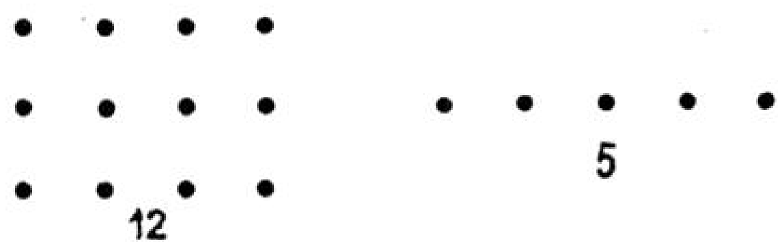
Др Зоран Каделбург

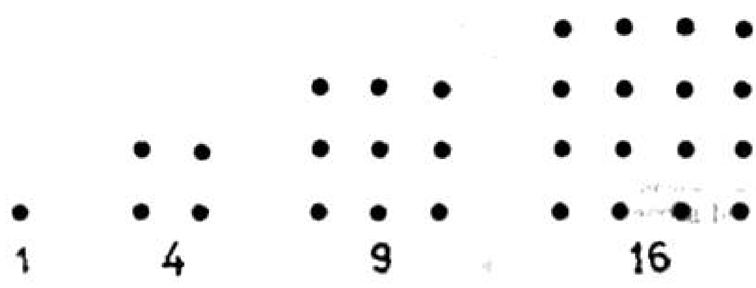
ТРОУГАОНИ БРОЈЕВИ

Већини ученика је сигурно позната подела природних бројева на просте и сложене: за природан број већи од 1 кажемо да је *сложен* ако се може приказати у облику $c = a \cdot b$, где су a и b природни бројеви већи од 1; ако то није могуће, број c је *прост*. Овим појмовима може се дати следећа једноставна геометријска интерпретација. Ако је број c сложен, онда се c тачака може тако распоредити да формирају правоугаоник са страницама већим од 1. Ако је број c прост, онда је једино могуће c тачака поређати тако да формирају правоугаоник чија је једна страница једнака 1. На пример, на слици 1 су приказани случајеви $c = 12 = 3 \cdot 4$ и $c = 5$.



Сл. 1

Због наведене особине сложени бројеви се некад још називају *право-угаоним бројевима*.

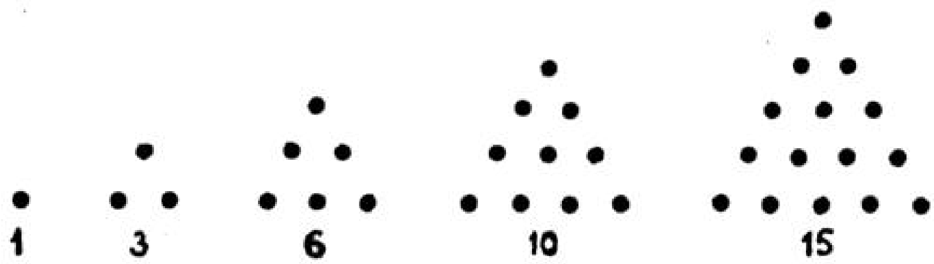


Сл. 2

Међу правоугаоним бројевима посебно се истичу *квадратни бро-јеви*. То су, наравно, они бројеви који су квадрати природних бројева, тј. такви бројеви c за које се од c тачака може формирати квадрат. У њих убрајамо и јединицу, тако да су квадратни бројеви

$$K_1 = 1^2 = 1, \quad K_2 = 2^2 = 4, \quad K_3 = 3^2 = 9, \quad K_4 = 4^2 = 16, \quad \ldots$$

У овом чланку говорићемо о једном другом типу природних бројева који се могу представити дијаграмима у виду троуглова као на слици 3.



Сл. 3

За такве бројеве казаћемо да су *троугаони*. Са слике 3 је јасно да су троугаони бројеви, на пример,

$$\begin{aligned}
&T_1 = 1,\\
&T_2 = 1 + 2 = 3,\\
&T_3 = 1 + 2 + 3 = 6,\\
&T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10,\\
&T_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.
\end{aligned}$$

Уопште, сваки троугаони број се може приказати у облику

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Поступком за који верујемо да је ученицима познат из анегдоте о деветогодишњем Гаусу, претходни збир се може изразити као

$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Навешћемо неке особине бројева T_n.

