

## ОКАМОВОТО СЕЧИЛО НИЗ ПЕРСПЕКТИВАТА НА БЕЈЗОВАТА СТАТИСТИКА

---

*Марко Димовски*<sup>1</sup>

### 1. ПОИМОТ – „ОКАМОВО СЕЧИЛО“

„Numquam ponenda est pluralitas sine necessitate“ или „Ентитетите не треба да се размножуваат непотребно“ е принципот кој во четиринесеттиот век бил поставен од страна на англискиот францистички свештеник Вилијам од Окам, кој особено се истакнувал во полето на философијата и логиката. Философскиот принцип поставен од негова страна, набрзо добил најразлични толкувања во разни научни области, но заедничката констатација при сите цитирања на принципот е дека „објаснувањето на фактите не треба да се комплицира непотребно“. Поинаку кажано, доколку една хипотеза доволно добро го објаснува дадениот проблем, тогаш нема потреба од поставување на покомплексни хипотези. Самиот додаток „сечило“ во називот на принципот говори дека врз основа на овој принцип, разликувањето меѓу две хипотези ќе го направиме или со отстранување на непотребните претпоставки или со исклучување на сличните заклучоци кои произгледуваат од нив. Терминот „поедноставна хипотеза“ е тежок да се дефинира во секоја ситуација, па затоа Окамовото сечило често се применува необјективно. Користењето на овој евристичен пристап се покажало како ефикасна алатка во научните дисциплини. Иако, принципот не е цитиран експлицитно, сепак низ историјата се покажало дека оние кои го користеле во својата работа, биле поуспешни од оние кои не се служеле со Окамовото сечило, [1]. Алберт Ајнштајн се раководел според овој принцип при формулацијата на теоријата за релативноста, Макс Планк и Хајзенберг го користеле при развојот на квантната механика, а неговата примена се смета за најевидентна при прифаќањето на Коперниковата теорија за хелиоцентричниот Сончев систем, пред Птолемевиот геоцентричен модел, според кој Сонцето и планетите се движат околу Земјата. И двата модели давале одлично објаснување на ретроградните орбити и причините поради кои Венера и Меркур никогаш не патуваат далеку од

Сонцето, но Коперник ги отфрлил Птоломеевите екванти и формирал поелегантен модел, кој потоа бил прифатен пред геоцентричниот модел. Постојат и примери кога примената на Окамовото сечило не се покажала како оправдана. Познатата „Теорема за четири бои“ од теоријата на графови најпрво била „покажана“ од Алфред Кемпе. Едноставниот и елегантен доказ бил прифатен и објавен во влијателни списанија, но 11 години подоцна било докажано дека тој не е доволно добар, бидејќи Кемпе не разгледувал посложени графови при докажувањето.

Дали Окамовото сечило сепак наоѓа примена во математиката? Одговорот би бил различен, во зависност од аспектот во однос на кој го интерпретираме овој принцип. Дали доколку две различни теории даваат поинакви резултати околу исто математичко прашање, потребно е како точна да ја прифатиме поедноставната? Не! Но, доколку два спротивставени пристапи се служат со две различни множества од аксиоми при доказот на едно исто тврдење, тогаш подобро е да го прифатиме поедноставниот пристап. Низ историјата се покажало дека математичарите се опседнати со едноставноста на нештата. Дејвид Хилберт се обидел да ги собере сите постоечки теории во конечно и комплетно множество од аксиоми и да пронајде доказ дека овие аксиоми се конзистентни. Но, не само што се покажало дека оваа задача е тешка, туку се покажало и дека таа е невозможна, што било потврдено со Геделовата теорема за некомплетност.

Тоа што е помалку познато е дека Окамовото сечило може да се разгледува како последица на некои веќе поставени принципи во математиката. Токму ова ќе биде темата на овој труд, а посебен акцент ќе ставиме на законите кои важат во Бејзовата статистика.

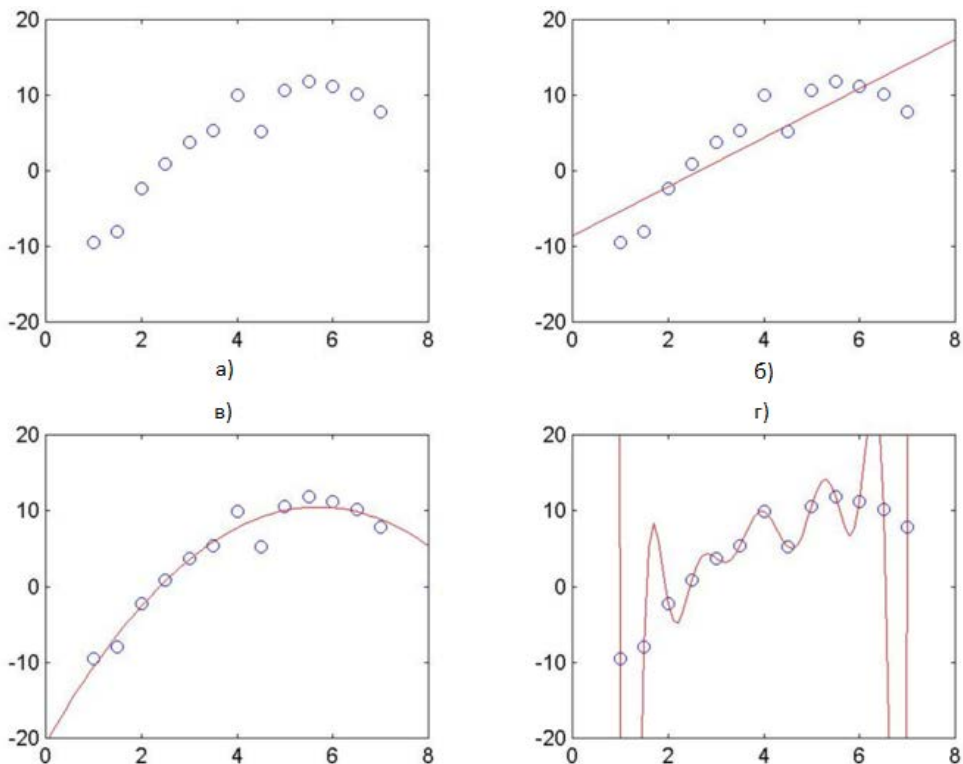
## 2. БЕЈЗОВАТА СТАТИСТИКА И ОКАМОВОТО СЕЧИЛО

Во статистиката, врз основа на нашето искуство се обидуваме одредени податоци да ги опишеме со најразлични модели на што е можно посоодветен начин. Просторот од хипотези може да опфати модели кои се разликуваат според својата комплексност, која ја мериме според нивните степени на слобода или бројот на слободни параметри. Традиционалниот пристап во решавањето на овие задачи од областа на регресионата анализа вели дека вршиме прилагодување на параметрите

## Окамовото сечило низ перспективата на Бејзовата статистика

во моделите, сè додека не направиме добро совпаѓање со даденото множество од податоци. Ваквиот пристап врши фаворизирање на моделите со повеќе слободни параметри, без разлика на тоа дали доволно добро го опишуваат вистинскиот процес од кој се генерирани податоците. Но, тоа не е начинот на кој работи човековиот мозок. На моделите им пристапуваме од поинаква перспектива, тежнеејќи да пронајдеме баланс меѓу комплексноста на моделот и неговото ефикасно опишување на податоците. Тогаш, нема да биде неизбежно да го одбереме најсложениот модел, па многу често изгледа како одлуката да ја носиме врз основа на Окамовото сечило.

**Пример 1** (Задача од статистичко моделирање, [5]). Пронајди крива којашто најдобро ја опишува зависноста меѓу податоците од множеството податоци претставено на Слика 1.а).



**Слика 1.** Различни модели кои вршат опишување на зависноста на податоците од Пример 1, [5].

Множеството податоци прикажано на Слика 1.а е опишано со три различни модели. На Слика 1.б имаме опишување со помош на линеарен модел, на Слика 1.в имаме квадратен модел, додека на Слика 1.г зависноста меѓу податоците е опишана со полином од дванаесетти ред. Наједноставниот линеарен модел врши грубо опишување на податоците, претставувајќи ги како шум дел од податоците коишто ние ги согледуваме како сигнал. Квадратниот модел изгледа подобро, изгледа доволно комплексен да ја опише формата на податоците, без да изврши натсовпаѓање (анг. *overfitting*) на шумот. Најкомплексниот модел се чини дека врши натсовпаѓање на податоците, претставувајќи ги очигледните шумови како сигнали. Параметрите се прилагодени, така што кривата минува низ секоја точка, што за ова множество од податоци би изгледало како совршено изработен модел, меѓутоа ако го гледаме процесот од кој се генерирани податоците, ова би можело да нè води кон многу непрецизни идни предвидувања. Затоа, математичарите тежнеат да одберат поедноставен модел којшто врши доволно добро опишување на податоците, пред покомплексен модел кој врши подобри предвидувања на помало множество од податоци.

Една елегантна и моќна форма на Окамовото сечило произлегува од Бејзовата статистика, позната како Бејзово Окамово сечило. Бејзовото Окамово сечило се однесува на фактот што „покомплексните“ хипотези поставени за одредено множество од податоци, подложни се на автоматско казнување при процесот на носењето на условните статистички заклучоци.

Да напоменеме дека Бејзовата статистика се разликува од фреквенциониот пристап во тоа што поставува априорни веројатности околу изгледот на статистичките модели, независно од заклучоците кои ги имаме од дадените податоци. Во фреквенционата статистика ја користиме веројатноста само за да моделираме одредени процеси со помош на користење на примероци од дадено множество податоци. Додека резултатите од фреквенциониот пристап се конкретни – точни или неточни, донесени врз основа на користење на најразлични тестови на значајност или интервали на доверба, во Бејзовата статистика заклучокот може да биде и веројатносна распределба за параметрите донесен врз основа на набљудуваните податоци.

Постојано зборуваме за поимот „комплексност на хипотези“, но дали истиот може да се дефинира генерално за секоја ситуација? Во многуте формулации на Окамовото сечило комплексноста се мери синтаксички. Синтаксичките мерки се однесуваат на должината на описот на хипотезата претставена на одреден начин или бројот на слободни параметри кој е потребен за да одбереме хипотеза од некое поголемо множество од модели. Оваа форма на Окамовото сечило се соочува со потешкотии при оправдувањето на мерката за комплексност. Исто така, не е посебно утврдено дали прифатената алтернативна мерка за доброто однесување на моделот е доволно добра да го надмине изборот на помалку комплексен модел (тежината на казнување на моделите поради нивната комплексност). Совпаѓањето на моделот со податоците, односно опишувањето на нивната зависност е семантичка карактеристика. Ако комплексноста на моделот се мери синтаксички, а совпаѓањето со податоците е семантичка мерка, тогаш несомнено се јавува проблем при носењето на одлуката околу тоа кој модел би бил најсоодветен – поедноставен, кој добро ја опишува зависноста на податоците.

Во Бејзовата форма на Окамовото сечило, комплексноста на моделот и неговата функционалност при опишувањето на зависноста на податоците, се мерат семантички. Семантичката ознака на комплексноста, всушност е мерка за флексибилност на моделот. Хипотезата која е доволно флексибилна да генерира поширок спектар на множества од податоци ќе ја сметаме за покомплексна. Согласно со теоремите во Бејзовата статистика, ваквите хипотези тежнеат да имаат помала апостериорна веројатност од помалку флексибилните, поедноставните хипотези кои го објаснуваат истото множество од податоци.

Нека  $H_1, H_2, \dots, H_n$  се  $n$  дисјунктни хипотези, чија унија го претставува целиот простор од елементарни настани. Нека  $P(H_i|I)$ ,  $i = 1, \dots, n$  е ознака за веројатноста (априорна веројатност) дека хипотезата  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  е точна, која сме ја утврдиле врз основа на релевантни априорни информации (множеството од податоци  $I$ ) што ни се на располагање. Нека  $D$  е ново множество од податоци што ни е на располагање. Нашата почетна веројатност ќе треба да ја обновиме како

$$P(H_i|D, I) = \frac{P(D|H_i, I) \cdot P(H_i|I)}{P(D|I)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Со  $P(H_i|D, I)$  ја означуваме апостериорната веројатност дека хипотезата  $H_i, i = 1, \dots, n$  е точна, при дадени множества од податоци  $D$  и  $I$ . За веројатноста во именителот, важи следново:

$$P(D|I) = \sum_{i=1}^n P(D|H_i, I) \cdot P(H_i|I).$$

Да разгледаме случај во кој имаме само две алтернативни хипотези  $H_1$  и  $H_2$ . При априорни веројатности за точност на овие хипотези  $P(H_1)$  и  $P(H_2)$  соодветно, за нивните апостериорни веројатности при дадено множество од податоци  $D$  ќе добиеме

$$P(H_1|D) = \frac{P(H_1) \cdot P(D|H_1)}{P(D)} \text{ и } P(H_2|D) = \frac{P(H_2) \cdot P(D|H_2)}{P(D)}.$$

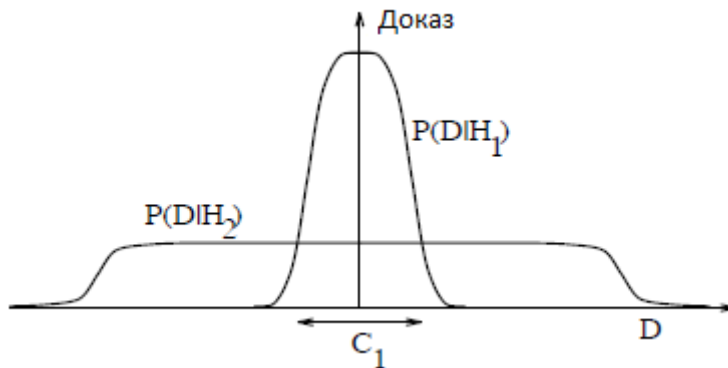
Со делење на левите и на десните страни на овие две равенства, соодветно, ќе го добиеме веројатностиот количник

$$\frac{P(H_1|D)}{P(H_2|D)} = \frac{P(H_1) \cdot P(D|H_1)}{P(H_2) \cdot P(D|H_2)}. \quad (1)$$

Количникот  $P(H_1)/P(H_2)$  од десната страна на (1) го означуваме со  $B_1$ . Тој е мерка за тоа колку нашите субјективни априорни веројатности ја фаворизираат хипотезата  $H_1$  во однос на хипотезата  $H_2$ . Количникот  $P(D|H_1)/P(D|H_2)$  го означуваме со  $B_2$ . Овој количник е мерка за тоа колку множеството  $D$  ја фаворизира првата хипотеза пред втората, т.е. колку добро хипотезата  $H_1$  ги опишува овие податоци, во споредба со хипотезата  $H_2$ . Ако  $B_1$  е еднакво на 1, тогаш сме зеле еднакви априорни веројатности. Во случајот кога е поголемо од 1, тогаш имаме субјективно фаворизирање на првата хипотеза, додека втората е фаворизирана кога овој коефициент е помал од 1. Како е ова поврзано со Окамовото сечило во случајот кога едната хипотеза е поедноставна? Коефициентот  $B_1$  ни дава можност да внесеме априорна пристрасност. Ако  $H_1$  е поедноставен модел, врз основа на естетика и искуство, можеме да внесеме пристрасност во коефициентот  $B_1$ , што би значело дека  $P(H_1) > P(H_2)$ . Во нашите намери да покажеме дека Окамовото сечило е последица на правилата кои важат во Бејзовата статистика, нема да имаме потреба да ја поставуваме оваа априорна пристрасност, бидејќи ефектот на поед-

ноставната хипотеза автоматски ќе излезе на виделина од дефинираноста на коефициентот  $B_2$ .

Поедноставните модели тежнеат да вршат попрецизни предвидувања. Покомплексните модели, според нивната природа, способни се да направат поширок спектар на предвидувања. Без губење на општоста, да претпоставиме дека хипотезата  $H_1$  е поедноставна. Од Слика 2 ќе согледаме зошто е оправдана основната интуиција за помалата веројатност на покомплексните модели.



**Слика 2.** Доказот на хипотезите  $H_1$  и  $H_2$  претставени во однос на просторот од можните множества од податоци  $D$ , [2].

Хоризонталната оска на Слика 2 го претставува просторот од можните множества од податоци  $D$ . Во Бејзовата статистика, моделите се споредуваат според пропорцијата добиена од тоа колку добро моделите ја опишуваат зависноста на податоците кои ги имаме на располагање како производ на извршени набљудувања или експерименти. Овие предвидувања се квантифицираат според нормализираната веројатносна распределба на  $D$ . Веројатноста  $P(D|H_i), i = 1,2$  уште се нарекува доказ (анг. evidence) за  $H_i, i = 1,2$ . Поедноставниот модел  $H_1$  врши предвидувања лимитирани на одреден опсег на податоци, додека „помоќниот“ модел  $H_2$  е поробуствен односно способен е да изврши предвидување на поширок спектар од множества од податоци. На пример, за подмножеството од податоци  $C_1$  важи дека хипотезата  $H_2$  не врши толку добри предвидувања како поедноставната хипотеза  $H_1$ . Тогаш, ако множеството од набљудувани податоци е одбрано од  $C_1$ , ако сме дале еднакви априорни веројатности за двете хипотези, тогаш

„помалку моќниот“ модел  $H_1$  ќе биде поверојатен во согласност со начинот на кој се носи одлуката во Бејзовата статистика. Со оглед на тоа што покомплексните хипотези можат да генерираат поголем спектар од множества од податоци, тие задолжително мораат да им доделат помала веројатност на секое од нив. Ако не внесеме пристрасност во априорните веројатности, тогаш апостериорната веројатносна дистрибуција на хипотезите ќе ја фаворизира поедноставната хипотеза. Па, така, доколку моделот  $H_2$  е покомплексен, графикот на предвидувачката веројатност  $P(D|H_2)$  ќе биде поразвлечен долж просторот од податоци, за разлика од оној на  $H_1$ . Тогаш, ако податоците се добро опишани од двата модели, поедноставниот модел  $H_1$  ќе биде поверојатен, дури и при еднакви априорни веројатности.

**Пример 2.** ([2]) Дадена е низата  $-1, 3, 7, 11\dots$  Кои се следните два броеви во оваа низа?

Популарно размислување кое е во насока на ова прашање е дека членовите на низата се менуваат по принципот на аритметичката прогресија со разлика 4. Како поедноставна хипотеза ќе ја одбереме хипотезата која се заснова на ова размислување, односно  $H_1$ -членовите на оваа низа се дел од аритметичка прогресија со прв член  $a_1$  и разлика  $d$ ,  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ .

Втората хипотеза ќе ја сметаме за покомплексна, па дефинираме  $H_2$  – членовите на оваа низа се менуваат така што  $n$ -тиот член се добива како  $a_n = ba_{n-1}^3 + ca_{n-1}^2 + e$ , каде што непознатите коефициенти се дропки. Со други зборови, броевите во низата се генерираат преку кубна функција.

Без никакво сомнение можеме да внесеме пристрасност во априорните веројатности во корист на поедноставната хипотеза од причина што аритметичката прогресија се среќава многу почесто од кубната функција, во ваквиот тип задачи. Но, да им дадеме еднаква априорна веројатност и на двете хипотези. Колку добро овие два модели ги опишуваат податоците? Без губење на општоста, нашата субјективна претпоставка е дека непознатите  $a_1$  и  $d$ , како и броителите во дропките  $b, c$  и  $e$  ги одбираме од множеството  $\{x \in \mathbb{Z} \mid -50 \leq x \leq 50\}$ , додека именителите во дропките ги одбираме од множеството од првите 50 природни



## Окамовото сечило низ перспективата на Бејзовата статистика

броеви. Со оглед на тоа што само за  $a_1 = -1$  и  $d = 4$  моделот врши соодветно опишување на зависноста на податоците од множеството  $D = \{-1, 3, 7, 11\}$ , за доказот  $P(D|H_1)$  ќе имаме:

$$P(D|H_1) = \frac{1}{101} \cdot \frac{1}{101} \approx 10^{-4}.$$

Со решавање на системот од 3 линеарни равенки со 3 непознати

$$\begin{cases} -b + c + e = 3 \\ 27b + 9c + e = 7 \\ 343b + 49c + e = 11 \end{cases},$$

добиваме дека  $b = -1/11$ ,  $c = 9/11$  и  $e = 23/11$ . Па, постојат 4 начини на кои може да се претстави коефициентот  $b$ , т.е. имаме дека  $b = -1/11 = -2/22 = -3/33 = -4/44$ . Слично, постојат 4 начини за претставување на  $c$  и 2 за  $e$ . Тогаш, за доказот  $P(D|H_2)$  ќе имаме:

$$P(D|H_2) = \frac{1}{101} \cdot \frac{4}{101} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{4}{101} \cdot \frac{1}{50} \cdot \frac{2}{101} \cdot \frac{1}{50} \approx 2,5 \cdot 10^{-12}.$$

Ако  $B_1 = 1$ , тогаш

$$\frac{P(D|H_1)}{P(D|H_2)} \approx 4 \cdot 10^7.$$

Вредноста на последниот коефициент зависи од неколку априорни претпоставки околу дефиниционата област на параметрите кои моравме да ги поставиме, бидејќи така налагаат методите во Бејзовата статистика. Во секој случај, квантитативните детали во субјективните претпоставки немаат влијание врз ефектот на Бејзовото Окамово сечило. Односно, покомплексниот модел претставен во хипотезата  $H_2$  е подложен на ефектот на Окамовото сечило, од причина што има повеќе параметри. Во овој пример, работевме со четириелементно множество, а во задачи со повеќе податоци магнитудата на ефектот на Окамовото сечило расте, па влијанието на квантитативните детали на субјективните претпоставки се намалува.

Нека  $H_1$  и  $H_2$  се два модели кои вршат подеднакво добро опишување на зависноста на податоци од дадено множество  $D$ , но втората хипотеза  $H_2$  е модел со еден параметар повеќе. Дополнителниот параметар да го означиме со  $\lambda$ . Општо, ако претпоставиме дека секој од моделите  $H_i, i \in I$  е составен од вектор од параметри  $w$ , согласно со

Бејзовата теорема, секој модел е дефиниран со априорни распределби  $P(w|H_i), i \in I$ , кои ни посочуваат какви вредности би можеле да примат параметрите и со множество од условни распределби (по една за секој параметар од  $w$ )  $P(D|w, H_i)$ , кои ги дефинираат предвидувањата кои моделот  $H_i, i \in I$  ги врши за даденото множество податоци  $D, [3]$ . Во нашиот случај, од Бејзовата теорема [2], [3] за апостериорната веројатност на  $\lambda$  имаме:

$$P(\lambda|D, H_2) = \frac{P(D|\lambda, H_2) \cdot P(\lambda|H_2)}{P(D|H_2)}. \quad (2)$$

Бидејќи во Бејзовата статистика секогаш задаваме априорни претпоставки, ќе претпоставиме дека  $(\lambda|H_2) \sim U[\lambda_m, \lambda_M]$ . Тогаш, имаме дека

$$P(\lambda|H_2) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_M - \lambda_m}, & \lambda \in [\lambda_m, \lambda_M] \\ 0, & \text{инаку} \end{cases}$$

Нормализирачката константа од (2) односно доказот  $P(D|H_2)$ , се пресметува со

$$P(D|H_2) = \int P(D|\lambda, H_2) \cdot P(\lambda|H_2) d\lambda. \quad (3)$$

Во Бејзовата статистика [2], [3] за апостериорната веројатност важи дека  $P(\lambda|D, H_2) \sim P(D|\lambda, H_2) \cdot P(\lambda|H_2)$  и таа го достигнува својот максимум во вредноста која ја максимизира  $P(D|\lambda, H_2)$ . Нека максимумот на функцијата на подобност  $P(D|\lambda, H_2)$  се постигнува во  $\lambda_0$  и нека  $\delta$  е такво што  $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$  е 95% интервал на доверба за  $\lambda_0$ . Тогаш, со користење на Лапласовиот метод [2], [3], доказот може да се апроксимира со висината на максимумот на подинтегралната функција помножена со неговата должина. Односно,

$$P(D|H_2) \approx P(D|\lambda_0, H_2) \cdot P(\lambda_0|H_2) \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2\delta^2}}.$$

Со замена во (3), за доказот добиваме

$$\begin{aligned} P(D|H_2) &\approx \int P(D|\lambda_0, H_2) \cdot P(\lambda_0|H_2) \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2\delta^2}} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\lambda_M - \lambda_m} P(D|\lambda_0, H_2) \int e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2\delta^2}} d\lambda = \frac{\delta\sqrt{2\pi}}{\lambda_M - \lambda_m} P(D|\lambda_0, H_2). \end{aligned}$$

Со замена во (1) добиваме

Окамовото сечило низ перспективата на Бејзовата статистика

$$\frac{P(H_1|D)}{P(H_2|D)} \approx \frac{(\lambda_M - \lambda_m)P(D|H_1)}{\delta\sqrt{2\pi}P(D|\lambda_0, H_2)}.$$

Овој количник ни дава два заклучоци. Првиот е дека при субјективна претпоставка ако двата модели прават подеднакво добри предвидувања, односно  $P(D|H_1) \approx P(D|\lambda_0, H_2)$ , тогаш треба да ја прифатиме поедноставната хипотеза  $H_1$ , бидејќи можниот интервал од кој го одбираме  $\lambda$  дава множител во именителот кој е поголем од  $\delta$ . Ова е токму ефектот на Окамовото сечило!

Вториот заклучок е поинтересен. Можеме да одредиме колку точно дополнителниот параметар го „казнува“ моделот. Па, во специфични случаи можеме да тестираме дали вреди да се воведат дополнителниот параметар или не. Можеме да оцениме дали предвидувањата се значително подобри по воведувањето на дополнителниот параметар и дали тоа е доволно за да се надмине „казната“ за користење на покомплексна хипотеза.

### 3. ЗАКЛУЧОК

Окамовото сечило, далеку од тоа дека е ад хок критериум, во многу практични ситуации во науката може да биде разгледуван како последица на правилата кои важат во Бејзовата статистика. Видовме неколку начини при кои Окамовото сечило може да се разгледа под Бејзови услови. При изборот на априорните веројатности на хипотезите, користејќи го научното искуство претпоставуваме дека поедноставните хипотези поверојатно ќе бидат точни, отколку покомплексните хипотези. Покажавме дека тоа е последица на фактот што покомплексните хипотези, односно хипотезите со повеќе прилагодливи параметри автоматски имаат помала апостериорна веројатност. На крајот, видовме дека Окамовото сечило може да биде многу корисно при споредбата на моделите, при што во конкретен случај можеме да одредиме дали вклучувањето на дополнителни параметри е потребно или не.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] W. H. Jefferys, J. O. Berger, *Sharpening Ockham's razor on a Bayesian stop*, Technical report #91-44C, Department of Statistics Purdue University, (1991).
- [2] D. J. C. MacKay, *Bayesian interpolation*, Neural Computation, 4 (1992) 415– 447.
- [3] D. J. C. MacKay, *Hyperparameters: Optimize, or Integrate Out?*, Heidbreder G.R. (eds) Maximum Entropy and Bayesian Methods, 62 (1996) 43-59.
- [4] I. Murray, Z. Ghahramani, *A note on the evidence and Bayesian Occam's razor*, Gatsby Unit Technical Report, (2003)
- [5] Church wiki, *Occam's Razor*,  
[http://projects.csail.mit.edu/church/wiki/Occam's\\_Razor](http://projects.csail.mit.edu/church/wiki/Occam's_Razor)

1 Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје  
Природно-математички факултет  
Архимедова 3, 1000 Скопје, Р. Македонија  
e-mail: [mdimovski16@gmail.com](mailto:mdimovski16@gmail.com)

Примен: 22. 03. 2018

Поправен: 23. 06. 2018

Одобен: 28. 06. 2018

Објавен на интернет: 28.08.2018