V РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Регионални натпревари по математика 83-95
Подготвена од Боривое Миладиновиќ

V одделение

1. Триесет ученици решавале 2 задачи од математика. И двете задачи ги решиле 10 ученици. Тројца ученици не решиле ниту една задача, 12 ученици ја решиле само првата задача. Колку ученици ја решиле првата, а колку втората задача?

2. Точките M и N се средини на две соседни страни од квадратот чија плоштина е 16 cm^2. Определи ја плоштината на триаголникот чии две темиња се во M и N, а третото во темето на квадратот во кое се сечат страните на квадратот на коишто лежат точките M и N.

3. При делење на некој број со 48 се добива количник n и остаток 36. Колкав ќе биде количникот, а колкав остатокот при делење на тој број со 16?

4. Миле има во едниот џеб парен број бонбони, а во другиот непарен број. Неговиот другар Петре сакал да погоди во кој џеб има парен, а во кој непарен *број на бонбони и му рекол на Миле: "Помножи го бројот на бонбоните од* десниот џеб со 2, а од левиот џеб со 3. Собери ги добиените производи и кажи ми го збирот, а јас ќе ти кажам во кој џеб имаш парен, а во кој непарен број на бонбони."

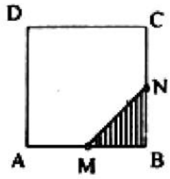
Дали Петре сигурно ќе погоди ? Образложи го одговорот.

V одделение

1. Само втората задача ја решиле: 30-(10+3+12)=5 ученици.
Првата задача ја решиле 10+12=22 ученици. Втората задача ја решиле 10+5=15 ученици.

2. Ако a е страна на квадратот, тогаш плоштината на барaниот триаголник е :

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{8}=\frac{16}{8}=2\text{ cm}^2.$$



3. Ако е x - дадениот број, тогаш:
$x=48n+36$; $x=16\cdot 3n+2\cdot 16+4$; $x=16(3n+2)+4$.
Количникот при делењето на дадениот број x со 16 е за два поголем од трикратната вредност на вториот количник, а остатокот е 4.

4. а) Да претпоставиме дека во десниот џеб има парен број, т.е. 2p, а во левиот непарен, т.е. 2k+1 бонбони, $k, p\in N$.

$$n=(2p)\cdot 2+(2k+1)\cdot 3;\quad n=4p+6k+3;\quad n=2(2p+3k+1)+1.$$

Се добива непарен број , што е исто со претпоставката дека во левиот џеб има непарен број на бонбони.

б) Нека во десниот џеб има 2p+1, а во левиот 2k бонбони, $k, p\in N$.

$$n=(2p+1)\cdot 2+2k\cdot 3;\quad n=4p+2+6k;\quad n=2(2p+3k+1).$$

Се добива парен број, што е исто со претпоставката дека во левиот џеб има парен број бонбони.

Петре сигурно погодил. Добиениот збир ќе биде од ист вид броеви (парен, непарен), како што бил бројот на бонбоните во левиот џеб.

VI одделение

1. Еден ден во една паралелка биле отсутни $\frac{1}{12}$ од учениците. Наредниот ден дошол еден ученик повеќе, така што отсутни биле $\frac{1}{18}$ од учениците. Колку ученици имало во паралелката ?

2. Три лица поделиле извесна сума пари на следниот начин: Првиот добил $\frac{1}{3}$ од сумата и уште 72 денари. Второто лице добило $\frac{1}{3}$ од остатокот и уште 72 денари, а третото лице добило $\frac{1}{3}$ од новиот остаток и уште 72 денари. Колкава била сумата на парите и по колку денари добило секое лице ?

3. Нацртај два напоредни агли и конструирај ги нивните симетрали. Докажи дека симетралите на аглите се заемно нормални.

4. Одреди го бројот m, така што точката A(-2, 2) да припаѓа на графикот на функцијата $y=(-3m+2)\cdot x+m-1$. За добиената вредност на m нацртај го графикот на функцијата и одреди ја нејзината нула.

VI одделение

1. Еден ученик претставува $\frac{1}{12}-\frac{1}{18}=\frac{1}{36}$, од бројот на учениците во паралелката. Во паралелката имали 36 ученици.

2. Нека сите пари изнесуваат x денари.

Првото лице добило: $\frac{1}{3}x+72$; остануваат $x-\left(\frac{1}{3}x+72\right)=\frac{2}{3}x-72$ денари.

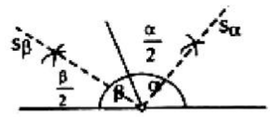
Второто лице добило: $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x-72\right)+72=\frac{2}{9}x+48$; остануваат

$$\left(\frac{2}{3}x-72\right)-\left(\frac{2}{9}x+48\right)=\frac{4}{9}x-120 \text{ денари.}$$

Третото лице добило: $\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}x-120\right)+72=\frac{4}{27}x+32$ денари.

$$\left(\frac{1}{3}x+72\right)+\left(\frac{2}{9}x+48\right)+\left(\frac{4}{27}x+32\right)=x;$$

оттука добиваме дека x=513 денари, па првото лице добило 243 денари, второто 162, а третото 108 денари.



3. Напоредни агли се агли кои имаат заеднички крак, а другите два крака образуваат права.

$\alpha+\beta=180^\circ$ и $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ$ т.е. $s_\alpha \perp s_\beta$.

4. Ако ги замениме координатите на точката А во дадената функција добиваме:

$$2=(-3m+2)\cdot(-2)+m-1, \text{ т.е. } m=1,$$

За m=1 функцијата е y=–x, нејзиниот график е симетрала на вториот и четвртиот квадрант. Нула на функцијата е бројот 0.

VII одделение

1. Една фудбалска екипа одиграла извесен број на натпревари. Во $\frac{2}{3}$ од натпреварите победила, $\frac{1}{4}$ загубила, а другите ги одиграла нерешено. Колку натпревари одиграла екипата , ако бројот на загубените натпревари е за 4 поголем од бројот на нерешените ?

2. Докажи дека ако n е природен број, тогаш и $\frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ е природен број.

3. Низ темето B на квадрат ABCD повлечена е права нормална на дијагоналата BD ($\overline{BD}=6$ cm). Одреди ја должината на отсечката од оваа права што ја отсечуваат продолженијата на страните DA и DC.

4. Низ пресечната точка A на две дадени кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ повлечи права p, така што тетивите на дадените кружници, кои лежат на правата p се складни.

VII одделение

1. Ако екипата одиграла x натпревари, тогаш: $\frac{2}{3}x$ победила; загубените натпревари биле $\frac{1}{4}x$, а нерешено играла $x-\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x=\frac{1}{12}x$ натпревари. Според тоа: $\frac{1}{4}x-\frac{1}{12}x=4$ т.е. $x=24$.

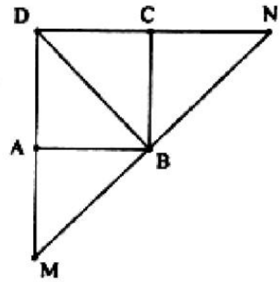
2. Треба да докажеме дека бројот е делив со 2 и со 3. Производот $n(n+1)$ е секогаш делив со 2, бидејќи од два последователни природни броја еден е секогаш парен. Треба да покажеме дека $x=n(n+1)(2n+1)$ е делив со 3. Остатоците при делењето со 3 можат да бидат 0, 1 и 2, т.е. $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$.

а) за $n=3k$ се добива $x=3k(3k+1)(6k+1)$, т.е. $3|x$;

б) за $n=3k+1$ се добива $x=(3k+1)(3k+2)(6k+3)$; $x=(3k+1)(3k+2)3(2k+1)$, т.е. $3|x$;

в) за $n=3k+2$ се добива $x=(3k+2)(3k+3)(6k+5)$; $x=(3k+2)3(k+1)(6k+5)$, т.е. $3|x$.

Според тоа бројот е делив со 3, т.е. дадениот број е природен.

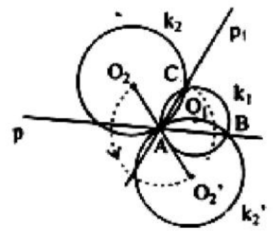


3. Нека M и N се пресечни точки на правата со продолженијата на страните DA и DC. Отсечката $MN \perp BD$, следува дека

$\angle BDN=45^{\circ}$,

т.е. ΔDBN е рамнокрак правоаголен, т.е. $\overline{BN}=\overline{DB}$. Од исти причини и триаголникот DBM е рамнокрак правоаголен, т.е.

$$\overline{BM}=\overline{DB}.$$
$$\overline{MN}=\overline{BM}+\overline{BN};$$
$$\overline{MN}=2\overline{DB}=6 \text{ cm}.$$



4. Ако кружницата k_2 ја ротираме со центар во точката A за агол од 180° (во k_2'), тогаш $k_2' \cap k_1=\{B\}$. Бараната права $p \equiv AB$. Ако $k_1 \cap k_2=\{A, C\}$, тогаш втората права е $p_1 \equiv AC$.

VIII одделение

1. Колку години има човек кој во 1987 година ќе има онолку години колку што изнесува збирот на цифрите на годината во којашто се родил тој човек?

2. Докажи дека збирот од бројот $\overline{xxyy}$ и бројот напишан со истите цифри, но во обратен ред е делив со 101.

3. Докажи дека средната линија на тангентен рамнокрак трапез е еднаква на кракот.

4. Докажи дека кружницата на која висината на рамнострани триаголник е дијаметар, ги сече двете страни од триаголникот во точки што ги делат во однос 1:3.

VIII одделение

1. Човекот е роден во овој век затоа што ако е роден во минатиот век би имал најмногу 27=1+8+9+9 години, што е невозможно. Според тоа:

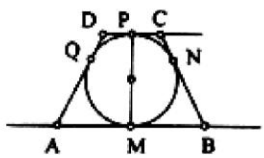
$1987-19\overline{xy}=1+9+x+y$. По сведувањето се добива $y=\dfrac{11(7-x)}{2}$, при што x, y={0, 1, 2, ..., 9}.

Добиениот услов е задоволен само за x=7 и y=0, т.е. човекот е роден во 1970, а во 1987 година има 17 години.

2. Од $\overline{xxyy}+\overline{yyxx}=(x\cdot10^3+x\cdot10^2+10\cdot y+y)+(y\cdot10^3+y\cdot10^2+10\cdot x+x)=1111\cdot(x+y)=101\cdot11\cdot(x+y)$, т.е. збирот е делив со 101.

3. Нека допирните точки соодветно се M, N, P, Q. Од еднаквоста на должините на тангентните отсечки од иста точка имаме: $\overline{AM}=\overline{AQ}$; $\overline{BM}=\overline{BN}$; $\overline{CP}=\overline{CN}$ и $\overline{DP}=\overline{DQ}$. Средната линија е:

$$m=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}=\frac{2\overline{AM}+2\overline{DP}}{2}=\overline{AM}+\overline{DP}=\overline{AQ}+\overline{DQ}=\overline{AD}.$$



4. Триаголниците CDB и DMB се правоаголни, а $\angle B$ им е заеднички. Оттука следува дека се слични, т.е. нивните страни се пропорционални .

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{BC}};$$

Бидејќи $\overline{DB}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$ следи: $\overline{BM}=\dfrac{\overline{DB}^2}{\overline{BC}}$;

$$\overline{BM}=\frac{\left(\frac{1}{2}\overline{BC}\right)^2}{\overline{BC}}=\frac{1}{4}\overline{BC}, \text{ а } \overline{MC}=\frac{3}{4}\overline{BC}. \text{ т.е. } \overline{BM}:\overline{MC}=1:3.$$