Теорема 1. *Сваки природан број већи од 1 је разлика два узастопна троугаона броја.*

Доказ. Заиста, за природан број $n > 1$ важи

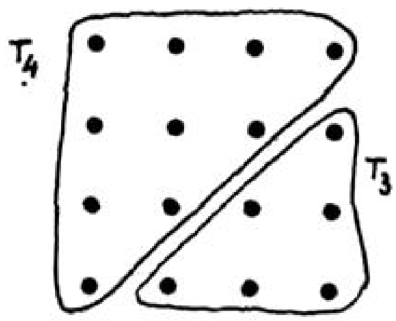
$$T_n - T_{n-1} = [1 + 2 + \cdots + n] - [1 + 2 + \cdots + (n-1)] = n.$$

Теорема 2. *Збир два узастопна троугаона броја је квадратни број. Обрнуто, сваки квадратни број већи од 1 се може приказати као збир два узастопна квадратна броја.*

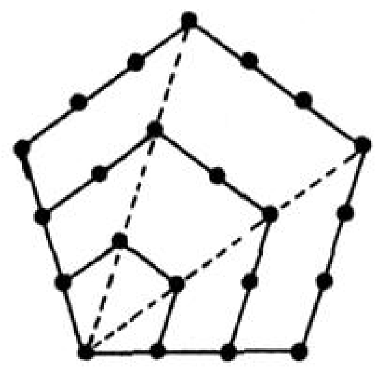
Доказ. Важи

$$T_{n-1} + T_n = \frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n[(n-1)+(n+1)] = \frac{1}{2}n \cdot 2n = n^2.$$

Приметимо да се ово тврђење може једноставно геометријски илустровати. На слици 4 је приказан случај $n = 4$.



Сл. 4



Сл. 5

Теорема 3. *Разлика квадрата два узастопна троугаона броја је куб природног броја.*

Доказ. На основу теорема 1 и 2 добијамо

$$T_n^2 - T_{n-1}^2 = (T_n - T_{n-1})(T_n + T_{n-1}) = n \cdot n^2 = n^3.$$

Теорема 4. *Постоји само један троугаони број који је прост — то је број $T_2 = 3$. Другим речима, сви троугаони бројеви сем $T_1 = 1$ и $T_2 = 3$ су правоугаони бројеви.*

Доказ. Сваки троугаони број је облика $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Размотримо случајеве када је n паран и када је непаран број.

Ако је $n = 2k$, где је k природан број, тада је $T_n = \frac{1}{2} \cdot 2k(2k+1) = k(2k+1)$, и то је сложен број, осим када је $k = 1$, тј. $n = 2$.

Ако је $n = 2k+1$ за природно k, тада је $T_n = \frac{1}{2}(2k+1)(2k+2) = (2k+1)(k+1)$, што је увек сложен број.

Размотримо сада на који начин се може одредити да ли је дати природан број троугаони или није. Претпоставимо најпре да је дати број m троугаони, тј. да је за неко n,

$$m = T_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Тада је

$$8m + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2,$$

дакле $8m+1$ је квадратни број. Обрнуто, ако је $8m+1$ квадратни број, он свакако мора бити квадрат неког непарног броја, тј. за неко n је

$$8m + 1 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Одатле је

$$m = \frac{4n^2 + 4n}{8} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n,$$

тј. m је троугаони број. Доказали смо да важи тврђење:

Теорема 5. *Природан број m је троугаони ако и само ако је $8m+1$ квадратни број.*

Покажимо још како се за дати троугаони број m може одредити n тако да је $m = T_n$. Из $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ следи $2m = n(n+1)$, па је

$$n^2 < 2m < (n+1)^2,$$

односно

$$n < \sqrt{2m} < n+1.$$

То значи да је n највећи цео број који је мањи од $\sqrt{2m}$. Такав број означава се са $[\sqrt{2m}]$. Дакле, важи

Теорема 6. *Ако је m троугаони број, $m = T_n$, онда је $n = [\sqrt{2m}]$.*

Поменимо на крају да се, слично троугаоним и квадратним бројевима, могу посматрати и бројеви који одговарају многоугловима са више страница. Тако се *петоугаони бројеви*

$$1, \quad 5, \quad 12, \quad 22, \quad 35, \quad \ldots$$

формирају на основу слике 5. Може се доказати да се n-ти петоугаони број изражава као $P_n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$.

Задаци

1. Показати да су бројеви 55, 5050, 500500, ... троугаони.

2. Показати да су бројеви 210, 20100, 2001000, ... троугаони.

3. Да ли су сви бројеви 6, 66, 666, 6666, ... троугаони?

3. Сваки од бројева 1, 2, 3, ..., 20 приказати као збир највише три троугаона броја.

4. Доказати да за сваки природан број $k \geq 2$ важи једнакост

$$T_{3k} = T_{k-1} + T_{2k} + T_{2k}.$$

5. Доказати да за сваки природан број важи једнакост

$$T_{3k+1} = T_k + T_{2k} + T_{2k+1}.$$

6. Доказати да за сваки природан број важи једнакост

$$T_{3k+2} = T_{k+1} + T_{2k+1} + T_{2k+1}$$

7. Доказати да се сваки троугаони број, осим T_1 и T_3, може приказати као збир три (не обавезно различита) троугаона броја.

8. Наћи све троугаоне бројеве мање од 1992 који су уједно и квадратни.

9. Одредити све троцифрене петоугаоне бројеве. Колико има таквих бројева?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија