax$ ќе добие вредност $y=PN=am$, а функцијата $y=ax+b$ — вредност $y=PM=am+b$.

Ако точката P се движи по оската OX, ќе се движи и отсечката PNM, при што секогаш ќе биде $NM=b$, така што точката M ќе ја опише правата l која минува низ точката $B\ (0;\ b)$ и е паралелна на правата l_1. Според тоа, ординатата на која и да било точка M од графикот на функцијата $y=ax+b$ е за b поголема (или помала) од ординатата на соодветната точка N (со иста апсциса) од графикот на функцијата $y=ax$ (сл. 49).



Сл. 49

Ако е $b>0$, графикот на функцијата $y=ax+b$ ќе биде права, која лежи над графикот на функцијата $y=ax$, а ако е $b<0$, тогаш графикот на функцијата $y=ax+b$ ќе лежи под графикот на функцијата $y=ax$.

Дефиниција 2. *Нула на функцијата е онаа вредност на аргументот x за која вредноста на функцијата станува еднаква на нула.*

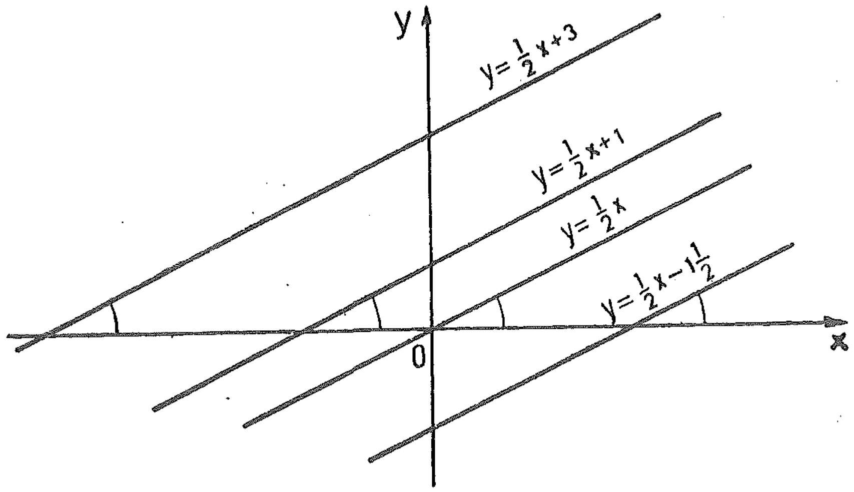
Нула на линеарната функција е апсцисата на онаа точка во која графикот на функцијата $y=ax+b$ ја сече апсцисната оска (сл. 49). Таа е $x=-\frac{b}{a}$, бидејќи за таа вредност на x, функцијата е

$$y=a\left(-\frac{b}{a}\right)+b=0.$$

Нула на функцијата $y=ax$ е $x=0$.

Да видиме сега како се менува функцијата $y=ax+b$ во зависност од аргументот x и параметрите a и b.

Бидејќи графикот на функцијата $y=ax+b$ е права паралелна на графикот на функцијата $y=ax$, тоа обете прави ќе зафаќаат исти агли со позитивната насока на x-оската (зошто?). Според тоа, ако во линеарната функција $y=ax+b$ параметарот a го оставиме постојан, а го менуваме само b, тогаш ќе добиеме множество (сноп) од прави, што се сите паралелни помеѓу себе и зафаќаат ист агол (остар или тап) со позитивната насока на x-оската (сл. 50)



Сл. 50

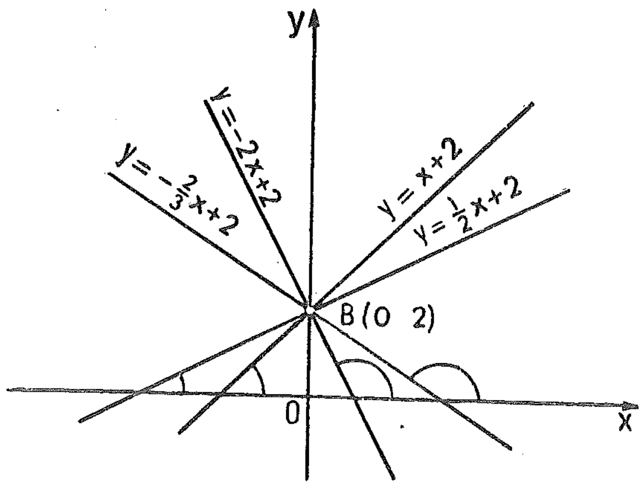
Ако, пак, во функцијата $y=ax+b$ параметарот b го оставиме постојан, а го менуваме само a, тогаш ќе добиеме множество (сноп) од прави кои минуваат низ точката B (0, b), а зафаќаат различни агли со позитивната насока на x—оската (сл. 51).

Како што гледаме: параметарот a го карактеризира аголот што го зафаќа правата со x-оската, па затоа се вика *аглов коефициент* или *коефициент на правецот*; а параметарот b го определува *отсечокот* што правата $y=ax+b$ заедно со координатниот почеток го гради на y-оска.

Како се менува функцијата $y=ax+b$ кога аргументот x расте, т. е. дали и таа расте или опаѓа зависи, исто како и кај функцијата $y=ax$, од знакот на параметарот a, и тоа:

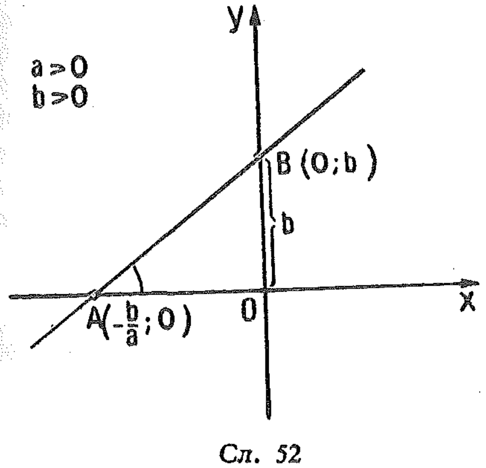
Ако е $a>0$, функцијата $y=ax+b$ расте, а ако е $a<0$, таа опаѓа.

Да се испита знакот на функцијата, значи да се одреди за кои вредности на x функцијата има позитивни вредности, а за кои—негативни. Знакот на линеарната функција зависи од нулата на функцијата $\left(x = -\frac{a}{b}\right)$ и од знаците на параметрите a и b. Ќе разликуваме четири случаи, според тоа дали параметрите a и b се позитивни или негативни броеви:

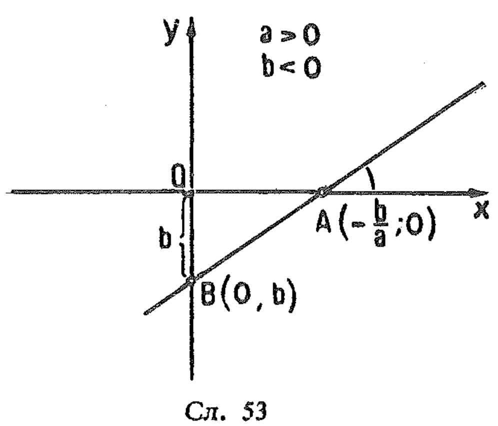


Сл. 51

1. $a > 0$ и $b > 0$. Во овој случај правата $y = ax + b$ зафаќа остар агол со позитивната насока на x-оската, а y-оската ја сече во точката B $(0, b)$, што е над координатниот почеток (*сл.* 52). Нула на функцијата, т.е. апсцисата $x = -\frac{b}{a}$ на точката A, во која правата ја сече x-оската, е негативен број. (Зошто?). Од сликата гледаме дека линеарната функција во овој случај е позитивна за сите вредности на аргументот x поголеми од нулата на функцијата т. е. за $x > -\frac{b}{a}$, а негативна е за сите вредности на аргументот кои се помали од нулата на функцијата, т.е. за $x < -\frac{b}{a}$.



Сл. 52



Сл. 53

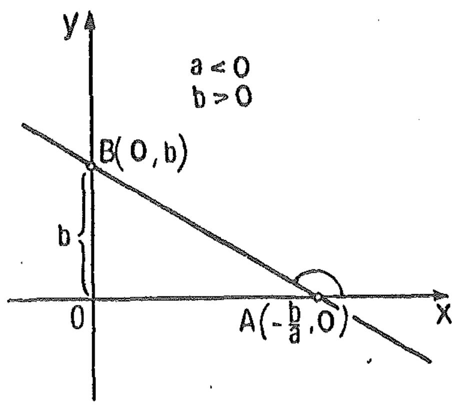
2. $a > 0$, a $b < 0$. Правата $y = ax + b$ и во овој случај зафаќа остар агол со позитивната насока на x-оската, но y-оската ја сече во некоја точка B што е под координатниот почеток (сл. 53). Нулата на функцијата $x = -\frac{b}{a}$, сега е позитивен број (зошто?), па пресечната точка A на правата и x - оската ќе лежи десно од координатниот почеток.

Функцијата е позитивна за $x > -\frac{b}{a}$ а е негативна за $x < -\frac{b}{a}$.

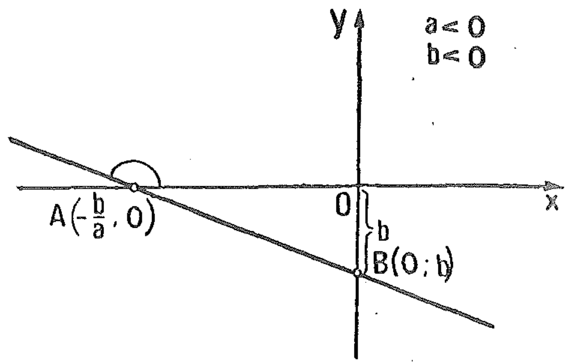
3. $a < 0$, a $b > 0$. Во овој случај правата $y = ax + b$ со позитивната насока на x-оската зафаќа тап агол, а y-оската ја сече во некоја точка B што е над координатниот почеток. Нулата на функцијата е позитивен број (зошто?), па според тоа правата $y = ax + b$ ќе ја сече x-оската во некоја точка A што лежи десно од координатниот почеток (сл. 54).

Значи: функцијата е позитивна за $x < -\frac{b}{a}$, а негативна е за $x > -\frac{b}{a}$.

4. $a < 0$ и $b < 0$. Правата и во овој случај со позитивната насока на x-оската зафаќа тап агол, но y-оската ја сече во некоја точка B што е под координатниот почеток. (сл. 55). Нулата на функцијата $x = -\frac{b}{a}$ сега е негативен број (зошто?), па според тоа правата $y = ax + b$ ќе ја сече x - оската во некоја точка A што лежи лево од координатниот почеток. Од сликата гледаме дека функцијата е позитивна за $x < -\frac{b}{a}$, а негативна е за $x > -\frac{b}{a}$.

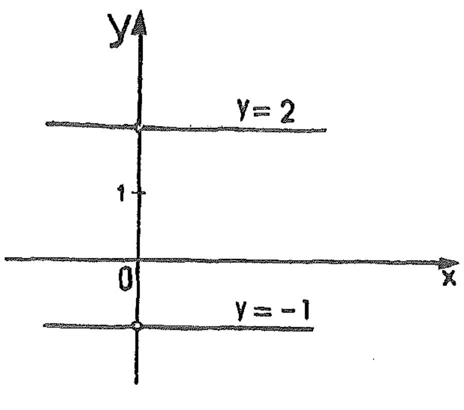


Сл. 54



Сл. 55

Ќе разгледаме некои специјални случаи на функцијата $y = ax + b$.



Сл. 56

Ако е $a = 0$, а $b \neq 0$, тогаш функцијата го добива видот $y = 0x + b$ или $y = b$. И во овој случај y е функција на x, макар што за која и да било вредност на аргументот функцијата е постојана и еднаква на b. Графикот на функцијата $y = b$ претставува права паралелна на x - оската, која минува низ точката $(0; b)$. Ако е $b > 0$, правата е над апсцисната оска, а ако е $b < 0$, правата е под апсцисната оска. На сл. 56 нацртани се графиците на функциите $y = 2$ и $y = -1$.

Ако е $a = 0$ и $b = 0$, линеарната функција го добива видот $y = 0$. Графикот на функцијата $y = 0$ е самата x-оска, бидејќи само точките од апсцисната оска имаат ординати еднакви на нула (сл. 56).

§ 58. РАВЕНКА НА ПРАВАТА

Видовме дека графикот на секоја линеарна функција претставува точно определена права. Но дали е и обратното: на секоја права во координатната рамнина дали одговара некоја определена линеарна функција? Одговорот на тоа прашање, како што ќе видиме, е исто позитивен.

Нека правата l е определена со точките $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, а точката $M(x, y)$ нека е некоја трета произволна точка од таа права. Ако точката M се движи по дадената права l, нејзините координати x и y ќе претставуваат променливи величини. Да видиме каква зависност постои меѓу величините x и y.

Бидејќи точките A_1, A_2 и M се колинеари, т. е. тие лежат на иста права, затоа нивните координати ќе го задоволуваат познатиот услов три точки да лежат на иста права:

$$x_1(y_2-y)+x_2(y-y_1)+x(y_1-y_2)=0.$$

Тоа равенство може да се преобрази и напише уште и вака:

$$(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0. \tag{1}$$

или
$$Ax+By+C=0, \tag{2}$$

каде што е $\quad A=y_1-y_2, \quad B=x_2-x_1 \quad$ и $\quad C=x_1y_2-x_2y_1.$

Равенството (2) ја изразува функционалната зависност на координатите на произволната точка $M(x, y)$ од правата l. Тоа претставува исто така некоја линеарна функција, само што таа е запишана во *имплицитна* (*нерешена*) *форма* по однос на величината y. Затоа равенството (2) се вика уште и *равенка на правата* l. Според тоа:

На секоја права l во рамнината XOY одговара некоја точно определена линеарна функција.

Ако е $B\neq 0$, а тоа ќе биде кога $x_2\neq x_1$ (т. е. кога точките $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ што ја определуваат правата l немаат исти апсциси, односно кога правата l не е паралелна со y-оската), тогаш равенката (2) може да се доведе во решена форма по y, т. е.

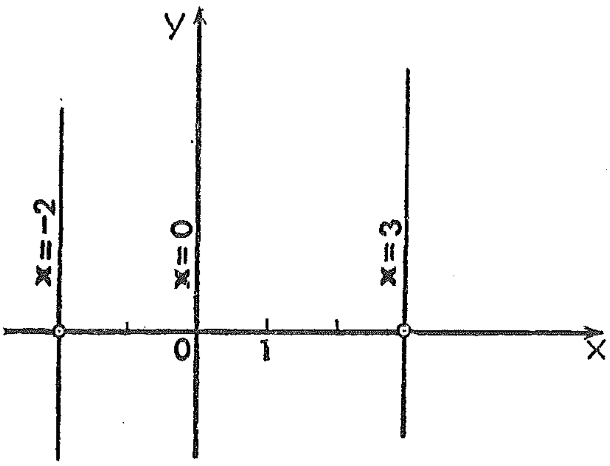
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

и со тоа да се сведе на видот $y=ax+b$, каде што $a=-\dfrac{A}{B}$ е агловиот коефициент на правата, а $b=-\dfrac{C}{B}$ е одрезокот што таа го прави на y—оската.

Ако е $C=0$, $B\neq 0$ и $A\neq 0$, тогаш равенката (2) го добива видот $Ax+By=0$ или $y=-\dfrac{A}{B}x$. Тоа е права која минува низ координатниот почеток и има аглов коефициент $a=-\dfrac{A}{B}$.

Ако е $A=0$, $B\neq 0$ и $C\neq 0$, тогаш равенката (2) ќе го има видот $By+C=0$ или $y=-\frac{C}{B}$, па таа ќе означува права, која е паралелна на x-оската, а на y-оска отсекува одрезок $b=-\frac{C}{B}$.

Ако е $B=0$, $A\neq 0$ и $C\neq 0$, тогаш равенката (2) го добива видот $Ax+C=0$ или $x=-\frac{C}{A}$. Ова ни покажува дека за кои и да било вредности на y, величината x е постојана и еднаква на $-\frac{C}{A}$. Во тој случај правата е паралелна на y-оската, а на x-оска отсекува одрезок $-\frac{C}{A}$. На слика 57 нацртани се графиците на равенките $x=3$ и $x=-2$.



Сл. 57

Ако е $A=0$, $C=0$, а $B\neq 0$, тогаш равенката на правата го добива видот $By=0$ или $y=0$. Како што видовме тогаш правата се совпаѓа со самата x-оска.

Ако е $B=0$, $C=0$, а $A\neq 0$, тогаш равенката на правата го добива видот $Ax=0$ или $x=0$. Очевидно е дека равенката $x=0$ ќе ја означува самата y-оска, бидејќи само точките од ординатната оска имаат апсциси еднакви на нула (сл. 57).

ЗАДАЧИ

1. Нацртај ги графиците на функциите:
   $y=3x$; б) $y=-2x$; в) $y=-\frac{3}{4}x$.
2. Нацртај ги графиците на функциите:
   а) $y=2x-3$; б) $y=\frac{2}{3}x-5$; в) $y=3-\frac{x}{2}$.
3. Нацртај ги на еден цртеж графиците на функциите:
   а) $y=x$; $y=2x$ и $y=-\frac{x}{2}$; б) $y=x+3$; $y=-x+3$ и $y=3$.

4. За кои вредности на параметарот p графикот на функцијата $y = (p - 3)\,x$ минува низ: а) првиот и третиот квадрант, б) вториот и четвртиот квадрант?

5. Нацртај го графикот на функцијата $y = (k - 1)\,x + (k - 2)$, кога параметарот k е: а) $k = 3$; б) $k = 2$; в) $k = 1$; г) $k = 0$; д) $k = -1$.

6. Испитај го текот на функциите:

а) $y = -x + 3$; б) $y = -\frac{x}{2} + 1$; в) $y = 3x - 7$.

7. Дадена е функцијата $y = (k - 2)\,x + 5$. Испитај го текот на функцијата, ако параметарот k е: а) $k = -2$, б) $k = -1$, в) $k = 5$.

8. Нацртај го графикот на функцијата: а) $y = 3x - 2$; б) $y = -2x + 1$. Од цртежот одреди за кои вредности на x:

а) функцијата е еднаква на нула; б) функцијата има позитивни вредности;

в) функцијата има негативни вредности; г) функцијата има вредност -5.

9. Дадени се функциите $y = x - 4$ и $y = -3x + 4$. Нацртај ги нивните графици на еден цртеж и одреди за која вредност на x тие имаат еднакви вредности!

10. Определи за колку ќе се зголеми или намали функцијата: а) $y = 2x - 5$; б) $y = -x + 3$, кога аргументот x ќе порасне од -2 до 4!

11. Од 4 kg брашно се добиваат 5 kg леб.

а) Претстави го количеството леб (y) како функција на количеството брашно (x).

б) Добиената функција претстави ја графички;

в) Од добиениот график најди колку леб ќе се добие од 6,5 kg брашно!

12. Водостојот на водата во една река на 1 април бил за 18 cm понизок од нормалниот, а потоа во наредните 15 дена тој се качувал секој ден за 2 cm.

а) Изрази ја аналитички промената на водостојот (y) на реката во зависност од времето (x);

б) Претстави ја графички добиената функција;

в) Од графикот најди по колку дена водостојот на реката ќе биде нормален!

§ 59. ТЕК И ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y = \frac{a}{x}$

При проучувањето на функцијата $y = \frac{a}{x}$ ќе ги апстрахираме конкретните проблеми од кои е таа добиена. Во таков случај:

Функцијата $y = \frac{a}{x}$ *е дефинирана за секоја вредност на аргументот* x, *освен за* $x = 0$, *бидејќи за таа вредност изразот* $\frac{a}{x}$ *нема смисла.*

Но, во секој конкретен случај, дефиниционата област на функцијата $y = \frac{a}{x}$ се одредува не само од формулата, туку и од условот на задачата.

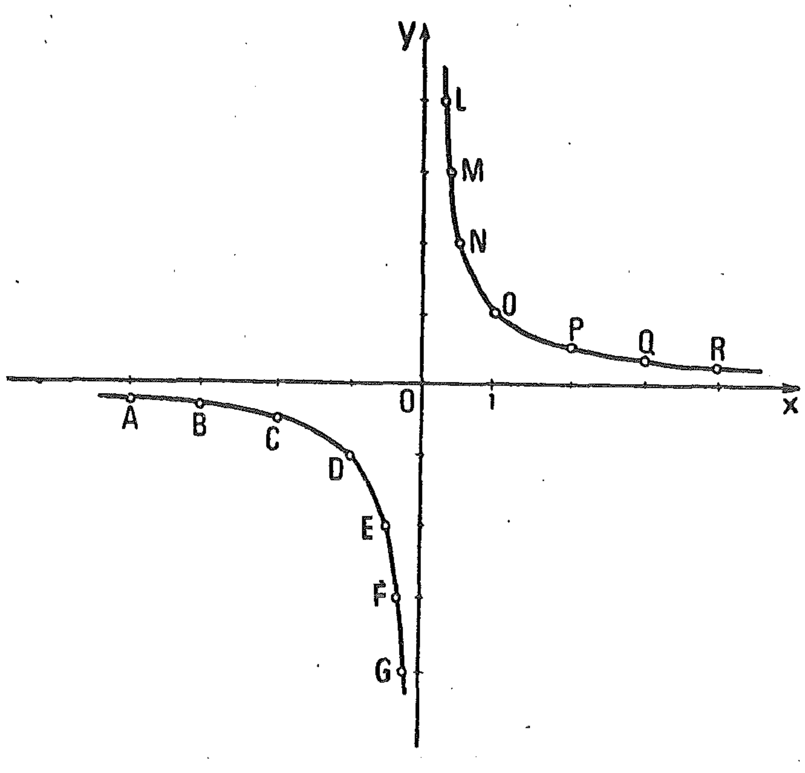
1. Ќе го проучиме прво текот и графикот на функцијата $y = \frac{1}{x}$.

Таа е дефинирана за секоја вредност на x, освен за $x = 0$. Затоа при составувањето на таблицата, на аргументот x му даваме низа вредности блиски на нулата, бидејќи од посебна важност е да се види како функцијата се однесува околу таа точка.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	-4	-5	5	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
Точка	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	O	P	Q	R

Ако ги конструираме и соединиме вака добиените точки, ќе го добиеме графикот на разгледуваната функција $y = \frac{1}{x}$ (сл. 58).

Од нацртаниот график гледаме дека: кога апсолутната вредност на аргументот x се повеќе се намалува и приближува кон нула, тогаш соодветните апсолутни вредности на функцијата y стануваат се поголеми и поголеми. Притоа: ако x се приближува кон нулата одлево ($x < 0$), тогаш функцијата $y = \frac{1}{x}$ е исто негативна, така и што графикот од левата страна на y-оската се спушта надолу. Ако пак x се приближува кон нулата од десно ($x > 0$), тогаш y е позитивен, па графикот од десната страна на y-оската се издига нагоре (сл. 58).



Сл. 58

Оттука станува јасно дека околу вредноста $x = 0$, за која функцијата е неопределена, кривата на графикот се прекинува во две гранки, кои се разминуваат долж y-оската (сл. 58).

Да видиме сега како функцијата се однесува кога аргументот x неограничено расте по својата апсолутна вредност. Ако величината x расте, дропката $\frac{1}{x}$ сè повеќе намалува, но никогаш не станува еднаква на нула. Според тоа, кога аргументот x по апсолутна вредност неограничено расте, функцијата $y=\frac{1}{x}$ по апсолутна вредност неограничено намалува, така што обете гранки на графикот постепено се приближуваат кон x-оската: левата оддолу, а десната од горе.

Графикот на функцијата $y=\frac{1}{x}$ *е крива која се состои од две гранки и се вика хипербола*

Една гранка лежи во првиот, а другата во третиот квадрант.

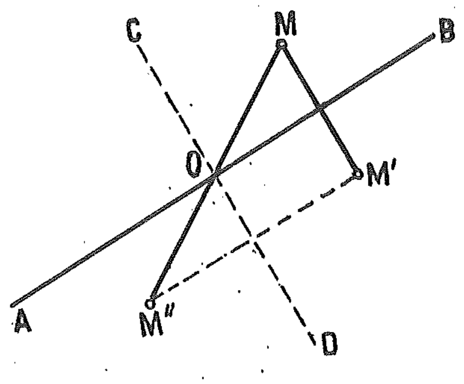
2. Функцијата $y=\frac{1}{x}$ може да биде зададена и со равенката $xy=1$. Тогаш јасно е дека: Ако точката $M\ (x_o y_o)$ лежи на хиперболата, тогаш и точката $M'\ (y_o, x_o)$ лежи, исто така, на неа. Бидејќи точките $M\ (x_o, y_o)$ и $M'\ (y_o, x_o)$ се симетрични спрема симетралата на првиот и третиот квадрант, тоа и:

Хиперболата е симетрична спрема симетралата на првиот и третиот квадрант.

Потоа, ако точката $M\ (x_o, y_o)$ лежи на хиперболата, тоа и точката $M''\ (-x_o, -y_o)$ лежи на неа, бидејќи $(-x_o)(-y_o) = x_o y_o = 1$. За точките $M\ (x_o, y_o)$ и $M''\ (-x_o, -y_o)$ велиме дека се централно симетрични спрема координатниот почеток, па според тоа и:

Хиперболата е централно симетрична спрема координатниот почеток.

Ако ја разгледаме сл. 59, ќе забележиме дека: ако точките M и M' се симетрични спрема некоја права AB, а точките M и M'' се централно симетрични спрема некоја точка 0 што лежи на таа права, тогаш, пак, точките M' и M'' ќе бидат симетрични спрема правата CD, што минува низ 0, а е нормална на AB. Според тоа:



Сл. 59

Од својството дека хиперболата $y=\frac{1}{x}$ е симетрична спрема симетралата на првиот и третиот квадрант и централно симетрична спрема координатниот почеток следува дека *таа е симетрична и спрема симетралата на вториот и четвртиот квадрант*, бидејќи оваа симетрала е нормална на правата и минува низ координатниот почеток.

Според тоа: *Хиперболата* $y=\frac{1}{x}$ *има две оски на симетријата — симетралите на првиот и вториот квадрант.*

Пресечната точка на оските на симетријата претставува и *центар на симетријата* на хиперболата.

3. Да ја проучиме сега функцијата $y=\frac{a}{x}$, каде што $a\neq 0$ е кој и да било реален број.

Од $\frac{a}{x}=\frac{1}{x}\cdot a$ гледаме дека вредностите на функцијата $y=\frac{a}{x}$ ги добиваме кога соодветните вредности на $y=\frac{1}{x}$ ги помножиме со коефициентот a.

Функцијата $y=\frac{a}{x}$ е прекината само за $x=0$, а во интервалите $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ таа е непрекината.

Нека се x_1 и x_2 две произволни вредности на аргументот x во еден од интервалите во кои функцијата е непрекината, а y_1 и y_2 да се соодветните вредности на функцијата $y=\frac{a}{x}$.

За една непрекината функција $y=f(x)$ во интервалот (a, b) велиме дека *расте*, ако, за $x_2-x_1>0$ е и $y_2-y_1>0$, или обратно; ако за $x_2-x_1<0$ е и $y_2-y_1<0$. За функцијата $y=f(x)$ во интервалот (a, b) велиме дека *опаѓа*, ако за $x_2-x_1>0$ е $y_2-y_1<0$ и обратно.

Овој услов пократко може да се запише и вака:

Функцијата $y=f(x)$ во интервалот (a, b) расте ако е $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>0$, а опаѓа ако е $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<0$.

Ако го формираме изразот $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, за нашата функција $y=\frac{a}{x}$ ќе најдеме:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{a}{x_2}-\frac{a}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{\frac{ax_1-ax_2}{x_2x_1}}{x_2-x_1}=\frac{-a(x_2-x_1)}{x_1x_2(x_2-x_1)}=-\frac{a}{x_1x_2}.$$

Бидејќи x_2 и x_1 имаат ист знак, т. е. $x_1x_2>0$, тоа знакот на изразот $-\frac{a}{x_1x_2}$ ќе зависи само од знакот на a, и тоа: ако е $a>0$, тогаш $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<0$, т.е. функцијата опаѓа кога x расте, а ако е $a<0$, тогаш $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}>0$, т. е. функцијата расте кога x расте.

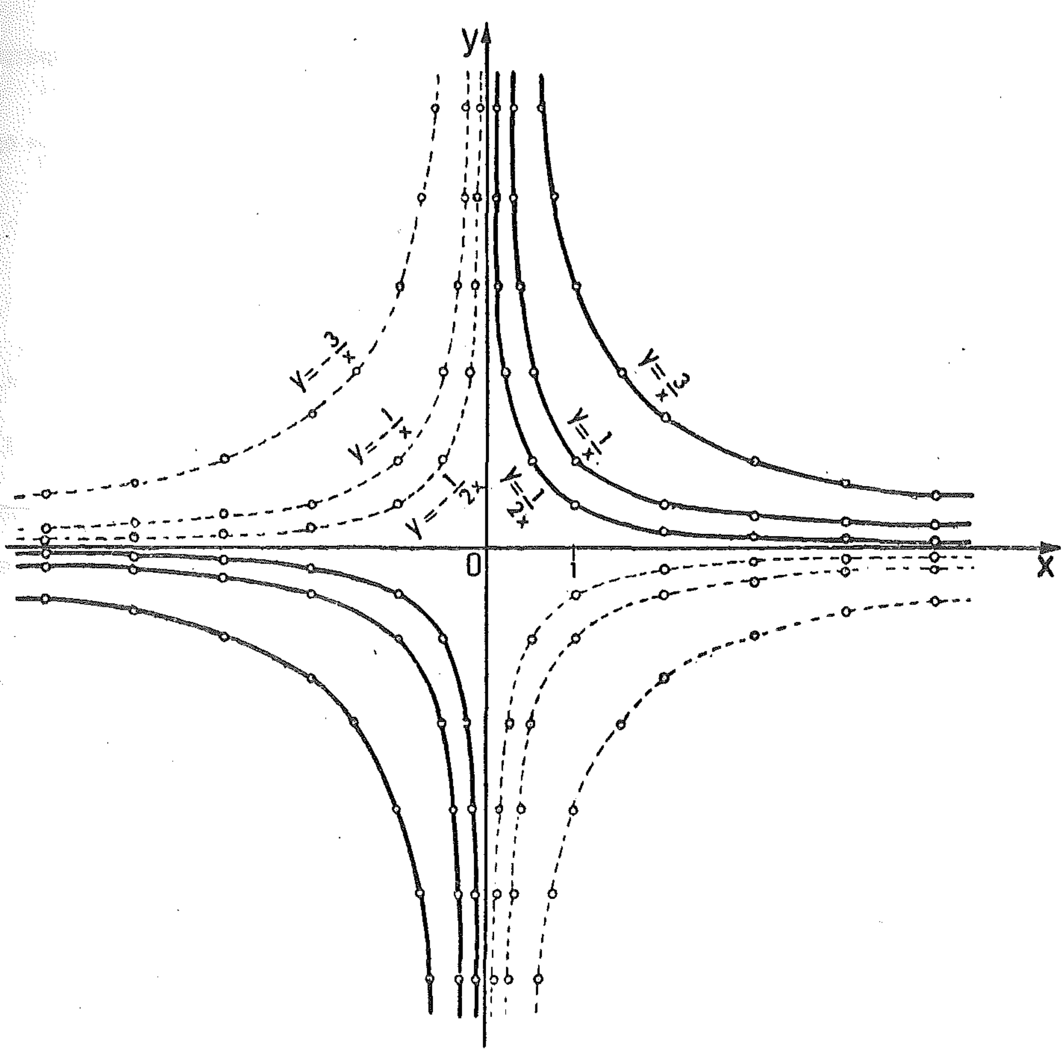
Според тоа:

Функцијата $y=\frac{a}{x}$ кога x расте, ако е $a>0$ таа опаѓа, а ако е $a<0$, тогаш и таа расте.

Ако е $a>0$, соодветните вредности на аргументот x и функцијата y имаат исти знаци, па според тоа графикот на функцијата $y=\frac{a}{x}$ е расположен во првиот и третиот квадрант; а ако е $a<0$, тогаш x и y ќе имаат различни знаци, т. е. графикот на функцијата ќе биде расположен во вториот и четвртиот квадрант.

Тоа го гледаме и на сл. 60, каде што се нацртани графиците на функциите:

$$y=\frac{1}{2x},\quad x=\frac{1}{x},\quad y=\frac{3}{x},\quad y=-\frac{1}{2x},\quad y=-\frac{1}{x},\quad \text{и}\quad y=-\frac{3}{x}.$$



Сл. 60

Од сликата 60 гледаме уште дека графиците на сите тие функции претставуваат хиперболи. Значи:

Графикот на функцијата $y=\frac{a}{x}$ *е хипербола која се наоѓа во првиот и третиот квадрант ако е* $a>0$, *или во вториот и четвртиот квадрант ако е* $a<0$. Оддалеченоста на гранките на хиперболата од координатните оски е до толку поголема до колку апсолутната вредност на коефициентот a е поголема.

ЗАДАЧИ

1. Претстави ја графички секоја од функциите:

а) $y=\frac{2}{x}$; б) $y=\frac{3}{x}$; в) $y=-\frac{4}{x}$; г) $y=-\frac{5}{x}$; д) $y=\frac{5}{2x}$!

2. Нацртај ги на еден цртеж графиците на функциите $y=\frac{6}{x}$ и $y=-\frac{6}{x}$. Во кои квадранти се наоѓа графикот на секоја од тие функции?

3. Проучи го графикот на Бојл-Мариотовиот закон: $pV=c$, каде што p е притисокот, V — волуменот на гасот, а c-константа при иста температура на гасот!

4. Нацртај ги на еден цртеж графиците на функциите: $y=x$ и $y=\frac{4}{x}$. Потоа од цртежот одреди ги координатите на пресечните точки на нивните графици!

Глава VIII

ОДНОСИ И ПРОПОРЦИИ. ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ НА ВЕЛИЧИНИТЕ

§ 60. ОДНОС НА ДВЕ ВЕЛИЧИНИ

Нека се дадени две еднородни величини, чии мерни броеви a и b се изразени со една иста единица мерка. Кога ги споредуваме тие величини, често се прашуваме: а) Колку пати едната величина е поголема од другата, или б) Каков дел едната величина претставува од другата величина?

За да го испитаме тоа, треба мерниот број на едната величина да се подели со мерниот број на другата величина, т.е. треба да се образува количникот $a:b$ (или $\frac{a}{b}$).

Ако е $a>b$, количникот ќе ни покаже колку пати првата величина е поголема од втората, а ако е $a<b$, тогаш количникот $a:b$ или $\frac{a}{b}$ ќе ни покаже каков дел првата величина претставува од втората.

Дефиниција 1. *Количникот $a:b$ $\left(\text{или } \frac{a}{b}\right)$ на мерните броеви на две еднородни величини се вика однос на тие величини, а се чита: „а спрема b".*

Броевите a и b се викаат *членови на односот*, и тоа: a — *прв*, а b — *втор член* на односот. Вредноста на пресметаниот количник се вика *вредност на односот*.

Бидејќи количникот на два истоимени броја е апстрактен број, тоа и односот на две истоимени величини секогаш е апстрактен број.

Однос може да се образува и од кои и да било два апстрактни броја, на пример: $8:5$; $3:4$ итн. Според тоа; ја усвојуваме следнава:

Дефиниција 2. *Однос на два реални броја е количникот од тие броеви.*

Бидејќи односот е количник, тоа сите својства на количникот ќе важат и за односот. Ние ќе наведеме само едно:

Својство: *Вредноста на односот не се менува, ако двата негови члена се помножат (или поделат) со еден ист реален број (што не е нула).*

Врз основа на него односите чии членови се дропки можеме да ги замениме со односи на природни броеви. На пример:

$$\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\left(\frac{5}{6}\cdot 6\right):\left(\frac{2}{3}\cdot 6\right)=5:4 \quad ; \quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=ad:(bc).$$

Дефиниција 3. *Односите $a:b$ и $b:a$, кои се разликуваат само по местата на своите членови, се викаат обратни еден на друг.*

Пример: $8:5$ и $5:8$ се заемно обратни односи.

Теорема 1. *Односот на реципрочните вредности на членовите на даден однос е обратен на дадениот однос.*

Доказ: Нека е даден односот $a:b$. Односот на реципрочните вредности на членовите на дадениот однос е $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}\cdot ab\right):\left(\frac{1}{b}\cdot ab\right)=b:a$. Значи:

Односите $a:b$ и $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ се заемно обратни.

Пример: $4:\frac{3}{5}$ и $\frac{1}{4}:\frac{5}{3}$ се заемно обратни односи.

Теорема 2. *Производот на два обратни односа еднаков е на единица.*

Доказ: $(a:b)\cdot(b:a)=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=1.$

Пример: $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}=1.$

§ 61. ПРОПОРЦИИ

1. ДЕФИНИЦИЈА НА ПРОПОРЦИЈАТА

Дефиниција: *Два односа со еднакви вредности сврзани со знакот „=“ (еднакво), образуваат пропорција.*

Пропорции се на пример следниве равенства:

$12:3=20:5$, бидејќи е $12:3=4$ и $20:5=4$;

$\frac{1}{4}:3=\frac{5}{6}:10$, бидејќи е $\frac{1}{4}:3=\frac{1}{12}$ и $\frac{5}{6}:10=\frac{1}{12}$.

$1{,}2:0{,}4=4{,}5:1{,}5$ бидејќи е $1{,}2:0{,}4=3$ и $4{,}5:1{,}5=3$;

$a:b=c:d$, ако е $a:b=k$ и $c:d=k$.

Секоја пропорција има четири члена, кои што одлево надесно по ред се викаат: прв, втор, трет и четврти член. Првиот и четвртиот член на пропорцијата се викаат *крајни* или *надворешни членови*, а вториот и третиот член — *средни* или *внатрешни членови*. Така во пропорцијата $a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, надворешни членови се a и d а внатрешни b и c.

Пропорциите можат да се читаат на повеќе начини. На пример пропорцијата $3:15=5:25$ може да се прочита:

а) 3 спрема 15 *се однесува исто како* 5 спрема 25,

б) односот 3 спрема 15 *еднаков е* на односот 5 спрема 25.

Кој и да било од четирите члена на дадената пропорција се вика *четврта пропорционала* на останатите три члена од неа. На пример, во пропорцијата $3:15=5:25$ бројот 5 е четврта пропорционала на броевите 3; 15 и 25; бројот 3 е четврта пропорционала на броевите 15; 5 и 25 итн.

2. СВОЈСТВА НА ПРОПОРЦИИТЕ

Теорема 1. *Во секоја пропорција производот на крајните членови еднаков е на производот на средните членови.*

Тоа е *основно својство* на пропорциите.

Доказ: Нека е дадена пропорцијата $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Ако ги помножиме и обете нејзини страни со производот bd, ќе добиеме

$$\frac{a}{b}\cdot bd=\frac{c}{d}\cdot bd \text{ или } ad=bc.$$

Пример: Во пропорцијата $7:21=2:6$ гледаме дека е $7\cdot 6=21\cdot 2=42$.

Ќе покажеме дека важи и обратното својство, а имено:

Теорема 2. *Ако производот на два броја е еднаков на производот на други два броја, тогаш од тие броеви може секогаш да се состави пропорција.*

Притоа претставуваме дека ниеден од тие броеви не е нула.

Доказ: Нека се дадени четири броја a, b, c и d, така што да е $ad=bc\neq 0$. Ако двете страни на равенството $ad=bc$ ги поделиме со производот bd (во кој едниот множител е земен од левата, а другиот од десната страна на даденото равенство), ќе ја добиеме пропорцијата:

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}, \text{ т. е. } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ или } a:b=c:d.$$

Пример: Од броевите 2, 3, 6 и 9 може да се состави пропорција, бидејќи е $2\cdot 9=3\cdot 6$ или $3\cdot 6=2\cdot 9$. Тоа се пропорциите:

$2:3=6:9$; $3:9=2:6$ и др.

Објасни како се составени тие пропорции!

Горните две својства симболички ги запишуваме и вака:

$$a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc\neq 0.$$

Теорема 3. *Секоја пропорција со разместување на нејзините членови може да се претстави уште во 7 различни вида.*

Доказ: Од равенството $ad=bc$, можат да се состават следниве осум пропорции: 1) $a:b=c:d$, 2) $a:c=b:d$, 3) $d:b=c:a$ 4) $d:c=b:a$, 5) $b:a=d:c$, 6) $c:d=a:b$, 7) $b:a=d:c$, 8) $c:a=d:b$, бидејќи за секоја од нив важи $ad=bc$.

Теорема 4. *Пропорцијата останува вистинита (точна), ако еден краен и еден среден член, или сите нејзини членови, се помножат или поделат со еден ист број кој не е нула.*

Доказ: Од пропорцијата $a:b=c:d$, за кој и да било број $m\neq 0$ можат да се добијат следниве пропорции:

$$(am):(bm)=c:d;\quad a:b=(cm):(dm);\quad (am):b=(cm):d;$$
$$a:(cm)=c:(dm) \text{ и } (am):(bm)=(cm):(dm).$$

Сите овие пропорции се точни, бидејќи кај секоја од нив производот на крајните членови е еднаков на производот од средните членови.

Ова својство го ползуваме за упростување на пропорциите и тоа: кога некои од членовите на пропорцијата се дропки или децимални броеви, или кога еден среден и еден краен член или сите членови на пропорцијата имаат заеднички множител.

3. РЕШАВАЊЕ НА ПРОПОРЦИИТЕ

Под решавање на пропорцијата се подразбира одредувањето на непознатиот член во неа, кога се познати останатите три члена.

Задача 1. Да се одреди непознатиот член во пропорцијата $8:5=x:7,5$!

Со примена на основното својство на пропорциите, имаме

$$5\cdot x=8\cdot 7,5 \text{ или } 5x=60, \text{ а отаде е } x=\frac{60}{5} \text{ или } x=12.$$

Задача 2. Да се реши пропорцијата $2:12=\frac{5}{6}:x$.

Применувајќи го основното својство, добиваме

$$2\cdot x=12\cdot\frac{5}{6} \text{ или } 2x=10, \text{ а оттука } x=\frac{10}{2} \text{ или } x=5.$$

Пропорциите се решаваат и директно, ако се примени правилото:

Правило: *Средниот член на пропорцијата е равен на производот од крајните членови, поделен со другиот среден член. Крајниот член на пропорцијата е равен на производот од средните членови, поделен со другиот краен член*, т. е.

$$a:b=c:d \Rightarrow \left(b=\frac{ad}{c} \text{ и } a=\frac{bc}{d}\right).$$

Може да се случи двата средни или двата крајни членови на пропорцијата да се еднакви.

Пропорцијата $a:b=b:c$, во која двата средни члена се еднакви се вика *непрекината пропорција*. Таква е, на пример, пропорцијата $4:6=6:9$.

Средниот член на непрекинатата пропорција $a:b=b:c$ се вика *средна геометриска пропорционала* или *геометриска средина* за крајните членови a и c. Со примена на основното својство на пропорциите средната геометриска пропорционала може да се изрази вака $b^2=ac$ или $b=\sqrt{ac}$.

§ 62. ИЗВЕДЕНИ ПРОПОРЦИИ

Од пропорцијата $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, (1)

со додавање кон двете нејзини страни по ± 1, се добива:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{b}+1, \text{ односно } \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}, \quad (2)$$

или

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1, \text{ односно } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}. \quad (3)$$

Ако, пак, левите и десните страни на пропорциите (2) и (3) ги поделиме со соодветните страни на пропорцијата (1), ќе добиеме:

$$\frac{a+b}{b}:\frac{a}{b}=\frac{c+d}{d}:\frac{c}{d}, \text{ односно } \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \tag{4}$$

и

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}. \tag{5}$$

Потоа, ако ги поделиме соодветните страни на пропорциите (4) и (5) една со друга, ќе ја добиеме пропорцијата

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}, \quad \text{при } a-b\neq 0 \quad \text{и} \quad c-d\neq 0. \tag{6}$$

Пропорциите (2), (3), (4), (5) и (6), добиени од основната пропорција (1) се викаат *изведени пропорции* од неа.

Со разместување на членовите на овие изведени пропорции лесно ги добиваме и следниве пропорции:

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}; \quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}; \quad \frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}; \quad \frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d};$$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}; \quad \frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}; \quad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d} \text{ и др.}$$

Искажи го со зборови начинот на образувањето на секоја од пропорциите (2), (3), (4), (5) и (6) од основната пропорција (1)!

Ако основната пропорција (1) ја запишеме во форма $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, тогаш од неа можат да се изведат и пропорциите:

$$\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b}; \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}; \quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Покажи сам како се добиваат тие пропорции!

§ 63. ПРОДОЛЖЕНИ ПРОПОРЦИИ

Дефиниција: *Равенството на три или повеќе еднакви односи се вика продолжена пропорција*, т. е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}. \tag{1}$$

Продолжените пропорции се запишуваат покусо уште и вака:

$$a_1:a_2:a_3:\ldots\ldots a_n=b_1:b_2:b_3:\ldots\ldots. b_n, \tag{1}$$

т. е. сите први членови на еднаквите односи ги пишуваме на едната страна, а сите нивни втори членови на другата страна на равенството.

Ќе покажеме дека продолжените пропорции го имаат следново:

Својство: *Збирот на сите први членови на односите кај продолжената пропорција спрема збирот на сите втори членови се однесува исто како кој и да било прв член спрема неговиот соодветен втор член.*

Доказ: Ако вредноста на еднаквите односи ја означиме со k, т. е.

$$\text{ако } \frac{a_1}{b_1}=k, \quad \frac{a_2}{b_2}=k, \ \ldots\ldots \ \frac{a_n}{b_n}=k,$$

$$\text{тогаш } a_1=kb_1; \quad a_2=kb_2; \quad a_3=kb_3, \ldots\ldots; \ a_n=k_nb_n. \tag{3}$$

Со собирање на соодветните страни на равенствата (3) имаме:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n=k(b_1+b_2+b_3+\ldots\ldots+b_n),$$

$$\text{а оттука } \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

ЗАДАЧИ

1. Изрази ги со помош на природни броеви следниве односи:

а) $1:\frac{1}{2}$; б) $3:\frac{2}{5}$; в) $\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{5}:\frac{8}{15}$.

Потоа пресметај ја нивната вредност!

2. Трансформирај ги следниве односи така што првиот член да биде 1:

а) $3:18$; б) $2:15$; в) $5:24$; г) $4:50$; д) $8:1000$; ѓ) $25:600$!

3. Упрости ги следниве односи:

а) $3xy^2:6x^2y$; б) $\frac{x}{y}:\frac{y}{x}$; в) $\left(1+\frac{a}{b}\right):\left(1-\frac{a}{b}\right)$; г) $\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right):\frac{ab}{a^2-b^2}$.

4. Како се однесуваат: а) периметрите, б) плоштините на два круга со радиуси r_1 и r_2?

5. Испитај ја точноста на пропорциите:

а) $3:5=12:20$; б) $4:5=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}$; в) $x:x^4=x^3:x^6$; г) $x^2:y^2=xy:\frac{y^3}{x}$!

6. Дадена е пропорцијата $a:b=x:y$. Покажи како се добиени пропорциите:

а) $a:x=b:y$; б) $b:a=y:x$: в) $y:b=x:a$;

7. Напиши ги сите пропорции што произлегуваат од равенството:

а) $3\cdot8=6\cdot4$; б) $x\cdot y=2\cdot k$!

8. Реши ги пропорциите:

а) $x:3=12:9$; б) $3:2=x:5$; в) $0{,}3:x=0{,}4:2$;

г) $y:6=\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$; д) $x:2=3\frac{1}{3}:1\frac{1}{3}$; ѓ) $\frac{3}{0{,}2}=\frac{c}{0{,}8}$!

9. Определи го непознатиот број x од пропорциите;

а) $3x : 8 = 9 : 5$; б) $12 : (x+1) = 3 : 4$; в) $x : (ac) = c : (ab)$;

г) $15a^2b : 2ax = 10ab^2 : 2b^3$; д) $(a^3 + b^3) : x = (a^2 - b^2) : (a - b)^2$!

10. Со примена на изведените пропорции преобрази ги следниве пропорции, така што бројот x да се содржи само во еден член од нив, а потоа одреди го бројот x:

а) $(15 - x) : x = 3 : 2$; б) $8 : (5 + x) = 3 : x$; в) $a : b = (a + x) : x$;

г) $(5 + x) : (5 - x) = 4 : 1$; д) $(a + x) : (b - x) = (a - x) : x$!

11. Образувај продолжена пропорција што следува од пропорциите:

а) $a : b = 8 : 5$, $b : c = 5 : 3$ и $c : d = 3 : 2$;

б) $x : y = 2 : 5$, $y : z = 5 : 6$ и $z : u = 3 : 5$;

в) $a : b = 7 : 6$ и $a : c = 7 : 15$; г) $x : y = 4 : 9$ и $x : z = 1 : 3$!

12. Докажи дека од пропорцијата $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ следуваат пропорциите:

а) $\frac{mx_1 + nx_2 + kx_3}{my_1 + ny_2 + ky_3} = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$; $mnk \neq 0$; б) $\frac{x_1^2}{y_1^2} = \frac{x_2^2}{y_2^2} = \frac{x_3^2}{y_3^2}$.

§ 64. ПРАВА ПРОПОРЦИОНАЛНА ЗАВИСНОСТ

Една од најпростите и најчесто среќаваните функционални зависности помеѓу две променливи величини е таканаречената *права пропорционална зависност* на величините. Таа се дефинира:

Дефиниција 1. *Две променливи величини A и B се наоѓаат во права пропорционална зависност ако односот на кои и да било две произволни допуштени вредности од едната величина е еднаков на односот на соодветните вредности од другата величина.*

Пример: Ако 1 *kg* јаболка чини 3 дин. колку ќе чинат 2, 3, 4, 5, ... *kg* јаболка прегледно е претставено на таблицата:

Количество јаболка во kg	1	2	3	4	$4\frac{1}{2}$	5	6	....
Вредност во дин.	3	6	9	12	$13\frac{1}{2}$	15	18	....

Оттука гледаме дека $1 : 2 = 3 : 6$; $2 : 3 = 6 : 9$; $3 : 4 = 9 : 12$ итн.

Значи: Помеѓу количеството на некоја стока и вредноста на стоката постои права пропорционална зависност.

Од таблицата забележуваме: кога едната величина (количеството) се зголеми 2, 3, 4, ... 10 пати, тогаш и другата величина (вредноста на стоката) се зголемува исто толку пати; и обратно.

Величините помеѓу кои постои права пропорционална зависност се викаат уште и *право пропорционални величини.*

Такви се на пример величините: должината на кружната линија и нејзиниот радиус; периметарот на квадратот и неговата страна; тежината и волуменот на едно исто тело при постојана температура; изминатиот пат при рамномерното праволиниско движење и времето за кое е тој изминат; бројот на работниците и извршената работа од нив итн.

Нека се X и $У$ две право пропорционални величини. Ако се x_1, x_2, x_3, ... x_n неколку произволни допуштени вредности на величината X, а y_1, y_2, y_3, ... y_n соодветните вредности на величината $У$, тогаш, согласно горната дефиниција, ќе имаме:

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2$$

$$y_2 : y_3 = x_2 : x_3$$

$$y_3 : y_4 = y_3 : y_4$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{n-1} : y_n = x_{n-1} : x_n,$$

Од овие пропорции следува продолжената пропорција:

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : \dots\dots y_n = x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : \dots\dots x_n$$

или

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \dots\dots = \frac{y_n}{x_n} = k.$$

Оттука следува следнава:

Теорема: *Кај право пропорционалните величини односот на соодветните вредности од двете величини е постојан (константен) број.*

Ако со x ја означиме која и да било произволна допуштена вредност на едната од двете право пропорционални величини, а со y — соодветната вредност на другата величина, тогаш ќе имаме:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{или} \quad y = kx, \tag{1}$$

каде што k е некој константен број, кој е еднаков на вредноста на величината y што и соодветствува на вредноста $x = 1$. Тој број се вика *коефициент на пропорционалноста.*

Добиената формула (1), всушност, претставува и аналитички израз на функционалната зависност помеѓу право пропорционалните величини X и $У$. Според тоа можеме да ја дадеме и следнава дефиниција:

Дефиниција 2. *Функционалната зависност помеѓу две променливи величини x и y, што се изразува со формулата $y = kx$, каде што k е некој константен реален број различен од нула, се вика право пропорционална зависност.*

Како и секоја функционална зависност така и право пропорционалната може да се претстави графички. Функцијата на право пропорционалната зависност $y = kx$, како што гледаме, е идентична со функцијата $y = ax$, $a \neq 0$, (таа беше посебно проучена во една од претходните лекции).

Графикот на право пропорционалната зависност е права која минува низ координатниот почеток.

Покажи го тоа со графичко претставување на зависноста $y = 3x$!

§ 65. ОБРАТНА ПРОПОРЦИОНАЛНА ЗАВИСНОСТ

Дефиниција 1. *Две променливи величини A и B се наоѓаат во меѓусебна обратна пропорционална зависност, ако односот на кои и да било две произволни допуштени вредности од едната величина е еднаков на обратниот однос од соодветните вредности на другата величина.*

Величините помеѓу кои постои обратна пропорционална зависност се викаат *обратно пропорционални величини*. На пример.:

Нека се X и $У$ две обратно пропорционални величини. Ако се x_1, x_2, x_3, ... x_n неколку произволни допуштени вредности на величината X, а y_1, y_2, y_3, ... y_n да се соодветните вредности на величината $У$, тогаш, согласно горната дефиниција, ќе имаме:

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1$$

$$y_1 : y_3 = x_3 : x_1$$

$$y_1 : y_4 = x_4 : x_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_1 : y_n = x_n : x_1$$

Применувајќи го основното својство врз горниве пропорции, добиваме:

$$x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = x_4y_4 = \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; x_ny_n = k.$$

Оттука следува следнава:

Теорема: *Кај обратно пропорционалните величини производот на соодветните вредности од двете величини е постојан (константен) број.*

Ако со x ја означиме која и да било произволна допуштена вредност на една од двете обратно пропорционални величини, а со y — соодветната вредност на другата величина, тогаш ќе биде:

$$xy = k \quad \text{или} \quad y = \frac{k}{x} \tag{1}$$

каде што k е некој константен број различен од нула, кој е еднаков на вредноста на величината y што соодветствува на вредноста $x = 1$. Тој константен број се вика *коефициент на пропорционалноста* на обратно пропорционалните величини x и y.

Функцијата (1) што ја изразува аналитички функционалната зависност на обратно пропорционалните величини x и y, ја проучивме порано и, како што видовме, нејзиниот график претставува хипербола.

Врз основа на изложеново може да се даде и следната поопшта дефиниција на обратно пропорционалната зависност:

Дефиниција 2. *Функционалната зависност помеѓу две променливи величини, што е изразена со формулата* $xy = k$ *или* $y = \frac{k}{x}$, *каде што* $k \neq 0$ *е некој константен реален број, се вика обратно пропорционална зависност.*

Да разгледаме еден пример на обратно пропорционална зависност.

Растојанието меѓу два града е 120 *km*. Тоа може да се измине за различно време, во зависност од брзината на движењето. За да ја испитаме зависноста помеѓу брзината и времето потребно за изминување на патот, ќе ја составиме следната таблица:

Брзина во km на час	5	10	15	20	30	60	120	
Времето во часови	24	12	8	6	4	2	1	
Патот во km	120	120	120	120	120	120	120	

Од таблицата гледаме дека:

а) $5:10 = 12:24$; $5:15 = 8:24$, $5:30 = 4:24$; $15:60 = 2:8$ итн., или

б) $5 \cdot 24 = 10 \cdot 12 = 15 \cdot 8 = 20 \cdot 6 = 30 \cdot 4 = \cdots\cdots = 120 \cdot 1 = 120$.

Ако ги разгледаме од таблицата соодветните вредности на едната и другата величина, можеме да заклучиме: Кога едната величина (брзината) ќе се зголеми 2, 3, 4,···· пати, тогаш другата величина (времето) ќе се намали исто толку пати и обратно.

Обратна пропорционална зависност постои, на пример, помеѓу величините: притисокот и волуменот на одредено количество гас при постојана температура. (Тоа е познатиот Бојл-Мариотов закон $pV = k$); бројот на работниците и времето за кое тие извршуваат определена работа; големината на дропката и нејзиниот именител, а при еден и ист броител; должината и ширината на правоаголникот а притоа неговата плоштина да е постојана; бројот на луѓето и времето за кое тие можат да се прехранат со некое количество храна; количеството и цената на стоката што може да се купи со одреден износ пари итн.

Забелешка: За кои и да било две право (или обратно) пропорционални величини карактеристично е тоа што:

Ако едната величина се зголеми 2, 3, 4, 5, . . . пати, тогаш и другата величина се зголемува (или намалува) исто така 2, 3, 4, 5, . . . пати. Но, во математиката, физиката и практиката често се сретнуваат и таков пар променливи величини A и B, помеѓу кои постои таква функционална зависност, при што: Ако едната величина се зголеми 2, 3, 4, 5, . . . , пати; другата величина се зголемува (или намалува) 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ... ; 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, . . . ; . . . . ; 2^n, 3^n, 4^n, 5^n, ... пати. Во случај на таква зависност меѓу променливите величини, велиме дека: едната од нив е *право* (или *обратно*) *пропорционална со квадратот, кубот, ... односно n-от степен на другата величина.*

Примери: а) Плоштината на кругот е право пропорционална со квадратот на неговиот радиус, т. е. $P = kx^2$, каде што $k = \pi$.

б) Осветленоста на површината е обратно пропорционална со квадратот на нејзиното растојание од светлосниот извор, при услов светлосните зраци да паѓаат нормално на неа, т. е.

$$L = \frac{k}{r^2}.$$

Врз основа на изложеното дотука може да се даде следнава општа дефиниција за право (или обратно) пропорционалната зависност меѓу две променливи величини:

Дефиниција 3. *Функционалнаша зависносш помеѓу две йроменливи величини x и y, шшо е изразена со една од формулиите* $y = kx$, $y = kx^2$, $y = kx^3$, . . . $y = kx^n$ $\left(\text{или } y = \frac{k}{x}, y=\frac{k}{x^2}, y = \frac{k}{x^3}, \ldots y = \frac{k}{x^n}\right)$, *каде шшо* $k \neq 0$ *е некој консшаншен реален број, се вика йрава (или обраина) йройорционална зависносш со йрвиоій, віиориоиі, ійреійиоиі, ... n-оиі сійейен на аргуменійоиі x.*

§ 66. СЛОЖЕНА ПРОПОРЦИОНАЛНА ЗАВИСНОСТ

Во досега разгледаните случаи се јавуваа само по две променливи величини, од кои едната е функција, а другата аргумент. Но има доста случаи каде што некоја величина A (функцијата) зависи од две, три или повеќе други величини (аргументи). Таквата функционална зависност на една величина од повеќе други променливи величини може да биде нај- различна, но ние ќе се задржиме само на некои посебни случаи.

Дефиниција: *Променливата величина A, која зависи од неколку други йроменливи величини: B, C, D, . . . велиме дека е йраво (или обрайно) йройорционална со секоја од нив, ако односот на кои и да било две йроизволни дойуштени вредности од величината A е еднаков на односот (или на обраш- нио однос) од соодвешниите вредности на една која и да било од тие вели- чини, а йри йрейиоставка осшанатиите величини да останат исти.*

Примери: а) Плоштината на паралелограмот ($P = ah$) е право пропорционална иа основата a и висината h, бидејќи ако висината остане постојана, а само основата се менува, плоштината е право пропорционална на основата; а ако основата остане посто- јана, а само висината се менува, тогаш плоштината е правопропорционална на висината.

б) Времето потребно да се изгради една зграда е обратно пропорционално на бројот на работниците и должината на работниот ден.

Величината A може да зависи од величините X, Y, Z, U, V и T, така што, на пример, со величините X, Y и Z да е право пропорционална, а со величините U, V и T да е обратно пропорционална. Таа зависност аналитички ја изразуваме со формулата: $a = k \cdot \frac{xyz}{uvt}$, каде што k е некој константен реален број различен од нула и се вика *коефициент на пропорционалноста*. Тој не зависи од промената на величините X, Y, Z, U, V и T, а е една- ков на вредноста на величината A, кога сите аргументи добијат вредности еднакви на 1.

Еве неколку примери на сложена пропорционална зависност:

Примери: а) Простата лихва е право пропорционална на капиталот K, процентот p и времето t, т.е. $i = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$, каде што е $k = \frac{1}{100}$.

б) Јачината на електричната струја е право пропорционална на напонот V, а обратно пропорционална на отпорот на проводникот R, т. е. $J = \frac{V}{R}$, каде што $k = 1$.

в) Забрзувањето е право пропорционално на дејствувачката сила F, а е обратно пропорционално на масата на телото m, т.е. $a = \frac{F}{m}$.

г) Силата F со која се привлекуваат две планети (или тела) е право пропорционална на нивните маси m_1 и m_2, а обратно пропорционална е со квадратот на растојанието r меѓу нив, т.е. $F = k.\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, каде што е $k = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$ е таканаречената гравитациона константа.

ЗАДАЧИ

1. Во каква зависност се наоѓаат следниве величини:
   а) тежината и волуменот на телата, кога тие се од иста материја;
   б) брзината на движењето и времето, за кое колата изминува исти пат;
   в) периметарот и страната на равностраниот триаголник;
   г) бројот на работниците и времето за кое тие завршуваат определена работа?

2. Кои од следниве тврдења се точни:
   а) Должината на кружната линија е право пропорционална на нејзиниот радиус;
   б) Плоштината на квадратот е право пропорционална со квадратот на неговата страна;
   в) Плоштината на кругот е право пропорционална на неговиот радиус;
   г) Должината на сончевата сенка, што ја фрла едно дрво е право пропорционална на неговата висина;
   д) Атмосферскиот притисок е обратно пропорционален на надморската висина;
   ѓ) Растот на човекот е право пропорционален на возраста!

3. Пополни ги таблиците, откако претходно ќе установиш во каква зависност се y и x. Потоа зависноста изрази ја аналитички!

а)

x	1	2	5	6,5	8	10
y	2				16	

б)

x	6	12	30	45	60	72
y				8		5

4. Плоштината на правоаголникот е 60 cm^2, основата a cm, а висината h cm. Изрази ја аналитички зависноста на основата (a) од висината (h) на тој правоаголник!

Глава IX

ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

§ 67. РАВЕНСТВО, ИДЕНТИТЕТ И РАВЕНКА

Поимите равенство, идентитет и равенка ги запознавме во основното училиште. Со нив и досега се служевме, но овде ќе се вратиме уште еднаш на нив. Нив ги дефинираме на следниов начин:

Дефиниција 1. *Два броја (или два израза) сврзани со знакот на релацијата* „$=$" (еднакво), *образуваат равенство*. Равенства се, на пример:

$$7 = 7 \tag{1}$$

$$11 = 9 \tag{1'}$$

$$3\frac{1}{2}\cdot 4 + 7(6-8) = 0{,}5 - \frac{3}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right) \tag{1''}$$

$$(a+b)m = am + bm \tag{2}$$

$$3x - x = 2x \tag{2'}$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \tag{2''}$$

$$x^2 = 2x \tag{3}$$

$$5x - 3 = x + 1 \tag{3'}$$

$$\frac{2}{x-3} = 1 \tag{3''}$$

Кај секое равенство разликуваме две страни: *лева* и *десна*.

Ако двете страни на равенството се посебни броеви или бројни изрази, како на пример кај равенствата (1), (1′) и (1″), равенствата се викаат *бројни* или *нумерички равенства*.

Бројните равенства се, всушност, искази запишани со математички симболи, па според тоа тие можат да бидат вистинити (точни) или невистинити (неточни). Од горните бројни равенства првото е вистинито, а второто — невистинито.

Страните кај сите други равенства се две функции на еден или повеќе аргументи.

Равенствата можат да бидат од два вида, според тоа дали тие преминуваат во вистинити бројни равенства за кои и да било произволни допуштени вредности на аргументите, или не.

Равенството (2) е точно, т.е. тоа преминува во вистинито бројно равенство, за кои и да било произволни вредности на општите броеви (аргументи) a, b и m. Тоа го искажува познатиот дистрибутивен закон на множењето што важи за сите реални броеви. Ист е случајот и со равенството (2'). Равенството (2'') е, исто така, точно за сите допуштени вредности на x, освен за $x = 1$; но за таа вредност изразот на левата страна нема смисла.

Таквите равенства се викаат *идентитети*.

Дефиниција 2. *Равенството на две функции, кои добиваат еднакви бројни вредности за секој произволен систем на допуштени бројни вредности на аргументите се вика идентитет.*

Усвоено е да се викаат идентитети и сите точни бројни равенства.

Во равенството (3) изразите, односно функциите x^2 и $2x$, што стојат на различните страни од знакот „=", дефинирани се за сите вредности на x. но тие добиваат еднакви бројни вредности само за $x = 0$ и $x = 2$. Ист е случајот и со равенството (3'), во кое функциите $f(x) = 5x - 3$ и $\varphi(x) = x + 1$ се дефинирани за сите вредности на x, но тие имаат еднакви бројни вредности само за $x = 1$, т.е. $f(1) = \varphi(1) = 2$. Во равенството (3'') изразот $\frac{2}{x-3}$ е дефиниран за сите вредности на x, освен за $x = 3$, но тој добива бројна вредност 1 (број што стои на десната страна на равенството) само за $x = 5$.

Таквите равенства се викаат *равенки*.

Дефиниција 3. *Равенството на две функции, кои добиваат различни бројни вредности макар и само за еден фиксиран систем на дупуштени бројни вредности на аргументите, се вика равенка.*

Аргументите во равенката се викаат уште и *непознати*, тие можат да бидат означени со кои и да било букви, но вообичаено е да се означуваат со x, y, z. . . .

Познатите величини во равенката можат да бидат изразени или со посебни или со општи броеви. Општите броеви (букви) со кои во равенката се изразени некои од познатите величини и кои не зависат од непознатите се викаат *параметри на равенката*. Нив во равенката обично ги означуваме со првите букви од латинската азбука a, b, c, ... k, m, n; за разлика од аргументите (непознатите), кои во таков случај ги означуваме со последните букви од латинската азбука: x, y, z, v, u, v, t, . . .

На пример, во равенката: $(a-2)x+5=by$, x и y се непознати, а пак a и b се параметри (општи броеви), што не зависат од x и y.

Равенките кои содржат еден или повеќе параметри се викаат *равенки со параметри* или *равенки со општи или буквени коефициенти*, а равенките кои не содржат параметри — *равенки со нумерички* или *посебни коефициенти*.

Според бројот на непознатите, равенките можат да бидат: *равенки со една непозната, со две, со три* или *повеќе непознати*.

Равенките со една или две непознати симболички ги означуваме вака:

$$f(x) = \varphi(x), \tag{4}$$

$$f(x,\ y) = \varphi(x,\ y) \tag{5}$$

каде што $f(x)$, $\varphi(x)$, $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ се некои цели или дробни рационални фунции на аргументот x, односно аргументите x и y.

Ако во равенките (4) и (5) функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$, односно $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ се цели рационални функции (полиноми) во однос на непознатите, тогаш, во зависност од степенот на овие полиноми, равенките (4) и (5) можат да бидат: *од прв степен* или *линеарни равенки*, *од втор степен* или *квадратни равенки*, *равенки од трет степен* итн.

Нека се a, b, m и n четири кои и да било реални броеви. Со нивна помош ќе ги запишеме следниве неколку својства на равенствата, кои следуваат непосредно од дефиницијата на рационалните и реалните броеви и операциите со нив:

1°. *Својство на рефлексивност* (повратност): $a = a$

2°. *Својство на симетричност:* $a = b \Rightarrow b = a$

3°. *Својство на транзитивност* ($a = b$ и $b = m$) $\Rightarrow a = m$

4°. *Својство на монотоност на збирот и производот:*

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} a + m = b + m \\ a \cdot m = bm \end{cases}$$

5°. $$(a = b \text{ и } m = n) \Rightarrow \begin{cases} a + m = b + n \\ a - m = b - n \\ a \cdot m = bn \\ \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}; \quad m \neq 0 \text{ и } n \neq 0 \end{cases}$$

§ 68. РЕШЕНИЈА НА РАВЕНКИТЕ

Нека е дадена равенката со две непознати $f(x, y) = \varphi(x, y)$ (1)

Ако за допуштените вредности на аргументите: $x = x_0$, $y = y_0$, бројната вредност на функцијата $f(x, y)$ е еднаква на бројната вредност на функцијата $\varphi(x, y)$, т.е. ако е $f(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0)$, тогаш велиме дека фиксираната двојка бројни вредности на аргументите (x_0, y_0) *ја задоволува* равенката (1).

Дефиниција 1. *Секоја фиксирана двојка од допуштени бројни вредности на аргументите* (x_0, y_0), *која ја задоволува равенката* (1) *се вика решение на таа равенка.*

Пример: Двојката броеви (6; 1), т. е. $x=6$ и $y=1$ е едно решение на равенката

$$2x - y = x + 5, \tag{2}$$

бидејќи ако непознатите x и y во неа ги замениме со $x = 6$ и $y=1$, таа ќе премине по вистинито бројно равенство $12 - 1 = 6 + 5$.

Но, равенката (2) има и безброј други решенија; тоа се сите двојки броеви чија разлика е 5. Еве некои од нив: (7; 2), (8; 3), (10; 5), (3; —2), (5; 0) итн. Покажи дека секоја друга произволна двојка броеви чија разлика не е 5, на пример (3; 2), не е решение на равенката (2)!

Ако равенката е со една непозната, тогаш секое нејзино решение се вика уште и *корен на равенката.*

Дадена равенка може да има *конечен број* решенија, *бесконечно многу* решенија или да *нема решение*, на пример:

Равенката $x + 5 = 8$ има единствен корен $x = 3$, бидејќи само за $x = 3$ таа преминува во точно бројно равенство: $3 + 5 = 8$.

Равенката $(x-2)(x-4)(x-7)=0$ има три корени $x_1=2$, $x_2=4$ и $x_3=7$. За $x = 2$ првиот множител на левата страна станува еднаков на нула, за $x = 4$ — вториот множител, а за $x=7$ — третиот множител. А штом еден од множителите е еднаков на нула, тогаш и производот што стои на левата страна во равенката ќе биде еднаков на нула.

Пример на равенка која има бесконечно многу решенија е веќе разгледаната равенка (2). Ако равенката има бесконечно многу решенија, таа може, но и не мора секогаш, да е идентитет.

Пример: Равенката $|x|=x$ има бесконечно многу решенија: нулата и сите позитивни броеви, но има и броеви кои не се нејзини решенија (сите негативни броеви). Според тоа, таа не е идентитет.

Ако не постои ниту еден број (за равенката со една непозната) или ниту еден систем од броеви којшто ја задоволуваат дадената равенка, тогаш велиме дека равенката *нема решение*.

Пример: Равенката $x+3=x$ нема решение, бидејќи каква вредност и да добие x, левата страна ќе биде за 3 поголема од десната. Исто и равенката $\frac{x-2}{x^2-4}=0$ нема решение. Решенија на оваа равенка можат да бидат само оние вредности на x за кои броителот на дропката (што стои на левата страна) да е еднаков на нула, а именителот различен од нула. Навистина за $x=2$ броителот на дропката е еднаков на нула, но за таа вредност и именителот е еднаков на нула, а тоа не сме да биде.

Нужно е да спомeнеме дека една равенка може да нема решение во некое потесно множество на броеви, а да има решение во некое пошироко множество.

Пример: Равенката $x+4=1$ во множеството на природните броеви нема решение, додека во множеството на рационалните броеви таа има решение $x=-3$.

Друг пример: Равенката $x^2+5=0$ во множеството на реалните броеви нема решение, бидејќи кој и да било реален број дигнат на квадрат секогаш дава позитивен реален број, а тој број собран со 5 не може да биде еднаков на нула. Во погорните класови ќе видиме во кое множество на броеви и таа равенка има решение.

Дефиниција 2. *Да се реши една равенка во дадена област на броеви, значи да се одреди множеството на сите нејзини решенија во таа област на броеви, или ако тоа множество е празно да се утврди тоа.*

Забелешки: 1°. Решенијата на равенките со параметри претставуваат одредени функции (изрази) на параметрите, што ги содржи дадената равенка. На пример:

Равенката $ax+3=b$ при $a\neq 0$ има решение $x=\frac{b-3}{a}$, кое, како што гледаме, е функција на параметрите a и b.

2°. Да се реши една равенка со параметри значи да се одреди множество од сите решенија на равенката одделно за секој допуштен систем од вредности на параметрите што ги содржи таа. Како се постигнува тоа во практика на конкретни примери, ќе покажеме во една од наредните лекции.

ЗАДАЧИ

1. Провери кои од следниве равенства се точни, а кои не:
   а) $8\cdot 3-4=5\cdot 4$; б) $0\cdot 5=0+5$; в) $30-0=3$; г) $(-5)\cdot(-3)=-1$;
   д) $-7-3=10$; ѓ) $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$; е) $\frac{15\cdot 9}{6}=\frac{5\cdot 3}{2}$.
2. Кои од следниве равенства се идентитети, а кои равенки:
   а) $5x-2x=3x$; б) $2(a+1)=2a+2$; в) $3x-2=x+1$;
   г) $(y+5)^2=y^2+10y+25$; д) $2z-3=z+2$; ѓ) $|x|=x$.
3. За кои вредности на x бројната вредност на изразот $2x-1$ е еднаква на: а) 0; б) 5; в) -3? Условот на задачата запиши го со равенки!

4. Покажи дека секоја од следниве равенки нема решение, и објасни зошто:

а) $x + 5 = x + 2$; б) $3x = 3(x + 1)$; в) $y^2 = -4$!

5. Провери кој од броевите а) 1; 3 и 5 е корен на равенката $4x - 1 = x + 8$; б) -3; 0 и 2 е корен на равенката $3(x + 1) = 4x + 1$; в) -1; 4 и 7 е корен на равенката $\frac{x+3}{2} = 5 + 4x$!

6. За која вредност на параметарот a равенката $\frac{x}{a-2} = x + a$ нема решение?

§ 69. ЕКВИВАЛЕНТНИ РАВЕНКИ

Дефиниција: *Две равенки се еквивалентни во дадена бројна област, ако множеството решенија на првата равенка се совпаѓа со множеството решенија на втората равенка во истата бројна област;* или, со други зборови, тоа значи дека:

Две равенки се еквивалентни, ако секое решение на првата равенка е решение и на втората, и обратно: ако секое решение на втората равенка е решение и на првата.

Пример: Равенките $2x - 5 = 1$ и $x - 3 = 0$ се еквивалентни, бидејќи и двете имаат по еден единствен ист корен $x = 3$.

Да ги разгледаме равенките $x - 2 = 0$ и $(x - 2)(x - 7) = 0$.

Првата равенка има единствен корен $x = 2$, а втората равенка има два корена $x = 2$ и $x = 7$. Гледаме дека $x = 2$ е решение на обете равенки, но $x = 7$ е решение само на втората равенка. Според тоа тие две равенки не се еквивалентни.

Од дефиницијата за еквивалентност на равенките се гледа дека тој поим зависи од бројната област во која ги разгледуваме равенките. Или, поточно тоа значи: *Две равенки можат да бидат еквивалентни во една бројна област, а да не се еквивалентни во друга бројна област.*

Пример: Равенките $x = 2$ и $x^2 = 4$ се еквивалентни во областа на природните броеви. Во таа област двете равенки имаат по еден единствен корен $x = 2$. Но во областа на целите броеви тие не се еквивалентни, бидејќи во таа област втората равенка, покрај коренот $x = 2$, има и уште еден корен $x = -2$, кој не е корен и на првата равенка.

Забелешка: Од горната дефиниција следува дека: Две равенки се еквивалентни во дадена бројна област уште и во случаите: а) кога обете равенки немаат решенија во таа област; б) кога обете равенки се задоволени за сите допуштени вредности на аргументите во таа област.

Наведи сам такви примери!

§ 70. ТЕОРЕМИ ЗА ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА РАВЕНКИТЕ

За да ја решиме дадената равенка, истата ја заменуваме со друга попроста, но еквивалентна на неа. Потоа таа равенка ја заменуваме со трета уште попроста итн., се додека не дојдеме до најпростата равенка чии решенија се очевидни. Заменувањето на дадена равенка со друга попроста еквивалентна на неа претставува трансформација на дадената равенка. Трансформациите се прават врз основа на следниве две теореми за еквивалентност на равенките:

Заради упростување на изложувањето и докажувањето на теоремите ќе се ограничиме само на равенките со една непозната.

Теорема 1. *Ако кон двете страни на дадена равенка дададеме еден ист број или една иста функција, која е дефинирана за сите допуштени вредности на аргументот, ќе се добие нова равенка - еквивалентна на дадената.* На пример:

Нека е дадена равенката $f(x)=g(x)$ (1)
и функцијата $\varphi(x)$, која е дефинирана за сите допуштени вредности на аргументот x. Ќе докажеме дека равенката

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x) \tag{2}$$

е еквивалентна на дадената равенка (1).

Доказ: а) Нека е $x=x_0$ кое и да било решение на равенката (1) т.е.

$$f(x_0)=g(x_0).$$

Ако сега кон двете страни на бројното равенство $f(x_0)=g(x_0)$ го додадеме реалниот број $\varphi(x_0)$ — бројна вредност на функцијата $\varphi(x)$ за $x=x_0$ — ќе го добиеме равенството:

$$f(x_0)+\varphi(x_0)=g(x_0)+\varphi(x_0).$$

Тоа покажува дека решението на равенката (1) $x=x_0$ е решение и на равенката (2). Останува уште да докажеме дека секое решение на равенката (2) е решение и на равенката (1).

б) Нека е $x=x_1$ кое и да било решение на равенката (2), т. е.

$$f(x_1)+\varphi(x_1)=g(x_1)+\varphi(x_1).$$

Ако потоа од двете страни на тоа равенство се извади реалниот број $\varphi(x_1)$ — бројна вредност на функцијата $\varphi(x)$ за $x=x_1$, ќе се добие равенството $f(x_1)=g(x_1)$.

Оттука гледаме дека $x=x_1$ — решение на равенката (2) — е решение и на равенката (1). Јасно е дека, ако равенката (1) нема решение, тогаш и равенката (2) ќе нема решение и обратно. Со тоа е докажана теоремата 1.

Теоремата ја докажавме при услов функцијата $\varphi(x)$ да е дефинирана за секоја допуштена вредност на непознатата x. Меѓутоа, ако тој услов не е исполнет, може да се случи равенките (1) и (2) и да не бидат еквивалентни.

Пример: Равенките $x-2=3$ и $x-2+\frac{1}{x-5}=3+\frac{1}{x-5}$ не се еквивалентни.

Тоа е затоа што решението $x=5$ на првата равенка не е решение и на втората равенка бидејќи изразот (функцијата) $\varphi(x)=\frac{1}{x-5}$ за $x=5$ нема смисла.

Трансформациите на равенките во попрости врз основа на првата теорема за еквивалентност обично ги вршиме преку примената на последиците на таа теорема. Тие последици се:

Последица 1. *Ако во двете страни на равенката има еднакви членови со исти знаци, тие можат да се поништат (изоставаат)*

Пример: Нека е дадена равенката $7x - 3x + 2 = 9 - 3x$.

Гледаме дека во двете страни на равенката се среќава еден ист член ($-3x$). Согласно теоремата 1, ако додадеме кон двете страни на равенката по $+3x$, ќе добиеме:

$$7x - 3x + 2 + 3x = 9 - 3x + 3x \text{ или } 7x + 2 = 9.$$

Оваа равенка е еквивалентна на дадената. Ако ја споредиме со првата равенка, ќе видиме дека еднаквите членови се поништиле.

Последица 2. *Секој член на равенката може да се пренесе од едната страна на равенката во другата, притоа неговиот знак се сменува во спротивен.*

Пример. Да ја разгледаме равенката: $5x-4=2x+5$.

Ако сакаме да ги групираме на левата страна од равенката членовите што ја содржат непознатата, кон обете страни на равенката ќе додадеме по $-2x$, а ако сакаме да ги групираме на десната страна слободните членови (т.е. членовите што не ја содржат непознатата), тогаш кон двете страни на равенката треба да додадеме по $+4$.

Така ја добиваме равенката $5x - 4 - 2x + 4 = 2x + 5 - 2x + 4$ или $5x - 2x = 5 + 4$, која е еквивалентна на дадената.

При споредување на добиената равенка со дадената забележуваме дека членот $2x$, што беше на десната страна во дадената равенка, сега се појавува на левата страна, но со спротивен знак. Истото го забележуваме и со членот -4, кој преминувајќи од левата на десната страна, исто така го променил својот знак.

Врз основа на последицата 2 од теоремата 1, доаѓаме до следниов заклучок:

Секоја равенка може да се доведе во видот $R(x) = o$, каде што $R(x)$ е некој рационален израз (односно функција на аргументот x). И навистина, равенката $f(x) = g(x)$ со пренесување на функцијата $g(x)$ од десната на левата страна преминува во

$$f(x) - g(x) = 0 \text{ или } R(x) = 0.$$

Теорема 2. *Ако двете страни на дадена равенка се помножат (или поделат) со еден ист број, различен од нула, или со една и иста функција дефинирана и различна од нула за сите допуштени вредности на аргументот, ќе се добие нова равенка-еквивалентна на дадената.*

Нека е дадена равенката $\qquad f(x) = g(x) \qquad (1)$

и еден кој и да било реален број k, различен од нула; исто така и некоја функција $\varphi(x)$, која е дефинирана и различна од нула за сите допуштени вредности на аргументот x, ќе докажеме дека равенките:

$$f(x) \cdot k = g(x) \cdot k \qquad (3)$$

и

$$f(x) \cdot \varphi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \qquad (4)$$

се еквивалентни на дадената равенка (1)

Д о к а з: а) Нека е $x = x_0$ кое и да било решение на равенката (1) т. е.

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Ако го помножиме секој од еднаквите броеви $f(x_0)$ и $g(x_0)$ со бројот k, односно со бројот $\varphi(x_0)$, ќе добиеме еднакви производи, т.е.

$$f(x_0) \cdot k = g(x_0) \cdot k \quad \text{и} \quad f(x_0) \cdot \varphi(x_0) = g(x_0) \cdot \varphi(x_0).$$

Значи, решението $x = x_0$ е решение и на равенките (3) и (4)

б) Да земеме потоа дека $x = x_1$ е кое и да било решение на равенката (3), односно равенката (4) т.е. да е

$$f(x_1) \cdot k = g(x_1) \cdot k, \text{ односно} \qquad (3)$$

$$f(x_1) \cdot \varphi(x_1) = g(x_1) \cdot \varphi(x_1). \qquad (4)$$

Ако двете страни на равенството (3) ги поделиме со бројот k, кој не е нула, а равенството (4) со бројот $\varphi(x_1)$, кој исто така, според горниот услов, не е нула, ќе го добиеме равенството $f(x_1) = g(x_1)$.

Оттука следува дека $x = x_1$ — решение на равенката (3), односно равенката (4), е решение и на дадената равенка (1).

Ако равенката (1) нема решение, тогаш и равенките (3) и (4) ќе немаат решение.

Доказот за еквивалентност на равенките:

$f(x) = g(x)$ и $f(x) : k = g(x) : k$, $k \neq 0$, односно равенките

$f(x) = g(x)$ и $f(x) : \varphi(x) = g(x) : \varphi(x)$ при услов функцијата $\varphi(x)$ да е различна од нула, се сведува на претходното, бидејќи делењето со бројот k, односно функцијата $\varphi(x)$ може да се замени со множење но со нивната реципрочна вредност т.е.

$$f(x) \cdot \frac{1}{k} = g(x) \cdot \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} = g(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)}.$$

При докажување на теоремата, кога дадената равенка се множи (или дели) со функцијата $\varphi(x)$ ние претпоставивме дека се исполнети два услова, и тоа: а) функцијата $\varphi(x)$, да е дефинирана за сите допуштени вредности на непознатата во дадената равенка и б) функцијата $\varphi(x)$ да не е еднаква на нула ни за една допуштена вредност на непознатата x во дадената равенка. Да објасниме што станува ако не се исполнети овие услови:

Ако првиот услов не е исполнет, т.е. ако множителот $\varphi(x)$ не е дефиниран за сите допуштени вредности на непознатата x, тогаш добиената равенка може да изгуби некои од решенијата на дадената равенка.

Пример: Нека е дадена равенката $x - 1 = 2$.

Ако двете страни на таа равенка се помножат со $\frac{1}{x-3}$ ќе се добие равенката $(x-1) \cdot \frac{1}{x-3} = 2 \cdot \frac{1}{x-3}$ која не е еквивалентна со дадената. Тоа е затоа што решението $x = 3$ на првата равенка не е решение и на втората равенка, бидејќи изразот $\frac{1}{x-3}$ за $x = 3$ не е дифиниран.

Ако вториот услов не е исполнет, т. е. ако множителот $\varphi(x)$ е еднаков на нула (се анулира) за некои допуштени вредности на непознатата, тогаш добиената равенка може да придобие некои нови решенија, кои не се решенија на дадената равенка.

Пример: Нека е дадена равенката $3x - 1 = 5$.

Таа има единствен корен $x = 2$. Ако двете страни на таа равенка се помножат со $\varphi(x) = x - 3$, ќе се добие равенката $(3x - 1)(x - 3) = 5(x - 3)$, која има два корена $x=2$ и $x = 3$. За да се увериме во тоа, ќе ја решиме добиената равенка

$$(3x - 1)(x - 3) = 5(x - 3).$$

Прво ги пренесуваме сите членови на левата страна од равенката

$(3x - 1)(x - 3) - 5(x - 3) = 0$, потоа заедничкиот множител $(x - 3)$ го извлекуваме пред заграда

$$(x - 3)(3x - 1 - 5) = 0.$$

Имајќи предвид дека: производот на два реални броја е еднаков на нула, ако барем еден од нив е нула, тогаш е

$$x - 3 = 0, \text{ од каде е } x = 3$$

или $$3x - 1 - 5 = 0, \text{ од каде е } x = 2.$$

Според тоа: коренот $x = 2$ е корен на обете равенки, но коренот $x = 3$ е корен само на добиената равенка. Значи, добиената равенка не е еквивалентна на дадената. Оттука не е тешко да се заклучи дека придобиениот корен $x = 3$ на добиената равенка е токму онаа вредност на непознатата за која множителот $\varphi(x) = x - 3$ се анулира (станува еднаков на нула).

Последица 1. *Знациѿе на сиѿе членови во равенкаѿа можаѿ да се ӣроменаѿ во сӣроѿивни, кога двеѿе сѿрани на равенкаѿа се ӣомножаѿ со* -1.

Пример: Од равенката $-2x + 5 = -3$ следува еквивалентна равенка

$$2x - 5 = 3.$$

Врз основа на оваа последица и последицата 2 од теоремата 1 може да се извлече и следниов заклучок:

Ако сѿранииѿе на равенкаѿа (како целина) си ги ӣроменаѿ месѿаѿа, ѿ. е. ако леваѿа сѿрана сѿане десна, а деснаѿа лева, ѿогаш знациѿе на членовиѿе во равенкаѿа осѿануваат нейроменеѿи.

Пример: Равенката $7 = 2x^2 - 3x$ може да се прочита или запише и вака:

$$2x^2 - 3x = 7.$$

Последица 2. *Ако двеѿе сѿрани на равенкаѿа имааѿ заеднички множиѿел, којшѿо не ја содржи неӣознаѿаѿа и е различен од нула, ѿогаш со него можаѿ да се ӣоделаѿ сѿраниѿе на равенкаѿа, ѿака шѿо ќе се добие равенка еквиваленѿна на дадеҥаѿа.*

Во таков случај велиме дека равенката *ја скраѿуваме.*

Пример: Равенката $8x - 4y = 12$ може да се скрати со 4 (или помножи со $\frac{1}{4}$). Притоа се добива равенката $2x - y = 3$, која е еквивалентна на дадената.

Меѓутоа, ако една равенка се скрати со израз што ја содржи непознатата, добиената равенка може да изгуби некој корен, т.е. таа да не биде еквивалентна на дадената.

Пример: Равенката $2x^2 - 6x = 4x$ има два корена $x = 5$ и $x = 0$. Увери се во тоа! Ако ја скратиме со заедничкиот множител $2x$, ќе ја добиеме равенката $x - 3 = 2$, која не е еквивалентна на дадената, бидејќи има само еден корен $x = 5$. Притоа изгубениот корен $x = 0$ е токму онаа вредност на непознатата за која изразот $2x$ станува еднаков на нула.

Последица 3. *Равенка со дробни нумерички коефициенѿи може да се ѿрансформира во равенка со цели коефициенѿи, кога сиѿе членови на равенкаѿа се ӣомножаѿ со најмалиоѿ заеднички содржаѿел на имениѿелиѿе.*

Таквата трансформација на равенките се вика *ослободување на равенкаѿа од имениѿели.*

Пример: Дадена е равенката $\frac{x-1}{2} - 5 = \frac{x+2}{3}$.

Таа ќе се ослободи од именителите, ако секој нејзин член се помножи со нзс на именителите во неа, во случајот со бројот 6:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot 5 = 6 \cdot \frac{x+2}{3} \text{ или } 3(x-1) - 6 \cdot 5 = 2(x+2).$$

Добиената равенка е еквивалентна на дадената.

Ако равенката содржи дробни рационални изрази во однос на непознатата, т. е. ако таа ја содржи непознатата и во именител, тогаш по ослободувањето од именителите може да се добие равенка што нее еквивалентна на дадената. Или поточно, добиената равенка ќе ги содржи сите решенија на дадената, но може да придобие и други решенија, за кои нзс на именителите се анулира. Ете зошто при решавањето на такви задачи секогаш се прави проверка на тоа кои од решенијата на добиената равенка го анулираат нзс. Ако има такви, тие се исклучуваат од множеството на решенијата на дадената равенка.

Пример: Дадена е равенката $\frac{x^2-4x}{x-2}=3-\frac{4}{x-2}$.

Таа се ослободува од именителите, кога секој нејзин член се множи со изразот $x-2$, за кој претпоставуваме дека е различен од нула. Значи, при услов да е $x-2\neq 0$, ја добиваме равенката

$$x^2-4x=3(x-2)-4 \text{ или } x^2-7x+10=0.$$

Добиената равенка има решенија $x=5$ и $x=2$. Увери се во тоа! Решението $x=5$ е решение и на дадената равенка, но решението $x=2$ не е нејзино решение, бидејќи за таа вредност именителот $x-2$ се анулира. Според тоа, дадената равенка има само едно решение $x=5$.

Напоменуваме дека теоремите за еквивалентност на равенките, како и сите нивни последици, важат и за равенките со две и повеќе непознати.

ЗАДАЧИ

1. Испитај дали се еквивалентни следниве равенки:

а) $x^2+3x=12+x^2$ и $3x=12$; б) $2x^2=6x$ и $2x=6$;

в) $5x+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-3}=15$ и $5x=15$; г) $x+\frac{1}{x}=5+\frac{1}{x}$ и $x=5$;

д) $3=\frac{15}{x}$ и $3x=15$; ѓ) $y=4x$ и $\frac{y}{x}=4$.

2. Во која бројна област се еквивалентни равенките:

а) $(x-2)\left(x-\frac{3}{5}\right)=0$ и $x-2=0$; б) $x-5=0$ и $(x-5)(x+2)=0$;

в) $y=1$ и $y^3=1$.

3. Од кој степен е секоја од равенките:

а) $x(x-2)^2-8x=0$; б) $(y-1)(y-3)+5y=0$;

в) $2x(3x-1)^2-5x^2(x-4)=5$; г) $x(y-2)-5y(3-2x)=0$;

д) $4x^2y-5xy+3x=8$.

4 Дадена е равенката: $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1$.

а) Покажи дека $x=3$ е корен на таа равенка;

б) Покажи дека дадената равенка е еквивалентна со равенката што се добива кога двете страни на дадената равенка ги помножиме со $(x-1)(x-2)$.

§ 71. РАВЕНКИ ОД ПРВ СТЕПЕН СО ЕДНА НЕПОЗНАТА. ИСПИТУВАЊЕ (ДИСКУСИЈА) НА РЕШЕНИЈАТА

Дефиниција: *Равенка од прв степен со една непозната е секоја равенка од видот*

$$\boxed{ax+b=0,} \tag{1}$$

каде што a и b се кои и да било дадени броеви или изрази што не зависат од непознатата x.

Овој вид на равенката од прв степен со една непозната е *општ вид*, каде што a е *коефициент* пред непознатата, а b *слободен член*.

При испитувањето на решенијата на оваа равенка во зависност од вредностите на a и b ќе ги разликуваме следниве случаи:

1°. $a \neq 0$. Ако b го префрлиме на десната страна, а потоа двете страни на равенката ги поделиме со $a \neq 0$, ќе ја добиеме еквивалентната равенка $x=-\dfrac{b}{a}$, а со тоа и бараното решение. Количникот $-\dfrac{b}{a}$ е еднозначно определен, бидејќи операцијата делење (со број различен од нула) секогаш дава единствен резултат. Знакот на решението $-\dfrac{b}{a}$ ќе зависи од знаците на a и b и тоа: ако a и b имаат исти знаци решението ќе биде негативно, т. е. $-\dfrac{b}{a}<0$, а ако a и b имаат различни знаци, решението ќе биде позитивно $-\dfrac{b}{a}>0$. При $b=0$ и решението е нула, т. е. $-\dfrac{0}{a}=0$. Според тоа:

При $a \neq 0$ равенката од прв степен со една непозната има само едно решение $x=-\dfrac{b}{a}$, кое може да биде позитивно, негативно или нула.

2°. $a=0$. Во тој случај равенката (1) го добива видот

$$\boxed{0 \cdot x=-b} \tag{2}$$

Овде се можни два случаја.

а) Ако е $b \neq 0$, равенката (2) нема решение, бидејќи не постои број кој помножен со нула да дава број различен од нула. Значи:

При $a=0$, а $b \neq 0$ равенката (1) нема решение.

б) Ако е и $b=0$, равенката го добива видот

$$\boxed{0 \cdot x=0}$$

Таа е задоволена за секоја вредност на x. Според тоа:

При $a=0$ и $b=0$ равенката (1) има бесконечно множество решенија, или поточно таа е задоволена за секоја вредност на x. За равенката (1) во тој случај велиме дека е *неопределена*.

Испитувањето на смислата на решението на дадена равенка, или како што велиме уште *дискусијата на равенката*, има цел да утврди:

1. За кои вредности на непознатата и параметрите (ако таа е со општи коефициенти) равенката има смисла, т. е. кои се нивни допуштени вредности, а кои не; 2. Под какви услови и за кои вредности на параметрите равенката има едно решение; 3. За кои вредности на параметрите равенката нема решение, а за кои таа има бесконечно множество решенија.

Напоменуваме дека решавањето на равенките и испитувањето на смислата на решенијата претставуваат една целина, па затоа не смејат да се одделуваат едно од друго.

§ 72. ПРИМЕРИ НА РЕШАВАЊЕ И ИСПИТУВАЊЕ НА РАВЕНКИ ОД ПРВ СТЕПЕН СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

1. ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ СО ПОСЕБНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Задача 1. Да се реши равенката $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x+14}{2}-2.$

Прво ќе се ослободиме од именителите во неа. Тоа го постигнуваме кога двете страни на равенката ги помножиме со нзс на именителите, а потоа ги извршиме потребните скратувања:

$$12\cdot\frac{5x-2}{3}-12\cdot\frac{x-8}{4}=12\cdot\frac{x+14}{2}-12\cdot 2.$$

или

$$4(5x-2)-3(x-8)=6(x+14)-12\cdot 2.$$

Со ослободување од заградите, добиваме:

$$20x-8-3x+24=6x+84-24.$$

Ако ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а слободните членови на десната страна, ќе ја добиеме равенката

$$20x-3x-6x=84-24+8-24 \text{ или } 11x=44.$$

Со делење на двете страни на добиената равенка со коефициентот пред непознатата (11) ја добиваме најпростата еквивалентна равенка $x=4$ која во исто време ни го дава и бараното решение на дадената равенка.

Проверка: Во дадената равенка непознатата x ја заменуваме со најденото решение $x=4$, така што добиваме $\frac{5\cdot 4-2}{3}-\frac{4-8}{4}=\frac{4+14}{2}-2$, од каде е $6-(-1)=9-2$ или $7=7$. Значи: Најденото решение $x=4$ е правилно одредено.

Задача 2. Да се реши равенката $\frac{\frac{5x}{2}-3}{4}-\frac{\frac{x}{2}+2}{5}=\frac{7x-2}{8}-(x-3).$

Прво ја ослободуваме равенката од именителите, за кои нзс е 40.

$$10\left(\frac{5x}{2}-3\right)-8\left(\frac{x}{2}+2\right)=5(7x-2)-40(x-3).$$

Се ослободуваме од заградите:

$25x—30—4x—16=35x—10—40x+120$, потоа на познатиот начин добиваме:

$25x—4x—35x+40x=—10+120+30+16$ или $26x=156$,

од каде е $x=\frac{156}{26}$ или $x=6$.

Увери се самиот дека $x=6$ е решение на дадената равенка?

Задача 3. Да се реши равенката: $2x+|x—3|=9$.

Во оваа равенка непознатата се наоѓа и под знакот на апсолутната вредност. Врз основа на дефиницијата за апсолутната вредност, имаме:

$$|x-3|=\begin{cases} x—3, & \text{ако е } x\geqslant 3 \\ —(x—3), & \text{ако е } x<3 \end{cases}$$

Дадената равенка може да има решенија во интервалот $(—\infty, 3)$, а исто и во интервалот $[3, \infty)$, или само во еден од нив.

Тоа треба посебно да се испита.

а) Ако е $x\geqslant 3$, дадената равенка го добива видот

$$2x+x-3=9, \text{ од каде наоѓаме } x=4.$$

Значи, равенката во интервалот $[3, \infty)$ има решение $x=4$, бидејќи $4\in[3, \infty)$

б) Ако е $x<3$, дадената равенка може да се запише вака:

$$2x-(x-3)=9, \text{ од каде наоѓаме } x=6.$$

Но, $6\notin(-\infty, 3)$. Тоа не може да биде, па затоа равенката во интервалот $(-\infty, 3)$ нема решение.

Според тоа, дадената равенка има само едно решение $x=4$.

Слично се решаваат и сите други равенки во кои непознатата се наоѓа под законот на апсолутната вредност.

2. ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ СО ПОСЕБНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Задача 4. Да се реши равенката $\frac{15}{x}-\frac{7—x}{x—2}=1$.

За да се ослободиме од именителот, двете страни на дадената равенка треба да ги помножиме со нзс на именителите x и $x-2$, а тоа е производот $x(x-2)$.

При претпоставка дека е $x(x-2)\neq 0$ или $x\neq 0$ и $x\neq 2$ дадената равенка се трансформира во друга равенка:

$$\frac{15x(x-2)}{x}-\frac{(7-x)\cdot x\cdot(x—2)}{x-2}=x(x-2).$$

или $$15(x-2)-x(7-x=x(x-2).$$

Со ослободување од заградите имаме $15x-30-7x+x^2=x^2-2x$.

Потоа со групирање на членовите (со и без непознатата x) и со сведување на сличните членови, добиваме: $10x=30$, од каде е $x=3$.

Проверка: $\frac{15}{3}-\frac{7-3}{3-2}=1$; $5-4=1$ или $1=1$.

Значи, $x=3$ е решение на дадената равенка.

До истиот заклучок ќе дојдеме побрзо ако провериме дали изразот $x(x-2)$, со кој ги множиме двете страни на дадената равенка, за $x=3$, е нула или различен од нула. Во нашиот случај

$$x(x-2)=3(3-2)=3\neq 0.$$

Според тоа $x=3$ е решение на дадената равенка.

Задача 5. Да ја разгледаме и решиме равенката

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{x^2-4}. \tag{1}$$

Таа има смисла само при $x+2\neq 0$ и $x-2\neq 0$ или при $x^2-4\neq 0$.

Најмалиот заеднички содржател за $x+2$; $x-2$ и x^2-4 е x^2-4. Ако е $x^2-4\neq 0$, дадената равенка ќе биде еквивалентна на равенките

$$x-2-(x+2)=2x; \tag{2}$$

$$x-2-x-2=2x;\quad -2x=4, \text{ од каде е } x=-2.$$

Но за $x=-2$ нзс (x^2-4) е еднаков на нула. Според тоа, равенките (1) и (2) не се еквивалентни, т. е. решението $x=-2$ на равенката (2) не е решение и на дадената равенка (1). Тоа е видно и од таму што за $x=-2$ равенката (1) нема смисла.

Значи, дадената равенка нема решение.

Задача 6. Да се реши равенката $\dfrac{2x-7}{x-5}=1-\dfrac{2-x}{x-5}$.

Равенката има смисла само при $x-5\neq 0$. Ако ги помножиме двете страни со $x-5\neq 0$, ќе добиеме: $2x-7=x-5-(2-x)$,

$2x-7=2x-7$ или $2x-2x=0$, од каде е $0\cdot x=0$.

Добиената равенка е задоволена за секоја вредност на x. Но, решенија на дадената равенка се само оние вредности на x за кои е $x-5\neq 0$. Според тоа, дадената равенка е задоволена за секоја вредност на x, освен за $x=5$.

.3 ЦЕЛИ И ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ СО ПАРАМЕТРИ

Задача 7. Да се реши равенката $ax-2=x$, каде што x е непозната, а a параметар.

Равенката има смисла за сите вредности на непознатата x и параметарот a. Со пренесување на членот x од десната на левата страна, а членот -2 од левата на десната, се добива еквивалентна равенка $ax-x=2$, односно $(a-1)\,x=2$.

Ако е $a-1\neq 0$, двете страни на добиената равенка можеме да ги поделиме со $a-1$, па ќе добиеме $x=\dfrac{2}{a-1}$.

Значи ако е $a\neq 1$, равенката има решение $x=\dfrac{2}{a-1}$.

При тоа: за $a>1$ решението е позитивно, а за $a<1$ решението е негативно. Ако е $a=1$, равенката го добива видот $0\cdot x=2$. Во тој случај таа нема решение.

Задача 8. Да се реши и дискутира равенката $\dfrac{x-2a}{3}+\dfrac{x-3}{2a}=2$ каде што x е непозната, а a — параметар.

Равенката нема смисла само за $a = 0$. (Зошто?)

Ако е $a \neq 0$, двете страни ги множиме со $6a$, па добиваме:

$2a(x-2a)+3(x-3) = 12a, \qquad 2ax-4a^2+3x-9=12a; \qquad 2ax+3x=4a^2+12a+9,$

од каде $\qquad (2a+3)x=(2a+3)^2$

При $2a+3 \neq 0$ равенката има решение $x = 2a+3$; за $a > -\frac{3}{2}$, решението е позитивно, т.е. $x > 0$, додека за $a < -\frac{3}{2}$ решението е негативно.

Ако е $a = -\frac{3}{2}$, последната равенка го добива видот $0 \cdot x=0$, т.е. таа е неопределена. За $a = -\frac{3}{2}$ дадената равенка станува идентитет $\frac{x+3}{3} + \frac{x-3}{-3} = 2$. Увери се самиот во тоа!

Задача 9. Дадена е равенката $\frac{x}{c} + \frac{x}{a-c} = \frac{c}{a-c}$, каде што a и c се параметри.

Равенката има смисла само за $c \neq 0$ и $a - c \neq 0$, т.е. ако е $c(a-c) \neq 0$. Со множење на двете страни на равенката со најмалиот заеднички содржател за именителите се добива еквивалентната равенка:

$$(a-c)x + cx = c^2, \text{ која се трансформира во: } ax = c^2.$$

Ако е $a \neq 0$, равенката има решение $x = \frac{c^2}{a}$.

Како што гледаме, решението зависи од промената на параметрите a и c. Значи, решението на равенката е функција на параметрите. При определувањето на допуштените вредности на параметрите треба да се води сметка, не само да е $a \neq 0$, туку истовремено тие треба да го исполнуваат и условот $c(a-c) \neq 0$; т.е. да е $c \neq 0$ и $a \neq c$, бидејќи само при постоењето на тој услов дадената равенка има смисла. Според тоа, параметрите a и c мораат да ги задоволуваат условите $a \neq 0$, $c \neq 0$ и $a \neq c$.

Решението е позитивно или негативно, во зависност од тоа дали параметарот a е позитивен или негативен. Може ли решението на равенката да биде нула?

Задача 10. Да се испита смислата на решението на равенката $\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} = \frac{2}{x}$, каде што m и n се параметри.

Допуштени вредности на непознатата x се сите реални броеви, освен $x = 0$, $x = m$ и $x = n$. Значи, равенката има смисла само за $x(x-m)(x-n \neq 0$. Со ослободување од именителите, при услов $x(x-m)(x-n) \neq 0$, се добива еквивалентната равенка:

$x(x-n) + x(x-m) = 2(x-m)(x-n)$ или $x^2 - nx + x^2 - mx = 2x^2 - 2mx - 2nx + mn$

од каде се добива равенката

$$(m+n)x = 2mn.$$

Ако е $m + n \neq 0$, равенката ќе има решение $x = \frac{2mn}{m+n}$.

Решението би било еднакво на нула (т.е. $x = 0$), ако е $m = 0$ или $n = 0$.

Тоа би било еднакво на m или n (т.е. $x = m$ или $x = n$), ако е $m = n$. Но, бидејќи вредностите $x = 0$, $x = m$, и $x = n$ се недопуштени, согласно почетниот услов $x(x-m)(x-n \neq 0$, тоа и вредностите $m = 0$, $n = 0$, и $m = n$ на параметрите m и n треба да се сметаат за недопуштени.

Според тоа, параметрите мораат да ги задоволуваат условите: $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $m \neq n$.

Ако е $m + n = 0$, а тоа е можно само ако е $m = n = 0$ или ако m и n се спротивни броеви.

а) Ако е $m = n = 0$, тогаш добиената равенка го добива видот $0 \cdot x = 0$. Во тој случај равенката е неопределена, т. е. задоволена е за секое x, освен за $x = 0$.

б) Ако пак $m \neq 0$ и $n \neq 0$ се спротивни броеви, тогаш добиената равенка го добива видот $0 \cdot x = 2mn$. Во тој случај равенката нема решение, бидејќи е $mn \neq 0$.

Задача 11. Да се реши равенката $\frac{x-b}{x+a} - \frac{x-c}{x-a} = \frac{c\,(x+a) - 2a^2}{x^2 - a^2}$ каде што a, b и c се параметри.

Допуштени вредности на непознатите се сите вредности, освен $x = \pm\, a$, за кои равенката нема смисла. По ослободувањето од именителите, при $(x + a)\ (x - a) \neq 0$ равенката преминува во $(x - b)\ (x - a) - (x - c)\ (x + a) = c\ (x + a) - 2a^2$, која потоа се трансформира во:

$$(2a + b)\, x = a\, (2a + b).$$

Ако е $2a + b \neq 3$, тогаш $x = \frac{a\,(2a + b)}{2a + b}$ или $x = a$. Но, за $x = a$ дадената равенка нема смисла. Според тоа, дадената равенка при $2a + b \neq 0$ нема решение.

Ако е $2a + b = 0$, равенката добива вид $0 \cdot x = a \cdot 0$. Тогаш равенката е неопределена, т.е. таа е задоволена за секое x, освен за $x = \pm\, a$.

Врз основа на решените примери на различните видови равенки од прв степен со една непозната со непосредна примена на теоремите за еквивалентност и нивните последици, може да се извлече следново:

Практично упатство за решавање и испитување на равенките:

1. Прво утврдуваме за кои вредности на непознатите и параметрите (ако таа е со општи коефициенти) равенката има смисла, т. е. кои се нивни допуштени вредности а кои не.

2. Равенката ја ослободуваме од именителите кога двете нејзини страни ги множиме со нзс на именителите, за кого претпоставуваме дека е различен од нула.

3. Се ослободуваме од заградите, извршувајќи ги последователно сите означени операции и нужни упростувања во двете страни на равенката.

4. Ги групираме членовите што ја содржат непознатата на една страна, а слободните членови на другата страна на равенката.

5. Ги сведуваме сличните членови во равенката.

6. Ги делиме двете страни на равенката со коефициентот (или изразот) пред непознатата, и тоа при претпоставка дека е тој различен од нула.

7. Ако дадената равенка е со општи коефициенти, најденото решение е некоја функција на параметрите. Во тој случај утврдуваме под какви услови и за кои вредности на параметрите дадената равенка е определена, т. е. таа има само едно решение.

8. Потоа утврдуваме под кои услови и за кои вредности на параметрите дадената равенка нема решение, а за кои вредности таа е неопределена, т.е. има бесконечно многу решенија.

9. На крајот извршуваме проверка на најденото решение, како и на сите резултати од испитувањето на дадената равенка.

Напоменуваме дека набројаните етапи не ги извршуваме кај сите равенки. На пример, ако равенката нема именители и не содржи загради, јасно е дека решавањето го започнуваме од четвртата етапа. Во некои случаи равенката може да се реши полесно и кога се промени погоре установениот ред.

§ 73. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ И ИСПИТУВАЊЕ НА РАВЕНКИТЕ ОД ПРВ СТЕПЕН СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Да се реши равенката со една непозната $f(x)=g(x)$, (1)
значи, како што ни е познато, да се најде за кои вредности на непознатата (аргументот x) функциите $y=f(x)$ и $y=g(x)$ добиваат еднакви вредности.

Решавањето на равенките со една непозната може да добие и определена геометриска интерпретација, која се состои во следново:

Ако функциите $f(x)$ и $g(x)$, што стојат на левата и десната страна во равенката (1), ги претставиме графички во ист координатен систем XOY, тогаш нивните графици во некои случаи можат да се сечат во една или повеќе точки, или да немаат заеднички точки. Апсцисите на пресечните точки на графиците на функциите $y=f(x)$ и $y=g(x)$ се оние вредности на аргументот x, за кои соодветните вредности на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се еднакви. А тие вредности на аргументот x се токму бараните решенија на равенката (1).

Таквиот начин на решавање на равенките со една непозната се вика *графичко решавање*.

Ќе се задржиме само на графичкото решавање на линеарните равенки со една непозната, што се сведуваат на општиот вид:

$$\boxed{ax+b=0} \qquad (2)$$

Левата страна на равенката (2) е линеарна функција $y=ax+b$ во однос на непознатата, а десната страна е функцијата $y=0$, чиј график се поклопува со x—оската.

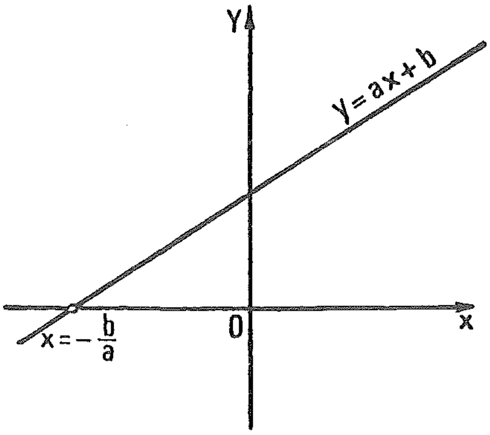
Дефиниција: *Да се реши графички равенката $ax+b=0$, значи да се одреди апсцисата на пресекот на правата $y=ax+b$ и x—оската.*

Вредноста на таа апсциса се вика *нула на линеарната функција*, бидејќи таа е онаа вредност на аргументот за која функцијата се анулира.

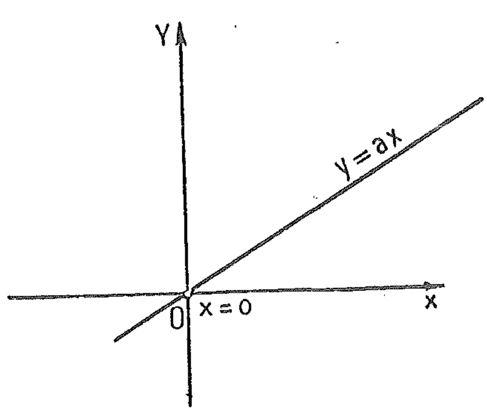
Резултатите од испитувањето на решенијата на општата линеарна равенка можат да бидат потврдени и графички.

Од § 57. т. 3 за графикот на функцијата $y=ax+b$ знаеме:

1. Ако е $a \neq 0$, графикот на функцијата $y=ax+b$ ја сече x—оската само во една точка. Притоа ако е $b \neq 0$, графикот на функцијата (сл. 61) ја сече x—оската во точка



Сл. 61

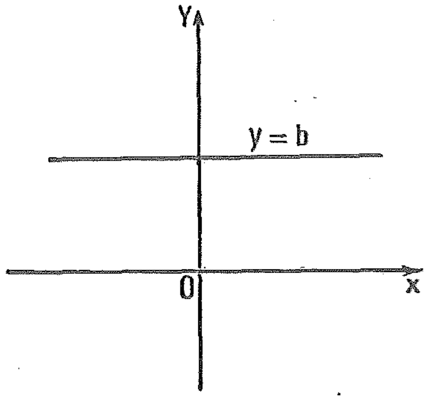


Сл. 62

чија апсциса не е нула. Во тој случај равенката $ax + b = 0$ има само едно решение и тоа $x = -\frac{b}{a}$. Ако е $b = 0$, равенката го добива видот $ax = 0$, а графикот на функцијата $y = ax$ минува низ координатниот почеток. Според тоа, решение на равенката $ax = 0$ е апцисата на координатниот почеток, т.е. $x = 0$ (сл. 62).

Значи, ако е $a \neq 0$ равенката (2) има само едно решение ($x = -\frac{b}{a}$ или $x = 0$). Велиме дека равенката (2) *е определена.*

2. Ако е $a = 0$ а $b \neq 0$, равенката (2) го добива видот $0 \cdot x + b = 0$. Графикот на функцијата $y = 0x + b$ или $y = b$ е права паралелна на x—оската, па според тоа не може да има заеднички точки со неа (сл. 63). Во таков случај равенката (2) *нема решение.*



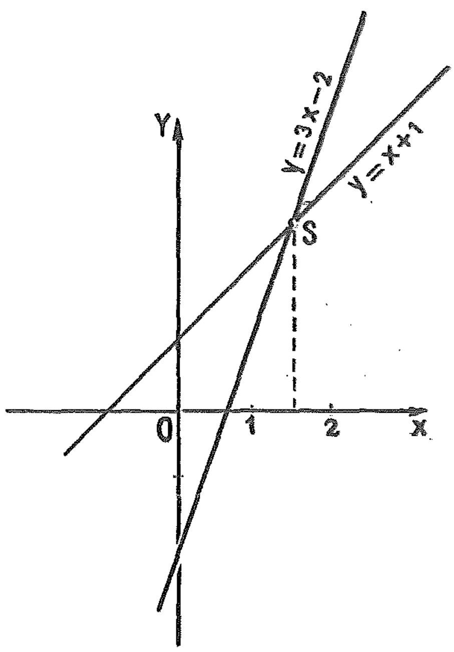
Сл. 63

3. Ако е $a = 0$ и $b = 0$, равенката (2) го добива видот $0x = 0$. Тогаш функцијата $y = ax + b$ преминува во $y = 0$, чиј график се поклопува со x — оската. Во таков случај графикот на функцијата $y = ax + b$ и x—оската имаат бесконечно многу заеднички точки. Со други зборови, ако е $a = 0$ и $b = 0$ равенката (2) има бесконечно многу решенија. Велиме дека таа е *неопределена.*

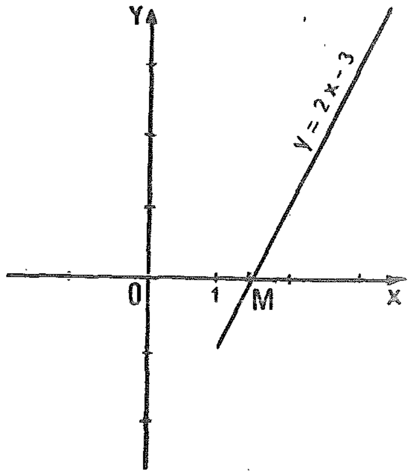
Задача 1. Да се реши графички равенката $3x - 2 = x + 1$.

Дадената равенка може графички да се реши на два начина.

I начин. Ги цртаме графиците на линеарните функции $y = 3x - 2$ и $y = x + 1$ во ист координатен систем. Од сл. 64 гледаме дека графиците на двете функци се сечат во точката S, чија апсциса е $x = 1{,}5$. Тоа е бараното решение на равенката.



Сл. 64



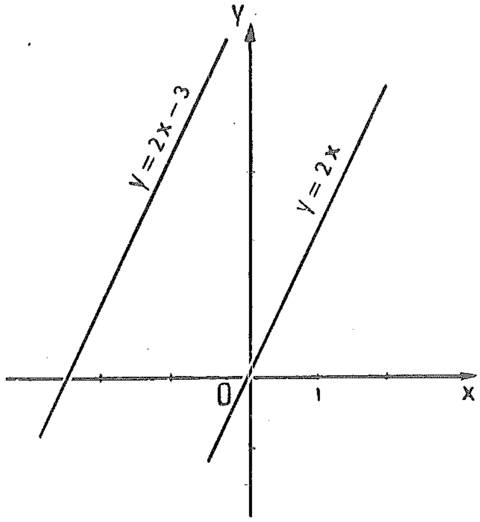
Сл. 65

II начин. Дадената равенка прво ја доведуваме во општиот вид $2x - 3 = 0$, потоа го цртаме графикот на функцијата $y = 2x - 3$. Апсцисата 1,5 на пресечната точка M на графикот на функцијата $y = 2x - 3$ со x—оската ($y = 0$) е бараното решение на дадената равенка (сл. 65).

Задача 2. Да се реши графички равенката $2x+5=2x$.

Ако ги нацртаме графиците на функциите $y=2x+5$ и $y=2x$ ќе забележиме дека тие се две прави што се паралелни и немаат заедничка точка (сл. 66). Според тоа, нема таква вредност за аргументот x за која тие две функции да се еднакви. Велиме дека равенката нема решение.

До истиот заклучок ќе дојдеме ако равенката ја решиме графички и на вториот начин.



Сл. 66.

ЗАДАЧИ

1. За која вредност на x бројната вредност на изразот $5x-2$ станува еднаква на: а) 8, б) -7, в) 0?
2. За која вредност на x изразите $3x-2$ и $4x+1$ ќе имаат еднакви бројни вредности?

Реши ги равенките:

3. а) $(x-1)(x-2)-(x-3)(x-4)=6$; б) $2x-\frac{x}{2}=9$!
4. а) $16x^2-(7-4x)^2=169x+64$; б) $3x^2-(3x+2)(x-1)=8$!
5. а) $|x+3|-3=2x$; б) $|x+1|+|x-1|=2$!
6. а) $|x-2|-|x+2|=0$; б) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$!
7. а) $x-\frac{2}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{9-2x}{3}$; б) $\frac{y+17}{5}+2=\frac{3y-7}{4}$!
8. а) $1+\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}=\frac{x}{2}+\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}$; б) $x+\frac{1+\frac{3x}{2}}{4}+\frac{2+\frac{x}{4}}{3}=2$!
9. а) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=3$; б) $\frac{2}{x-4}=1$!
10. а) $\frac{2}{2x-3}+\frac{2x-3}{x}=2$; б) $\frac{y+1}{y-3}-\frac{y-1}{y+3}=\frac{8y}{y^2-9}$!
11. а) $\frac{3}{x-1}-\frac{5}{3x-3}=\frac{1}{x^2-2x+1}$; б) $\frac{2}{(1+y)^2}-\frac{5}{(1-y)^2}=\frac{3}{1-y^2}$!
12. Реши ги и испитај ги решенијата на следниве равенки со параметри:
    а) $ax-ab=b-bx$; б) $(y-a)(y+b)=y^2-a^2$!
13. а) $\frac{mn-n}{n}-\frac{nx-m}{m}=m-n$; б) $\frac{y}{a}+\frac{y}{b-a}=\frac{a}{a+b}$!
14. а) $\frac{x+c}{c}+\frac{x}{x-c}=\frac{x-c}{c}$; б) $\frac{m}{x}+m=2$!
15. а) $\frac{3}{x-a}-\frac{2}{x+a}=\frac{3x-7a}{x^2-a^2}$; б) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$!

16. а) $(x+k)^2 = x(x+k) + 5k^2$; б) $\frac{1+y}{1-y} = \frac{m}{n}$.

17. На колку е еднаков параметарот a, ако равенката:

а) $5a - 2x = 3$ има корен $x = 1$; б) $5x + a = 2$ има решение $x = 0$?

18. За која вредност на параметарот a, равенката $x - 2ax = 2a + 5$ нема да има решение?

19. Реши ја равенката $P = 2(ab + ac + bc)$: а) по a, б) по b, в) по c!

20. Покажи дека решението на равенката $ax + a = x + a^2$ е парен број, ако е a природен број, различен од 1!

21. Покажи дека решението на равенката $\frac{x-2a}{2} + \frac{x-1}{4a} = 1$ е непарен број, ако е a природен број!

22. Следниве равенки реши ги графички:

а) $2x - 5 = x + 1$; б) $3x + 2 = -x - 6$; в) $3x - 7 = 5$;

г) $x + 3 = 4x$; д) $x + \frac{4}{5} = 0$; ѓ) $3x - 2 = 0$.

§ 74. ПРИМЕНА НА РАВЕНКИТЕ ОД ПРВ СТЕПЕН СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Во различните области од науката, техниката и секојдневниот живот има многу задачи, кои тешко се решаваат по чисто аритметички пат. Нивното решавање значително се олеснува со примена на равенките.

На неколку примери ќе покажеме како се решаваат тие задачи.

Задача 1. Фабриката „Раде Кончар“ во Загреб добила порачка да произведе одреден број електромотори за 30 дена. Меѓутоа работниците произведувале дневно по 3 електромотори повеќе и порачката ја завршиле за 5 дена порано. Колку електромотори содржала порачката и каква била дневната норма според планот?

Да претпоставиме дека планираната норма била да се произведат x електромотори дневно. Бидејќи порачката требало да се изврши за 30 дена, јасно е дека таа изнесува $30x$ (електромотори). Таква е положбата според планот. Меѓутоа, фактичката положба е поинаква. Работниците не произведувале по x, туку по $x + 3$ (електромотори) дневно, така што порачката ја завршиле за 5 дена порано, односно за $(30 - 5) = 25$ дена.

Фактички биле произведувани по $x + 3$ електромотори дневно, што, значи дека за 25 дена ќе бидат произведени $25(x + 3)$ електромотори. Така, истата порачка ја изразивме со два израза $30x$ и $25(x + 3)$, кои според условот на задачата треба да бидат еднакви. Оттука и равенката:

$$30x = 25(x + 3).$$

Откога ќе ја решиме, добиваме $x = 15$.

Значи, нормата според планот била 15 електромотори дневно а порачката изнесувала $(15 \cdot 30) = 450$ електромотори.

На крајот правиме проверка дали најденото решение ги задоволува условите на задачата. Најдовме дека дневната норма била 15 електромотори, а фактички биле произведувани по $(15 + 3) = 18$ електромотори дневно. Откога ќе го помножиме бројот 18 со 25 (дена), за колку што е завршена порачката, добиваме дека таа изнесувала 450 електромотори. Значи задачата е решена точно.

Забелешка: Задачата може да се реши и на друг начин, кога со x се означи бројот на порачаните електромотори. Во тој случај дневната норма според планот ќе биде $\frac{x}{30}$ (електромотори), а фактички работниците произведувале по $\frac{x}{25}$ (електромотори) дневно.

Бидејќи според условот на задачата, бројот на фактички произведуваните електромотори на ден е за три поголем од планираната дневна норма, ја добиваме равенката

$$\frac{x}{25}-3=\frac{x}{30} \quad \text{или} \quad \frac{x}{25}=\frac{x}{30}+3.$$

Решението на оваа равенка е $x = 450$. Од изразот $\frac{x}{30}$, кога ќе го замениме x со 450, добиваме дека дневната норма според планот била 15 електромотори.

Задача 2. Два тракториста заедно изоруваат еден блок за 6 дена. Првиот тракторист сам можел да го изора блокот за 10 дена. За колку дена сам ќе го изора блокот вториот тракторист?

Во задачата непозната величина е времето (бројот на деновите) за кое вториот тракторист може сам да го изора блокот. Тоа време нека е x дена. Размислуваме вака:

Првиот тракторист го изорува целиот блок сам за 10 дена, а за 1 ден ќе изора $\frac{1}{10}$ од него. Вториот го изорува за x дена, а за 1 ден ќе изора $\frac{1}{x}$ од него. А двата тракториста заедно за 1 ден ќе изораат $\frac{1}{6}$ од целиот блок, бидејќи истиот го изоруваат заедно за 6 дена. Размислувањата можеме да ги внесеме во следнава таблица:

Величини	I тракторист	II тракторист	I и II заедно
Време потребно за изорување на целиот блок	10 (дена)	x (дена)	6 (дена)
Изоран дел од блокот за 1 ден	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{6}$

Бидејќи делот што го изорале двата тракториста за 1 ден, независно од тоа дали ораат заедно или одделно, останува ист, тоа ќе биде:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}.$$

Ако е $x \neq 0$, составената равенка е еквивалентна на $3x + 30 = 5x$, така што од неа добиваме дека $x = 15$.

Значи, вториот тракторист сам ќе го изора блокот за 15 дена.

Проверка: Двата тракториста заедно за 1 ден изоруваат

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{3+2}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6} \text{ од целиот блок.}$$

Оттука наоѓаме дека двата тракториста ќе го изораат целиот блок за 6 дена, т.е. за толку време, колку што е дадено во задачата. Значи, задачата е решена точно.

Задача 3. Еден брод го изминува растојанието меѓу две пристаништа по текот на реката за $4\frac{1}{3}$ часа, а спроти текот на реката за 5 часа. Да се одреди растојанието меѓу пристаништата, ако брзината на течењето на реката е 2 километра на час!

Решение: Ако брзината на бродот во мирна вода ја означиме со $x\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$, тогаш брзината на бродот по текот на реката ќе биде $(x+2)\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$, а брзината на бродот спроти текот на реката: $(x - 2)\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$. Од физиката знаеме дека зависноста помеѓу патот, брзината и времето при рамномерното движење е изразена со формулата $S = Vt$. Значи, во дадениот случај изминатиот пат на бродот по текот на реката ќе го изразиме $(x + 2) \cdot 4\frac{1}{3}$ (km), а спроти текот на реката: $(x - 2) \cdot 5$ (km). Бидејќи изминатиот пат е еднаков, во обата случаја, можеме да напишеме:

$$(x + 2) \cdot 4\,\frac{1}{3} = (x - 2) \cdot 5.$$

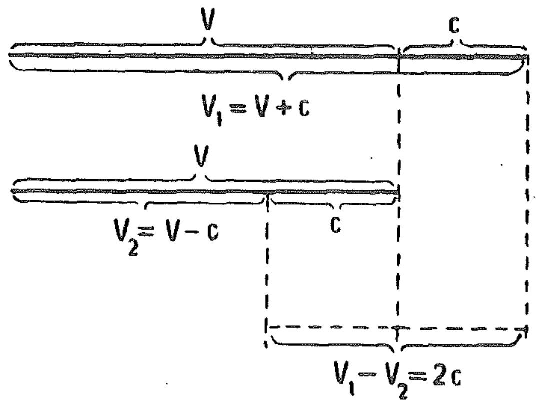
Со решавање на добиената равенка наоѓаме дека брзината на бродот во мирна вода е $x = 28\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$. Бараното растојание меѓу пристаништата го наоѓаме така што во изразот $(x + 2) \cdot 4\frac{1}{3}$; x го заменуваме со 28, т. е.

$$(x + 2) \cdot 4\frac{1}{3} = (28 + 2) \cdot \frac{13}{3} = 130 \text{ (km)}.$$

Проверка: Спроти текот на реката бродот ќе се движи со брзина $28 - 2 = 26\frac{\text{km}}{\text{час}}$ така што истото растојание ќе го измине за $130 : 26 = 5$ часа, колку што е дадено во задачата. Задачата е решена точно.

Забелешка: Меѓутоа, задачата може да се реши и така што со x да го означиме бараното растојание меѓу пристаништата. Тогаш задачата ја решаваме вака: По текот на реката бродот го изминал растојанието x km за $4\frac{1}{3}$ часа, значи тој се движел по текот на реката со брзина $\frac{x}{4\,\frac{1}{3}}\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$. Слично наоѓаме дека неговата брзина спроти текот на реката е $\frac{x}{5}\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$. За да ја составиме равенката, потребно е да ја познаваме зависноста, а имено дека:

Разликата меѓу брзината на бродот по текот и неговата брзина спроти текот е еднаква на двапати поголемата брзина на текот на реката. Оваа зависност лесно се уочува и на сл. 67, каде што со V е означена брзината на бродот во мирна вода, со V_1 — брзината на бродот по текот, со V_2 — брзината на бродот спроти текот и со c — брзината на текот на реката (сл. 67).



Сл. 67

Во нашиот случај е:

$$V_1 = \frac{x}{4\,\frac{1}{3}}; \quad V_2 = \frac{x}{5} \text{ и } c = 2\,\frac{\text{km}}{\text{час}}$$

Така ја добиваме равенката:

$$\frac{x}{4\,\frac{1}{3}} - \frac{x}{5} = 2 \cdot 2$$

Со нејзиното решавање наоѓаме дека е $x = 130$, односно:

Растојанието меѓу пристаништата е 130 km.

Задача 4. Во правоаголен триаголник со катети a и b е впишан квадрат, чии две страни лежат на катетите. Да се одреди страната на квадратот.

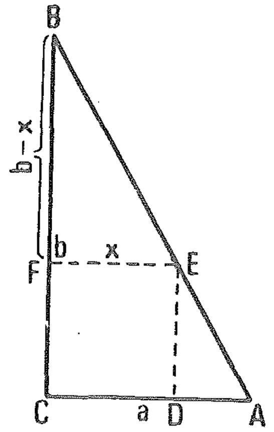
Бараната страна на впишаниот квадрат нека е x (cm). Од сличноста на триаголниците ABC и FEB (сл. 68), со примена на Питагоровата теорема, добиваме:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{EF}{BF} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{b-x}.$$

При услов $b\,(b-x) \neq 0$ добиената равенка е еквивалентна на $bx = a\,(b-x)$ или $(a+b)\,x = ab$.

Од условот и смислата на задачата следува дека е $a > 0$ и $b > 0$, па според тоа е и $a + b > 0$. Кога двете страни на последната равенка ги поделиме со $(a + b)$, го добиваме решението на составената равенка

$$x = \frac{ab}{a+b}.$$



Сл. 68

За да биде решение и на задачата, најденото решение треба да е позитивно, и тоа помало и од a и од b.

Бидејќи е $a > 0$ и $b > 0$, тоа е $x = \dfrac{ab}{a+b} > 0$.

За да установиме дека е $x < a$, ќе размислуваме вака:

$x = \dfrac{ab}{a+b} = a \cdot \dfrac{b}{a+b}$, бидејќи е $\dfrac{b}{a+b} < 1$ (Зошто?), тогаш производот е $x = a \cdot \dfrac{b}{a+b} < a$. На истиот начин докажуваме дека е и $x < b$.

Според тоа добиеното решение ги задоволува условите на задачата.

Задача 5. Предното тркало на еден трактор има периметар a (*м*), а задното — периметар b (*м*). На какво растојание предното тркало ќе направи 1 свртување повеќе од задното?

Бараното растојание нека е x (*м*). Предното тркало на растојание x (*м*) ќе направи $\dfrac{x}{a}$ свртувања, а задното на истото растојание $\dfrac{x}{b}$ свртувања. Значи, според условот на задачата, ќе биде $\dfrac{x}{a} - \dfrac{x}{b} = 1$.

Од условот на задачата следува дека е $a > 0$ и $b > 0$. Со множење на двете страни на равенката со $ab \neq 0$, добиваме: $(b - a)\,x = ab$.

Ако е $b \neq a$, равенката има решение $x = \dfrac{ab}{b-a}$.

За да биде решение и на задачата, добиеното решение на равенката треба да е $x > 0$, и тоа $x > a$. (Зошто?).

Бидејќи е $b > a > 0$ (задното тркало има поголем периметар од предното), тоа е и $b - a > 0$, а исто и $ab > 0$. Според тоа, при овие услови решението е позитивно, т. е. $x = \dfrac{ab}{b-a} > 0$.

За да установиме дека е $x > a$, ќе размислуваме вака: Од условот дека е $b > a > 0$, следува дека е $b - a < b$. Според тоа: $\dfrac{b}{b-a} > 1$.

Оттука заклучуваме дека: $x = \dfrac{ab}{b-a} = a \cdot \dfrac{b}{b-a} > a$.

Значи, добиеното решение ги задоволува условите на задачата.

Задача 6. Колку литри вода треба да се помешаат со a (l) ракија, која содржи 50% алкохол, за да се добие ракија што ќе содржи p% алкохол.

Во $a(l)$ 50% — ова ракија има $\frac{a \cdot 50}{100}$ (l) чист алкохол. Ако на таа ракија ѝ додадеме x (l) вода, ќе добиеме $(a + x)(l)$ p% — ова смеса, која ќе го задржи истото количество чист алкохол; но тоа сега може да се изрази и вака

$$\frac{(a + x)p}{100}.$$

Значи:

$$\frac{(a + x)p}{100} = \frac{a \cdot 50}{100}.$$

Составената равенка ја трансформираме во $px = a(50 - p)$, која при $p \neq 0$ има решение $x = \frac{a(50 - p)}{p}$.

Добиеното решение ќе претставува решение и на задачата, само ако тоа е позитивно. Бидејќи броевите a и p, според природата на задачата, се позитивни, тоа и разликата $50 - p$ мора да е позитивна, т. е. мора да е $p < 50$, односно $0 < p < 50$.

Значи: при $a > 0$ и $0 < p < 50$ задачата има решение $x = \frac{a(50 - p)}{p}$.

Ако е $a = 0$ или $p = 50$, задачата има решение еднакво на нула.

За $p = 0$ задачата е невозможна, т.е. таа нема решение. (Зошто?).

Од разгледаниве примери се гледа дека нема строго определено правило за решавање на овие задачи. Но сепак, можат да се дадат некои општи упатства и тоа повеќе во однос на редоследот, што треба да се има предвид при решавањето. Тоа се:

1. Задачата добро да се проучи и да се утврди зависноста на величините што влегуваат во неа.

2. Една од величините да се избере како главна непозната и нејзиниот мерен број да се означи со некоја буква.

3. Другите непознати величини што влегуваат во задачата, со помош на главната непозната и познатите величини, да се изразат во вид на алгебарски изрази.

4. Врз основа условот на задачата да се состави равенката.

5. Да се реши равенката.

6. Да се изврши проверка и испитување на добиеното решение, како во однос на составената равенка, така и во однос на условите и смислата на задачата.

Несомнено најважна етапа при решавањето на овие задачи е составувањето на равенката врз основа на условите на задачата. Притоа многу важно е да се разјасни кои две величини ќе ги изравнуваме, за да ја добиеме равенката.

Кога равенката е составена, пристапуваме кон нејзиното решавање. Нужно е да истакнеме дека порано при решавањето на некоја дадена равенка (независно од која и каква задача е таа добиена) допуштените вредности на непознатата ги одредуваме од множеството на броевите во кое е таа зададена, како и од тоа изразите во двете страни на равенката да имаат смисла за допуштените вредности на непознатата. Меѓутоа, кога се решава равенка добиена при решавањето на некоја практична задача, во однос на допуштените вредности на непознатата се создаваат и некои дополнителни услови. Така на пример: ако непознатата означува број на живи суштества, допуштени вредности се само природните броеви. Ако непознатата означува должина на отсечка или возраст, допуштени вредности се само позитивните реални броеви итн.

Со проверката на добиените решенија се сака да се испита: а) дали тие ја задоволуваат составената равенка, и б) дали тие одговараат на условите и природата на задачата. Последната проверка е неопходно потребна, бидејќи може да се случи равенката да е правилно решена, но да не е правилно составена. Во таков случај ако провериме само дали составената равенка е правилно решена, грешката не може да се открие. Може да се случи и тоа равенката да е правилно составена и правилно решена, но за вредностите на решенијата задачата да нема смисла.

Кога составената равенка содржи и параметри, треба да се испита уште и тоа за кои вредности, односно при кои услови на параметрите, добиеното решение ги задоволува условите и смислата на задачата.

ЗАДАЧИ

1. Бројот 38 раздели го на такви два дела, што половината од помалиот дел да е за 4 поголема од четвртината на поголемиот дел. Кои се тие делови?

2. Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 12. Ако од тој број се извади 18, ќе се добие број напишан со истите цифри но во обратен ред. Кој е тој број?

3. Колку вода треба да се додаде кон $a(l)$ 80%-ов шпиритус за да се добие 50%-ов шпиритус?

4. Смешани се 10 (l) 40%-ова ракија и 5 (l) 52%-ова ракија. Одреди ја јачината на добиената смеса!

5. Во 8 часот од Прилеп за Охрид тргнал еден моторциклист, кој развива 32 km на час; а во 8 часот и 15 минути по него тргнува автобус, кој развива 42 km на час. Во колку часот автобусот ќе го стигне моторциклистот?

6. Од еден град за Белград тргнале лесна кола и камион. Камионот тргнал еден час порано од колата, а стигнал во Белград еден час подоцна. Одреди колку е оддалечен тој град од Белград, ако се знае дека колата се движела со брзина 80 km на час, а камионот со брзина 60 km на час.

7. Три цевки, одделно секоја сама, можат да го наполнат еден базен соодветно за 10; 12 и 15 часа. За колку часа тие ќе го наполнат базенот заедно?

8. Тројца работници одделно можат да завршат една работа соодветно за 10; 15 и 20 дена. Првиот работник работел 2 дена, вториот — уште 3 дена. За колку дена третиот работник ја завршил сам преостанатата работа?

9. Во триаголникот ABC аголот α е 3-пати поголем од аголот β, а е за 23° помал од аголот γ. Пресметај ги аглите на тој триаголник.

10. Ако ја зголемиш страната на еден квадрат за 5 cm, неговата плоштина ќе се зголеми за 345 cm². Одреди ја страната на квадратот.

11. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е 36 cm, а основата му е за 3 cm помала од кракот. Најди ги страните на триаголникот.

12. Плоштината на еден квадрат е за 4 cm² поголема од плоштината на даден правоаголник. Најди ги страните на правоаголникот и квадратот, ако се знае дека страната на квадратот, е за 4 cm помала од едната страна на правоаголникот, а за 3 cm подолга од другата страна на правоаголникот!

13. Во едно буре има a l нафта, а во друго b l. Колку литри нафта треба да се префрлат од едното во другото буре па да има во нив по исто количество?

14. Една фабрика има a t јаглен, а друга b t. Првата фабрика троши секој ден по p t, а втората по q t. По колку дена фабриките ќе имаат по еднакво количество јаглен?

15. Еден базен се полни од една цевка за t_1 (4) часа, а полн базен се празни од друга цевка за t_2 (7) часа. За колку време ќе се наполни базенот, ако се отворат едновремено двете цевки?

16. Збирот од периметрите на предното и задното тркало на една кола е sm. Најди ги периметрите на секое тркало, ако се знае дека едното од нив на растојание a m прави толку свртувања, колку што прави другото тркало на растојание b m.

17. Основата на еден правоаголник е a cm. Најди при која висина периметарот и плоштината на правоаголникот ќе бидат изразени со еден ист мерен број?

18. По една кружна патека се движат два велосипедиста. Првиот може да ја обиколи целата патека за a минути, а вториот за b минути. Најди колку минути ќе изминат од едното среќавање до другото, ако е $a < b$ и ако тие се движат: а) во иста насока, б) во спротивни насоки!

Глава X

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ И ТРИ НЕПОЗНАТИ

§ 75. ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Дефиниција 1. *Линеарна равенка со две нейознаши е секоја равенка од видош*

$$\boxed{ax + by = c} \tag{1}$$

каде шшо x и y се нейознаши, а a, b *и* c *се кои и да било дадени броеви или изрази шшо не зависаш од нейознашише.*

Видот на равенката (1) се вика *ойшш вид* на линеарната равенка со две непознати. Броевите, односно изразите a и b се *коефициенши йред нейознашише*, а c *слободен член.*

Ако a, b и c се посебни броеви, за равенката (1) велиме дека е со *нумерички* или *йосебни коефициенши*, а ако тие (сите или некои од нив) се општи броеви или изрази (односно функции од некои параметри), за равенката (1) велиме дека е *со ойшши коефициенши* или со *йарамешри.*

Дефиниција 2. *Решение на линеарнаша равенка со две нейознаши, согласно ойшшаша дефиниција за решенија на равенкише, е секоја фиксирана двојка дойушшени вредносши на нейознашише, за која дадената равенка е задоволена.*

Задача: Збирот на два броја изнесува 8. Кои се тие броеви?

Ако бараните броеви ги означиме со x и y, тие треба да ја задоволуваат равенката

$$x + y = 8.$$

За да најдеме некои од решенијата на добиената равенка, постапуваме вака: на една од непознатите, на пример на x, и даваме некоја произволна вредност, на пример $x = 5$; за другата непозната тогаш се добива равенката: $5 + y = 8$, од каде наоѓаме дека е $y = 3$.

Така двојката вредности ($x = 5$, $y = 3$) претставува едно решение на нашата задача.

Но, наместо $x = 5$, на x можевме да му дадеме и друга, која и да било вредност, на пример $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1\frac{1}{2}$ итн.

Ако поставиме така за y соодветно ќе добиваме: $y = 10$; $y = 9$; $y = 8$; $y = 7$; $y = 6\frac{1}{2}$. Значи, решенија на задачата се и двојките броеви:

$$(x = -2, y = 10); \quad (x = -1, y = 9); \quad (x = 0, y = 8); \quad (x = 1, y = 7); \ldots$$

Затоа велиме дека задачата, односно равенката $x + y = 8$, има бесконечно множество решенија.

За да најдеме повеќе решенија на равенката $x + y = 8$, погодно е таа да се доведе во видот $y = 8 - x$. Сега ако му даваме произволни вредности на x, лесно ги добиваме соодветните вредности на y.

За поголема прегледност најдените решенија ги внесуваме во следнава таблица:

x	... -3	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	5	6	7	8	....
$y = 8 - x$	... 11	10	9	8	7	$6\frac{1}{2}$	6	5	4	3	2	1	0	....

Како што гледаме, равенката $x + y = 8$ не дава определен одговор на прашањето во задачата. Таа само ја определува зависноста што постои меѓу непознатите. Од таа зависност, ако ја знаеме вредноста на едната непозната, лесно ја наоѓаме вредноста и на другата, така што ќе важи:

Теорема: *Линеарната равенка со две непознати (во општ случај) е неопределена равенка, т.е. таа има бесконечно множество решенија.*

Доказ: Равенката (1) при $b \neq 0$ можеме да ја решиме по непознатата y, т. е. y да го изразиме со помош на x. Така добиваме:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}. \tag{2}$$

Изразот на десната страна во равенката (2) има смисла за секоја вредност на x. Според тоа, на секоја произволна вредност на x, ѝ соодветствува точно определена вредност и на y. Секоја така одредена двојка вредности за x и y (а нив ги има бесконечно многу) ќе претставува решение на равенката (2), односно (1).

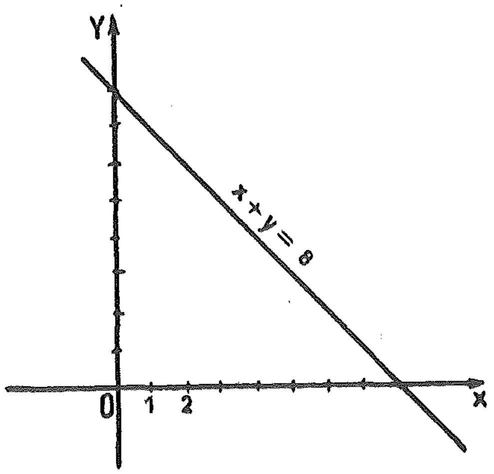
Од равенката (2) се гледа дека едната непозната x може да се разгледува како аргумент, а другата непозната y — како функција. Таа функција, како што гледаме, е линеарна функција, чиј аналитички израз е даден со равенката (2). Според тоа:

Секоја линеарна равенка со две непознати претставува една определена линеарна функција, во која едната непозната, на пример x се зема за аргумент, а другата непозната y — за функција.

Линеарната функција може да се претстави графички. Заради краткост тој график ќе го викаме *график на равенката.*

На сликата 69 е нацртан графикот на равенката $x + y = 8$, односно $y = -x + 8$. Гледаме дека тој претставува една определена права. Значи:

Графикот на линеарната равенка со две непознати во декартовиот координатен систем претставува права.



Сл. 69

Координатите на секоја точка од тој график (односно правата) се решенија на равенката. (Зошто?) А бидејќи правата има бесконечно многу точки, тоа и овој факт ни покажува дека линеарната равенка со две непознати има бесконечно множество решенија.

Забелешки: 1°. Ако еден од коефициентите пред непознатите е нула, на пример $b = 0$, равенката (1) го добива видот $ax + 0 \cdot y = c$ или $ax = c$, од каде $x = \frac{c}{a}$. И во тој случај равенката има бесконечно множество решенија. Нејзини решенија се секоја двојка броеви $(x = \frac{c}{a}, y)$, каде y е кој и да било произволен број.

Пример: Равенката $3x + 0 \cdot y = 6$ ги има за решенија следниве двојки броеви:

$(2; -3)$, $(2; 0)$ $2; 1)$, $(2; 2)$, $(2; 4)$ итн

Одовде следува заклучокот: Секоја равенка со една непозната, на пример $5x = 3$ може да се разгледува и како равенка со две непознати: $5x + 0 \cdot y = 3$.

2° Ако е во равенката (1) $a = 0$ и $b = 0$, тогаш таа го добива видот $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$. Во тој случај, ако е $c \neq 0$, равенката нема решение. Ако е пак и $c = 0$, тогаш линеарната равенка ќе има бесконечно множество решенија, или поточно таа ќе биде задоволена за кои и да било произволни вредности на непознатите x и y.

§ 76. СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Да се вратиме на задачата: „Збирот на два броја изнесува 8. Кои се тие броеви?", што ја разгледавме во претходниот параграф. Условот на задачата, како што видовме, го изразивме со една равенка со две непознати ($x + y = 8$), која има бесконечно множество решенија.

Да ја дополниме задачата со уште еден услов: „А разликата од првиот и вториот број е 2". Првиот број го означивме со x, а вториот со y. Задржувајќи го тоа означување, бидејќи се работи за две исти непознати, дополнителниот услов може да се запише во вид на нова линеарна равенка со истите непознати: $x - y = 2$ или $y = x - 2$.

И оваа равенка има бесконечно многу решенија. Но, за да ги одредиме бараните броеви во задачата, треба да ги најдеме оние вредности на x и y, што ќе ги задоволуваат обете равенки, т.е. треба да го најдеме заедничкото решение на равенките

$$x + y = 8 \quad \text{и} \quad x - y = 2$$

За таа цел ќе најдеме некои од решенијата на секоја од равенките.

За првата равенка еве некои од нив:

x	....	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	....
$y=8-x$	....	9	8	7	6	5	4	3	2	1	....

И за втората:

x	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$y=x-2$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...

Од таблиците гледаме дека двете равенки имаат едно заедничко решение ($x=5$, $y=3$). Според тоа, бараните броеви во задачата се 5 и 3. И навистина $5+3=8$, а $5-3=2$.

Дефиниција 1. *Множеството од две линеарни равенки со две едни исти непознати, за кои се бараат заедничките решенија, се вика систем од две линеарни равенки со две непознати.*

Секој систем од две линеарни равенки со две непознати може да се доведе во општиот вид:
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$
каде што x и y се непознати, а a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и c_2 се кои и да било дадени броеви или изрази што не зависат од непознатите.

Со големата заграда означуваме дека двете равенки образуваат еден систем равенки.

Дефиниција 2. *Решение на системот линеарни равенки со две непознати (1) е секоја фиксирана двојка допуштени вредности на непознатите (x_0; y_0), за кои обете равенки од системот се задоволени.*

Пример: Двојката броеви (5; 3) е решение на системот равенки:

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2, \end{cases} \text{ бидејќи } \begin{cases} 5+3=8 \\ 5-3=2 \end{cases}$$

Може да се случи двете равенки од системот да немаат ниту едно заедничко решение.

Пример: Системот равенки $\begin{cases} x+y=7 \\ x+y=10 \end{cases}$ нема решение, бидејќи збирот на два броја $x+y$ не може едновремено да биде еднаков и на 7 и на 10.

Системот равенки, кој нема ни едно решение се вика *противречен.*

Дефиниција 3. *Да се реши даден систем од две линеарни равенки со две непознати, значи да се одреди множеството на сите негови решенија, ако има такви во дадената област на броеви, или ако тоа множество е празно, да се утврди тоа.*

ЗАДАЧИ

1. Најди неколку решенија на равенките: а) $3x - y = 2$; б) $x + 2y = 5$; в) $2x + y = 3$, и подреди ги во таблици!

2. Дадена е равенката $2x + 3y = 3$. Најди го она нејзино решение за кое е: а) $x = 3$; б) $y = -1$!

3. Меѓу решенијата на равенката $3x - y = 8$ најди го она решение, при кое вредностите на x и y да се еднакви!

4. Доведи ги равенките во општ вид:

а) $3(x-2)-2(y-5)=x-y$; б) $\frac{2x-y}{3} = \frac{x}{2} - 1$; в) $y - \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{6} - \frac{x}{3}$!

§ 77. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА СИСТЕМИТЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Дефиниција: *Два система равенки се еквивалентни, ако секое решение на едниот систем е решение и на другиот систем; и обратно, ако секое решение на вториот систем е решение и на првиот систем.*

Два система равенки со едни и исти непознати се еквивалентни и тогаш кога и обата немаат решение.

При решавањето на системите равенки, како и при решавањето на равенките со една непозната, неизбежно се наложува даден систем равенки да се замени со друг попрост, но еквивалентен на него. Потоа тој се заменува со трет итн. додека не се дојде до најпростиот систем равенки од видот $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$, каде што a и b се реални броеви или изрази што не ги содржат непознатите. Тој најпрост систем истовремено е и решение на дадениот систем равенки.

Таквите преобразувања на системите равенки ги вршиме врз основа на следниве теореми за еквивалентност на системите линеарни равенки.

Теорема 1. *Ако секоја од равенките на даден систем одделно се замени со еквивалентна на неа равенка, се добива систем еквивалентен на дадениот.*

Оваа теорема ни овозможува поединечна трансформација на секоја од равенките на даден систем во попрости врз основа на теоремите 1 и 2 и нивните последици, со кои се запознавме во § 70.

Практично тоа значи: Секоја од равенките на даден систем може да биде ослободена од именителите (ако има такви во неа), потоа можат да се пренесуваат членови од една на друга страна итн.

Посебен доказ на оваа теорема не е нужен, бидејќи со неа се регулира само примената на веќе познати и порано докажани теореми.

Теорема 2. *Ако од која и да било равенка на даден систем една од непознатите се изрази со помош на другата непозната и со така добиениот израз се замени истата непозната во другата равенка, ќе се добие нова равенка. Новата и првата равенка образуваат систем еквивалентен на дадениот.*

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (1)

каде што a_1, b_1, a_2, b_2 се коефициенти пред непознатите, а c_1 и c_2 — слободни членови.

Ако барем еден од коефициентите пред непознатите не е нула, на пример $a_1 \neq 0$, тогаш од првата равенка непознатата x ја изразуваме со помош на y (Велиме уште дека првата равенка ја решаваме по x):

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1},$$

и така добиениот израз за x го заменуваме во втората равенка

$$a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} + b_2 y = c_2.$$

Ќе докажеме дека системот равенки

$$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}; \qquad a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} + b_2 y = c_2 \tag{2}$$

е еквивалентен на дадениот систем (1)

Доказ: а) Нека е $(x = x_0,\ y = y_0)$ едно решение на системот (1), т. е.

$$\begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 = c_1 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2 \end{cases}$$

Бидејќи првите равенки од двата система се еквивалентни (зошто?), тоа (x_0, y_0) е решение на првата равенка од системот (2), т. е.

$$x_0 = \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1}.$$

Ако во $a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2$, бројот x_0 го замениме со изразот $\frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1}$, ќе добиеме:

$$a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1} + b_2 y_0 = c_2.$$

Оттука гледаме дека (x_0, y_0) е решение и на втората равенка од системот (2). Според тоа, секое решение (x_0, y_0) на системот (1) е решение и на системот (2).

Останува уште да докажеме дека секое решение на системот (2) е решение и на системот (1).

б) Нека $(x = x_1,\ y = y_1)$ е некое решение на системот (2), т. е.

$$x_1 = \frac{c_1 - b_1 y_1}{a_1}; \quad a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y_1}{a_1} + b_2 y_1 = c_2.$$

Бидејќи првата равенка од системот (1) е еквивалентна на првата равенка од системот (2), тоа (x_1, y_1) ќе биде решение и на првата равенка од системот (1). Ако во $a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y_1}{a_1} + b_2 y_1 = c_2$ изразот, односно бројот $\frac{c_1 - b_1 y_1}{a_1}$, го замениме со бројот x_1, ќе добиеме $a_2 x_1 + b_2 y_1 = c_2$.

Тоа покажува дека (x_1, y_1) е решение и на втората равенка од системот (1). Значи: секое решение (x_1, y_1) на системот (2) е решение и на системот (1).

Ако системот (1) нема решение, од горново следува дека и системот (2) ќе нема решение. Со тоа теоремата 2 е докажана.

Теорема 3. *Ако едната равенка од даден систем ја помножиме со некој број m, а другата — со некој број n, и ги собереме одделно левите и десните страни на така добиените равенки, ќе добиеме нова равенка која заедно со една од дадените ќе образува нов систем равенки, еквивалентен на дадениот.*

Нека е даден системот линеарни равенки: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ (3)

кој пократко се запишува вака: $\begin{cases} A(x,y)=0 \\ B(x,y)=0 \end{cases}$ (4)

Нека се m и n кои и да било реални броеви или изрази (што не содржат непознати), од кои барем еден не е нула, на пример $n \neq 0$. Ако првата равенка ја помножиме со m, а второта со n, и левите страни на добиените равенки ги собереме, ќе ја добиеме равенката

$$m \cdot A(x, y)+n \cdot B(x, y)=0.$$

Ќе докажеме дека системот равенки: $\begin{cases} A(x,y)=0 \\ mA(x,y)+nB(x,y)=0 \end{cases}$ (5)

е еквивалентен на системот (4).

Доказ: а) Нека е $(x = x_0; y = y_0)$ едно решение на системот (4) т. е. $A(x_0, y_0) = 0$ и $B(x_0, y_0) = 0$ нека се две точни бројни равенства.

Бидејќи првите равенки на двата система (4) и (5) се исти, останува да покажеме само дека (x_0, y_0) е решение на втората равенка од системот (5). Левата страна на таа равенка претставува збир од два производа, во кои множителите $A(x, y)$ и $B(x, y)$ за $(x = x_0; y = y_0)$ добиваат бројни вредности еднакви на нула. Оттука гледаме дека (x_0, y_0) ќе биде решение и на втората равенка од системот (5), т. е.

$$mA(x_0, y_0) + nB(x_0, y_0) = 0.$$

Според тоа, секое решение (x_0, y_0) на системот (4) е решение и на системот (5). Да го докажеме и обратното:

б) Нека е $(x = x_1, y = y_1)$ некое решение на системот (5), т. е.

$$A(x_1, y_1) = 0 \text{ и } mA(x_1, y_1) + nB(x_1, y_1) = 0.$$

Треба да докажеме дека (x_1, y_1) е решение и на втората равенка од системот (4), бидејќи првите равенки на двата система се исти.

Во равенството $m \cdot A(x_1, y_1) + n \cdot B(x_1, y_1), = 0$, имајќи предвид дека бројната вредност на множителот $A(x_1, y_1)$ е еднаква на нула, тоа ќе биде точно само ако е

$$n \cdot B(x_1, y_1) = 0.$$

Во производот $n \cdot B(x_1, y_1)$ множителот n е различен од нула $n \neq 0$. Затоа вториот множител мора да биде еднаков на нула т.е. $B(x_1, y_1) = 0$. Значи, (x_1, y_1) е решение и на втората равенка од системот (4).

Според тоа, секое решение (x_1, y_1) на системот (5) е решение и на системот (4). Со тоа теоремата 3 е докажана.

§ 78. РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМИ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Постојат повеќе методи на решавање системи линеарни равенки со две непознати, Но, во основата на сите методи лежи еден општ основен принцип, таканаречен *принцип на елиминација* (отстранување) на една од непознатите, кој се состои во следното.

Дадениот систем линеарни равенки со две непознати, со примена на некои од теоремите за еквивалентност на равенките и системите равенки треба да се трансформира во таков еквивалентен систем во кој една од равенките да содржи една непозната помалку. За непознатата што нема да се содржи во таа равенка велиме дека е елиминирана од неа. Всушност, таа равенка ќе содржи само една непозната, така што од неа лесно ја наоѓаме вредноста на нееллиминираната непозната. Кога едната непозната е одредена, потоа лесно ја одредуваме и другата непозната.

1. МЕТОД НА ЗАМЕНА (СУПСТИТУЦИЈА)

Според него едната од равенките на системот ја решаваме по која и да било непозната и со најдениот израз за неа, ја заменуваме соодветната непозната во другата равенка од системот. На пример:

Нека е даден системот равенки:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

При $b_1 \neq 0$ од првата равенка наоѓаме:

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}.$$

Земенувајќи ја непознатата y во втората равенка со најдениот израз, добиваме:

$$a_2x+b_2\cdot\frac{c_1-a_1x}{b_1}=c_2,$$

равенка со една непозната, која може да се доведе во видот

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$$

Ако е $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, тагаш $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$.

Така ја одредивме вредноста на едната непозната x, а вредноста на другата непозната y, ќе биде:

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}=\frac{c_1}{b_1}-\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{c_1(a_1b_2-a_2b_1)-a_1(c_1b_2-c_2b_1}{b_1(a_1b_2-a_2b_1)}=$$

$$=\frac{a_1c_1b_2-a_2c_1b_1-a_1c_1b_2+a_1c_2b_1}{b_1(a_1b_2-a_2b_1)}=\frac{b_1(a_1c_2-a_2c_1)}{b_1(a_1b_2-a_2b_1)}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Според тоа, при $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ решение на системот равенки (1) е парот броеви:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (2)$$

Задача 1. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3}+\dfrac{3y+1}{4}=x+y \\ \dfrac{7x-2}{6}-\dfrac{8y+1}{9}=x-y \end{cases}$

За да се ослободиме од именителите, првата равенка ја множиме со 12, а втората со 18: $\begin{cases} 4\,(5x-4)+3\,(3y+1)=12\,(x+y) \\ 3\,(7x-2)-2\,(8y+1)=18\,(x-y) \end{cases}$

Потоа се ослободуваме од заградите и ги групираме членовите што содржат непознати на левата страна, а другите на десната.

Така го добиваме системот $\begin{cases} 8x - 3y = 13 \\ 3x + 2y = 8, \end{cases}$ еквивалентен на дадениот.

Втората равенка ја решаваме по y т. е. $y = \dfrac{8 - 3x}{2}$ и добиениот израз го заменуваме во првата равенка. Така го добиваме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} 8x - 3 \cdot \dfrac{8 - 3x}{2} = 13 \\ y = \dfrac{8 - 3x}{2} \end{cases}$$

Откога ќе ја решиме првата равенка, наоѓаме $x = 2$.

Добиената вредност $x = 2$ потоа ја заменуваме во втората равенка, односно во изразот $y = \dfrac{8 - 3x}{2}$, и добиваме $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Значи, решение на системот е $(x = 2;\ y = 1)$.

Проверка: $\begin{cases} \dfrac{5 \cdot 2 - 4}{3} + \dfrac{3 \cdot 1 + 1}{4} = 2 + 1 \\ \dfrac{7 \cdot 2 - 2}{6} - \dfrac{8 \cdot 1 + 1}{9} = 2 - 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 2 + 1 = 2 + 1 \\ 2 - 1 = 2 - 1 \end{cases}$

Задача 2. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = a \end{cases}$

каде што x и y се непознати, а a е параметар.

Втората равенка ја решаваме по y: $y = a - x$

Ако во првата равенка y го замениме со $a - x$:

$$ax + a - x = 1 \quad \text{или} \quad (a - 1)\,x = 1 - a,$$

го добиваме еквивалентниот систем: $\begin{cases} (a - 1)\,x = 1 - a \\ y = a - x \end{cases}$

Првата равенка е со една непозната. При нејзиното решавање ќе разликуваме два случаја:

а) Ако е $a - 1 \neq 0$ или $a \neq 1$, таа има решение $x = \dfrac{1 - a}{a - 1} = \dfrac{-(a - 1)}{a - 1} = -1$

Во втората равенка, кога x ќе го замениме со -1, добиваме $y = a + 1$.

Значи: при $a \neq 1$ системот има решение $(x = -1,\ y = a + 1)$.

б) Ако е $a = 1$, равенката $(a - 1)\,x = 1 - a$ го добива видот $0 \cdot x = 0$. Тоа значи дека таа е задоволена за секоја вредност на x.

За $a = 1$, втората равенка е $y = 1 - x$. Од неа, кога му даваме произволни вредности на x, ги наоѓаме соодветните вредности на y.

Според тоа, при $a = 1$ системот равенки има бесконечно многу решенија, кои се одредуваат од равенката $y = 1 - x$.

До истиот заклучок доаѓаме и кога во дадениот систем ставиме $a = 1$. Тогаш тој го добива видот $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Бидејќи двете равенки се еднакви, системот има бесконечно многу решенија, кои се добиваат од равенката $x + y = 1$ или $y = 1 - x$.

Задача 3. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} \dfrac{x+a}{y}=b \\ \dfrac{x+b}{y}=a \end{cases}; \quad y \neq 0.$

Бидејќи $y \neq 0$ тој е еквавилентен на системот $\begin{cases} x+a=by. \\ x+b=ay \end{cases}; \quad y \neq 0.$

Ако првата равенка ја решиме по x и најдениот израз за x го замениме во втората равенка, добиваме: $\begin{cases} x=by-a \\ by-a+b=ay \end{cases}$

Потоа ја решаваме втората равенка, која содржи само една непозната:

$$by-ay=a-b \text{ или } (b-a)\,y=a-b$$

а) Ако е $b \neq a$, равенката има решение: $y=\dfrac{a-b}{b-a}=-\dfrac{b-a}{b-a}=-1.$

Во равенката $x=by-a$, кога y го замениме со -1, наоѓаме $x=b-a$.

Значи, при $b \neq a$ системот има решение $(x=b-a; y=-1)$.

б) Ако е $b=a$, равенката $(b-a)\,y=a-b$ го добива видот $0 \cdot y=0$. Тогаш таа е задоволена за секоја вредност на y.

За $b=a$, првата равенка добива форма: $x=ay-a$, така што од неа на секоја произволна вредност за $y \neq 0$ и одговара по една вредност за x. Според тоа при $b=a$, системот равенки е неопределен, т. е. тој има бесконечно многу решенија. Тие се $(ay-a;\ y \neq 0)$

Провери го овој резултат така што во дадениот систем b го замениш со a!

2. МЕТОД НА СПРОТИВНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Според овој метод, едната или двете равенки од системот треба да се помножат со така подбрани броеви (или изрази) при што коефициентите пред една од непознатите да станат спротивни броеви. Потоа двете равенки ги собираме, па добиваме равенка со една непозната. Ја решаваме добиената равенка и најдената вредност на едната непозната ја заменуваме во една од дадените равенки на системот. Така ја одредуваме и другата непозната.

За да го решиме системот:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{1}$$

по методот на спротивни коефициенти, ќе ги помножиме двете страни на првата равенка со $b_2 \neq 0$, а втората равенка со $-b_1 \neq 0$. Потоа добиваме:

$$\begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y= \quad c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1. \end{cases} \tag{1'}$$

Ги собираме левите и десните страни на равенките (1′), па наоѓаме:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1.$$

Оттука при услов $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, имаме:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Слично постапуваме и за одредувањето на непознатата y. Ги множиме двете страни на првата равенка од системот (1) со $-a_2\neq 0$, а втората равенка со $a_1\neq 0$, па добиваме:

$$\begin{cases}-a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1\\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2.\end{cases}\qquad (1'')$$

Собирајќи ги левите и десните страни на равенките (1″), ја добиваме равенката:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1$$

откаде при услов $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, имаме:

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Така наоѓаме: ако е $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ системот (1) има единствено решение, парот броеви:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\qquad (2)$$

Задача 4. Да се реши системот равенки: $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{2}{y-1}=1\\ \dfrac{3x}{x+4}+\dfrac{10}{y}=3\end{cases}$

Системот има смисла само за оние вредности на непознатите, за кои именителите се различни од нула, т. е. за

$$x\neq 0;\quad y-1\neq 0;\quad x+4\neq 0\quad \text{и}\quad y\neq 0.$$

По ослободување од именителите во секоја од равенките се добива еквивалентниот систем: $\begin{cases}(x+1)(y-1)-2x=x(y-1)\\ 3xy+10(x+4)=3y(x+4)\end{cases}$, или $\begin{cases}-2x+y=1\\ 5x-6y=-20\end{cases}$

Овде е доволно само првата равенка да ја помножиме со 6, па коефициентите пред y да станат спротивни броеви:

$$\begin{cases}-12x+6y=6\\ 5x-6y=-20\end{cases}$$
$$\overline{-7x=-14}$$
$$x=2$$

Сега во првата равенка $-2x+y=1$, x го заменуваме со 2, така што добиваме $-4+y=1$ или $y=5$.

Гледаме дека за $x=2$ и $y=5$ се задоволени условите $x\neq 0$; $y\neq 0$; $y-1\neq 0$ и $x+4\neq 0$, така што заклучуваме:

Решение за дадениот систем е $(x=2;\ y=5)$.

Проверка на даденото решение направете сами!

Задача 5. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x - 2y = m \\ x + my = 2 \end{cases}$

Првата равенка ја множиме со -1, и потоа ги собираме двете равенки:

$$\begin{cases} -x + 2y = -m \\ x + my = 2 \end{cases}$$
$$2y + my = 2 - m$$
$$(2 + m)y = 2 - m$$

а) Нека е $2 + m \neq 0$, односно $m \neq -2$

Во таков случај е $y = \dfrac{2 - m}{2 + m}$

На сличен начин го одредуваме и x.

За таа цел првата равенка ја множиме со m, а втората со 2.

$$\begin{cases} mx - 2my = m^2 \\ 2x + 2my = 4 \end{cases}$$
$$mx + 2x = m^2 + 4$$
$$(m + 2)\,x = m^2 + 4$$

Ако е $m + 2 \neq 0$ или $m \neq -2$, тогаш ќе биде $x = \dfrac{m^2 + 4}{m + 2}$

Значи, при $m \neq -2$, системот равенки има решение

$$x = \frac{m^2 + 4}{m + 2}, \qquad y = \frac{2 - m}{2 + m}$$

б) Ако е $m = -2$, равенката $(2 + m)\,x = 2 - m$ нема решение. Според тоа, и дадениот систем нема решение.

3. МЕТОД НА ВОВЕДУВАЊЕ НА ПОМОШНИ НЕПОЗНАТИ

Овој метод се применува само кога се решаваат некои специјални случаи на дробни системи равенки со две непознати, кои имаат општ вид:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = c \\[2mm] \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{b_1}{y} = c_1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{x+y} + \dfrac{b}{x-y} = c \\[2mm] \dfrac{a_1}{x+y} + \dfrac{b_1}{x-y} = c_1 \end{cases} \text{ и др.}$$

Да решиме неколку такви системи:

Задача 6. Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = 1 \\[2mm] \dfrac{8}{x} + \dfrac{15}{y} = 7 \end{cases}$

Допуштени вредности на непознатите се $x \neq 0$ и $y \neq 0$, (зошто?)

Ако се ослободиме од именителите, имаме $\begin{cases} 4y - 5x = xy \\ 8y + 15x = 7xy \end{cases}$; $x \neq 0$; $y \neq 0$.

Добиениот систем равенки е од втор степен, бидејќи равенките содржат и членови со производ на непознатите. Со таквите системи ќе се запознаеме во погорните класови. Меѓутоа, решавањето на некои од нив може да се сведе и на решавање систем линеарни равенки со две непознати. Тоа го постигнуваме со воведувањето на нови помошни непознати. За да стане тоа појасно, дадениот систем прво го запишуваме во следниов вид:

$$\begin{cases} 4 \cdot \dfrac{1}{x} - 5 \cdot \dfrac{1}{y} = 1 \\[2mm] 8 \cdot \dfrac{1}{x} + 15 \cdot \dfrac{1}{y} = 7 \end{cases}$$

Гледаме дека во обете равенки се содржат еднакви дробни изрази во однос на непознатите $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. Ако секој од тие изрази го означиме со нови непознати, т.е. ако ставиме дека е $\frac{1}{x} = u$ и $\frac{1}{y} = v$, дадениот систем го запишуваме вака: $\begin{cases} 4u - 5v = 1 \\ 8u + 15v = 7 \end{cases}$

Тој е од прв степен со две непознати u и v. Откога ќе го решиме, добиваме

$$u = \frac{1}{2}, \text{ а } v = \frac{1}{5}.$$

Но бидејќи е: $u = \frac{1}{x}$, а $v = \frac{1}{y}$, тоа ќе биде $\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$ и $\frac{1}{5} = \frac{1}{y}$.

Оттука наоѓаме: $x = 2$, $y = 5$.

Добиените вредности се допуштени вредности за непознатите, па според тоа решение на дадениот систем равенки е $(2; 5)$.

Оставаме сами да направите проверка.

Задача 7. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} \frac{1}{5x} - \frac{2}{y} = 7 \\ \frac{1}{2x} + \frac{8}{3y} = -5\frac{1}{2} \end{cases}$

Допуштени вредности на непознатите се $x \neq 0$ и $y \neq 0$.

Системот може да се запише и вака: $\begin{cases} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{y} = -5\frac{1}{2} \end{cases}$

Ако ставиме: $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, тој го добива видот:

$$\begin{cases} \frac{1}{5} u - 2v = 7 \\ \frac{1}{2} u + \frac{8}{3} v = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Се ослободуваме од именителите: $\begin{cases} u - 10v = 35 \\ 3u + 16v = -33 \end{cases}$

Потоа го решаваме системот на еден од познатите начини и наоѓаме: $u = 5$, $v = -3$

Според тоа: $\frac{1}{x} = 5$; $\quad \frac{1}{y} = -3$

Оттука наоѓаме $x = \frac{1}{5}$, $\quad y = -\frac{1}{3}$

Значи, решение на дадениот систем е $\left(x = \frac{1}{5}, \quad y = -\frac{1}{3}\right)$.

Проверка направете сами!

Задача 8. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} \dfrac{2}{3x-y}+\dfrac{5}{3x+y}=3 \\ \dfrac{3}{3x-y}-\dfrac{10}{y+3x}=1 \end{cases}$

Системот го разгледуваме само за $3x-y \neq 0$ и $3x+y \neq 0$.

Ставаме: $\dfrac{1}{3x-y}=u$; $\dfrac{1}{3x+y}=v$.

Го добиваме системот: $\begin{cases} 2u+5v=3 \\ 3u-10v=1 \end{cases}$

Откога ќе го решиме добиваме: $u=1$, $v=\dfrac{1}{5}$.

Според тоа: $\dfrac{1}{3x-y}=1$, $\dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{1}{5}$, или $3x-y=1$, $3x+y=5$.

Така добиваме нов систем од две линеарни равенки со старите непознати x и y:

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$$

Откога ќе го решиме, наоѓаме дека е $x=1$, $y=2$.

Бидејќи тие вредности на x и y ги задоволуваат условите $3x-y \neq 0$ и $3x+y \neq 0$, велиме дека решение на дадениот систем е паротброеви ($x=1$, $y=2$).

Од разгледаниве примери гледаме дека решавањето на системите равенки по методот на воведување нови непознати се состои во следново: Ако во обете равенки на дадениот систем се содржат исти дробни изрази во однос на непознатите, тие изрази се земаат како нови помошни непознати, така што добиениот систем се решава по нив. Најдените вредности на новите непознати ќе бидат вредности и на заменетите со нив дробни изрази.

Така добиваме друг систем равенки со старите непознати.

Неговото решение ќе претставува и решение на дадениот систем.

Напомнуваме дека овој метод наоѓа широка примена во математиката.

§ 79. ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ВТОР РЕД

1. ПОИМ ЗА ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ВТОР РЕД

При решавањето на системот равенки:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

дојдовме до следниве формули за одредување на непознатите x и y:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}; \quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \text{ при } a_1b_2-a_2b_1 \neq 0 \qquad (2)$$

Изразот $a_1b_2-a_2b_1$ во математиката често симболички го означуваме со квадратната шема: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Аналогно имаме: $c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$; $a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Дефиниција: *Изразот* $a_1b_2-a_2b_1$ *означен со симболот* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *се вика детерминанта од втор ред,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \overset{Df}{=} a_1b_2-a_2b_1. \tag{3}$$

Броевите (или изразите) a_1, a_2, b_1 и b_2 се викаат *елементи* на детерминантата, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ се викаат *колони*, а $a_1\ b_1$ и $a_2\ b_2$ — *редови* на детерминантата. Кај детерминантата разликуваме и две дијагонали: $\begin{matrix} a_1 \\ \diagdown \\ b_2 \end{matrix}$ — *главна дијагонала* и $\begin{matrix} b_1 \\ \diagup \\ a_2 \end{matrix}$ — *споредна дијагонала.*

Согласно дефиницијата, ќе важи следново:

Правило: *Вредноста на детерминантата од втор ред еднаква е на разликата од производите на нејзините елементи од главната и споредната дијагонала.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1.$$

Примери: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4-(-2\cdot 1) = 12+2 = 14.$

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = (a+1)\,a-1(a-1) = a^2+a-a+1 = a^2+1.$$

2. СВОЈСТВА НА ДЕТЕРМИНАНТИТЕ ОД ВТОР РЕД

Детерминантите од втор ред ги имаат следниве својства:

Теорема 1. *Вредноста на детерминантата не се менува, ако редовите станат колони, а колоните редови,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Доказ: На основа дефиницијата имаме:

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$, а исто и $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1.$

Теорема 2. *Ако двата реда (или двете колони) ги променат местата, детерминантата го менува својот знак,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Доказ: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = -(a_2b_1 - a_1b_2) = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$.

Теорема 3. *Заедничкиот множител на елементите од еден ред (или колона) може да се изнесе како множител пред детерминантата,* т. е.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Доказ: $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - a_2kb_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1) = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Равенството (6), ако се прочита одлево надесно, тоа ни го дава правилото како се множи детерминанта со даден број.

Теорема 4. *Ако елементите на еден ред (или колона) се пропорционални на елементите од другиот ред (или колона), детерминантата е еднаква на нула,* т. е.

$$\left(\frac{a_1}{a_2} = k \text{ и } \frac{b_1}{b_2} = k\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Доказ: Нека елементите на првиот и вториот ред да се пропорционални, т. е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$, односно $a_1 = ka_2$ и $b_1 = kb_2$. Тогаш имаме:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_2b_2 - a_2kb_2 = 0.$$

Последица: *Ако елементите на еден ред (или колона) се соодветно еднакви на елементите од другиот ред (или колона), детерминантата е еднаква на нула,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Лесно се уверуваме дека важи и обратната теорема на теорема 4:

Теорема 5. *Ако детерминантата од втор ред е еднаква на нула, тогаш нејзините редови (или колони) се пропорционални,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k. \tag{8}$$

Доказ: Нека е $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, односно $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ или $a_1b_2 = a_2b_1$.

Ако ни еден од елементите од вториот ред не се еднакви на нула, т. е. ако $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, тогаш имаме: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

Значи, елементите на редовите се пропорционални.

Ако и двата елемента од вториот ред се еднакви на нула, т. е. ако $a_2 = 0$ и $b_2 = 0$, тогаш пак редовите на детерминантата се пропорционални, бидејќи имаме да е $a_2 = ka_1$ и $b_2 = kb_1$, каде што $k = 0$.

Ако пак само еден од елементите на вториот ред е нула, на пример нека е $a_2 = 0$, а $b_2 \neq 0$; тогаш од равенството $a_1b_2 = a_2b_1$ следува дека е и $a_1 = 0$. Значи, и двата елемента од првата колона се еднакви на нула. И во тој случај редовите на детерминантата се пропорционални, бидејќи важат равенствата $a_2 = ka_1$ и $b_2 = kb_1$ каде што за k го земаме бројот $k = \frac{b_1}{b_2}$

Со тоа теоремата 5 е целосно докажана.

Докажаните теореми 4 и 5 заедно можат да се искажат вака:

Детерминантата од втор ред е еднаква на нула тогаш и само тогаш, ако нејзините редови (или колони) се пропорционални, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \iff (a_1 = ka_2 \text{ и } b_1 = kb_2). \tag{9}$$

Теорема 6. *Ако елементите на еден ред (или колона) се збирови од по два собирци, тогаш детерминантата е еднаква на збирот од две детерминанти, кога на местото на збирот ставиме по еден собирок, а другите елементи се заеднички,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Доказ: $\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1+\alpha_1)\,b_2 - a_2(b_1+\beta_1) = a_1b_2 + \alpha_1 b_2 - a_2b_1 -$

$$- a_2\beta_1 = (a_1b_2 - a_2b_1) + (\alpha_1b_2 - a_2\beta_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Докажаната теорема лесно може да се прошири и за случај кога елементите на еден ред (или колона) се збирови од n собироци.

Теорема 7. *Ако кон елементите на еден ред (или колона) ги додадеме соодветните елементи на другиот ред (или колона) претходно помножени со еден ист број, детерминантата не ја менува својата вредност,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Доказ: $\begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

бидејќи согласно теоремата 4 детерминантата $\begin{vmatrix} ka_2 & kb_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ е еднаква на нула.

3. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

За системот равенки

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{1}$$

при услов $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ видовме дека има единствено решение, зададено со формулите:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{2}$$

Ако изразите во именителот и броителите на формулите (2) ги означиме со детерминантите: $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$$\Delta x=c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix};\qquad \Delta y=a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

тогаш решението (2) на системот (1) може да се запише во следнава позгодна форма за помнење:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta x}{\Delta};\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\Delta y}{\Delta}. \tag{3}$$

Детерминантата $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, што е во именителите на формулите (3), како што гледаме формирана е од коефициентите пред x и y во двете равенки на системот (1) и се вика *главна детерминанта* на системот (1).

Детерминантите пак $\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и $\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, што се во броителите на формулите (3), кои се добиваат од главната детерминанта Δ, кога елементите што соодветствуваат на коефициентите пред x (првата колона), односно—пред y (втората колона) ги замениме соодветно со слободните членови c_1 и c_2; се викаат *помошни* (*споредни*) *детерминанти* на системот (1).

Формулите (3), со кои го определуваме единственото решение на системот (1) при услов $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, се викаат *Крамерови формули* или *Крамерово правило.*

Пример: Да се реши системот $\begin{cases} 8x-3y=13 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ со помош на Крамеоворто правило.

Прво ги формираме и пресметуваме главната и помошните детерминанти на дадениот систем: $\Delta=\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=16-(-9)=25;$ $\Delta x=\begin{vmatrix} 13 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=26-(-24)=50;$ $\Delta y=\begin{vmatrix} 8 & 13 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=64-39=25.$

Гледаме, главната детерминанта на системот $\Delta = 25$ не е еднаква на нула, па согласно формулите (3), наоѓаме:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{25}{25} = 1.$$

Според тоа, дадениот систем има решение (2; 1).

§ 80. ИСПИТУВАЊЕ РЕШЕНИЈАТА НА СИСТЕМОТ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Да го разгледаме системот равенки

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$

Во зависност од тоа дали главната и помошните детерминанти на системот (1) се еднакви или различни од нула, ќе ги разликуваме следниве случаи:

1°. Ако главната детерминанта на системот (1) е различна од нула, т. е. $\Delta \neq 0$, видовме дека системот има единствено решение

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

и велиме системот (1) е *определен*.

Условот $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ означува дека редовите на главната детерминанта не се пропорционални и при $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$ тој може да се запише и вака:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \tag{2}$$

Според тоа: *системот (1) е определен, ако коефициентите пред непознатите од едната равенка не се пропорционални на соодветните коефициенти од другата равенка.*

2°. Ако главната детерминанта на системот (1) е еднаква на нула, и барем една од помошните детерминанти Δx или Δy е еднаква на нула, тогаш велиме системот (1) е *неопределен*, т. е. тој има бесконечно множество решенија.

Условите $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ и на пример $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$

означуваат дека редовите на детерминантите Δ и Δx се пропорционални, т. е. при $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, важат равенствата:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \quad \text{и} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$

односно

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k. \tag{3}$$

Од равенството (3) имаме да е $a_1 = ka_2$, $b_1 = kb_2$ и $c_1 = kc_2$.

Ако тие се заменат во првата равенка на системот (1), гледаме дека таа $ka_2x + kb_2y = kc_2$ е еквивалентна на втората равенка $a_2x + b_2y = c_2$, само што е помножена со некој број $k \neq 0$.

Системот (1), всушност, има само една различна равенка со две непознати, а која, како што ни е познато, има бесконечно множество решенија. Според тоа:

Ако коефициентите пред непознатите и слободниот член од едната равенка се пропорционални на соодветните коефициенти и слободниот член од другата равенка, тогаш системот (1) *е неопределен, т. е. има бесконечно множество решенија.*

Во тој случај за да се реши системот (1) доволно е да се најдат сите такви парови броеви (x_0, y_0), кои ја задоволуваат равенката $a_2x + b_2y = c_2$ од системот (1).

Од равенката (3) имаме да е $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$, односно дека и другата помошна детерминанта $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix}$ на системот (1) е еднаква на нула т. е. ќе важи следнава:

Теорема 1. *Ако главната детерминанта на системот* (1) *е еднаква на нула и барем една од помошните детерминанти* Δx *или* Δy *е еднаква на нула, тогаш и другата помошна детерминанта е еднаква на нула,* т. е.

$$(\Delta = 0 \text{ и } \Delta x = 0) \Rightarrow \Delta y = 0. \tag{4}$$

Докажете дека важи и следнава:

Теорема 2. *Ако главната детерминанта на системот* (1) *е еднаква на нула и барем една од помошните детерминанти на* Δx *или* Δy *е различна од нула, тогаш и другата помошна детерминанта е исто различна од нула,* т. е.

$$(\Delta = 0 \text{ и } \Delta x \neq 0) \Rightarrow \Delta y \neq 0. \tag{5}$$

3°. Ако главната детерминанта на системот (1) е еднаква на нула, т. е. $\Delta = 0$, а барем една од помошните детерминанти е различна од нула, на пример $\Delta x \neq 0$, тогаш велиме системот (1) е *противречен*, т. е. тој нема ниту едно решение.

Условите $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ и $\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

при $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$ можат да се запишат и вака:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \quad \text{и} \quad \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \text{ или заедно}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_1}. \tag{6}$$

Оттука наоѓаме: $a_1 = ka_2$; $b_1 = kb_2$, но $c_1 \neq kc_2$.

Според тоа, системот (1) може да се запише вака:

$$\begin{cases} ka_2x + kb_2y = c_1 \\ a_2x + \;\; b_2y = c_2 \end{cases}$$

Во тој случај системот нема решение. Навистина, ако допуштеме тој да има решение (x_0, y_0), тогаш треба да се вистинити бројните равенства:

$$\begin{cases} k(a_2x_0 + b_2y_0) = c_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 \;\; = c_2 \end{cases}$$

Од нив следува дека е $kc_2 = c_1$, а тоа е во контрадикција со претпоставката да е $c_1 \neq kc_2$.

Следователно: *ако коефициентите пред непознатите се пропорционални, а слободните членови не се пропорционални со нив, тогаш системот (1) е противречен, т. е. тој нема ниту едно решение.*

4°. Ако е $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, тогаш системот (1) го добива видот

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c_2 \end{cases}$$

Тука се можни два случаја:

а) Ако барем еден од слободните членови не е нула, на пример $c_1 \neq 0$, тогаш првата равенка нема решение, па според тоа и дадениот систем равенки нема решение, т. е. тој е противречен.

б) Ако е и $c_1 = c_2 = 0$, тогаш системот равенки го добива видот

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

Во тој случај системот има бесконечно множество решенија, или поточно, тој е задоволен за кои и да било произволни вредности на x и y.

Врз основа на горните заклучоци можат да се решаваат и вакви задачи:

Задача 1. За кои вредности на параметарот m системот равенки

$$\begin{cases} (1-m)x + y = 1 + 2m \\ (1+m)x - 2y = 1 - 2m \end{cases}$$ нема решение?

Системот нема решение, кога коефициентите пред непознатите се пропорционални, а слободните членови не се пропорционални со нив т. е. ако е

$$\frac{1-m}{1+m} = \frac{1}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{-2} \neq \frac{1+2m}{1-2m}.$$

Првиот услов е равенка со една непозната во однос на параметарот m. Откога ќе ја решиме, добиваме $m = 3$. При проверка гледаме дека за $m = 3$ е задоволен и вториот услов. Затоа и велиме дека за $m = 3$ системот равенки нема решение.

Задача 2. За кои вредности на параметрите m и n системот равенки

$$\begin{cases} (m+n)x - 3y = 6 \\ \qquad 2x + y = n \end{cases}$$ ќе има бесконечно множество решенија?

Дадениот систем равенки ќе има бесконечно множество решенија, ако параметрите m и n го задоволуваат условот $\frac{m+n}{2}=\frac{-3}{1}=\frac{6}{n}$, кој може да се запише и во форма на систем од две линеарни равенки во однос на параметрите m и n:

$$\begin{cases} \frac{m+n}{2}=-3 \\ -3=\frac{6}{n} \end{cases}$$

Решението на овој систем $m=-4$, $n=-2$ ќе го даде одговорот на задачата. Според тоа, дадениот систем равенки ќе има бесконечно многу решенија, ако е $m=-4$ и $n=-2$.

ЗАДАЧИ

Да се решат следниве системи равенки:

1. а) $\begin{cases} x-3y=4 \\ x-y=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 4x-y=5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x=2y-9 \\ x=2+y \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} (x+3)(x-1)=x^2+4y+5 \\ (3x+2)(x-3)=3x^2-14y+15 \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+2)^2-(x-3)(x+3)=3(y+5) \\ (2y-3)^2=y(4y-3)-3(4x-5) \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15 \\ y-\frac{y-x}{5}=\frac{6}{5} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x+7}{5}-\frac{2x-y}{4}=3y-5 \\ \frac{4x-3}{6}+\frac{5y-7}{2}=18-5x \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \frac{2x-y}{x+y}=\frac{8}{7} \\ \frac{x+2y}{x-y}=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{5}{y+4}=\frac{2}{x-1} \\ \frac{3}{x+2}=\frac{4}{x+1} \end{cases}$; в) $\begin{cases} \frac{y}{x+3}=\frac{y-2}{x+2} \\ 2y-5x=9 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} \frac{x}{x-2}-\frac{4}{y-1}=1 \\ \frac{x+3}{x}-\frac{4}{y+1}=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x+11}{y+10}=\frac{x+5}{y+4} \\ \frac{x+1}{y+2}=\frac{x}{y} \end{cases}$

Реши ги следниве системи со воведување на помошни непознати:

6. а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=10 \\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=10 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{48}{x+y}+\frac{6}{x-y}=7 \\ \frac{72}{x+y}-\frac{10}{x-y}=1 \end{cases}$

7. б) $\begin{cases} \frac{6}{x+y-1}-\frac{3}{x-y+1}=1 \\ \frac{9}{x+y-1}+\frac{6}{x-y+1}=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{3x+8y}{5xy}=\frac{1}{10} \\ \frac{3y-x}{3xy}=\frac{5}{12} \end{cases}$

Да се решат и испитаат решенијата на системите равенки:

8. а) $\begin{cases} ax+by=2 \\ x+\ \ y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+y=m \\ mx+y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} a^2x+by=a \\ bx+a^2y=b \end{cases}$

9. б) $\begin{cases} ax+by=1 \\ a^2x+b^2y=a \end{cases}$; б) $\begin{cases} a(x+y)-b(x-y)=2a^2 \\ (a^2-b^2)(x-y)=4a^2b \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{m+n}+\dfrac{y}{m-n}=m+n \\ \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}=2m \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{bx-1}{a-y}=1 \\ \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{a-b}{a+b} \end{cases}$

11. б) $\begin{cases} \dfrac{a}{x+a}-\dfrac{b}{y+b}=b \\ \dfrac{b}{x+a}+\dfrac{a}{y+b}=a \end{cases}$; б) $\left\{ \dfrac{2a}{x+ay}-\dfrac{1}{x-ay}=\dfrac{10a}{x+ay}+\dfrac{3}{x-ay}=1. \right.$

12. За кои вредности на a и b системот равенки: $\begin{cases} (a+1)x-5by=2 \\ (a-b)x-3ay=2 \end{cases}$ е неопределен?

13. Пресметај ги детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 17 & 5 \\ 55 & 16 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a-b & -1 \\ b^3 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \operatorname{Sin}\alpha & \operatorname{Cos}\alpha \\ -\operatorname{Cos}\alpha & \operatorname{Sin}\alpha \end{vmatrix}$

14. За кои вредности на k, системот $\begin{cases} kx-3y=1 \\ 3x-ky=k+1 \end{cases}$ нема решение?

15. Реши го системот $\begin{cases} (a-1)x-y=2 \\ ax-2y=2 \end{cases}$ и определи за кои вредности на параметарот a непознатите x и y истовремено ќе бидат: а) позитивни, б) еднакви на нула, в) негативни!

§ 81. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

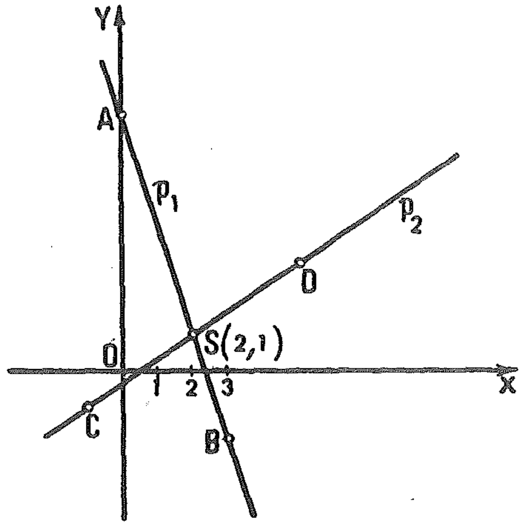
Нека е даден системот линеарни равенки $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$

За да го решиме системот равенки графички, графиците на секоја од овие равенки ќе ги нацртаме во ист координатен систем.

Графикот на првата равенка ќе биде правата p_1, што минува низ точките $A(0;\ 7)$ и $B(3;\ -2)$, а графикот на втората равенка — правата p_2 што минува низ точките $C(-1;\ -1)$ и $D(5;\ 3)$ (сл. 70).

Координатите на точките од правата p_1 ни го даваат множеството на сите решенија на првата равенка, а координатите на точките од правата p_2 ни го даваат множеството на сите решенија на втората равенка.

Според тоа, доколку двете равенки имаат заедничко решение, тогаш соодветната точка на тоа решение мора да лежи истовремено на обете прави p_1 и p_2.



Сл. 70

Значи, во тој случај правите p_1 и p_2 мораат да имаат заедничка точка. Тоа е пресечната точка S на правите p_1 и p_2 чии координати ($x = 2$; $y = 1$) ги задоволуваат обете равенки $\begin{cases} 3 \cdot 2 + 1 = 7 \\ 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \end{cases}$

Така наоѓаме дека решение на дадениот систем равенки е (2; 1).

Од геометријата знаеме дека две прави во рамнината можат да ги имаат следниве заемни положби: а) да се сечат, т. е. да имаат само една заедничка точка, б) да се паралелни (т. е. да немаат ниту една заедничка точка), или в) да се поклопуваат (т. е. сите точки да им се заеднички). Според тоа;

Системот од две линеарни равенки со две непознати може:

1. Да има едно единствено решение, ако графиците на равенките на правите се сечат,

2. Да нема ниту едно решение, ако графиците на равенките на правите се паралелни, или

3. Да има бесконечно многу решенија, ако графиците на правите во системот се поклопуваат. Во тој случај решенија на системот се координатите на сите точки на една од правите што се поклопуваат.

ЗАДАЧИ

1. Нацртај ги графиците на равенките:

а) $2x + y = 5$;   б) $x + 2y = 3$;   в) $x = 3y - 1$!

2. Реши ги графички следниве системи равенки:

а) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

3. Преку споредување на коефициентите покажи дека следниве системи равенки имаат само по едно решение:

а) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Покажи го тоа и графички!

4. Испитај кои од следниве системи равенки немаат решение, а кои се неопределени:

а) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x - \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$ ѓ) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x = 2 - 3y \end{cases}$

5. Дадена е равенката $2x + y = 6$. Состави нова равенка, која заедно со дадената да образува: а) определен, б) неопределен, в) противречен систем равенки!

6. За која вредност на m системот равенки $\begin{cases} x + my = m + 2 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$ е неопределен?

7. За која вредност на k системот равенки $\begin{cases} kx - y = 4 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ нема решение?

8. Даден е системот равенки $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - my = n \end{cases}$

Избери такви вредности за m и n, што системот равенки: а) да има само едно решение, б) да нема решение, в) да има бесконечно многу решенија!

§ 82. ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ТРИ НЕПОЗНАТИ

Дефиниција 1. *Линеарна равенка со три непознати е секоја равенка од видот*

$$ax + by + cz = d \tag{1}$$

каде што x, y и z се непознати, а *a, b, c, и d се кои и да било дадени броеви или изрази што независат од непознатите.*

Ваквиот вид на равенката (1) се вика *општ вид* на линеарната равенка со три непознати. Во неа броевите, односно изразите a, b и c, се викаат *коефициенти пред непознатите*, а d — *слободен член.*

Ако a, b, c и d се посебни броеви, за равенката (1) велиме дека е *со посебни* или *нумерички коефициенти*, а ако тие (сите или само некои од нив) се општи броеви или изрази што содржат општи броеви, за равенката (1) велиме дека е *со општи* или *буквени коефициенти* или *со параметри.*

Дефиниција 2. *Решение на линеарната равенка со три непознати се вика секоја фиксирана тројка реални броеви (x_0, y_0, z_0) за која дадената равенка е задоволена.*

Пример: Равенката $3x - 2y - z = 5$ има решение $(x = 4, y = 5, z = -3)$, бидејќи:

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - (-3) = 5; \quad 12 - 10 + 3 = 5, \quad \text{т. е.} \quad 5 = 5. \tag{2}$$

Да видиме дали равенката (2) има и други решенија и, ако има како ги одредуваме.

Ако равенката (2) ја решиме по една од непознатите, на пример по z, таа го добива видот: $z = 3x - 2y - 5$ (3)

Во таков случај велиме дека непознатата z е изразена уште и како функција на другите две непознати x и y.

Оттука станува јасно дека, кога на x и y им даваме произволни вредности, од равенката (3) ќе ги добиеме и соодветните вредности на z. Секоја така определена тројка на допуштени вредности за x, y и z (а нив ги има бесконечно многу) ќе претставува решение на равенката (3), односно (2). На пример, тројките броеви: $(0; 0; -5)$, $(1; 1; -4)$, $(1; 2; -6)$, $(3; -1; 6)$ итн. се решенија на равенката (2).

Според тоа: *Една линеарна равенка со три непознати (во општ случај) има бесконечно множество решенија.* Затоа велиме дека таа е *неопределена*.

Во некои посебни случаи линеарната равенка со три непознати (1) може да нема ни едно решение. Таков е случајот, кога во равенката (1) сите три коефициенти пред непознатите се еднакви на нула, а слободниот член е различен од нула.

Ако е $a = b = c = 0$, а $d \neq 0$, равенката (1) го добива видот

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = d$. Тогаш таа нема решение.

Ако е и слободниот член $d = 0$, тогаш равенката $0x + 0y + 0z = 0$ има исто така, бесконечно многу решенија; но сега, за разлика од другите случаи, таа е задоволена за кои и да било произволни вредности на x, y и z.

§ 83. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ТРИ НЕПОЗНАТИ

Дефиниција 1. *Множеството од две или три линеарни равенки со три едни исти непознати, за кои се бараат заедничките решенија, се вика систем линеарни равенки со три непознати.*

Зависно од бројот на равенките во системот разликуваме: *систем од две линеарни равенки со три непознати и систем од три линеарни равенки со три непознати.*

Пример: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x - 2y - z = 5 \end{cases}$

претставува еден систем од две линеарни равенки со три непознати, а:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ \quad\; y + 2z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y + z = 6 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

се системи од три линеарни равенки со три непознати.

Во претпоследниот систем првата равенка ги содржи трите непознати, додека втората равенка не го содржи x, а третата не го содржи z. Меѓутоа, во равенките можат да се вклучат и тие непознати, само со коефициенти нула.

Дефиниција 2. *Решение на системот линеарни равенки со три непознати е секоја фиксирана тројка допуштени вредности на непознатите ($x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) за која секоја равенка од системот е задоволена.*

Може да се случи даден систем линеарни равенки да нема ниту едно решение. За него велиме дека е *противречен*.

Ако системот линеарни равенки има само едно решение, велиме дека е *определен*, а ако има бесконечно множество решенија, тој е *неопределен*.

Дефиниција 3. *Да се реши даден систем (од две или три) линеарни равенки со три непознати, значи да се одреди множеството на сите негови решенија, или, ако тоа множество е празно, да се утврди тоа.*

Два система равенки се *еквивалентни*, ако множеството решенија на едниот систем се совпаѓа со множеството решенија на другиот систем. Два система се еквивалентни и тогаш кога обата немаат решение.

Напоменуваме дека теоремите за еквивалентност на системите линеарни равенки со две непознати важат и за системите линеарни равенки со три непознати. Врз основа на нив ќе ги вршиме сите трансформации и на овие системи при нивното разгледување и решавање.

1. СИСТЕМ ОД ДВЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ТРИ НЕПОЗНАТИ

Ќе го разгледаме системот од две линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} x-2y-z=5 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$$

Членовите што содржат z ги префрламе на десната страна на равенките

$$\begin{cases} x-2y=5+z \\ x+2y=1-3z \end{cases}.$$

Ако непознатата z привремено ја земеме за позната, т. е. за некој параметар, па добиениот систем го решиме во однос на непознатите x и y, ќе го добиеме системот

$$\begin{cases} x=3-z \\ y=-1-z, \end{cases}$$

еквивалентен на дадениот систем.

Оттука кога на z му даваме различни произволни вредности, на пример: $z=-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2\frac{1}{2};\ 3$ итн., за x и y добиваме соодветно:

$$x=5;\ 4;\ 3;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 0\ldots\ldots$$

$$y=-1;\ 0;\ -1;\ -2;\ -3;\ -3\frac{1}{2};\ -4\ldots\ldots$$

Така секоја од следниве тројки броеви $(5;1;-2)$, $(4;0;-1)$, $(3;-1;0)$, $(2;-2;1)$, $(1;-3;2)$ итн. ќе претставува различно решение на дадениот систем од две линеарни равенки со три непознати.

Направи сам проверка на некои од тие решенија!

Но има случаи кога системот од две линеарни равенки со три непознати може да нема ни едно решение. Таков е системот равенки

Пример: $\begin{cases} 2x-y+z=8 \\ 2x-y+z=3 \end{cases}$

Тој нема решение, бидејќи изразот $2x - y + z$ за кои и да било вредности на x, y и z не може да биде истовремено еднаков и на 8 и на 3.

Значи: *Системот од две линеарни равенки со три непознати може да има или бесконечно множество решенија или да нема решение.*

2. СИСТЕМ ОД ТРИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ТРИ НЕПОЗНАТИ

Општиот вид на систем од три линеарни равенки со три непознати е:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

каде што a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 и c_3 се *коефициенти пред непознатите*, а d_1, d_2 и d_3 — *слободни членови*. Некои од тие коефициенти и слободни членови можат да бидат еднакви и на нула.

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

во кој непознатата z не се содржи во втората и третата равенка!

За да го решиме системот, од последните две равенки образуваме систем од две равенки со две непознати: $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

Откога го решиме на еден од познатите методи, добиваме: $x = 2$, $y = -1$.

Потоа ги заменуваме најдените вредности за x и y во првата равенка на дадениот систем $2x - y + z = 8$, па од неа ја одредуваме и третата непозната z:

$$2 \cdot 2 - (-1) + z = 8, \text{ каде е } z = 3.$$

Значи, решение на дадениот систем е ($x = 2$, $y = -1$, $z = 3$).
Други решенија тој нема. Затоа и се вика *определен*.

Меѓутоа, има и такви системи од три линеарни равенки со три непознати, кои имаат бесконечно многу решенија или немаат ни едно решение:

Пример: Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 3y + 3z = 12 \\ 8x + 8y + 8z = 32 \end{cases}$

Ако втората равенка во него ја скратиме со 3, а третата со 8, ќе добиеме систем во кој трите равенки се еднакви. Притоа сите решенија на едната равенка се решенија и на другите две равенки. Од ова следува дека дадениот систем има бесконечно многу решенија, што се добиваат од равенката $x + y + z = 4$.

Друг пример: И системот: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ 5x + 3y - z = 7 \end{cases}$

има бесконечно множество решенија.

Откако ја скратиме со 2, неговата втора равенка станува еднаква на првата равенка. Според тоа, дадениот систем всушност има само две различни равенки со три непознати. Бидејќи системот од две линеарни равенки со три непознати или има бесконечно многу решенија, или нема решение, тоа и дадениот систем има бесконечно многу решенија.

Нека е даден системот равенки: $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + 2y - z = 9 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{cases}$

Во него првите две равенки немаат заедничко решение, бидејќи изразот $x + 2y - z$ за исти вредности на непознатите не може да биде еднаков и на 5 и на 9. Оттука следува дека и дадениот систем равенки нема решение.

Според тоа: *Системот од три линеарни равенки со три непознати може да има или само едно решение или бесконечно множество решенија или да нема решение.*

Забелешка: Ако бројот на равенките во системот е поголем од бројот на непознатите системот во општ случај нема решение, т. е. тој е противречен. Разгледувањето на такви системи линеарни равенки ги надминува рамките на нашата програма.

Овде ќе покажеме на еден пример дека и тие системи при определени услови можат да имаат заедничко решение.

Задача: Кој услов треба да е исполнет па системот равенки

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ ax - by = ab \end{cases} \tag{1}$$

да има заедничко решение?

Ако земеме кои и да било две равенки, на пример првата и втората, од системот (1), тие ќе образуваат нов систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \tag{2}$$

Системот (2) има решение: $x = \dfrac{a+b}{2},\ y = \dfrac{a-b}{2}$ (3)

За да може дадениот систем (1) да има заедничко решение, треба решението (3) да ја задоволува и третата равенка на системот (1), т. е. треба да важи равенството:

$$a \cdot \frac{a+b}{2} - b \cdot \frac{a-b}{2} = ab,$$

кое, откога ќе се упрости, го добива видот: $(a - b)^2 = 0$

Тоа ќе биде точно, само ако е $a = b$.

Тоа е бараниот услов дадениот систем да има заедничко решение.

И навистина, ако е $a = b$, системот (1) го добива видот: $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = a \\ ax - ay = a^2 \end{cases}$

Ако третата равенка ја скратиме со a, таа ќе стане еднаква на втората. Значи, во тој случај дадениот систем (1) ќе биде еквивалентен на системот (2).

§ 84. РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ОД ТРИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ТРИ НЕПОЗНАТИ

За да се реши даден систем од три линеарни равенки со три непознати, потребно е прво тој да се трансформира во таков попрост еквивалентен систем, во кој во две негови равенки да биде елиминирана една од непознатите. Така двете равенки ќе имаат по две исти непознати. Од нив образуваме систем од две линеарни равенки со две непознати и го решаваме тој систем по еден од познатите методи. Потоа со замена на најдените вредности на двете непознати во една од трите равенки на дадениот систем ја одредуваме вредноста и на третата непозната.

Елиминацијата на една од непознатите во две равенки од дадениот систем ја вршиме со помош на еден од познатите методи: методот на замена (супституција) или методот на спротивни коефициенти.

1. МЕТОД НА ЗАМЕНА (СУПСТИТУЦИЈА)

Нека е даден системот равенки:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

При $c_1 \neq 0$ од првата равенка на системот (1), наоѓаме:

$$z = \frac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1} \tag{2}$$

Заменувајќи ја непознатата z во втората и третата равенка со најдениот израз, добиваме:

$$\begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 \cdot \dfrac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1} = d_2 \\[2ex] a_3x + b_3y + c_3 \cdot \dfrac{d_1 - a_1x - b_1y}{c_1} = d_3 \end{cases}$$

систем од две линеарни равенки со две непознати, кој со неколку трансформации може да се доведе во видот:

$$\begin{cases} (c_1a_2 - c_2a_1)x + (c_1b_2 - c_2b_1)y = c_1d_2 - c_2d_1 \\ (c_1a_3 - c_3a_1)x + (c_1b_3 - c_3b_1)y = c_1d_3 - c_3d_1 \end{cases} \tag{3}$$

Според правилото на Крамер, наоѓаме:

$$x = \frac{(c_1d_2 - c_2d_1)(c_1b_3 - c_3b_1) - (c_1d_3 - c_3d_1)(c_1b_2 - c_2b_1)}{(c_1a_2 - c_2a_1)(c_1b_3 - c_3b_1) - (c_1a_3 - c_3a_1)(c_1b_2 - c_2b_1)}$$

$$y = \frac{(c_1a_2 - c_2a_1)(c_1d_3 - c_3d_1) - (c_1a_3 - c_3a_1)(c_1d_2 - c_2d_1)}{(c_1a_2 - c_2a_1)(c_1b_3 - c_3b_1) - (c_1a_3 - c_3a_1)(c_1b_2 - c_2b_1)}.$$

Најдените вредности за x и y, кога ги замениме во равенката (3), а по средувањето, добиваме:

$$z = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)\ (a_1d_3 - a_3d_1) - (a_1b_3 - a_3b_1)\ (a_1d_2 - a_2d_1)}{(c_1a_2 - c_2a_1)\ (c_1b_3 - c_3b_1) - (c_1a_3 - c_3a_1)\ (c_1b_2 - c_2b_1)}.$$

По неколку трансформации, бараното решение на системот равенки (1), ќе го добие видот:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \\ y &= \frac{a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_2d_1c_3 - a_1d_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \qquad (4) \\ z &= \frac{a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3 - a_1b_3d_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \end{aligned}$$

При услов $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \neq 0$.

Задача 1. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$

Решение: Првата равенка ја решаваме по непознатата x:
$x = 2y - 3z + 10$, па со добиениот израз го заменуваме x во втората и третата равенка. Така го добиваме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} x = 2y - 3z + 10 \\ 4(2y - 3z + 10) + y - 2z = 8, \\ 2(2y - 3z + 10) + 3y + 5z = 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 2y - 3z + 10 \\ 9y - 14z = -32 \\ 7y - z = -15 \end{cases}$$

Гледаме: втората и третата равенка во него содржат само по две исти непознати. Ако ги земеме како систем равенки со две непознати и го решиме системот на еден од познатите начини, на пример по методот на замена, добиваме: $y = -2$, $z = 1$.

Вредноста на x ја наоѓаме, така што во првата равенка непознатите y и z ги заменуваме со добиените вредности за нив, т. е.

$$x = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + 10 \quad \text{или} \quad x = 3.$$

Значи, дадениот систем равенки има решение ($x = 3$, $y = -2$, $z = 1$).

Проверка:

$$\begin{cases} 3 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 10 \\ 4 \cdot 3 - 2 - 2 \cdot 1 = 8 \\ 2 \cdot 3 + 3\,(-2) + 5 \cdot 1 = 5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3 + 4 + 3 = 10 \\ 12 - 2 - 2 = 8 \\ 6 - 6 + 5 = 5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 10 = 10 \\ 8 = 8 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Според тоа, системот равенки е правилно решен.

Задача 2. Да се реши системот равенки: $\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - z = 11 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

Од втората равенка, кога ќе ја решиме по z, наоѓаме: $z = 2x - 11$.

Добиениот израз за z потоа го заменуваме во првата равенка, така што добиваме равенка со две непознати x и y. Кон така добиената равенка ја придружуваме третата и образуваме систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} x + y + 3\,(2x - 11) = 4 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7x + y = 37 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$$

Добиениот систем го решаваме, на пример, по методот на спротивни коефициенти, и добиваме: $x = 5$, $y = 2$.

Непознатата z ја одредуваме кога во втората равенка на дадениот систем, односно во $z = 2x - 11$, го заменуваме x со 5. Така наоѓаме $z = -1$.

Значи, решение на системот равенки е ($x = 5$, $y = 2$, $z = -1$).

Од разгледаните два примера гледаме дека решавањето на системот од три линеарни равенки со три непознати по методот на замена се состои, главно во следново:

Едната од равенките (која и да било) ја решаваме по една од непознатите. Потоа со добиениот израз ја заменуваме истата непозната во другите две равенки од системот и добиваме нов систем од две равенки со две непознати. Системот го решаваме на еден од познатите начини и добиените вредности за двете непознати ги заменуваме во изразот за третата непозната. Така ја одредуваме и третата непозната.

2. МЕТОД НА СПРОТИВНИ КОЕФИЦИЕНТИ

За да го решиме системот

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

по методот на спротивни коефициенти, ќе ги помножиме прво првата и втората равенка соодветно со c_2 и $-c_1$; а потоа првата и третата равенка соодветно со c_3 и $-c_1$ (каде што $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и $c_3 \neq 0$) и ако на така добиените равенки ги собереме соодветните им леви и десни срани, ќе го добиеме следниов систем од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = d_1c_2 - d_2c_1 \\ (a_1c_3 - a_3c_1)x + (b_1c_3 - b_3c_1)y = d_1c_3 - d_3c_1 \end{cases} \tag{5}$$

Ако системот (5) го решиме по правилото на Крамер и најдените изрази за непознатите x и y ги замениме во една (која и да било) од равенките на системот (1), ќе ја определиме и третата непозната z. На таков начин ќе најдеме дека решение на системот (1), при услов да е

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2 \neq 0$$

ќе биде тројката броеви (x, y, z) определена со формулите (4).

Задача 3. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

Решение: Ако втората равенка од системот ја помножиме со -1 и ја собереме со првата, ја добиваме равенката:

$$(1 - a)x + (a - 1)y = a - 1.$$

При претпоставка дека е $a - 1 \neq 0$, добиената равенка можеме да ја скратиме со $a - 1$, па добиваме:

$$-x + y = 1. \tag{7}$$

На сличен начин, кога од првата и третата равенка ја елиминираме непознатата z, ќе добиеме уште една равенка со непознатите x и y:

$$\begin{cases} -ax - a^2y - az = -a^3 \\ \quad x + \quad y + az = \quad a^2 \end{cases}$$
$$\overline{(1-a)\,x + (1-a^2)\,y = 0}$$

Таа може да се скрати со $1 - a \neq 0$, така што го добива видот:

$$x + (1 + a)\,y = 0. \tag{8}$$

Равенките (7) и (8) образуваат систем равенки со две непознати

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ x + (1 + a)\,y = 0 \end{cases}$$

Со собирање на соодветните страни на обете равенки од системот, добиваме:

$$(a + 2)\,y = 1.$$

При претпоставка да е $a + 2 \neq 0$, наоѓаме $y = \dfrac{1}{a+2}$

Потоа лесно ги наоѓаме другите две непознати:

$$x = -\frac{a+1}{a+2}, \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Значи, ако е $a \neq -2$ и $a \neq 1$, дадениот систем има решение:

$$x = -\frac{a+1}{a+2}; \qquad y = \frac{1}{a+2}; \qquad z = \frac{(a+1)^2}{a+2}.$$

Ако е $a = -2$, дадениот систем го добива видот:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 1 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases}$$

Овој систем нема решение, бидејќи, ако го допуштиме спротивното и ги собереме соодветните страни на трите равенки, ќе добиеме: $0 = 7$, кое не е точно.

Ако е $a = 1$, веднаш гледаме д дадениот ситем е еквивалентен само на една равенка $x + y + z = 1$.

Значи, во тој случај системот ќе има бесконечно многу решенија, т. е. тој е неопределен.

Решавањето на системот линеарни равенки со три непознати по методот на спротивни коефициенти се состои во следново: Од две равенки (кои и да било) на системот со изравнување на коефициентите ја елиминираме едната од непознатите. Потоа истата непозната ја елиминираме и од други две равенки на системот. Така добиваме две равенки со две исти непознати, кои, земени заедно, образуваат систем равенки со две непознати. Го решаваме тој систем на еден од познатите начини и најдените вредности ги заменуваме во една од равенките на дадениот систем. Така ја одредуваме и третата непозната.

Меѓутоа, ако некои од равенките не ги содржат сите непознати системот може да се реши и пократко.

Задача 4. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x+y} - \dfrac{4}{x-2z} = 0 \\ \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{5}{y+3z} = 2 \\ \dfrac{10}{y+3z} - \dfrac{6}{x-2z} = -1 \end{cases} \tag{9}$$

Решение: Системот ќе го решиме со воведување на нови непознати.

Ако земеме дека е:

$$\frac{1}{x+y} = u; \qquad \frac{1}{y+3z} = v; \qquad \frac{1}{x-2z} = t \tag{10}$$

го добиваме системот:

$$\begin{cases} 12u - 4t = 0 \\ 6u + 5v = 2 \\ 10v - 6t = -1 \end{cases} \tag{11}$$

Првата равенка ја делиме со -2 и ја собираме со втората, така ја елиминираме непознатата u, и добиваме:

$$\begin{cases} -6u + 2t = 0 \\ 6u + 5v = 2 \end{cases}$$
$$\overline{5v + 2t = 2}$$

една равенка со непознати v и t, која, заедно со третата равенка на системот (11), образува нов систем равенки со две непознати:

$$\begin{cases} 5v + 2t = 2 \\ 10v - 6t = -1 \end{cases}$$

Со решавање на тој систем, наоѓаме: $v = \dfrac{1}{5}$ и $t = \dfrac{1}{2}$.

За да ја одредиме непознатата u, во втората равенка на системот (11) v го заменуваме со $\dfrac{1}{5}$, па добиваме: $6u + \dfrac{5}{5} = 2$, од каде е $u = \dfrac{1}{6}$.

Значи решение на системот (11) е: $\left(u = \dfrac{1}{6} \quad v = \dfrac{1}{5} \text{ и } t = \dfrac{1}{2}\right)$.

Потоа најдените вредности за u, v и t ги заменуваме во релациите (10) и го добиваме системот:

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{y+3z} = \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{x-2z} = \frac{1}{2} \tag{12}$$

кој е еквивалентен на дадениот.

При $x+y \neq 0$, $y+3z \neq 0$ и $x-2z \neq 0$, системот (12) е еквивалентен на системот:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + 3z = 5 \\ x - 2z = 2 \end{cases} \tag{13}$$

Од првата и втората равенка го елиминираме y, така што првата равенка ја множиме со -1 и ја собираме со втората:

$$\begin{cases} -x - \;y = -6 \\ \quad\; y + 3z = \;\;5 \end{cases}$$
$$\overline{-x + 3z = -1}$$

Добиената равенка ја собираме со третата равенка на системот (13) и наоѓаме:

$$\begin{cases} -x + 3z = -1 \\ \;\;\, x - 2z = \;\;2 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad z = \;\;1}$$

Кога го знаеме z, другите две непознати x и y ги одредуваме од втората и третата равенка на системот (13). Така наоѓаме:

$$x = 4, \quad y = 2, \quad z = 1$$

Добиените вредности за x, y и z ги задоволуваат условите: $x + y \neq 0$, $y + 3z \neq 0$ и $x - 2z \neq 0$, па според тоа, решение на системот (12), односно на дадениот систем (9) е $(x = 4,\ y = 2,\ z = 1)$.

Изврши проверка на најденото решение!

§ 85. ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ТРЕТ РЕД

1. ПОИМ ЗА ДЕТЕРМИНАНТИ ОД ТРЕТ РЕД

При решавањето на системот равенки:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1}$$

дојдовме до следниве формули за одредување непознатите x, y и z:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_3b_2c_1 - d_2b_1c_3 - d_1b_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \\ y &= \frac{a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_3d_2c_1 - a_2d_1c_3 - a_1d_3c_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \\ z &= \frac{a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_3b_2d_1 - a_2b_1d_3 - a_1b_3d_2}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \end{aligned} \tag{2}$$

при услов $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \neq 0$.

Како што гледаме, решението (2) на системот (1) запишано е во посложен вид, отколку при системите од две равенки. Затоа целисходно е да се побара некоја друга позгодна форма на запишувањето на изразите од видот

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

кои претставуваат алгебарски збир од шест производи од по три множители.

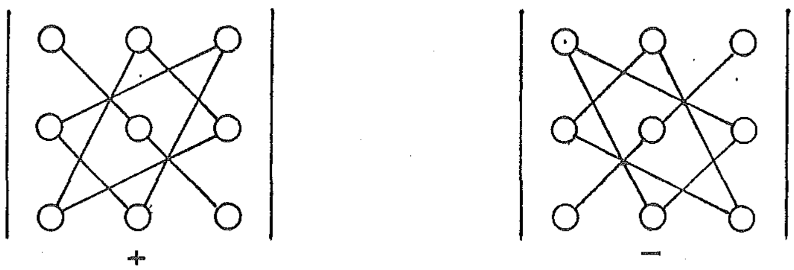
Тоа го постигнуваме со воведувањето на поимот *детерминанти од трет ред*.

Дефиниција 1. *Изразот* $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$ *означен со симболот* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ *се вика детерминанта од трет ред,* т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{Df}{=} a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$$

Броевите (или изразите) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 се викаат *елементи на детерминантата;* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ се викаат *колони,* а $a_1b_1c_1$; $a_2b_2c_2$ и $a_3b_3c_3$ — *редови* на детерминантата. Кај детерминантата од трет ред разликуваме и две дијагонали: $\begin{smallmatrix} a_1 & & \\ & b_2 & \\ & & c_3 \end{smallmatrix}$ — *главна дијагонала* и $\begin{smallmatrix} & & c_1 \\ & b_2 & \\ a_3 & & \end{smallmatrix}$ —*споредна дијагонала.*

Вредноста на детерминантата од трет ред по дефиниција се пресметува по формулата (3), а која полесно се помни со помош на *Сарусовото правило* или *правило на триаголници,* што е графички илустрирано на сл. 71.



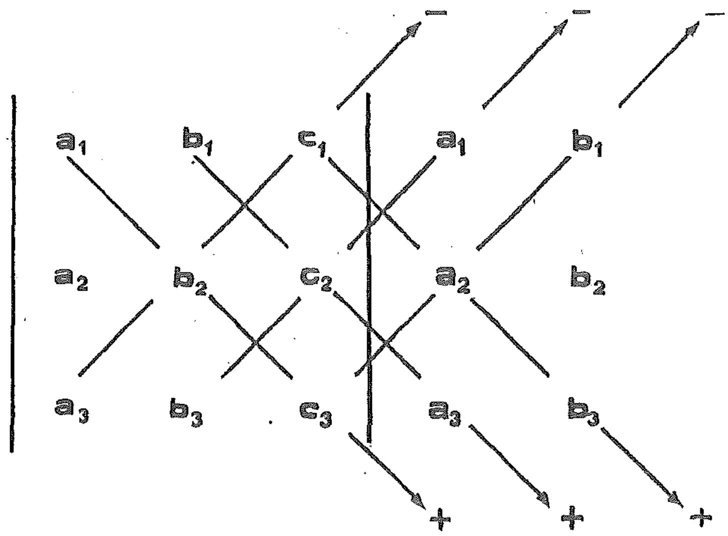
Сл. 71

Според тоа правило ги образуваме сите производи од по три елементи и тоа: производите на елементите, што лежат на главната дијагонала, и елементите што ги формираат триаголниците со основа паралелна на главната дијагонала ги земаме со знак плус $(+)$; а производите на елементите што лежат на споредната дијагонала, како и елементите што ги формираат триаголниците со основа паралелна на споредната дијагонала ги земаме со знак минус $(-)$.

Пример: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot1 + (-1)(-2)\cdot1 + 0\cdot3\cdot4 - 0\cdot5\cdot1 - (-1)\cdot3\cdot1 = 10+2+0-0-(-16)-(-3) = 31.$

Друга варијанта на Сарусовото правило за пресметување (развивање) на детерминантите од трет ред е следнава:

Од десната страна на квадратната шема на детерминантата од трет ред ја допишуваме првата и втората колона (сл. 72), потоа ги образуваме производите на елементите што лежат на главната и на паралелните со неа дијагонали со знак плус $(+)$; а производите на елементите, што лежат на споредната и на паралелните со неа дијагонали со знак минус.



Сл. 72

Пример: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right. = 3\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot(-3)(-1) + 2\cdot 0\cdot(-2) - (-1)\cdot 4\cdot 2 - (-2)(-3)\cdot 3 - 0\cdot 0\cdot 1 = 0+3+0-(-8)-18-0=-7.$

Ќе покажеме дека детерминантата од трет ред може да се претстави и преку детерминанти од втор ред. Гледаме дека во формулата (3) секој елемент се појавува како множител само во два собирка. Тоа ни овозможува да го направиме следното групирање по однос на елементите од првиот ред на детерминантата:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 =$$
$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) =$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Според тоа, имаме:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Ваквото претставување на детерминантата од трет ред се вика нејзино *развивање по елементите* од првиот ред.

Аналогно детерминантата од трет ред може да се развие по елементите на кој и да било ред (или колона).

Детерминантите од втор ред, што се јавуваат при развивањето (4) на детерминантата од трет ред, се викаат нејзини *поддетерминанти* (или минори), што соодветствуваат на елементите a_1, b_1 и c_1.

Јасно е дека секоја поддетерминанта (минор) што одговара на даден елемент, се добива од дадената детерминанта, кога во неа го прецртаме редот и колоната на кои тој елемент им припаѓа. По однос на знакот, што го земаме пред даден елемент при развивањето на детерминантата од трет ред, тој алтернативно се менува, а се раководиме од следнава шема:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Пример: Да се развие детерминантата од трет ред по елементите од втората колона

Решение: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Јасно е дека вредноста на секоја детерминанта од трет ред може да се пресмета и по пат на нејзино развивање по елементите на кој и да било нејзин ред (или колона).

Сите докажани својства на детерминантите од втор ред важат во соодветна форма и за детерминантите од трет ред.

2. КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

Видовме дека системот равенки

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1}$$

при услов $a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \neq 0$ има единствено решение, зададено со формулите (2).

Тие формули, со помош на детерминанти од трет ред, можат да се запишат во следнава поедноставна форма:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta z}{\Delta} \tag{3}$$

Детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, што стои во именителите на формулите (3), како што гледаме формирана е од коефициентиге пред непознатите x, y и z во трите равенки на системот (1) и се вика *главна детерминанта на системот* (1).

Детерминантите пак

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

што се наоѓаат во броителите на формулите (3) се викаат *помошни детерминанти на системот* (1), а се добиваат од главната детерминанта Δ, кога во неа елементите што соодветствуваат на коефициентите пред x (првата колона), односно — пред y (втората колона), односно — пред z (третата колона) ги замениме соодветно со слободните членови d_1, d_2, d_3.

Формулите (3), со чија помош го определуваме единственото решение на системот (1) при услов $\Delta \neq 0$, се викаат *Крамерови формули* или *Крамерово правило*.

Пример: Да се реши системот: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ x + 2y - 3z = -6 \\ 4x - 5y - 2z = 12 \end{cases}$

Прво ги формираме и пресметуваме главната и помошните детерминанти на дадениот систем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 5 + 36 - 8 - 6 - 30 = -21$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 \\ -6 & 2 & -3 \\ 12 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -36 + 30 + 108 - 24 + 36 - 135 = -21$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & -3 \\ 4 & 12 & -2 \end{vmatrix} = 24 + 12 - 108 + 24 + 18 + 72 = 42$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 1 & 2 & -6 \\ 4 & -5 & 12 \end{vmatrix} = 48 - 45 + 72 - 72 + 36 - 60 = -21$$

Гледаме дека главната детерминанта на системот $\Delta = -21$ не е еднаква на нула; па согласно формулите (3) наоѓаме:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-21}{-21} = 1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{42}{-21} = -2; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-21}{-21} = 1$$

Според тоа, дадениот систем има решение $(1, -2, 1)$

ЗАДАЧИ

Да се решат системите равенки

1. а) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 11 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 7x + 3y - 6z = -1 \\ 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 9y - 9z = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = -3 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{6} + \dfrac{z}{2} = 4 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4} = 5 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{2} = 6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{2} + \dfrac{y+1}{5} = 5 \\ \dfrac{y+5}{3} - \dfrac{z-1}{4} = 1 \\ \dfrac{z+1}{3} - \dfrac{x-1}{5} = 1 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+z} - \dfrac{6}{y-2x} - \dfrac{1}{3z-y} = 1 \\ \dfrac{6}{x+y+z} - \dfrac{4}{y-2x} + \dfrac{1}{3z-y} = 3 \\ \dfrac{15}{x+y+z} + \dfrac{2}{y-2x} + \dfrac{3}{3z-y} = 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{5}{y+3z} = 2 \\ \dfrac{15}{x+y} - \dfrac{4}{x-2z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{10}{y+3z} - \dfrac{7}{x-2z} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} ay + bx = c \\ bz + cy = a \\ cx + az = b; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + bz = 0 \\ x + a^2y + bz = 0 \end{cases}$

6. За која вредност на m системот равенки: $\begin{cases} 3x - 5y = 5 \\ 2x - y = m \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

ќе има заедничко решение:

7. Покажи дека системот равенки:

а) $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 1 \end{cases}$ нема решение б) $\begin{cases} 4x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ x - 3y + 4z = -2 \end{cases}$

е неопределен!

8. Испитај за кои вредности на параметарот a системот равенки:

$\begin{cases} 2x + ay - z = 8 \\ ax + 2y + z = 20 \\ x + y - 2z = -5 \end{cases}$ а) е неопределен; б) противречен?

9. Пресметај ги детерминантите:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; с) $\begin{vmatrix} 1 & n+1 & n+4 \\ 1 & n+2 & n+5 \\ 1 & n+3 & n+6 \end{vmatrix}$

10. Да се докаже дека системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + z = 2 \end{cases}$$

за секоја реална вредност на параметарот a има единствено решение. Определи го тоа решение.

§ 86. ПРИМЕНА НА СИСТЕМИТЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ И ТРИ НЕПОЗНАТИ

Има многу задачи од различните области на науката, техниката, физиката, аритметиката, геометријата и секојдневниот живот, чие решавање се сведува на составување и решавање определен систем од две линеарни равенки со две непознати или на систем од три линеарни равенки со три непознати.

При решавањето на тие задачи се раководиме од истите општи упатства што ги дадовме при примената на равенките од прв степен со една непозната.

Задача 1. Еден велосипедист го поминува растојанието меѓу два града за одредено време, кога се движи со некоја постојана брзина. Ако тој ја зголеми својата брзина за 5 km на час, ќе стигне за 1 час порано, а ако ја намали брзината за 3 km на час, ќе стигне за 1 час подоцна. Да се одреди брзината на велосипедистот, времето на неговото движење и растојанието меѓу градовите!

Велосипедистот нека се движел со брзина x km на час и растојанието меѓу градовите нека го поминал за y часа. Во таков случај со брзина x km на час за y часа велосипедистот ќе помине (xy) km пат, а со брзина $(x + 5)$ km на час за $(y - 1)$ часа тој ќе помине $(x + 5)(y - 1)$ km пат.

Бидејќи изминатиот пат во двата случаја е еден ист и еднаков на растојанието меѓу градовите, ќе имаме: $(x + 5)(y - 1) = xy$.

Исто размислуваме и за составување втората равенка $(x - 3)(y + 1) = xy$.

Така го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} (x + 5)(y - 1) = xy \\ (x - 3)(y + 1) = xy \end{cases}$$

Ако го упростиме, добиваме:

$$\begin{cases} -x + 5y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

Оттука наоѓаме: $x = 15$; $y = 4$

Според тоа, брзината на велосипедистот е 15 km на час, времето на движењето 4 часа, а растојанието меѓу градовите $15 \cdot 4 = 60$ (km).

Проверка: $15 \cdot 4 = 60$ (km)

$$(15 + 5)(4 - 1) = 20 \cdot 3 = 60 \text{ (km)}$$

$$(15 - 3)(4 + 1) = 12 \cdot 5 = 60 \text{ (km)}$$

Изминатиот пат во двата случаја е ист. Значи, задачата е точно решена.

Задача 2. Група ученици решиле да соберат определена сума пари за купување подарок за својот другар. Ако секој даде по a дин., недостасуваат 8 дин., а ако секој даде по b дин. ќе соберат 4 дин. повеќе. Колку ученици биле во групата и колку чинел подарокот?

Задачата има смисла само при $a > 0$, $b > 0$ и $b > a$.

Во групата нека имало x ученици, а подарокот нека чинел y дин.

Врз основа условите во задачата го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} ax = y - 8 \\ bx = y + 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} ax - y = -8 \\ bx - y = 4 \end{cases} \tag{1}$$

Ако првата равенка ја помножиме со -1 и ги собереме двете равенки, ќе добиеме:

$$\begin{cases} -ax + y = 8 \\ bx - y = 4 \end{cases}$$

$$bx - ax = 12, \quad \text{односно} \quad (b - a)\,x = 12. \tag{2}$$

Ако е $b - a \neq 0$ или $b \neq a$, имаме $x = \dfrac{12}{b-a}$.

Да го определиме y:

$$\begin{cases} ax - y = -8 \;/ \cdot (-b) \\ bx - y = 4 \;/ \cdot a; \end{cases} \quad \begin{cases} -abx + by = 8b \\ abx - ay = 4a \end{cases}$$

$$bx - ay = 8b + 4a, \quad \text{односно} \quad (b - a)y = 4(2b + a)$$

Ако е $b \neq a$, добиваме: $y = \dfrac{4(2b + a)}{b - a}$.

Според тоа, при $b \neq a$ системот има решение:

$$x = \frac{12}{b-a}, \quad y = \frac{4(2b+a)}{b - a}.$$

Ако е $b - a = 0$, равенката (2) го добива видот $0 \cdot x = 12$. Таа нема решение, па според тоа и системот (1) нема решение.

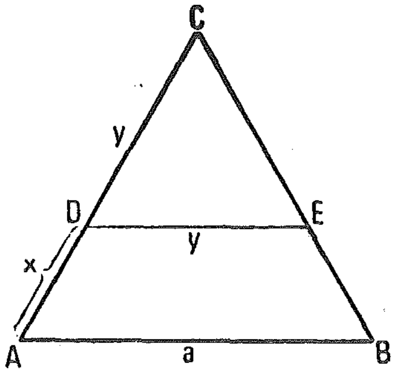
Од природата на задачата следува дека вредностите на x и y треба да се позитивни. Овој услов е задоволен, бидејќи параметрите a и b се позитивни, и тоа $b > a$. Освен тоа за x се земаат само цели позитивни вредности (зошто?). Тоа ќе биде задоволено само за оние вредности на параметрите a и b за кои разликата $b - a$ е содржател (множител) на бројот 12.

Според тоа, во групата имало $\dfrac{12}{b - a}$ ученици, а подарокот чинел $\dfrac{4(2b+a)}{b-a}$, при услов да е $b > a > 0$ и кога $\dfrac{12}{b-a}$ е цел позитивен број.

Задача 3. Во рамностран триаголник ABC со страна a да се повлече права паралелна со една од страните на триаголникот, така што периметарот на образуваниот трапез да е еднаков на p (сл. 73).

Да означиме: $AD = BE = x$; $DE = CD = CE = y$. Од сликата 73 следува системот равенки $\begin{cases} x + y = a \\ 2x + y + a = p \end{cases}$

По решавањето на системот наоѓаме: $x = p - 2a$, $y = 3a - p$.



Сл. 73

Решението на задачата има смисла само ако параметрите a и p се позитивни броеви; исто така и x и y треба да се позитивни. За да биде x позитивно, треба да е $p - 2a > 0$ или $p > 2a$, а за y потребно е д е $3a - p > 0$ или $3a > p$, односно $p < 3a$. Условите $p > 2a$ и $p < 3a$ можат заедно да се запишат и вака: $2a < p < 3a$.

Значи: Задачата има решение $x = p - 2a$, $y = 3a - p$ при услов $2a < p < 3a$.

Задача 4. Ако даден број се подели со збирот од неговите цифри, се добива количник 22. Ако цифрите на десетките и единиците си ги променат местата, ќе се добие број што е за 18 помал од даденият, а ако цифрите на стотките и десетките си ги променат местата, ќе се добие број за 360 поголем од даденият. Кој е тој број?

Ако цифрата на стотките ја означиме со x, цифрата на десетките — со y, а цифрата на единиците со z, тогаш даденият број го запишуваме: $100x + 10y + z$. Бројот што се добива кога во даденият број цифрите на десетките и единиците си ги променат местата ќе биде: $100x + 10z + y$, а бројот што се добива кога во даденият број цифрите на стотките и десетките си ги променат местата ќе биде: $100y + 10x + z$. Од условите на задачата го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} \dfrac{100x + 10y + z}{x + y + z} = 22 \\ 100x + 10z + y = 100x + 10y + z - 18 \\ 100y + 10x + z = 100x + 10y + z + 360 \end{cases}$$

По доведувањето на системот во општ вид, добиваме:

$$\begin{cases} 26x - 4y - 7z = 0 \\ z - y = -2 \\ y - x = 4 \end{cases} \qquad (6)$$

Ако втората равенка ја решиме по z и со најдениот израз го замениме z во првата равенка, ќе добиеме:

$$26x - 4y - 7(y - 2) = 0 \text{ или } 26x - 11y = -14.$$

Таа заедно со третата равенка на системот (6), образува систем равенки со две непознати:

$$\begin{cases} 26x - 11y = -14 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

По решавањето на системот на еден од познатите начини добиваме: $x = 2$, $y = 6$.

Потоа кога во втората равенка на системот (6) y го замениме со 6, ја одредуваме и третата непозната z, т. е. $z = 4$.

Значи, бараниот број е 264.

Проверка: $$\begin{cases} 264 : (2 + 6 + 4) = 264 : 12 = 22 \\ 246 + 18 = 264 \\ 624 - 360 = 264 \end{cases}$$

Според тоа, бројот 264 ги задоволува условите на задачата.

Задача 5. Учениците од I, II и III клас на едно училиште засадиле вкупно 688 дрвца. По колку дрвца засадил секој клас, ако броевите на засадените дрвца од I и II клас се однесуваат како 5:6, а тие на засадените дрвца од II и III клас како 4:7?

Броевите на засадените дрвца од I, II и III клас ги означуваме соодветно со x, y, и z. Според условот на задачата имаме:

$$\begin{cases} x + y + z = 688 \\ x : y = 5 : 6 \\ y : z = 4 : 7 \end{cases}$$

Тука двете пропорции се исто равенки со две непознати, кои заедно со првата равенка образуваат систем равенки со три непознати.

Системот може да се запише и вака: $$\begin{cases} x + y + z = 688 \\ 6x - 5y = 0 \\ 7y - 4z = 0 \end{cases}$$

Со неговото решавање го добиваме и решението на задачата, а имено дека: Учениците од I клас засадиле 160 дрвца, учениците од II клас — 192 дрвца, а учениците од III клас 336 дрвца.

Задача 6. Да се најдат должините на страните на еден триаголник, ако збирот на кои и да било две негови страни е 8 cm, 9 cm, 11 cm.

Должините на страните на триаголникот да ги означиме со x, y и z. Тогаш од условот на задачата го составуваме системот равенки:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 9 \\ z + x = 11 \end{cases} \qquad (7)$$

Него ќе го решиме на малку поинаков начин, одошто во сите други случаи.

Ги собираме сите три равенки од системот и ја добиваме равенката:

$$2x + 2y + 2z = 28 \quad \text{или} \quad x + y + z = 14 \qquad (8)$$

Ако во така добиената равенка збирот од непознатите x и y го замениме со 8 (бидејќи од првата равенка на системот гледаме дека е $x + y = 8$), добиваме: $8 + z = 14$ од каде наоѓаме дека е $z = 6$.

Потоа, во равенката (8) ставаме $y + z = 9$ и добиваме:

$$x + 9 = 14, \text{ од каде е } x = 5$$

На сличен начин, откога во равенката (8) ставиме $x + z = 11$, наоѓаме дека е $y = 3$.

Значи, решение на системот (7) е ($x = 5$, $y = 3$, $z = 6$).

Оттука следува дека страните на триаголникот се: 5 cm, 3 cm, и 6 cm.

ЗАДАЧИ

1. Збирот на два броја е 12, а разликата 2. Кои се тие броеви?
2. Збирот на два броја е s, а количникот q. Кои се тие броеви?
3. Најди такви два броја кои да ги исполнуваат условите: ако кон првиот број додадеме 3, тој ќе стане 3-пати поголем од вториот, а ако кон вториот додадеме 2, тој ќе стане 2-пати помал од првиот!
4. Разликата, збирот и производот на два броја се однесуваат помеѓу себе како $1 : 3 : 10$. Кои се тие броеви?
5. Бројот 32 раздели го на такви два броја, така што ако првиот број го помножиш со 5, а вториот со 3, да добиеш еднакви производи!
6. Најди два броја чиј што производ да е 2-пати поголем од нивниот збир, а 6-пати помал од нивната разлика!
7. Цифрата на десетките кај еден двоцифрен број е 2-пати помала од цифрата на единиците. Ако бројот го поделиш со збирот на неговите цифри, ќе добиеш количник 4. Кој е тој број? Упатство: Ако цифрата на десетките ја означиме со x, а цифрата на единиците — со y, тогаш двоцифрениот број го запишуваме со изразот: $10x + y$.
8. Бројот a раздели го на три дела, така што првиот дел да е за m (единици) поголем од вториот, а n-пати помал од третиот дел.
9. Еден број е n-пати поголем од друг. Ако кон првиот број додадеме a (единици), а кон вториот b (единици), ќе добиеме два броја од кои првиот ќе биде m-пати поголем од вториот. Кои се тие броеви?
10. Количникот од збирот и производот на два броја е k, а количникот од разликата и производот на истите броеви е q. Кои се тие броеви?
11. Збирот од годините на таткото и синот е s. По a години таткото ќе биде n-пати постар од синот. Колку години има секој од нив сега?
12. Еден брод за 13 часа изминал 140 km по текот на една река и 24 km спроти нејзиниот тек. Другпат истиот брод за 11 часа изминал 120 km по текот и 20 km спроти текот. Одреди ја брзината на бродот во мирна вода и брзината на течењето на реката!
13. Моторен кајак се движи по текот на една река со брзина a km на час, а спроти текот со брзина b km на час. Најди ја брзината на кајакот во мирна вода и брзината на течењето на реката!
14. По една кружна патека долга 100 m се движат две тела. Ако се движат едно спроти друго, тие се среќаваат на секои 2 минути, а ако се движат едно по друго, тие ќе се стигнуваат на секои 10 минути. Определи ја брзината на телата!
15. Две лесни коли тргнуваат едновремено од два града A и B, кои се наоѓаат на растојание d km еден од друг. Ако колите се движат една спроти друга, ќе се сретнат по a часа; а ако се движат во една иста насока, тие ќе се стигнат по b часа. Определи ја брзината на колите!
16. Од два блока, кои имаат едниот 35 ha, а другиот 40 ha, добиено е вкупно 342 t пченица. Првиот блок е наводнуван, па затоа приносот по хектар кај него е за 12 kg поголем одошто кај вториот блок. Најди го приносот по хектар кај секој блок!
17. Една фабрика произведува дневно n чифта чевли повеќе одошто друга. По колку чифта чевли произведува дневно секоја од нив, ако првата фабрика за a дена произведува толку чифта чевли колку што чифта произведува другата фабрика за b дена?
18. Периметарот на еден равнокрак триаголник е s cm, а основата му е m cm поголема од кракот. Најди ги страните на тој триаголник! Испитај дали секогаш задачата е можна!
19. Периметарот на еден правоаголник е $2s$ cm. Ако основата му се намали за a cm, а висината му се зголеми за b cm, ќе се добие квадрат. Најди ги страните на правоаголникот!
20. Едно парче месинг (легура од бакар и цинк) тежи 124 g. Ако се потопи во вода, тоа „губи" од својата тежина 15 g. Одреди го количеството на бакарот и цинкот во него, ако се знае дека бакарот има специфична тежина 8,9, а цинкот 7.
21. Ако се смешаат 9 l шпиритус од еден вид со 6 l шпиритус од друг вид, ќе се добие 80% шпиритус. Ако, пак, се смешаат 6 l шпиритус од првиот вид со 9 l од вториот вид, ќе се добие 85%-ов шпиритус. Одреди ја јачината на секој вид шпиритус.

22. Двајца работници заедно можат да свршат една работа за 12 дена. Ако првиот работник работи 4 дена, а вториот 6 дена, ќе свршат $\frac{2}{5}$ од работата. За колку дена може да ја заврши работата секој работник сам?

23. Планирано е група работници да свршат некоја работа за определено време. Ако групата биде намалена за 3 работника работата ќе биде свршена за 2 дена подоцна; а ако групата биде зголемена со уште 4 работника, работата ќе биде свршена 2 дена порано. Одреди го бројот на работниците во групата и времето планирано за завршување на работата!

24. Две цевки полнат еден базен за 12 часа. Ако двете цевки се отворени 3 часа, а потоа се затвори едната, другата цевка ќе го дополни базенот за 27 часа. За колку часа може да го наполни базенот секоја цевка сама?

25. Бројот 55 да се раздели на такви три дела, така што вториот дел да е 5 пати поголем од првиот, а за 22 (единици) поголем од третиот дел!

26. Збирот на цифрите на еден трocифрен број е 17. Цифрата на стотките е 2-пати поголема од цифрата на десетките. Ако од него извадиме 297, ќе добиеме број напишан со истите цифри но во обратен ред. Кој е тој број?

27. Три сандака заедно тежат 200 kg. Првиот и вториот заедно за 40 kg. се полесни од третиот, а вториот и третиот заедно 3-пати се потешки од првиот. Колку тежи секој сандак одделно?

28. Во триаголникот ABC аглите α и β се однесуваат како $3:4$, а аголот γ е за 30° поголем од α. Најди ги аглите на триаголникот!

29. Три кружни линии заемно се допираат две по две однадвор. Одреди ги нивните радиуси; ако страните на триаголникот, чии темиња се во центрите на тие кружни линии, имаат должина a cm, b cm и c cm.

30. Во три сада има вода. Ако од првиот прелееме 4 l вода во вториот сад, тогаш овој ќе има 2-пати повеќе вода одошто првиот сад; ако, пак, од првиот во третиот сад прелееме $2l$, тогаш во трите сада ќе има по исто количество вода. По колку литри вода имало во секој сад?

Глава XI

ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ

§ 87. ПОИМ ЗА НЕРАВЕНКИ

Покрај бројните неравенства, постојат и неравенства чии страни се две фукции на еден или повеќе аргументи. Такви се неравенствата:

$$x^2 + 1 > x^2 \qquad (1')$$

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy \qquad (1')$$

$$\frac{x^2 + 1}{(x-3)^2} > 0 \qquad (1'')$$

$$4x - 5 < 3x + 1 \qquad (2)$$

$$x^2 - 9 < 0 \qquad (2')$$

Аргументите се викаат уште и *непознати*. Тие можат да бидат означени со кои и да било букви, но заради еднообразност на запишувањето, обично ги ползуваме буквите $x, y, z, \ldots$.

Ако за некои фиксирани допуштени бројни вредности на аргументите: $x = x_0, y = y_0, \ldots t = t_0$ дадено неравенство премине во точно бројно неравенство, велиме дека тој систем од фиксирани допуштени бројни вредности на аргументите $(x_0, y_0, \ldots t_0)$ *го задоволува тоа неравенство*.

Неравенствата што содржат непознати можат да бидат од два вида: според тоа дали тие се задоволени за секој произволен систем на допуштени бројни вредности на непознатите, или пак тоа станува не за секој произволен систем на допуштени бројни вредности на непознатите.

Пример: Неравенството (1) е задоволено за кои и да било вредности на x. Тоа е јасно бидејќи за секоја вредност на x, левата страна на неравенството (1) е за 1 поголема од десната страна. Ист е случајот и со неравенствата (1′) и (1″). Неравенството (1′) е задоволено за секоја двојка произволни вредности на x и y. За $x = y$ неравенството преминува во равенство. Неравенството (1″) е задоволено за сите допуштени вредности на x, освен за $x = 3$, вредност за која функцијата на левата страна не е дефинирана.

Дефиниција 1. *Неравенство, што е задоволено за секој произволен систем на фиксирани допуштени бројни вредности на непознатите, се вика идентично неравенство.* Усвоено е и секое точно бројно неравенство да се вика идентично неравенство.

Да ги разгледаме сега неравенствата (2) и (2′), Неравенството (2) е задоволено само за вредностите на x што се помали од бројот 6, т.е. само за $x < 6$. А неравенството (2') е задоволено само за вредностите на x што се поголеми од -3, но помали од 3, т.е. само за вредностите на x во интервалот $-3 < x < 3$.

Таквите неравенства се викаат *неравенки*.

Дефиниција 2. *Неравенство, што не е задоволено макар и само за еден фиксиран систем на допуштени бројни вредности на непознатите, се вика неравенка.*

Дефиниција 3. *Секој систем од фиксирани допуштени бројни вредности на непознатите* $(x_0, y_0, \ldots t_0)$, *за кој е задоволена дадена неравенка, се вика решение на таа неравенка.*

Пример: Решение на неравенката (2) е секој реален број што е помал од 6; а решение на неравенката (2') е секој реален број што е поголем од -3, но помал од 3.

Дефиниција 4. *Да се реши една неравенка во дадена област на броеви, значи да се одреди множеството од сите нејзини решенија во таа област на броеви, или ако тоа множество е празно, да се утврди тоа.*

Според бројот на непознатите, неравенките можат да бидат: *со една непозната, со две, со три или повеќе непознати.*

Неравенките со една непозната имаат вид:

$$f(x) > \varphi(x) \quad \text{или} \quad f(x) < \varphi(x), \tag{3}$$

каде што $f(x)$ и $\varphi(x)$ се цели или дробни рационални финкци на x.

Општиот вид на неравенките со две непознати е

$$f(x, y) > \varphi(x, y) \quad \text{или} \quad f(x, y) < \varphi(x, y), \tag{4}$$

Ако во неравенките (3) и (4) $f(x)$ и $\varphi(x)$, односно $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, се цели рационални функции (полиноми) во однос на непознатите, тогаш во зависност од степенот на тие полиноми, неравенките (3) и (4) можат да бидат: *од прв степен* или *линеарни неравенки*; *од втор степен* или *квадратни неравенки*; *од трет степен* итн.

Во неравенките, со букви можат да бидат означени не само непознатите величини, но и некои познати величини што не зависат од непознатите. Во зависност од тоа неравенките биваат: *неравенки со нумерички коефициенти* и *неравенки со општи коефициенти* или *неравенки со параметри*.

Оваа учебна година ќе ги разгледуваме само неравенките од прв степен со една и две непознати.

§ 88. ЕКВИВАЛЕНТНИ НЕРАВЕНКИ

Дефиниција: *Две неравенки се еквивалентни во дадена бројна област ако множеството решенија на првата неравенка се совпаѓа со множеството решенија на втората неравенка во истата бројна област*, или со други зборови:

Две неравенки се еквивалентни ако секое решение на првата неравенка е решение и на втората, и обратно: ако секое решение на втората неравенка е решение на првата.

Пример: Неравенките $x - 3 > 5$ и $x > 5 + 3$ се еквивалентни, бидејќи и обете се задоволени само за множеството бројни вредности на x што се поголе ми од 8.

Согласно дефиницијата, две неравенки можат да бидат еквивалентни во една бројна област, а да не се еквивалентни во друга бројна област.

Пример: Неравенките $x > 2$ и $x^2 > 4$ се еквивалентни во областа на позитив-ните реални броеви. Во таа област обете неравенки се задоволени само за множеството бројни вредности на x што се поголеми од 2. Но во областа на сите реални бросви тие не се еквивалентни, бидејќи во таа област втората неравенка е задоволена, освен за $x > 2$, уште и за множеството бројни вредности на x што се помали од (-2), а за кои што вредности на x првата неравенка не е задоволена.

Две неравенки се еквивалентни во дадена бројна област уште и кога обете немаат решенија во таа област.

Решавањето на дадена неравенка го вршиме така што ја трансформираме во други попрости, но еквивалентни на неа неравенки, додека не дојдеме до најпростата неравенка, чие множество решенија е очевидно.

Трансформацијата на неравенките во попрости еквивалентни неравенки ја вршиме врз основа на следниве теореми и нивните последици.

Заради упростување на изложувањето и докажувањето на теоремите ќе се ограничиме само на неравенките со една непозната и тоа од видот

$$f(x) > g(x).$$

А неравенките од $f(x) < g(x)$, врз основа на теоремата 1 (§ 42). лесно можат да се сведат на првиот вид.

Теорема 1. *Ако кон двете страни на дадена неравенка додадеме еден ист број или една иста функција, која е дефинирана за сите допуштени вредности на аргументот, ќе добиеме нова неравенка еквивалентна на дадената.*

Нека е дадена на пример неравенката $f(x) > g(x)$ (1)
и функцијата $\varphi(x)$, која е дефинирана за сите допуштени вредности на x.
Ќе докажеме дека неравенката $f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$ (2)
е еквивалентна на дадената неравенка.

Доказ: а) Нека е $x = x_0$ едно од решенијата на неравенката (1), т.е. за $x = x_0$ да е:

$$f(x_0) > g(x_0).$$

Ако сега кон двете страни на тоа точно бројно неравенство го додадеме бројот $\varphi(x_0)$ — бројна вредност на функцијата $\varphi(x)$ за $x = x_0$, согласно својството на бројните неравенства, ќе го добиеме неравенството

$$f(x_0) + \varphi(x_0) > g(x_1) + \varphi(x_0)$$

Според тоа, решението на неравенката (1) $x = x_0$ е решение и на неравенката
б) Нека е сега $x = x_1$ едно од решенијата на неравенката (2), т.е. за $x = x_1$ да е

$$f(x_1) + \varphi(x_1) > g(x_1) + \varphi(x_1).$$

Ако од обете страни на тоа неравенство го извадиме бројот $\varphi(x_1)$ — бројна вредност на функцијата $\varphi(x)$ за $x = x_1$ ќе го добиеме неравенството:

$$f(x_1) > g(x_1).$$

Значи: $x = x_1$ — кое и да било решение на неравенката (2) е решение и на неравенката (1).

Со тоа теоремата е докажана при услов функцијата $\varphi(x)$ да е дефинирана за сите допуштени вредности на непознатата x. Меѓутоа, ако овој услов не е исполнет, може да се случи неравенката (2) да не биде еквивалентна на дадената.

Пример: Неравенките $2x + 2 > x - 2$ и $2x + 1 + \frac{5}{x-1} > x - 2 + \frac{5}{x-1}$ не се еквивалентни, бидејќи $x = 1$ е решение на првата неравенка, но тоа не е решение и на втората неравенка. Тоа е така, бидејќи функцијата $\varphi(x) = \frac{5}{x-1}$ за $x = 1$ не е дефинирана.

Последица 1. *Ако во двете страни на неравенката има еднакви членови со исти знаци, тие можат да се отфрлат.*

Пример: Во неравенката $5x - 2x + 3 > 8 - 2x$ гледаме дека во двете страни се среќава еден и ист член $(-2x)$. Ако кон двете нејзини страни додадеме по $2x$, ќе ја добиеме неравенката

$$5x - 2x + 2x + 3 > 8 - 2x + 2x, \text{ односно } 5x + 3 > 8$$

која е еквивалентна на дадената.

Последица 2. *Секој член на неравенката може да се пренесе од едната страна на другата, ако притоа се промени неговиот знак во спротивен.*

Пример: Нека е дадена неравенката $4x - 5 > 3x - 2$!

По пренесувањето на членот -5 со спротивен знак од левата на десната страна, а членот $3x$ од десната на левата страна добиваме нова еквивалентна неравенка:

$$4x - 3x > 5 - 2, \text{ односно } x > 3.$$

Врз основа на оваа последица доаѓаме до следниов заклучок:

Секоја неравенка може да се доведе во видот $R(x) > 0$ или $R(x) < 0$, каде што $R(x)$ е некоја функција на x.

Теорема 2. *Ако двете страни на дадена неравенка се помножат (или поделат) со еден ист позитивен број k или со една иста рационална функција $\varphi(x)$, која за сите допуштени вредности на x е дефинирана и добива само позитивни вредности, ќе се добие неравенка еквивалентна на дадената.*

Нека е дадена неравенката $$f(x) > g(x) \tag{1}$$
и еден кој и да било позитивен број k, а исто и една функција $\varphi(x)$, која за сите допуштени вредности на x е дефинирана и позитивна.

Ќе докажеме дека неравенките $$f(x) \cdot k > g(x) \cdot k \tag{3}$$

$$\text{и} \quad f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x) \tag{4}$$

се еквивалентни на дадената неравенка.

Доказ: а) Нека е $x = x_0$ едно од решенијата на неравенката (1), т.е. за $x = x_0$ да важи неравенството: $f(x_0) > g(x_0)$.

Ако сега двете страни на тоа бројно неравенство ги помножиме со позитивниот број $k > 0$ или со $\varphi(x_0) > 0$, согласно својствата на бројните неравенства, ќе ги добиеме неравенствата:

$$f(x_0) \cdot k > g(x_0) \cdot k \quad \text{и} \quad f(x_0) \cdot \varphi(x_0) > g(x_0) \cdot \varphi(x_0).$$

Овие две неравенства покажуваат дека $x = x_0$ е решение и на неравенките (3) и (4). Според тоа секое решение на неравенката (1) е решение и на неравенките (3) и (4).

б) Потоа земаме да е $x = x_1$ едно од решенијата на неравенката (3), односно неравенката (4), т. е. за $x = x_1$ да важат неравенствата:

$$f(x_1)\, k > g(x_1)\, k \quad \text{и} \quad f(x_1) \cdot \varphi(x_1) > g(x_1) \cdot \varphi(x_1).$$

Ако двете страни на првото неравенство ги поделиме со позитивниот број k, а второто неравенство со позитивниот број $\varphi(x_1)$ — бројна вредност на функцијата $\varphi(x)$ за $x = x_1$, ќе го добиеме неравенството

$$f(x_1) > g(x_1).$$

Според тоа, секое решение на неравенката (3), односно неравенката (4) е решение и на неравенката (1).

Доказот за еквивалентност на неравенките

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad f(x) : k > g(x) : k; \quad k > 0,$$

односно

$$f(x) > g(x) \quad \text{и} \quad f(x) : \varphi(x) > g(x) : \varphi(x),$$

при услов функцијата $\varphi(x)$ за сите допуштени вредности на x да е дефинирана и позитивна, се сведува на претходниот доказ, бидејќи делењето со бројот k, односно со функцијата $\varphi(x)$ може да се замени со множење со нивната реципрочна вредност, т.е.

$$f(x) \cdot \frac{1}{k} > g(x) \cdot \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} > g(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Со тоа теоремата е докажана.

Последица 1. *Ако двете страни на неравенката имаат заеднички позитивен множител, со него можат да се поделат двете страни на неравенката, при што ќе се добие нова неравенка еквивалентна на дадената.*

Во таков случај велиме дека дадената неравенка *ја скратуваме.*

Пример: Ако двете страни на неравенката $3(x-2) < 15$ ги поделиме со 3 $\left(\text{или помножиме со } \frac{1}{3}\right)$, се добива еквивалентната неравенка: $x - 2 < 5$.

Друг пример: Ако левата и десната страна на неравенката $x^4 - 1 > 3x^2 + 3$ се разложат на множители, таа го добива видот

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) > 3(x^2 + 1).$$

Забележуваме дека двете страни на неравенката имаат заеднички множител $x^2 + 1$, кој за секоја бројна вредност на x е позитивен. Ако со него ја скратиме неравенката ќе добиеме нова неравенка $x^2 - 1 > 3$, еквивалентна на дадената.

Последица 2. *Неравенката со дробни нумерички коефициенти, може да се трансформира во неравенка со цели нумерички коефициенти, ако двете страни на неравенката се помножат со позитивниот најмал заеднички содржател на именителите.*

Таквата трансформација се вика *ослободување на неравенкаша од именишелише.*

Пример: Дадена е неравенката $\frac{2x-7}{3} < \frac{x+1}{2} - 5.$

Ако двете нејзини страни ги помножиме со нзс на именителите, т. е. со бројот 6 ќе добиеме нова неравенка

$4x - 14 < 3x + 3 - 30$, која е еквивалентна на дадената.

Теорема 3. *Ако двеше сшрани на дадена неравенка ги йомножиме (или йоделиме) со еден исш негашивен број k или со една исша рационална функција $\varphi(x)$, која за сише дойушшени вредносши на x е дефинирана и добива само негашивни вредносши и ако ја йромениме насокаша на неравенкаша во сйрошивна, ќе добиеме неравенка еквиваленшна на дадената,* т. е.

Ако е дадена неравенката $f(x) > g(x)$

и кој и да било негативен број $k < 0$, или една рационална функција $\varphi(x)$, која за сите допуштени вредности на x е дефинирана и негативна, тогаш лесно може да се докаже дека неравенките

$$f(x)\,k < g(x)\,k \quad \text{и} \quad f(x)\cdot\varphi(x) < g(x)\cdot\varphi(x)$$

се еквивалентни на дадената неравенка.

Доказот на оваа теорема е сличен како и на претходната.

Последица: *Ако двеше сшрани на дадена неравенка ги йомножиме со* -1, *насокаша на неравенкаша шреба да ја йромениме во сйрошивна.*

Пример: Ако двете страни на неравенката $-x > 7$ ги помножиме со -1, таа го добива видот $x < -7$.

Од втората и третата теорема неминовно следува заклучокот. При множењето на двете страни на дадена неравенка со општ број или рационален израз, треба претходно да се разгледаат случаите: кога тој израз е позитивен, кога негативен, а кога еднаков на нула.

Горните три теореми на еквивалентност на неравенките, како и сите нивни последици, важат и за неравенките со две и повеќе непознати.

§ 89. ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Дефиниција: *Линеарна неравенка со една нейознаша е секоја неравенка од видош*

$$ax + b > 0 \quad \text{или} \quad ax + b < 0,$$

каде шшо a и b се кои и да било дадени реални броеви или изрази шшо не зависаш од нейознашаша x.

Ако двете страни на неравенката $a_1x + b_1 < 0$ ги помножиме со -1, таа ќе премине во видот $ax + b > 0$. Затоа доволно е да ја проучиме само неравенката.

$$ax + b > 0. \tag{1}$$

При испитувањето на решенијата на оваа неравенка во зависност од вредностите на a и b, ќе разликуваме три случаја.

1°. $a > 0$. Ако b го префрлиме на десната страна, а потоа двете страни на неравенката ги поделиме со a, ќе ја добиеме неравенката $x > -\frac{b}{a}$, а со неа и бараното множество решенија на неравенката (1). Според тоа:

При $a>0$, множеството решенија на неравенката (1) *се сите реални броеви поголеми од* $-\frac{b}{a}$.

2°. $a<0$. Со пренесување на b на другата страна, а потоа со делење на двете страни на неравенката со a, се добива неравенката $x<-\frac{b}{a}$.

Според тоа: *При $a<0$ множеството решенија на неравенката* (1) *се сите реални броеви помали од* $-\frac{b}{a}$.

3°. $a=0$. Во тој случај неравенката (1) го добива видот

$$0\cdot x+b>0 \quad \text{или} \quad b>0.$$

Ако b е позитивен број, неравенката (1) е задоволена за секоја вредност на x, а ако b е непозитивен број, тогаш неравенката (1) нема решение.

Задача 1. Да се реши неравенката $\frac{x-3}{3}-1>\frac{x-1}{2}-2$!

Прво ќе се ослободиме од именителите во неа, така што двете нејзини страни ги множиме со бројот 6 (нзс за именителите):

$$2(x-3)-6>3(x-1)-12$$

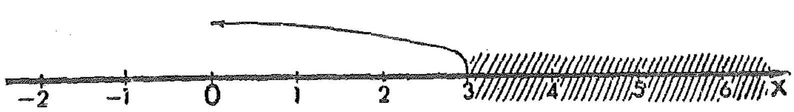
Потоа се ослободуваме од заградите и ги групираме сите членови што ја содржат непознатата на левата страна, а слободните членови на десната страна, и ја добиваме еквивалентната неравенка

$$2x-3x>-3-12+6+6, \text{ односно } -x>-3.$$

Со множење на двете нејзини страни со -1, добиваме $x<3$.

Последната неравенка е задоволена за секој реален број помал од 3. Значи, множеството решенија на дадената неравенка го сочинуваат сите реални броеви од интервалот $(-\infty; 3)$.

Множеството решенија на неравенката можеме графички да го претставиме на бројната оска со точките, што лежат лево од точката 3, како што е покажано на сликата 74. Притоа делот од бројната оска на кој лежат точките (броевите) за кои не е задоволена неравенката обично го прецртуваме.



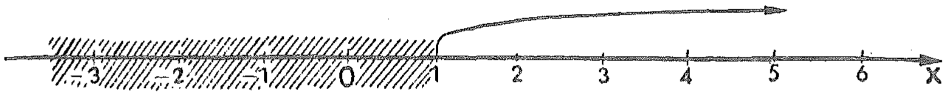
Сл. 74

Задача 2. Да се реши неравенката $(x-2)^2-3x<x(x-3)$!

Решение: $x^2-4x+4-3x<x^2-3x$; $-4x<-4$.

Ги делиме двете страни со -4 и добиваме $x>1$, т. е. множеството решенија на неравенката го сочинуваат сите реални броеви поголеми од 1; тоа графички е претставено на сл. 75.

Задача 3. Да се реши неравенката $mx - 5 > 3x - m$, каде што x е непозната, а m параметар.



Сл. 75

Ги пренесуваме членовите што ја содржат непознатата x на десната страна, а другите членови на левата страна, па ја добиваме еквивалентната неравенка $mx - 3x > 5 - m$, односно.

$$(m - 3)\,x > 5 - m.$$

Бидејќи коефициентот $(m - 3)$, во зависност од параметарот m, може да биде позитивен број, нула или негативен број, тоа разликуваме три случаја.

1°. Ако е $m - 3 > 0$, т. е. $m > 3$, дадената неравенка ќе има множество решенија: $x > \dfrac{5-m}{m-3}$;

2°. Ако е $m - 3 < 0$, т. е. $m < 3$, тогаш дадената неравенка ќе има множество решенија: $x < \dfrac{5-m}{m-3}$;

3°. Ако е $m - 3 = 0$, т. е. $m = 3$, тогаш последната неравенка го добива видот $0 \cdot x > 2$. Во таков случај таа не е задоволена ни за една вредност на x, т. е. нејзиното множество решенија е празно множество.

ЗАДАЧИ

Реши ги следниве неравенки:

1. а) $3x - 4 > 2 - x$; б) $5 - 2y < y + 8$!

2. а) $x - (2 - x) < 3x + 7$; б) $(x - 3)^2 < x\,(x + 1)$!

3. а) $\dfrac{x-5}{2} - 3 > \dfrac{3x-2}{6}$; б) $\dfrac{y}{2} - \dfrac{1-y}{4} > 5 - \dfrac{2+y}{3}$!

4. За кои вредности на параметарот a решението на равенката $2(3 - x) = 3(a - 2x)$ е:

а) позитивен број, б) нула, в) негативен број?

5. За кои вредности на параметарот m решението на равенката:

а) $2x - m = m - 2$; б) $5m = 2x - m$; в) $x + 3m = 9$ е поголемо од -3?

6. За кои вредности на аргументот x, функцијата:

а) $y = 4x - 2$; б) $y = 2\,(x - 3)$; в) $y = -\dfrac{x}{3} + 1$ е позитивна?

7. Реши ги следниве неравенки со параметри:

а) $2\,(m - x) < mx + 5$; б) $\dfrac{a}{2} - \dfrac{2-x}{3} < a - 1$;

в) $1 + kx < 2k - 3x$; г) $cx + c^2 < 2x - 6$!

§ 90. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Дефиниција: *Множеството од две или неколку линеарни неравенки со една иста непозната, за кои се бараат заедничките решенија, се вика систем линеарни неравенки со една непозната.*

Пример: Ако величината x треба истовремено да ги задоволува условите: $x > -3$, $x > 1$ и $x > 5$, тогаш овие три неравенки образуваат систем линеарни неравенки со една непозната.

Решение на овој систем линеарни неравенки е секоја вредност на x, за која и трите неравенки од системот се задоволени. Не е тешко да заклучиме дека решение на горниот систем ќе биде секој реален број поголем од 5, бидејќи тој наедно е поголем и од -3 и од 1.

За да се реши даден систем од две или неколку линеарни неравенки со една непозната, треба прво да се реши одделно секоја неравенка од системот, а потоа да се издвои заедничкиот дел (пресекот) од множествата на нивните решенија. Ако таков заеднички дел не постои, т. е. ако тој е празно множество, системот неравенки *нема решение*, или системот е *противречен*.

Задача 1. Да се реши системот неравенки

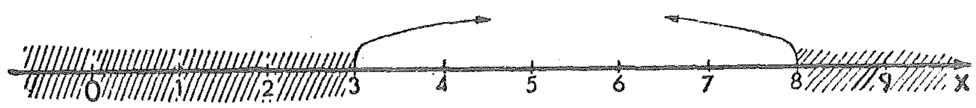
$$\begin{cases} 3x-5 > 7-x \\ -x+8 > 0 \end{cases}$$

Првата неравенка е задоволена за $x > 3$, а втората за $x < 8$.

Значи, решенија на системот се сите реални броеви помеѓу 3 и 8.

Одредувањето на множеството на решенијата на системот значително се олеснува, ако множествата на решенијата на секоја одделна неравенка од системот бидат графички претставени на иста бројна оска. Тоа го изведуваме така, што ги прецртуваме оние делови од бројната оска на кои лежат точките за кои секоја одделна неравенка од системот не е задоволена. Во таков случај непрецртаниот дел од бројната оска (ако има таков) ќе ни го даде множеството на решенијата на дадениот систем неравенки. Како што гледаме, нашиот систем неравенки има множество на решенија одредени со $3 < x < 8$ (сл. 76), или решенија на системот се сите реални броеви од интервалот (3; 8).

Понекогаш и решавањето на некои одделни неравенки со една непозната се сведува на решавање на систем линеарни неравенки со една непозната. Еве неколку такви примери:



Сл. 76

Задача 2. Да се реши неравенката $(x+5)(x-2) < 0$!

Левата страна на оваа неравенка претставува производ на два бинома. Тој производ ќе биде негативен (помал од нула), ако и само ако множителите $x+5$ и $x-2$ имаат различни знаци.

Според тоа, решавањето на дадената неравенка се сведува на решавање на системите неравенки:

$$\begin{cases} x+5>0 \\ x-2<0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+5<0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

Решенија на првиот систем $\begin{cases} x>-5 \\ x<2 \end{cases}$ се сите реални броеви од интервалот $-5<x<2$.

Вториот систем $\begin{cases} x<5 \\ x>2 \end{cases}$ нема решение, бидејќи нема такви броеви кои се истовремено помали од -5 и поголеми од 2.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка го сочинуваат сите вредности на x кои се наоѓаат меѓу броевите -5 и 2, т. е. кога е $-5<x<2$.

Задача 3. Да се реши дробната рационална неравенка $\dfrac{5x}{2x+1}>2$.

Ги пренесуваме прво сите членови на левата страна на неравенката

$$\frac{5x}{2x+1}-2>0,$$

потоа ги сведуваме на заеднички именител, така што ја добиваме еквивалентната неравенка

$$\frac{5x-2(2x+1)}{2x+1}>0, \quad \text{односно} \quad \frac{x-2}{2x+1}>0.$$

Левата нејзина страна е дропка, а десната — нула.

За да биде дропката позитивна, потребно е и доволно нејзиниот броител и именител да имаат исти знаци. Според тоа, непознатата x треба да ги исполнува условите:

$$\text{или} \quad \begin{cases} x-2>0 \\ 2x+1>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-2<0 \\ 2x+2<0 \end{cases}$$

Од првиот систем имаме: $\begin{cases} x>2 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$. Значи, негови решенија се сите вредности на x кои се поголеми од 2 (сл. 77), бидејќи вториот интервал $x>-\frac{1}{2}$ се содржи во првиот интервал $x>2$.

Сл. 77

Од вториот систем имаме: $\begin{cases} x < 2 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$. Значи, негови решенија се сите реални броеви од интервалот $x < -\frac{1}{2}$ (сл. 78).

Сл. 78

Ако ги земеме предвид множествата на решенијата на обата система, заклучуваме дека: дадената неравенка е задоволена и при $x > 2$ и при $x < -\frac{1}{2}$. Значи, нејзини решенија се сите реални броеви што се наоѓаат надвор од интервалот $\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$ (сл. 79).

Сл. 79

Задача 4. Да се реши неравенката $|x| + |x-2| < 6$!

Врз основа на дефиницијата за апсолутна вредност, имаме:

$$|x| = \begin{cases} -x; & \text{ако е } x < 0 \\ x; & \text{ако е } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$|x-2| = \begin{cases} -(x-2); & \text{ако е } x < 2 \\ x-2; & \text{ако е } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Како што гледаме, за ослободување на изразите во дадената неравенка од знакот на апсолутна вредност треба да водиме сметка во кои од трите интервали $(-\infty, 0)$; $[0; 2)$; $[2; \infty)$ непознатата x зема вредности. Затоа ќе разликуваме три случаја:

а) Ако $x \in [2; \infty)$ т.е. ако е $x \geqslant 2$, тогаш

$$|x| = x; \quad |x-2| = x-2,$$

така што дадената неравенка ќе го добие видот: $x + x - 2 < 6$.

Оттука добиваме: $x < 4$.

Значи, ако x зема вредности од интервалот $[2, \infty)$, решенија на дадената неравенка ќе бидат само оние вредности на x што се поголеми или еднакви на 2, но помали од 4, т. е. решенија на неравенката ќе бидат сите броеви од интервалот $[2; 4)$, односно $2 \leqslant x < 4$.

б) Ако $x \in [0; 2)$, т. е. ако е $0 \leqslant x < 2$, тогаш

$$|x| = x; \quad |x-2| = -(x-2),$$

така што дадената неравенка може да се напише вака; $x - (x-2) < 6$.

Во тој случај неравенката преминува во идентично неравенство $2 < 6$. Тоа значи дека дадената неравенка е задоволена за секоја вредност на x од интервалот $[0; 2)$.

в) Ако $x \in (-\infty; 0)$, т.е. ако е $-\infty < x < 0$, тогаш

$$|x| = -x; \quad |x-2| = -(x-2)$$

Сега дадената неравенка го добива видот:

$$-x-(x-2)<6 \text{ и е еквивалентна на } x>-2.$$

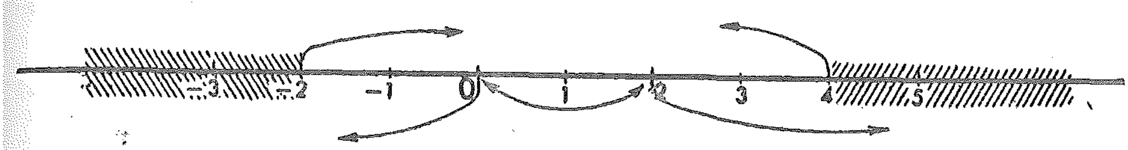
Значи, во интервалот $(-\infty, 0)$ решенија на дадената неравенка ќе бидат сите вредности на x поголеми од -2, но помали од нула, т.е. решенија на неравенката ќе бидат сите броеви од интервалот $(-2; 0)$.

На крајот заклучуваме дека: множеството на решенија на дадената неравенка го сочинуваат сите реални броеви од интервалите:

$$(-2; 0); \quad [0; 2) \quad \text{и} \quad [2; 4)$$

кои се слеваат во еден континуиран интервал $(-2; 4)$.

Множеството на решенијата на дадената неравенка графички е претставено на сл. 80.



Сл. 80

Задача 5. За кои вредности на m решението на равенката $3x-m=2-x$ ќе биде позитивно и помало од 5?

Откако ја решиме дадената равенка; добиваме: $x=\dfrac{m+2}{4}$.

Според условот на задачата, најденото решение треба да ја задоволува двојната неравенка $0<\dfrac{m+2}{4}<5$, која е еквивалентна на системот неравенки

$$\begin{cases} \dfrac{m+2}{4}>0 \\[2mm] \dfrac{m+2}{4}<5 \end{cases}$$

Првата неравенка во добиениот систем е задоволена за $m>-2$, а втората — за $m<18$. Значи, системот неравенки ќе има решенија одредени со интервалот $-2<m<18$.

Оттука заклучуваме: Решението на дадената равенка ќе биде позитивно и помало од 5, кога параметарот m зема вредности од интервалот $(-2; 18)$, т. е. кога е исполнет условот $-2<m<18$.

§ 91. ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

1. За да ја решиме графички линеарната неравенка

$$ax+b>0 \tag{1}$$

или

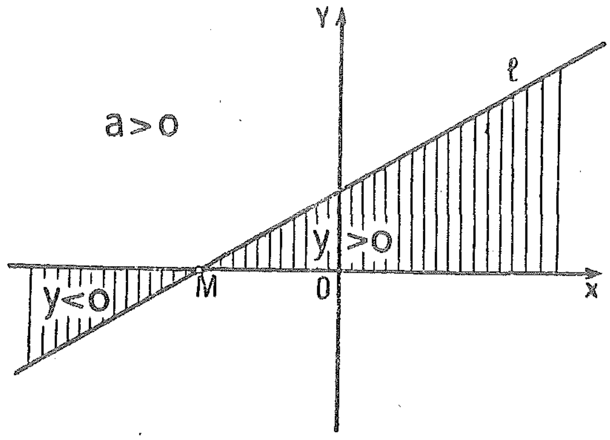
$$ax+b<0 \tag{2}$$

потребно е претходно да го нацртаме графикот на линеарната функција

$$y=ax+b \tag{3}$$

и да ја одредиме нејзината нула, т. е. апсцисата на пресечната точка на нејзиниот график со x-оската.

График на функцијата (3) нека е правата l, која ја сече x-оската во точката M (сл. 81).

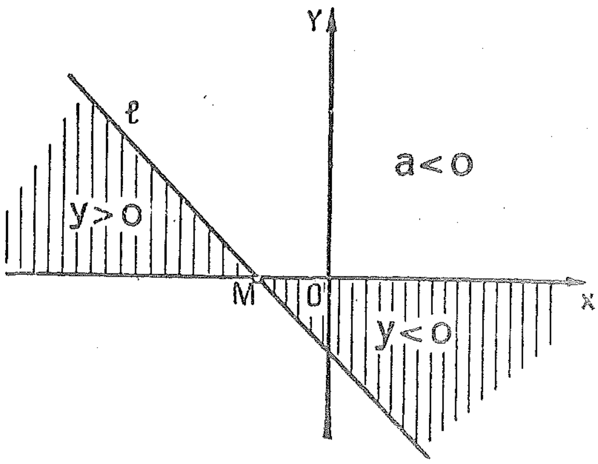


Сл. 81

Решенија на неравенката (1) се оние вредности на x за кои функцијата (3) е позитивна ($y>0$), односно нејзиниот график е расположен над x-оската. А решенија, пак, на неравенката (2) се сите оние вредности на x за кои графикот на функцијата (3) се наоѓа под x-оската односно за кои нејзината вредност е негативна ($y < 0$).

Тие вредности на x се наоѓаат едните лево, а другите десно од нулата на функцијата (3), односно од точката M; а кое зависи од знакот на коефициентот a, и тоа:

а) Ако е $a > 0$, решенија на неравенката (1) се апсцисите на сите точки на x-оската десно од точката M, а решенија на неравенката (2) се апсцисите на сите точки лево од точката M (сл. 81).



Сл. 82

б) Ако е $a < 0$, тогаш решенија на неравенката (1) се апсцисите на сите точки лево од M, а решенија на неравенката (2) се апсцисите на сите точки десно од M (сл. 82).

в) Ако е $a = 0$, тогаш функцијата (3) го добива видот $y = b$, чиј график е права паралелна со x-оската и е над или под неа во зависност од тоа дали е $b>0$ или $b<0$.

За $b > 0$ неравенката (1) е задоволена за секоја вредност на x, а неравенката (2) нема решение. Ако е $b < 0$, тогаш неравенката (1) нема решение, а неравенката (2) е задоволена за секоја вредност на x.

2. Систем од две или неколку линеарни неравенки со една непозната графички се решава, кога претходно графички се одредат решенијата одделно на секоја неравенка од системот, а потоа се одредува заедничкиот дел од x-оската, за чии апсциси е задоволена секоја неравенка во дадениот систем.

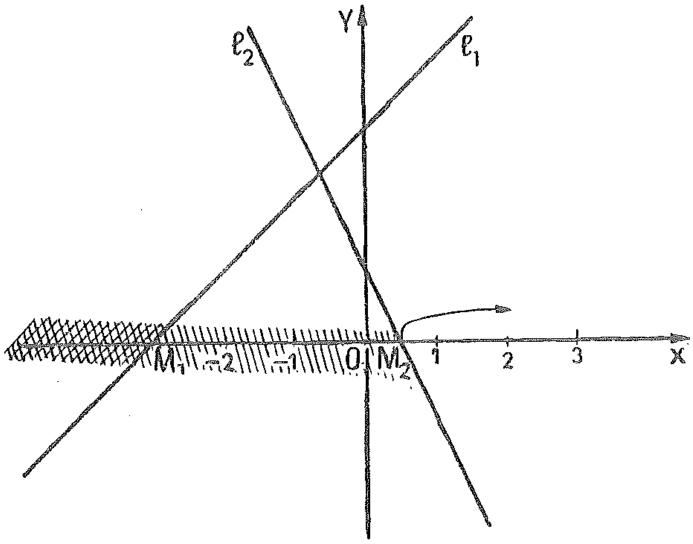
Апсцисите на точките на така определениот дел од x-оската ќе ни го даде множеството на решенијата на дадениот систем неравенки.

Задача. Да се реши графички системот неравенки

$$\begin{cases} x+3>0 \\ -2x+1<0 \end{cases}$$

Прво ги цртаме графиците на функциите $y = x + 3$ и $y = -2x + 1$, т. е. правите l_1 и l_2.

Првата права ја сече x-оската во точката M_1, чија апсциса е $x = -3$, а втората права — во точката M_2 со апсциса $x = \frac{1}{2}$.



Сл. 83

Решенија на првата неравенка ќе бидат апсцисите на сите точки од x-оската што лежат десно од точката M_1, бидејќи за тие точки правата l_1 е над x-оската (сл. 83). А решенија на втората неравенка од системот се апсцисите на сите точки на x-оската што лежат десно од точката M_2, бидејќи за тие точки правата l_2 е под x-оската (сл. 83).

Оттука заклучуваме дека решение на системот неравенки се апсцисите само на оние точки од x-оската за кои правата l_1 е над, а правата l_2 под x-оската. Од сликата забележуваме дека тоа се точките што се наоѓаат десно од точката M_2.

Според тоа, множеството решенија на системот неравенки го сочинуваат сите броеви $x > \frac{1}{2}$ (сл. 83).

ЗАДАЧИ

Да се решат системите неравенки:

1. а) $\begin{cases} 2x - 1 > x - 5 \\ x + 3 < 3x - 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8 - 2x < 3x - 5 \\ 1 - x > x + 2 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} < x + 1 \\ 2x < 2(x + 1) \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3(x - 2) - 5 > 3 + x \\ 2(x - 1) - 3 < 2 \\ 4x > 3(x - 1) \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ x < 2(x - 1) \\ \dfrac{x - 1}{2} < 3x - 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{x}{2} > \dfrac{3x}{2} - 4 \\ x - \dfrac{x - 2}{3} > 3 - \dfrac{x + 1}{2} \end{cases}$

Реши ги неравенките:

4. а) $(x - 5)(x + 1) > 0$ б) $(2x - 1)(x + 3) < 0$

5. а) $\frac{4-x}{2x+3}>0$ б) $\frac{x-3}{x+1}>2$

6. а) $\frac{2x}{x-1}>\frac{3}{4}$ б) $\frac{x^2+2x-5}{x-2}<x$

7. а) $x+|x-3|>5$ б) $|x+4|-3|x-1|<x+1$

8. Испитај за кои вредности на параметарот m равенката $mx-2=3(x-m)$ има: а) позитивно решение; б) негативно решение; в) нема решение!

9. Испитај за кои вредности на параметарот m функцијата $y=(2m-1)x-(m-3)$:
а) расте и ја сече y-оската под координатниот почеток;
б) опаѓа а y-оската ја сече над координатниот почеток!

10. За кои вредности на параметарот p изразите $a=2p+3$, $b=4p-5$ и $c=p+13$ ќе можат да бидат мерни броеви на страните на еден триаголник?

11. Да се решат графички следниве неравенки:

а) $3x>x-8$; б) $2x+1>0$; в) $-2x+5<x+3$; г) $\frac{x-3}{2}>x+1$.

Реши ги графички системите неравенки:

12. а) $\begin{cases} x-1>0 \\ -5x+2>0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4-x>0 \\ 2x+5>0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+4<0 \\ -2x+1>0. \end{cases}$

13. а) $\begin{cases} -x-5<0 \\ 3x-8>0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x-5<0 \\ -3x-6>0 \\ 2x+7>0 \end{cases}$ в) $-x+3<x+1<2x-5$.

§ 92 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Дефиниција: *Линеарна неравенка со две непознати е секоја неравенка од видот*

$$\boxed{Ax+By+C>0\,(A\neq 0;\; B\neq 0)} \tag{1}$$

каде што A, B и C се кои и да било дадени реални броеви или изрази, кои не зависат од непознатите x и y.

Ако неравенката (1) ја решиме по y, во зависност од знакот на B, ќе имаме:

$$y>ax+b \tag{2}$$

или

$$y<ax+b, \tag{3}$$

каде што $a=-\frac{A}{B}$ и $b=-\frac{C}{B}$.

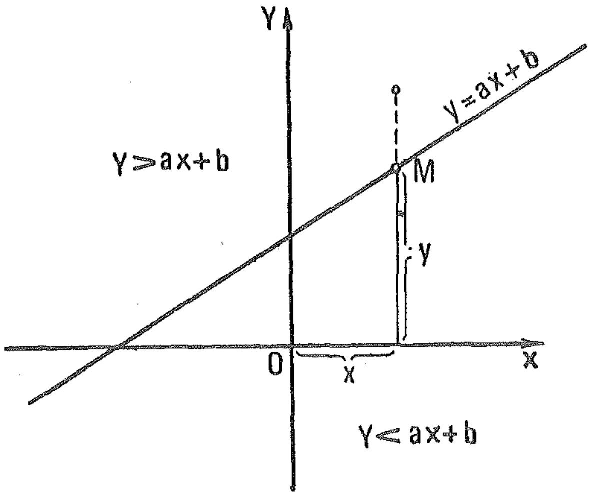
За неравенките (2) и (3) може да се даде следнава геометриска интерпретација (толкување):

При замена на знакот на неравенството во (2) и (3) со знак за равенство („="), ја добиваме линеарната функција

$$y=ax+b, \tag{4}$$

чиј график е некоја права l.

Ако ја нацртаме правата (4), гледаме дека неравенката (2) означува: за секоја вредност на x, непознатата y мора да биде поголема од ординатата на соодветната точка на правата (4) при иста апсциса x (сл. 84). Или со други зборови: секоја точка со координати (x, y) што ја задоволува неравенката (2) лежи над правата (4). Слично на тоа: секоја точка со координати (x, y), што ја задоволува неравенката (3) лежи под правата (4).



Сл. 84

Според тоа: *Решенија на неравенката* $y > ax + b$ *ќе бидат координатите на сите точки што се наоѓаат над правата* $y = ax + b$; *а решенија на неравенката* $y < ax + b$ *се координатите на сите точки што се наоѓаат под правата* $y = ax + b$.

Задача 1. Да се реши графички неравенката $2x - y + 5 < 0$!

Дадената неравенка прво ја трансформираме во видот $y > 2x + 5$, а потоа во координатната рамнина XOY ја цртаме правата $y = 2x + 5$.

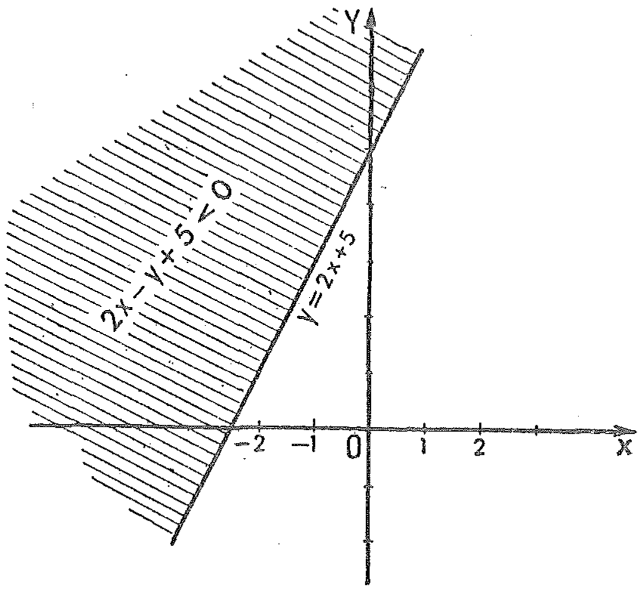
Гледаме дека таа ја дели координатната рамнина на две полурамнини (горна и долна). Областа на решенијата на дадената неравенка ја сочинуваат координатите на сите точки што лежат во горната полурамнина, односно над правата $y = 2x + 5$ (сл. 85).

Забелешка: За да утврдиме координатите на точките на која полурамнина се решенија на дадената неравенка $2x - y + 5 < 0$, постапуваме и вака: земаме една позната точка, најчесто координатниот почеток, и нејзините координати ги заменуваме во неравенката. Притоа ако таа премине во точно бројно неравенство, велиме дека решенијата на неравенката се координатите на сите точки од онаа полурамнина во која лежи избраната точка. На пример:

Ако координатите на почетокот $O(0; 0)$ ги внесеме во неравенката $2x - y + 5 < 0$, добиваме неточно неравенство $5 < 0$. Оттука заклучуваме дека решение на неравенката се координатите на точките од онаа полурамнина во која не се наоѓа координатниот почеток (сл. 85). Полурамнината координатите на чии точки се решенија на неравенката обично ја означуваме на сликите шрафирано.

2. Ако е даден систем од две или неколку линеарни неравенки со две непознати, областа M на решенијата на системот неравенки ја добиваме како заеднички дел (пресек) на сите области M_1, M_2, M_3, ... , кои претставуваат решенија на одделни неравенки во системот.

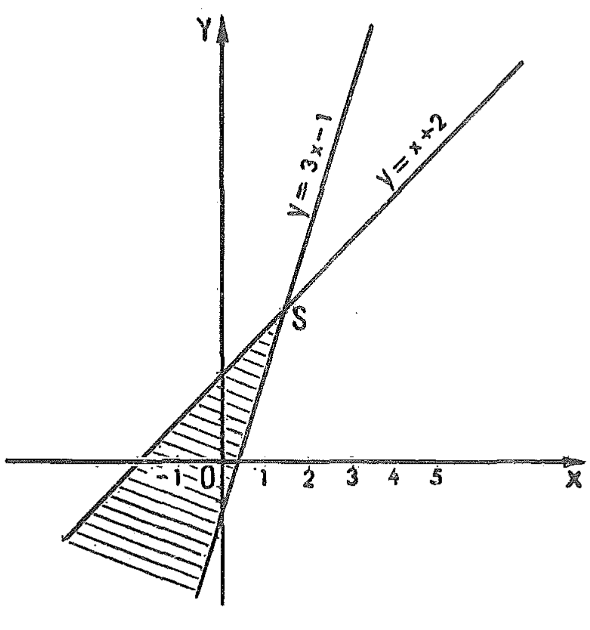
Областа на решенијата на даден систем линеарни неравенки со две непознати може да се состои од координатите на точките на дел од рамнината ограничен со искршена линија (отворен или затворен) или да е пуста, т. е. системот неравенки да нема решение.



Сл. 85

Задача 2. Да се реши графички системот неравенки

$$\begin{cases} y > 3x - 1 \\ y < x + 2 \end{cases}$$



Сл. 86

Прво ги цртаме графиците на функциите $y = 3x - 1$ и $y = x + 2$. Решенија на дадениот систем ќе бидат координатите на сите точки што лежат над правата $y = 3x - 1$, но истовремено да се и под правата $y = x + 2$ (сл. 86) Според тоа:

Областа на решенијата на дадениот систем неравенки ќе ја сочинуваат координатите на сите точки на шрафираната област на аголот на сликата 86.

Ако сакаме да ги одредиме координатите на темето на тој агол, го решаваме системот равенки:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x + 2, \end{cases}$$

од каде добиваме: $x = 1\frac{1}{2}$; $y = 3\frac{1}{2}$.

Задача 3. Да се решат графички системите неравенки:

а) $\begin{cases} y > 2x + 3 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$

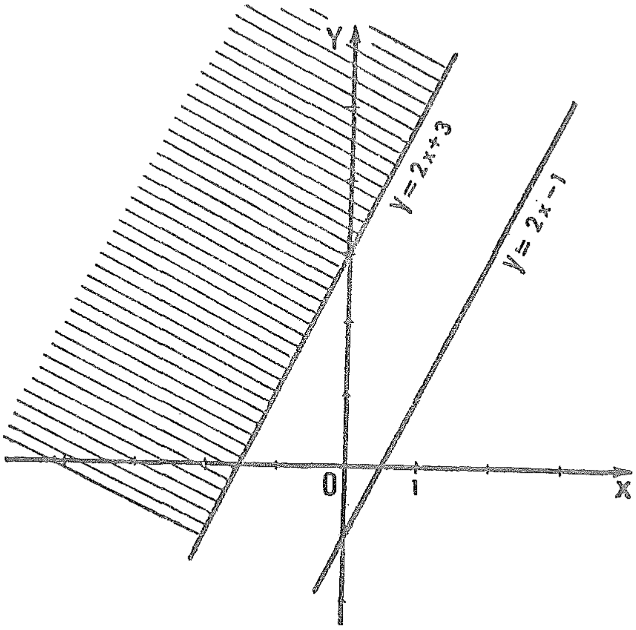
б) $\begin{cases} y > 2x + 3 \\ y < 2x - 1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} y < 2x + 3 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$

Прво ги цртаме правите $y = 2x + 3$ и $y = 2x - 1$. Гледаме дека тие се паралелни (сл. 87 и 88).

Областа на решенијата на првиот систем (а) ја сочинуваат координатите на точките што лежат над правата $y = 2x + 3$ (сл. 87). (Зошто?)

Областа на решенијата на вториот систем (б) ја сочинуваат координатите на точките од делот на рамнината зафатен со паралелните прави $y = 2x + 3$ и $y = 2x - 1$ (сл. 88).

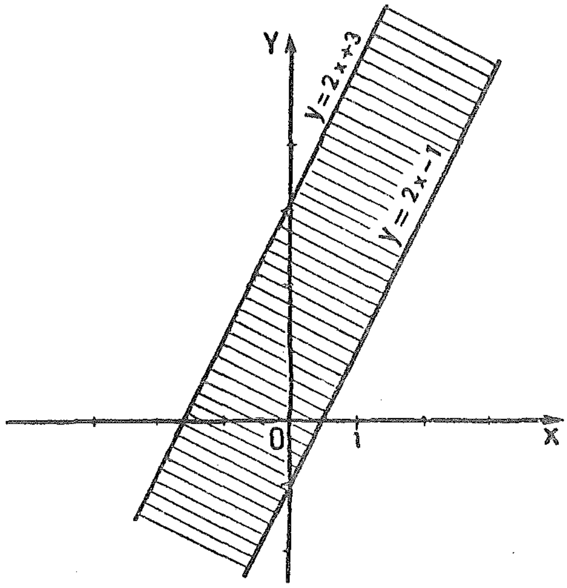
Третиот систем нема решение. (Зошто?).



Сл. 87

Пример 4. Да се реши графички системот неравенки

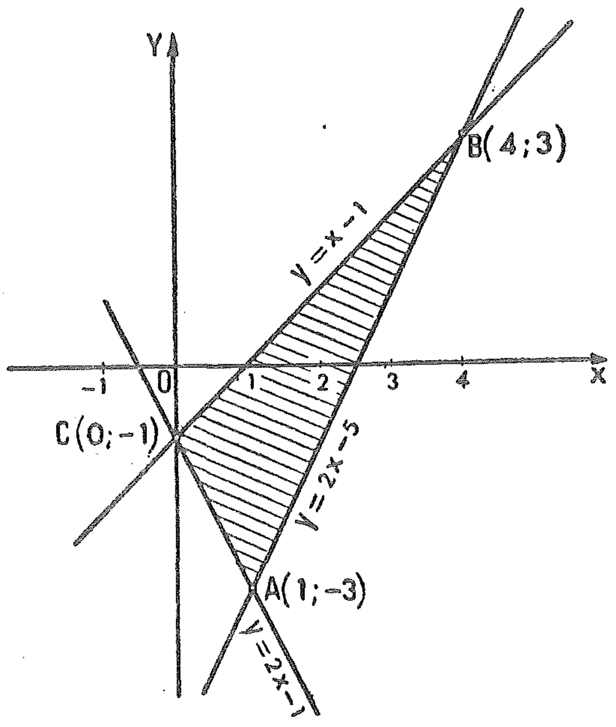
$$\begin{cases} y > 2x - 5 \\ y > -2x - 1 \\ y < x - 1 \end{cases}$$



Сл. 88

Решенија на овој систем ќе претставуваат координатите на сите точки што лежат над правите $y = 2x - 5$ и $y = -2x - 1$, но кои истовремено се и под правата $y = x - 1$.

Како што гледаме од сл. 89, областа на решенијата на дадениот систем ја сочинуваат координатите на сите внатрешни точки на триаголникот ABC.



Сл. 89

§ 93. ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕКОИ ИДЕНТИЧНИ НЕРАВЕНСТВА

Има многу задачи во кои се бара да се докаже точноста на некое дадено идентично неравенство. Таквите *задачи за докажување на неравенства* се многу разнообразни, па затоа и методите на нивното решавање се доста различни.

Ние тука ќе се задржиме само на неколку поважни методи, што се карактеристични за повеќе неравенства.

1. Метод на трансформација на неравенството во друго очевидно неравенство. Овој метод се заснова на тоа што основните својства на неравенствата (§ 42), а исто и теоремите за еквивалентност на неравенките (§ 88), можат да се применуваат и при докажување на неравенствата.

Задача 1. Да се докаже неравенството

$$a^2+b^2>2ab \text{ при } a\neq b! \qquad (1)$$

Доказ: Со пренесување на членот $2ab$ од десната на левата страна на неравенството (1) се добива еквивалентното неравенство

$$a^2-2ab+b^2>0, \text{ односно } (a-b)^2>0. \qquad (2)$$

При услов $a\neq b$ тоа е секогаш задоволено, бидејќи квадратот на кој и да било број што не е нула е секогаш позитивен број.

Бидејќи неравенствата (1) и (2) се еквивалентни, тоа, штом неравенството (2) при услов $a \neq b$ е точно, тогаш и даденото неравенство (1) при $a \neq b$ е, исто така, точно.

При докажувањето би можеле да појдеме и од очевидното неравенство (2), па со неколку трансформации да дојдеме до даденото неравенство (1).

2. Метод со допуштање на спротивното. Според овој метод, ако треба да се докаже неравенството (1), ние поаѓаме од претпоставката дека тоа нее точно, туку е точно спротивното на него неравенство

$$a^2 + b^2 \leqslant 2ab. \tag{3}$$

Ако успееме со една или неколку трансформации да дојдеме до некое апсурдно (противречно) неравенство, тогаш велиме дека нашата претпоставка (3) нее точна, туку точно е даденото неравенство (1).

Така, на пример, со трансформација на неравенството (3) лесно доаѓаме до апсурдното неравенство

$$(a-b)^2 \leqslant 0.$$

3. Метод на засилување на неравенството. Овој метод се состои во следново: Нека е дадено неравенството:

$$A > B \tag{4}$$

Ако поголемата страна на неравенството (4) ја намалиме, или помалата страна ја зголемиме за некоја позитивна величина n^2, а притоа насоката на неравенството да не се промени, ќе го добиеме неравенството:

$$A-n^2>B, \text{ односно } A>B+n^2. \tag{5}$$

За него велиме дека претставува *засилено неравенство* во однос на даденото неравенство (4).

Ако успееме да докажеме дека засиленото неравенство (5) е точно, тогаш до толку поскоро ќе биде точно и даденото неравенство (4), бидејќи $A>B+n^2>B$. Но, ако не е точно неравенството (5), не може да се тврди дека не е точно и даденото неравенство (4). (Зошто?)

Задача 2. Да се докаже неравенството

$$x^4 + y^4 > x^2y^2!$$

Д о к а з: Ако кон помалата негова страна го додадеме изразот x^2y^2 (кој добива само позитивни вредности), ќе го добиеме засиленото неравенство

$$x^4 + y^4 > 2x^2y^2.$$

Ова неравенство може да се напише и вака:

$$(x^2 - y^2)^2 > 0;$$

тоа е задоволено за кои и да било произволни вредности на x и y, освен за $x = y$.

Оттука следува: Штом е точно засиленото неравенство, тогаш до толку поскоро ќе биде точно и даденото неравенство.

Покажи дека даденото неравенство е точно и кога е $x = y$!

При докажувањето на некои неравенства често се повикуваме и на некои основни познати неравенства. На пример:

Задача 3. Да се докаже неравенството $a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc$, каде што a, b и c се три различни рационални броеви.

Доказ: Согласно неравенството (1), што го докажавме во почетокот, ќе важат неравенствата:

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

$$a^2 + c^2 > 2ac$$

$$b^2 + c^2 > 2bc,$$

кои, ако ги собереме, ќе го добиеме неравенството

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 > 2ab + 2ac + 2bc,$$

односно

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

Ќе докажеме уште неколку основни неравенства, кои наоѓаат поголема примена при докажувањето на други неравенства.

Задача 4. Да се докаже дека збирот од најголемиот и најмалиот член на која и да било пропорција со позитивни членови е поголем од збирот на другите два члена (Евклидово неравенство)!

Доказ: Нека е дадена пропорцијата $a : b = c : d$, каде што a, b, c и d се позитивни броеви, од кои a е најголем, а d најмал.

Најголемиот член a може секогаш да се доведе на прво место во пропорцијата. Тогаш најмалиот член d ќе биде на последно место, бидејќи е $d = b \cdot \frac{c}{a} = c \cdot \frac{b}{a}$, а дропките $\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a}$ се помали од 1.

Од основната пропорција лесно ја образуваме изведената пропорција

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c},$$

во која е

$$\frac{a}{c} > 1 \text{ и } c - d > 0.$$

Така доаѓаме до неравенството $\frac{a-b}{c-d} > 1.$

Ако ги помножиме двете негови страни со $c - d > 0$, ќе добиеме;

$$a - b > c - d, \text{ односно } a + d > b + c.$$

Задача 5. Да се докаже дека геометриската средина на два позитивна броја a и b не е помала од хармониската средина на тие броеви, а и не е поголема од аритметичката средина на тие броеви.

Геометриска средина на броевите a и b се вика квадратниот корен од производот на тие броеви, т. е. $\sqrt{ab}$; *аритметичка средина* — полузбирот од тие броеви, т. е. $\frac{a+b}{2}$; а *хармониска средина*—реципрочната вредност од аритметичката средина на реципрочните вредности на тие броеви т. е. $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ или $\frac{2ab}{a+b}$.

Според ова, горната задача се сведува на докажување на двојното неравенство

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \text{ при } a > 0 \text{ и } b > 0; \qquad (6)$$

односно на неравенствата

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab}, \qquad \text{при } a > 0 \text{ и } b > 0 \qquad (7)$$

и

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \text{ при } a > 0 \text{ и } b > 0. \qquad (8)$$

Доказ: Бидејќи е $a > 0$ и $b > 0$, тогаш е и $a + b > 0$ и $ab > 0$.

Според тоа, двете страни на неравенствата (7) и (8) се позитивни; затоа ако ги дигнеме на квадрат, ќе се добијат еквивалентни неравенства;

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leqslant ab. \qquad (7')$$

и

$$ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \qquad (8')$$

Од неравенството (7′) со неколку трансформации, добиваме:

$$\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leqslant ab; \qquad 4a^2b^2 \leqslant ab\ (a^2 + 2ab + b^2);$$

$$4ab \leqslant a^2 + 2ab + b^2; \qquad 0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2;$$

$$0 \leqslant (a-b)^2, \text{ односно } (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Исто и од неравенството (8′) добиваме:

$$ab \leqslant \frac{(a+b)^2}{4}; \quad 4ab \leqslant a^2 + 2ab + b^2;$$

$$0 \leqslant a^2 - 2ab + b^2; \quad 0 \leqslant (a-b)^2, \quad \text{односно } (a-b)^2 \geqslant 0.$$

Како што гледаме, двете неравенства (7) и (8) по неколку трансформации ги сведовме на очевидното неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$, кое е точно за сите вредности на a и b.

Со тоа се докажани неравенствата (7) и (8), односно двојното неравенство (6). Знакот за равенство има место само во случај кога е $a = b$.

ЗАДАЧИ

1. Реши ги графички неравенките:

а) $3x - y + 1 > 0$, б) $x + 4y - 3 < 0$, в) $\frac{x-y}{2} + 5 > x + 2y$;

г) $2x - \frac{y-1}{1} < x - 4$

Реши ги графички системите неравенки:

2. а) $\begin{cases} y > 3x - 2 \\ y > -x + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y < \frac{x}{2} + 1 \\ y > 2x - 1 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x + y + 1 > 0 \\ 2x - 3y + 4 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y + 3 < 0 \\ 4x - 2y + 1 > 0. \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} y > x - 1 \\ y < 2x + 1 \\ y > 2x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y > \dfrac{x}{3} + 2 \\ y < 2x - 1 \\ y > 2x - 3. \end{cases}$

5. Ако a, b и c се мерни броеви на страните на еден триаголник, докажи дека важи неравенството $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$.

6. Ако се a и b два позитивни броја, докажи дека важат неравенствата:

а) $(1 + a)(1 + b) > 1 + a + b$; б) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$; $\begin{matrix} a > 0 \\ b > 0. \end{matrix}$

Докажи ги неравенствата:

7. а) $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1 \geqslant 0$; б) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

8. а) $(c + 1)^3 > c(c + 1)(c+2)$, ако е $c > 1$; б) $\dfrac{2x}{x^2+1} < 1$.

9. а) $a^3 + b^3 \geqslant ab(a + b)$, ако е $a > 0$, и $b > 0$; б) $k + \dfrac{1}{k} \geqslant 2$, при $k > 0$.

10. а) $\left(a + b\right)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geqslant 4$, ако е $a > 0$ и $b > 0$;

б) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3$, ако е $a > 0$ и $b > 0$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

1. Провери ја точноста на равенствата:
   а) $A \cup B = B \cup A$; б) $A \cap B = B \cap A$
   Кои својства се искажани со нив?

2. Покажи дека важат равенствата:
   а) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   в) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   Кои својства се искажани со нив?

3. Образложи зошто е:
   а) $A \cup \varnothing = A$; б) $A \cap \varnothing = \varnothing$; в) $A \cup A = A$; г) $B \cap B = B$.

4. Докажи го равенството: а) $(A \cup B) \cap A = A$; б) $(A \cap B) \cup A = A$

5. Докажи дека важи: $(A \subseteq B,\ B \subseteq C$ и $C \subseteq A) \Rightarrow A = B = C$

6. Напиши ги броевите, што се: а) реципрочни, б) спротивни на броевите:
   -1; $0{,}7$; $x-y$; $\frac{x}{y}$.

7. Кој број треба да се извади од a, за да се добие неговиот спротивен број?

8. Познато ни е дека: $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Дали секогаш ќе биде:
   а) $a + b \neq 0$; б) $a^2 + b^2 \neq 0$?

9. Во кој случај ќе важат равенствата:
   а) $x+y=0$; б) $x \cdot y=0$; в) $\frac{x}{y}=0$; г) $\frac{x}{y} = -1$; д) $x \cdot y = 1$;
   ѓ) $x \cdot y = y$?

10. Може ли збирот $a + b$ да биде: а) помал од $a - b$; б) еднаков на $a - b$.

11. Најди ја разликата $a - b$, ако е $b - a = k$!

12. Која најголема вредност може да ја има изразот $\frac{1}{n^2 + 1}$ и кога?

13. Можат ли изразите: а) $\frac{1}{4 + a}$; б) $\frac{18}{6+|a|}$ да бидат поголеми од 3?

14. Докажи дека броевите k и $2k + 1$ се заемно прости, ако е $k \in N$!

15. Докажи дека:
    а) квадратот на секој непарен број намален за 1, е делив со 8
    б) збирот на кубовите на три сукцесивни природни броја е делив со 3!

16. Докажи дека производот на два сукцесивни парни броја е делив со бројот 8!

17. Дропката $\frac{m}{n}$ е редуцирана (нескратлива). Испитај дали ќе биде редуцирана и дропката:

а) $\frac{m}{m+n}$; б) $\frac{mn}{m+n}$!

18. Докажи дека збирот од кубовите на три сукцесивни цели броја е делив со 9!

19. Докажи дека: $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$!

20. Дадениве неравенства запиши ги во вид на двојни неравенства:

а) $|x| < 2$; б) $|x-1| < 3$; в) $|x+2| < 1$.

21. Упрости ги следниве изрази, ако е $x \geqslant 0$, а потоа ако е $x < 0$:

а) $x + |x|$ б) $x - |x|$; в) $\frac{|x|}{x}$; г) $|x| - 2x$!

22. Упрости ги изразите:

а) $x + |2-x| + 3 \cdot |x-3|$; ако е $2 \leqslant x < 3$;

б) $|x-1| - \frac{|x|}{x} - |x+2|$, ако е а) $-2 \leqslant x < 0$! б) $0 \leqslant x < 1$

Изврши ги означените операции и упрости ги изразите

23. $(x^2 - y^2 - z^2 + 2yz) : \frac{x+y-z}{x+y+z}$

24. $\left(\frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab}\right) \cdot \frac{a^2b+ab}{a^2-b^2}$

25. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{x+y} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : \left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}\right)$

26. $\left(\frac{a-b}{2b-a} - \frac{a^2+b^2+b-2}{a^2-ab-2b^2}\right) \cdot \frac{a^2+b+ab+a}{4a^4+4a^2b+b^2-4}$

27. $\frac{a}{ax-2x^2} - \frac{2}{a^2+a-2ax-2x} \cdot \left(1 + \frac{3a+a^2}{3+a}\right)$

28. а) $\frac{x^2-y^2}{x-y} - \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$; б) $\frac{a}{a^2+x^2} - \frac{x(a-x)^2}{a^4-x^4}$

29. а) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\left(\frac{2a+1}{2a-1} - \frac{2a-1}{2a+1}\right) : \frac{4a}{10a-5}$

30. $\frac{x^2-1}{k(k+x)} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}} - 1\right) \cdot \frac{x-k^3x-k^4+k}{1-x^2}$

31. $\left(\frac{2x}{x+2} + \frac{2x}{6-3x} + \frac{8x}{x^2-4}\right) : \frac{4-x}{2-x}$

32. $\left(\frac{a^2-ab}{a^3+b^3} - \frac{2a}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2}\right)$

33. $\left[\frac{a-b}{ab} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : \left[\frac{a^2+b^2}{ab} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right]$

34. $\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)}$

35. $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$

36. $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+4)}$

37. $\dfrac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\dfrac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\dfrac{c}{a-c}-\dfrac{1+c}{c}\right):\dfrac{c(1+c)-a}{bc}$

Да се разложат на множители изразите:

38. а) $a^4+a^2b^2+b^4$; б) c^4+c^2+1

39. $(x+y)(x^3-y^3)-(x-y)(x^3+y^3)$

40. $x^4+x^3+x^2+x+1$

41. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

42. $a^3+b^3+c^3-3abc$

43. x^3+5x^2+3x-9

44. $(ab+ac+bc)\cdot(a+b+c)-abc$

45. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

46. а) $4x^4+y^4$; б) x^6+1; в) $x^{10}+x^5+1$

47. Докажи го равенството: $(ay+bx)^2+(ax-by)^2=(ay-bx)^2+(ax+by)^2$

48. Да се докаже идентитетот:

$$\left(ab+b^2+\frac{ab+b^2}{5a^2-5ab}\right)\cdot\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=5ab$$

49. Докажи дека: ако е $x+y+z=0$, тогаш важи равенството:

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

50. Докажи дека за $x=c+1$ триномот x^2-x-c е точен квадрат!

51. Докажи дека, ако е $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$, тогаш важи равенството

$$(a+b)(b+c)(a+c)=0$$

52. Докажи го идентитетот:

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

53. За кои вредности на a и b се точни равенствата:

а) $(a-b)^2=(b-a)^2$; б) $(a-b)^3=(b-a)^3$; в) $(a+b)^2=a^2+b^2$?

54. Можат ли квадратите на два нееднакви броја да бидат еднакви меѓу себе?

55. Одреди ги на бројната оска целите вредности на x, кои ги задоволуваат неравенствата:

а) $-5\leqslant x<3$; б) $-0{,}2<x\leqslant 5$!

56. Каде на бројната оска лежат точките што му одговараат на бројот x, ако:

а) $|x|=2$; б) $|x|>3$; в) $|x|<8$.

57. Дадено е неравенството $a>b$. Дали секогаш важи неравенството:

а) $a\cdot m<b\cdot m$; б) $-a<-b$?

58. Ако е $M = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, пресметај ја приближната вредност на изразот:

$$M + \frac{1}{M} + \frac{1}{1+\frac{1}{M}}.$$ со точност 0,01.

59. Рационализирај го именителот на дропките:

а) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; б) $\frac{7}{1+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$; в) $\frac{7}{\sqrt[3]{2}-1}$.

60. Упрости ги изразите:

а) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

б) $\frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}$; $x > 0$.

61. а) $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-(1-x)}\right)\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)$, при $0<x<1$;

б) $\left(\sqrt{x(1-x)} + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$, при $0 < x \leqslant 1$.

62. а) $\sqrt{\frac{x^3+3y}{2x} + \sqrt{3xy}} - \sqrt{\frac{x^3+3y}{2x} - \sqrt{3xy}}$, при $x > 0$; $y > 0$;

б) $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a^2-4}{a}}} + \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}$, ако $a \geqslant 2$,

63. Нацртај ги графиците на функциите:

а) $y = x + 1$; б) $y = |x|$; в) $y = |x| + 2$; г) $y = |2 - x|$!

64. Одреди ја дефиниционата област и нацртај ги графиците на функциите:

а) $y = \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{2}{x}$; в) $y = \frac{1}{x} + 2$; г) $y = \frac{1}{x-2}$; д) $y = \frac{2}{x-1} + 3$.

65. Дадена е функцијата $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Сведи ја дадената функција на видот $y = \frac{m}{x-2} + n$! Одреди ја дефиниционата област на функцијата и нацртај го нејзиниот график!

66. Одреди ги A и B, така што да важи равенството:

а) $\frac{x-4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$; б) $\frac{4x}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$.

67. Одреди ги A, B и C, така што да важи равенството:

$$2x^2 - 9x + 10 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C.$$

68. Покажи дека ако е $x + \frac{1}{x} = c$, тогаш ќе важи равенството

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = c\,(c^2 - 3).$$

69. Еквивалентни ли се равенките:

а) $(2x - 5)(x - 1) = 3(x - 1)$ и $2x - 5 = 3$;

б) $(x + 2)(x - 2) = 0$ и $x - 2 = 0$;

в) $\frac{x - 5}{x - 3} = \frac{1 - x}{x - 3}$ и $x - 5 = 1 - x$.

г) $x - 1 + \frac{1}{x^2} = 1 - x + \frac{1}{x^2}$ и $x - 1 = 1 - x$.

Образложи ги одговорите!

70. Во равенката $x - 2 \cdot |x - 1| = \ldots\, x + 3$ на местото на многуточието одреди го коефициентот, кога се знае дека равенката има корен $x = -2$!

71. Равенката $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ реши ја по непозната: а) f; б) d; в) F.

72. Равенката $P = \frac{(a + b)\,h}{2}$ реши ја по непозната: а) h; б) a; в) b;

73. За кои вредности на параметарот a, равенката $(a - 2)(x - 1) = a^2$:
а) има решение $x = 0$; б) нема решение?

74. За кои вредности на c равенката $\frac{1}{c} + \frac{1}{cx} = 1$ има решение поголемо од 2?

75. За кои вредности на m равенката $4(2m + 5) = 3(5mx + 1)$ има негативно решение?

Реши ги и дискутирај ги решенијата на следниве равенки:

76. а) $(1 - a)(x +$ [illegible] $+ a^2$ [illegible] $= 1$; б) $m(x + n) = x + a$.

77. $m^2x = mx + 3(m - 1$.

78. $$\frac{x + 2n}{n - 1} + \frac{x - 2n}{n + 1} = 1.$$

79. $$\frac{x - b}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - b} = 2.$$

80. $$\frac{x - ab}{a + b} + \frac{x - ac}{a + c} + \frac{x - bc}{b + c} = a + b + c.$$

81. $$\frac{x - a}{bc} + \frac{x - b}{ac} + \frac{x - c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

82. $$\frac{(x - m)^2 + (x - n)^2}{(x - m)^2 - (x - n)^2} = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}; \quad m^2 - n^2 \neq 0.$$

83. $$\frac{mx - n}{m + n} + \frac{nx + m}{m - n} = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}.$$

84. $\frac{x-(a+b)}{c}+\frac{x-(b+c)}{a}+\frac{x-(c+a)}{b}=3.$

85. $\frac{x-1}{a-1}+\frac{2a^2(1-x)}{a^4-1}=\frac{2x-1}{1-a^4}-\frac{1-x}{1+a}.$

86. За кои вредности на a и m равенката $\frac{2}{m+x}=\frac{a}{3a+x}$ има: а) позитивно решение, б) негативно решение, в) бесконечно многу решенија, г) нема решение?

87. Реши ја алгебарски и графички равенката $|x|=2x-1$.

88. Да се решат равенките:

а) $2x-|x|=5$; б) $|x|-2\cdot|x-3|=8$; в) $\frac{x-2}{3}+\frac{|x|}{4}=x-2$.

89. Реши го системот равенки и испитај ги неговите решенија:

$$\begin{cases}(c+3)\,x-2y=5\\(c+1)\,x+\ \ y=7\end{cases}$$

90. За кои вредности на параметарот a решенијата на системот равенки

$$\begin{cases}3x+ay=4\\ax-2y=3\end{cases}$$

ќе го задоволуваат условот: $x>0$; $y<0$?

91. Може ли системот равенки

$$\begin{cases}ax+by=0\\cx+\ y=0\end{cases}$$ да биде противречен?

Да се решат системите равенки:

92. $$\begin{cases}mx+ny=m-n\\nx-my=0\end{cases}$$

93. $$\begin{cases}\frac{x+2y}{4}-x+\frac{y}{3}=1+y\\\frac{y+3}{6}+\frac{2-x}{2}=3\end{cases}$$

94. $$\begin{cases}x+5c^2y=2\\2x+8\,(c^2+1)\,y=5\end{cases}$$

95. $$\begin{cases}ax-by=2a\\a^2x-b^2y=a^2+b^2\end{cases}$$

96. $$\begin{cases}|x-2|+|y-3|=1\\y=3+|x-2|\end{cases}$$

97. $$\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1\\|x-1|-y=-5\end{cases}$$

98. $$\begin{cases}|x-1|+|x+y|=6\\|y-1|+|x+y+1|=4\end{cases}$$

99. $$\begin{cases}\frac{1}{1-x+y}-\frac{1}{x+y-1}=\frac{2}{3}\\\frac{1}{\frac{1}{1-x+y}-\frac{1}{1-x-y}}=\frac{3}{4}\end{cases}$$

100. $$\begin{cases}x+y+z=1\\ax+by+cz=d\\a^2x+b^2y+c^2z=d^2\end{cases}$$

101. $$\begin{cases}x+ay+z=a\\ay+y+z=1\\x+y+az=a^2\end{cases}$$

102. $$\begin{cases}x+\frac{y+z}{2}=19\\y+\frac{z+x}{2}=19\\z+\frac{x+y}{2}=19\end{cases}$$

103. $$\begin{cases}\frac{4}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=1\\\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=4\\\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=9\end{cases}$$

104. $\begin{cases} x+y-z=a \\ x-y+z=b \\ -x+y+z=c \end{cases}$

105. $\begin{cases} x+y+z=a \\ y+z+u=a+6 \\ z+u+x=a+4 \\ u+x+y=a+2 \end{cases}$

106. $\begin{cases} a^3+a^2x+ay+z=0 \\ b^3+b^2x+by+z=0 \\ c^3+c^2x+cy+z=0 \end{cases}$

107. $\begin{cases} ax+by+cz=a+b+c \\ bx+cy+az=a+b+c \\ cx+ay+bz=a+b+c \end{cases}$

108. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{c} \end{cases}$

109. $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$

110. Докажи дека дијагоналата на конвексен четириаголник е помала од неговиот полупериметар!

111. Дадено е неравенството $a > b$. Дали секогаш ќе биде $a^2 > b^2$?

112. Ако е $a > b > 0$ и $n \in N$, докажи дека важи неравенството $a^n > b^n$.

113. Докажи дека, ако е $a > b > 0$, тогаш ќе биде $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$!

114. Ако a, b, c и d се позитивни броеви и ако е $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$, докажи дека важи неравенството:

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}.$$

115. Дали се еквивалентни неравенките:

а) $\dfrac{x-2}{x-3} > 0$ и $x-2>0$; б) $\dfrac{x+4}{x^2+1} > 0$ и $x+4>0$;

в) $(x-5)\cdot(x+1)<0$, $\dfrac{x-5}{x+1} < 0$ и $\dfrac{x+1}{x-5} < 0$?

116. Еден базен се полни од две цевки, а од третата се празни. Првата цевка може сама да го наполни базенот за 15 часа, втората сама за 10 часа, а третата може да го испразни полниот базен за 6 часа. За колку часа ќе се наполни празниот базен, ако едновремено се отворат трите цевки?

117. Цифрата на единиците на еден двоцифрен број е за 4 поголема од цифрата на десетките. Ако од квадратот на овој број го одземеме производот на неговите два соседни броја, ќе добиеме 1. Кој е тој број?

118. Мајката сега има 35 години, а синот 7 години. По колку години мајката ќе биде n пати постара од синот?

119. Периметарот на задното тркало на една кола е за a (cm) поголем од периметарот на предното тркало. Ако предното тркало направи m свртувања, задното тркало ќе направи n свртувања. Да се најде периметарот на секое тркало.

120. Да се решат неравенките:

а) $2x-5 > x$; б) $3(x-2) < x-1$.

121. а) $\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} + \frac{1}{2}$; б) $\frac{x+2}{3} + \frac{x}{6} < \frac{x+1}{2} - 2$.

122. $a(x-2) > x-3$.

123. $x + \frac{x-1}{a-1} < 1 + \frac{a}{1-a}$.

124. $\frac{x}{m+n} - \frac{m}{m-n} > \frac{x}{m-n} - \frac{n}{m-n}$.

125. Реши ја алгебарски и графички неравенката $|x-3| + x > 5$.

126. Да се реши системот неравенки со една непозната:

а) $\begin{cases} x-3 > 2x-1 \\ 2(x-2) < x+3 \\ 5x+1 > 3(x+1) \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3-x < x \\ x > 4-x \\ x > 2x-1 \\ 2+3x < x+4 \end{cases}$

Реши ги неравенките:

127. а) $(x-2)\cdot(x+1) > 0$; б) $(x-3)(x+2) < 0$.

128. а) $\frac{3x+1}{x+2} > 0$; б) $\frac{x+4}{x-3} < 0$.

129. а) $\frac{9x}{4+x} > 3$; б) $\frac{5-x}{x-3} < \frac{1}{2}$.

130. а) $|x| > 5$; б) $|x+3| < 2$; в) $|x-2| > 4$.

131. а) $|x-1| + x < 1$; б) $|x| - |x-1| > 0$.

132. а) $|2x-3| - |3x-5| > 0$; б) $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| > 1$.

133. Реши ја двојната неравенка: $x - 5 < 2x - |x+3| < |x-4| + 3$

134. Реши ги системите неравенки со две непознати:

а) $\begin{cases} 2x-y+1 > 0 \\ x-3y-1 < 0 \\ x+2x+3 > 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y-2 > 0 \\ x-y+3 > 0 \end{cases}$

135. Докажи ги неравенствата:

а) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$, при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$;

б) $x^2 + y^2 + x^2y^2 > 4xy - 1$, при $x \neq 1$, $y \neq 1$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 > 2(a+b+c)$, ако е $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$;

г) $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} > 6$, каде шта $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq b \neq c$.

СОДРЖИНА

Глава I

МНОЖЕСТВА

Глава II

РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

Глава III

ЦЕЛИ РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Глава IV

ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ АЛГЕБАРСКИ ИЗРАЗИ

Глава V

РЕАЛНИ БРОЕВИ

Глава VI

ПРОШИРУВАЊЕ ПОИМОТ ЗА СТЕПЕН.

ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Глава VII

ФУНКЦИИ И ГРАФИЦИ

Глава VIII

ОДНОСИ И ПРОПОРЦИИ.

ПРОПОРЦИОНАЛНОСТ НА ВЕЛИЧИНИТЕ

Глава IX

ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Глава X

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ И ТРИ НЕПОЗНАТИ

Глава XI

ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ

РОЗТ за учебници „Просветно дело" — Скопје
ул. „Мито Хаџи-Василев — Јасмин" б. б.

За издавачот
Михаило Ќорвезироски

Глигор Тренчевски

АЛГЕБРА

за I клас на средното образование
(по програма 5 часа)

Уредник
Д-р Лазо Каровски

Илустратор
Драган Лукиќ

Тех. уредник
Благоја Попантоски

Корицата ја илустрира
Трајче Димчевски

Коректор
Љубомир Маневски

Ракописот е предаден во печат во декември 1974 година. Печатењето е завршено во мај 1975 година. Обем: 320 страни. Формат: 17 × 24 см. Тираж: 12.000 примероци. Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев" — Скопје (1061/6446)